CK0033 - INTRODUÇÃO A COMPUTAÇÃO
Universidade Federal do Ceará
Daniel Magalhães Nunes, 376163
Francilene da Silva Sales, 485249
2020.2

Trabalho1 - Latex - Escrita do arquivo Trabalho4-LAtex.pdf

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \pm \mu_0$$

Se a variância σ^2 for conhecida, a estatística de teste será a Eq. 8.10:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Quando σ^2 for desconhecida, um procedimento lógico será trocar σ na Eq. 9.10 pelo desvio-padrão, S, da amostra. A estatística de teste é agora

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{8.39}$$

Uma questão lógica é qual o efeito de trocar σ por S na distribuição da estatística T_0? Se n for grande, a resposta a essa questão é "muito pouco"e podemos usar o procedimento de teste baseado na distribuição normal da seção 8.2. Entretanto, n é geralmente pequeno na maioria dos problemas de engenharia e nessa situação uma distribuição diferente tem de ser empregada.

Definição

Faça X_1, X_2, ... , X_n ser uma amostra aleatória para uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2 desconhecida. A grandeza

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

tem uma distribuição t, com $n - 1$ graus de liberdade.

A função densidade da probabilidade t é

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[(k+1)/2\right]}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(k/2\right)} . \frac{1}{\left[(x^2/k)+1\right]^{(k+1)/2}} - \infty < x < \infty \tag{8.40}$$

sendo k o número de graus de liberdade. A média e a variância da distribuição t são iguais a zero e $k/(k-2)$(para $k > 2$), respectivamente.

Várias distribuições t são mostradas na Figura 1.

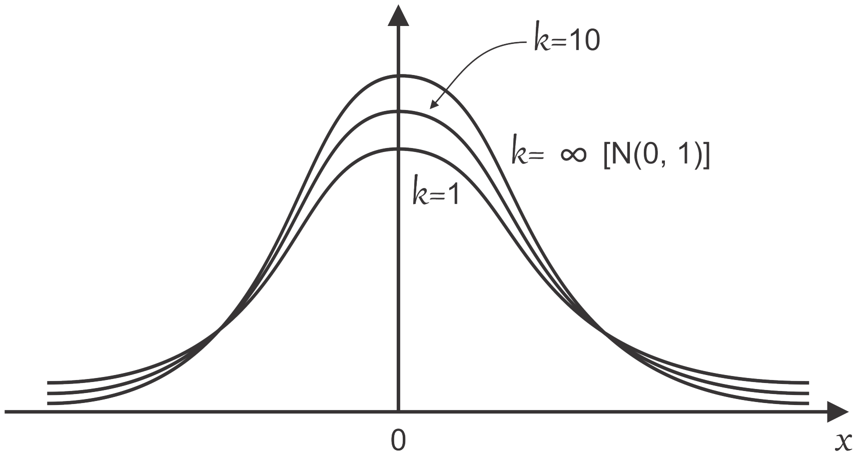

Figura 1: Funções densidade de probabilidade de várias distribuições t.

Agora, pode-se ver, de forma direta, que a distribuição da estatística de teste na Eq.8.39 é t, com $n-1$ graus de liberdade, se a hipótese nula $H_0 : \mu = \mu_0$ for verdadeira. Para testar $H_0 : \mu = \mu_0$, o valor da estatística de teste t_0 na Eq.8.39 é calculado e H_0 é rejeitada se

$$t_0 > t_{\alpha/2,n-1} \tag{8.41a}$$

ou

$$t_0 < -t_{\alpha/2,n-1} \tag{8.41b}$$

em que $t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ e $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$ são pontos $100\alpha/2\%$ superior e inferior da distribuição t, com $n-1$ graus de liberdade, definidos previamente.

Para a hipótese alternativa unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \tag{8.42}$$

Calculamos a estatística de teste t_0, a partir da Eq. 8.9, e rejeitamos

$$t_0 > t_{\alpha,n-1} \tag{8.43}$$

Para a outra hipótese alternativa unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0 \tag{8.44}$$

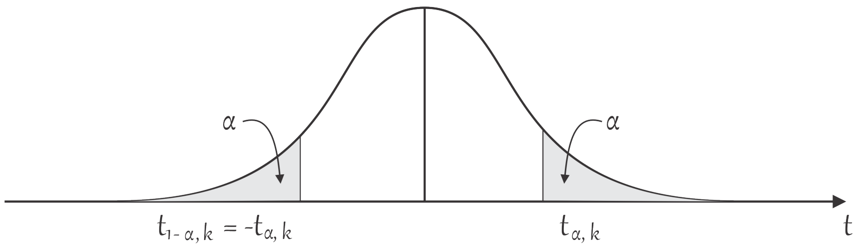

Figura 2: pontos percentuais da distribuições t.

rejeitamos H_0 se

$$t_0 < -t_{\alpha,n-1} \tag{8.45}$$

EXEMPLO 8.8

Um artigo no periódico Materials Engineering (1989, Vol.II, No. 4, pp. 275-281) descreve os resultados de testes de tensão quanto à adesão em 22 corpos de prova de liga U-700. A carga no ponto de falha do corpo de prova é dada a seguir (em MPa):

19,8	18,5	17,6	16,7	15,8
15,4	14,1	13,6	11,9	11,4
11,4	8,8	7,5	15,4	15,4
19,5	14,9	12,7	11,9	11,4
10,1	7,9			

A média amostral é $\overline{x} = 13,71$ e o desvio-padrão é $s = 3,55$. Os dados sugerem que a carga média na falha excede 10MPa? Considere que a carga na falha tenha uma distribuição normal e use $\alpha = 0,05$.

A solução, usando o procedimento de 8 etapas para o teste de hipóteses, é dada a seguir:

1. O parâmetro de interesse é a carga média na falha, μ.
2. H_0:$\mu = 10$
3. H_1:$\mu > 10$. Queremos rejeitar H_0 se a carga média na falha exceder 10MPa.
4. $\alpha = 0,05$.
5. A estatística de teste é
$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$
6. Rejeite H_0 se $t_0 > t_{0,05,21} = 3,55$, $\mu = 10$ e $n = 22$, temos
$$t_0 = \frac{13,71 - 10}{3,55/\sqrt{22}} = 4,90$$
7. Conclusões: Uma vez que $t_0 = 4,90 > 1,721$, rejeitamos H_0 e concluímos, com um nível de 0,05 de significância, que a carga média da falha excede 10 MPa.

8.3.5 Intervalo de Confiança para a Média

É fácil encontrar um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para a média de uma distribuição normal com variância desconhecida, procedendo como fizemos na Seção 8.2.6. Em geral, a distribuição de $T = \left(\overline{X} - \mu\right) / \left(S/\sqrt{n}\right)$ é t, com $n-1$ graus de liberdade. Fazendo $t_{\alpha/2,n-1}$ ser o ponto superior $100\alpha/2\%$ da dsitribuição t, com n-1 graus de liberdade, podemos escrever:
$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}\right)$$
ou
$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\right)$$
Rearranjando essa última equação, resulta em

$$P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}S/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha \qquad (8.49)$$

Isso conduz á seguinte definição de intervalo bilateral de confiança com $100\,(1-\alpha)\,\%$ para μ.

Definição: Intervalo de Confiança para Média de uma Distribuição Normal com Variância Desconhecida

Se $\overline{x}$ e s forem a média e o desvio-padrão de uma amostra aleatória proveniente de uma população normal, com variância desconhecida σ^2, então um intervalo de confiança de $100\,(1-\alpha)\,\%$ para a média μ é dado por

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}S/\sqrt{n} \qquad (8.50)$$

sendo $t_{\alpha/2,n-1}$ o ponto superior $100\alpha/2\%$ da distribuição t, com $n-1$ graus de liberdade.

Intervalos unilaterais de confiança para a média de uma distribuição normal são também de interesse e são fáceis de usar. Use simplesmente somente o limite inferior ou superior apropriado de (8.50) e troque $t_{\alpha/2,n-1}$ por $t_{\alpha,n-1}$.

EXEMPLO 8.10

Reconsidere o problema da tensão quanto à adesão no Exemplo 8.8. Sabemos que $n = 22$, $\overline{x} = 13,71$, $s = 3,55$. Encontraremos um intervalo de confiança de 95% para μ. Da Eq. 8.50, encontramos $\left(t_{\alpha/2,n-1} = t_{0,025;21} = 2,080\right)$:

$$\begin{gathered}\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}s\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}s\sqrt{n}\\ 13,71 - 2,080\,(3,55)\,/\sqrt{22} \leq \mu \leq 13,71 + 2,080\,(3,55)\,/\sqrt{22}\\ 13,71 - 1,57 \leq \mu \leq 13,71 + 1,57\\ 12,14 \leq \mu \leq 15,28\end{gathered}$$

No exemplo 8.8, testamos uma hipótese alternativa unilateral para μ. Alguns engenheiros podem estar interessados em um intervalo inferior de confiança de 95% para a carga média na falha é encontrado usando o limite inferior de confiança de (8.50), com $t_{\alpha/2,n-1}$ trocado por $t_{\alpha,n-1}$, isso conduz a:

$$\begin{aligned}\overline{X} - t_{0,05,n-1}S\sqrt{n} &\leq \mu\\ 13,71 - 1,721\,(3,25)\,/\sqrt{22} &\leq \mu\\ 12,52 &\leq \mu\end{aligned}$$

Logo, podemos dizer com 95% de confiança que a carga média na falha excede 12,52 MPa.