Tarefa 10

$$M1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \to \lambda^3 - 10\lambda^2 + 25\lambda - 18 = 0$$

Os autovalores são as raízes da equação, logo:

$\lambda_1 = 6,64575$

$\lambda_2 = 1,35424$

$\lambda_3 = 2$

Calculando os autovetores

Para $\lambda = 6,64575$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,64575x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,64575x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6,64575x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(5,64575 ; 3,64575 ; 2)$

Para $\lambda = 1,35424$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,35424x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,35424x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,35424x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$(0,35424 ; -1,64575 ; 2)$

Para $\lambda = 2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$(-1 ; 1 ; 1)$

$$M2 = \begin{bmatrix} 1/3 & -\frac{2}{3} & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/3-\lambda & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3-\lambda & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1/3-\lambda & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3-\lambda & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \to -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

Os autovalores são as raizes da equação, logo:

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 1$

Calculando os autovetores

Para $\lambda = -1$

$$\begin{cases} 1/3\, x_1 - 2/3\, x_2 - 2/3\, x_3 = -x_1 \\ -2/3\, x_1 + 1/3\, x_2 - 2/3\, x_3 = -x_2 \\ -2/3\, x_1 - 2/3\, x_2 + 1/3\, x_3 = -x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos:

$(1 ; 1 ; 1)$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = x_1 \\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = x_2 \\ -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(-1, 1, 0)$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = x_1 \\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = x_2 \\ -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(-1, 0, 1)$

$$M3 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

Os autovalores são as raízes da equação, logo:

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 1$

Calculando os autovectores

Para $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 2/3\, x_1 - 1/3\, x_2 - 1/3\, x_3 = 0 \\ -1/3\, x_1 + 2/3\, x_2 - 1/3\, x_3 = 0 \\ -1/3\, x_1 - 1/3\, x_2 + 2/3\, x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(1 ; 1 ; 1)$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = x_1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = x_2 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(-1 ; 1 ; 0)$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = x_1 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = x_2 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(-1 ; 0 ; 1)$

$$M4 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/3-\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1/3-\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

Os autovalores são os raízes da equação, logo:

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 1$

Calculando os autovetores

Para $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 1/3\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/3\, x_3 = 0 \\ 1/3\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/3\, x_3 = 0 \\ 1/3\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/3\, x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(-1; 1; 0)$

Para $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(-1; 0; 1)$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1x_1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$(1; 1; 1)$