1 Cambios en el grupo G

En esta sección estudiaremos cómo se comportan los grupos de cohomología en la siguiente situación: tenemos dos grupos profinitos G y G', un G-módulo A y un G'-módulo A' junto a homomorfismos compatibles:

$$\phi : G' \to G, f : A \to A';$$

es decir, que verifican $f(\phi(\sigma')a) = \sigma' f(a)$. Esto nos permite obtener un homomorfismo de cocadenas $C^n(G, A) \to C^n(G', A')$ dado por $a \mapsto f \circ a \circ \phi$. Claramente esto conmuta con ∂ luego induce un homomorfismo:

$$H^n(G, A) \to H^n(G', A').$$

De hecho, $H^n(G, A)$ es functorial tanto en A como en G, es decir, dados $G'' \to G' \to G$ y $A'' \to A' \to A$, el homomorfismo:

$$H^n(G, A) \to H^n(G'', A'')$$

es la composición de los dos homomorfismos intermedios. Esto nos permite generalizar la Proposición en la que caracterizamos $H^n(G, A)$ como límite directo de los grupos $H^n(G/U, A^U)$, donde U recorría los subgrupos abiertos.

Sea $(G_i)_{i\in I}$ un sistema inverso de grupos profinitos y $(A_i)_{i\in I}$ un sistema directo tal que para todo $i \in I$, A_i es un G_i-módulo y los homomorfismos:

$$G_j \to G_i, A_i \to A_j$$

son compatibles para $i \leq j$. Los grupos $H^n(G_i, A_i)$ forman un sistema directo y tenemos:

Proposición 1. *Si* $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$ *y* $A = \varinjlim_{i\in I} A_i$*, entonces:*

$$H^n(G, A) \cong \varinjlim_{i\in I} H^n(G_i, A_i).$$

Demostración. (Idea) Lo primero es describir la acción de G en A. Sea $\sigma \in G$ y $a = \psi_j(a_j) \in A$. Entonces $\sigma a = \psi_j(\sigma_j a_j)$.

De esta definición deducimos fácilmente que los homomorfismos $G \to G_i$, $A_i \to A$ son compatibles para todo $i \in I$, luego tenemos un homomorfismo de cocadenas $\kappa_i : C^n(G_i, A_i) \to C^n(G, A)$. Por la propiedad universal del límite directo obtenemos un homomorfismo:

$$\kappa : \varinjlim C^n(G_i, A_i) \to C^n(G, A).$$

Este homomorfismo conmuta con ∂, luego es suficiente demostrar que κ es un isomorfismo.

Primero, si tenemos un elemento del límite directo representado por $x_i \in C^n(G_i, A_i)$ que es cero en $C^n(G, A)$, como x_i solo tiene un número finito de imágenes existe un índice $j \geq i$ tal que x_i es cero en $C^n(G_j, A_j)$, luego representa a la clase del cero en el límite directo. Luego κ es inyectivo.

Para ver que es sobreyectiva, sea y la cocadena inhomogénea asociada a un determinado $x \in C^n(G, A)$. Recordamos que las cocadenas factorizan en un cociente $(G/U)^n$ para un subgrupo abierto U adecuado, y además el número finito de valores que toma y se pueden representar en un tiempo finito i. Es decir, podemos escribir y como:

$$G^n \to (G/U)^n \to A_i \to A$$

Es más, $G \to G/U$ factoriza como $G \to G_j \to G/U$ para algún $j \geq i$ lo cual nos da una cocadena $x : G_j^{n+1} \to A_j$ cuya imagen en $C^n(G, A)$ es x. $\square$

Los tres casos más relevantes de homomorfismos $H^n(G, A) \to H^n(G', A')$ más un caso adicional son los siguientes:

Conjugación: dados un subgrupo cerrado H de G, un G-módulo A y un H-módulo B, podemos definir para $\sigma, \tau \in G$:

$$\tau^\sigma = \sigma^{-1}\tau\sigma, {}^\sigma H = \sigma H \sigma^{-1}.$$

Los homomorfismos ${}^\sigma H \to H$ dado por $\tau \mapsto \tau^\sigma$ y $B \to \sigma B$ dado por $b \mapsto \sigma b$ son compatibles e inducen un isomorfismo que llamamos conjugación:

$$\sigma_* : H^n(H, B) \to H^n({}^\sigma H, \sigma B).$$

Además se verifica $1_* = \mathrm{id}$ and $(\sigma\tau)_* = \sigma_*\tau_*$

Inflation: dados un subgrupo normal cerrado H de G y un G-módulo A, tenemos que A^H es un G/H-módulo. La proyección e inclusión canónicas son compatibles e inducen un homomorfismo:

$$inf_G^{G/H} : H^n(G/H, A^H) \to H^n(G, A)$$

llamado inflation, que cuando $H \subseteq F$ son dos subgrupos cerrados y normales verifica:

$$inf_G^{G/H} \circ inf_{G/H}^{G/F} = inf_G^{G/F}.$$

Restricción: para cualquier subgrupo cerrado H de G y cualquier G-módulo A podemos considerar la inclusión $H \hookrightarrow G$ y la id_A, que inducen:

$$res_H^G : H^n(G, A) \to H^n(H, A).$$

Claramente la restricción verifica:

$$res_F^H \circ res_H^G = res_F^G.$$

Correstricción: si H es un subgrupo abierto, podemos definir una familia de funciones norma inducida por la resolución estándar $X^\bullet(G, A)$ (recordatorio: $X^n(G, A) = \mathrm{Map}(G^{n+1}, A)$). Ésta resulta ser una resolución acíclica de A como H-módulo ya que $\mathrm{Ind}_G(X^{n-1}) = X^n$. Es decir:

$$H^n(H, A) = H^n((X^\bullet)^H).$$

Para $n \geq 0$ tenemos la aplicación norma $N_{G/H} : (X^n)^H \to (X^n)^G$ que conmuta con ∂ luego induce un homomorfismo de complejos:

$$N_{G/H} : (X^\bullet)^H \to (X^\bullet)^G$$

que al tomar cohomología nos da los homomorfismos:

$$cor_G^H : H^n(H, A) \to H^n(G, A).$$

Para $n = 0$ se trata de la norma usual. Además como $N_{G/H} \circ N_{H/F} = N_{G/F}$, también se verifica:

$$cor_G^H \circ cor_H^F = cor_G^F.$$

Podemos describir la correstricción explícitamente al nivel de cocadenas. Sea $c = H\sigma \in H \setminus G$ una clase lateral, de la cual elegimos un representante $\overline{c}$. Definimos:

$$cor : C^n(H, A) \to C^n(G, A)$$

dado por:

$$(cor\ x)(\sigma_0, ..., \sigma_n) = \sum_{c \in H \setminus G} \overline{c}^{-1} x(\overline{c}\sigma_0 \overline{c\sigma_0}^{-1}, ..., \overline{c}\sigma_n \overline{c\sigma_n}^{-1}).$$

Es un ejercicio sencillo ver que para $\sigma \in G$ se tiene:

$$\sigma^{-1}(cor\ x)(\sigma\sigma_0, ..., \sigma\sigma_n) = cor\ x$$

luego $cor\ x$ es G-lineal y además conmuta con ∂ luego induce un homomorfismo en la cohomología que coincide con el que hemos nombrado antes.

1.1 Listado de resultados útiles

1. σ_*, inf, res, cor conmutan con el homomorfismo conector δ.

2. σ_* conmuta con inf, res, cor.

3. σ_* es compatible con el producto cup: $\sigma_*(\alpha \cup \beta) = \sigma_*\alpha \cup \sigma_*\beta$.

4. Cuando H es un subgrupo cerrado normal, $inf(\alpha \cup \beta) = (inf\ \alpha) \cup (inf\ \beta)$.

5. Si H es un subgrupo cerrado, $res(\alpha \cup \beta) = (res\ \alpha) \cup (res\ \beta)$.

6. Cuando H es un subgrupo abierto $cor(\alpha \cup res\ \beta) = (cor\ \alpha) \cup \beta$.

7. Si $V \subseteq U \subseteq G$ son cerrados y V es normal:
$$inf_U^{U/V} \circ res_{U/V}^{G/V} = res_U^G \circ inf_G^{G/V}.$$

8. Si además U es abierto:
$$inf_G^{G/V} \circ cor_{G/V}^{U/V} = cor_G^U \circ inf_U^{U/V}.$$

Proposición 2. *Si U es abierto en G, $cor_G^U \circ res_U^G = (G : U)$.*

Demostración. Cuando $n = 0$ recordamos que $H^0(G, A) \simeq A^G$ dado por $x \mapsto x(1)$, luego res se convierte en la inclusión $A^G \hookrightarrow A^U$ y cor en la norma $N_{G/H}$. Pero $x(1)$ es fijo por G luego $N_{G/H} = \sum_{gH}(gH)x(1) = (G : U)x(1)$. El resto de casos se obtiene por dimension shifting.

2 Propiedades básicas

Sea G un grupo profinito. En esta sección recopilaremos algunas propiedades de lo grupos de cohomología que se usarán frecuentemente. Al igual que para el caso finito, definimos $\hat{H}^n(G, A) = H^n(G, A)$ para $n \geq 1$.

Recordamos que $cor_G^U \circ res_U^G = (G : U)$, de lo cual obtenemos:

Proposición 3. *Sea G un grupo profinito y U un subgrupo abierto. Si G es finito o $n \geq 1$, entonces para todo G-módulo A tal que $\hat{H}^n(U, A) = 0$ se cumple:*
$$(G : U)\hat{H}^n(G, A) = 0.$$
En particular, si G es finito, $|G|$ aniquila $\hat{H}^n(G, A)$. Además, si A es finitamente generado $H^n(G, A)$ es finito.

De la proposición anterior obtenemos que para grupos profinitos arbitrarios, $H^n(G, A)$ son grupos de torsión para $n \geq 1$, ya que el día 2 demostramos que $H^n(G, A) = \varinjlim_{U} H^n(G/U, A^U)$, donde U recorre los subgrupos normales de G.

Proposición 4. *Sea G un grupo finito y A un G-módulo. Supongamos que la multiplicación por p es un automorfismo de A para todo primo $p|\#G$. Entonces para todo $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\hat{H}^i(G, A) = 0.$$

Para G profinito, el resultado se cumple para $i \geq 1$ y A es cohomológicamente trivial si:

1. *A es un grupo de torsión cuyo orden (supernatural) es coprimo con $|G|$.*
2. *A es un grupo profinito abeliano cuyo orden es coprimo con $|G|$.*
3. *A es divisible y libre de torsión.*

Demostración. Sea G finito y $m = \#G$, por hipótesis $a \mapsto am$ es un automorfismo luego induce un isomorfismo:

$$m : \hat{H}^i(G, A) \to \hat{H}^i(G, A).$$

Entonces por la proposición anterior tenemos $\hat{H}^i(G, A) = 0$.

Ahora sea G profinito y U un subgrupo abierto normal tal que $m = \#(G/U)$. De nuevo $a \mapsto am$ es un isomorfismo y tomando U-invariantes obtenemos que $m : A^U \to A^U$ es también un isomorfismo. Entonces por lo anterior $H^i(G/U, A^U) = 0$ para todo $i \geq 1$ de lo que se deduce $H^i(G, A)$.

Por último, señalamos que la hipótesis sobre los automorfismos que cumple en los 3 casos mencionados al final. $\square$

Sea H un subgrupo cerrado de G y A un H-módulo. Consideramos el G-módulo $\mathrm{Map}_G^H(A)$ de funciones continuas $x : G \to A$ tal que $x(hg) = hx(g)$. La acción de $\sigma \in G$ viene dada por $x(g) \mapsto (\sigma x)(g) = x(g\sigma)$.

Tenemos además una proyección canónica $\pi : \mathrm{Ind}_G^H(A) \to A$ dada por $x \mapsto x(1)$ que es un homomorfismo de H-módulos y que identifica A isomorficamente con el submódulo $A' = \{x : G \to A | x(g) = 0 \; \forall g \notin H\}$.

Algunos casos particulares:

1. Si H tiene índice finito y $g_1, ..., g_n$ son representantes de las clases laterales de G/H, tenemos que $\mathrm{Ind}_G^H(A) = \bigoplus_{i=1}^n g_i A$.
2. Si A es un G-módulo, $\mathrm{Ind}_G^H(A)$ es simplemente $\mathrm{Map}(G/H, A)$.
3. Si además $H = 1$, esta definición coincide con $\mathrm{Ind}_G(A)$.

El siguiente lema es una generalización del hecho de que $Ind_G(A)$ sean acíclicos y cohomológicamente triviales. Se le conoce como lema de Shapiro:

Proposición 5. *Sea H un subgrupo cerrado de G y A un H-módulo. Entonces para todo $n \geq 0$ tenemos un isomorfismos canónico:*

$$sh : H^n(G, \mathrm{Ind}_G^H(A)) \to H^n(H, A).$$

Demostración. Por definición, $H^n(G, \mathrm{Ind}_G^H(A))$ son los grupos de cohomología del complejo $X^\bullet(G, \mathrm{Ind}_G^H(A))^G$. La proyección π induce homomorfismos $X^n(G, \mathrm{Ind}_G^H(A))^G \to X^n(G, A)^H$.

En realidad esto es un isomorfismo, luego $H^n(G, \mathrm{Ind}_G^H(A))$ es isomorfo a $H^n(X^\bullet(G, A)^H) \simeq H^n(H, A)$ ya que anteriormente resaltamos que $X^\bullet$ es una resolución acíclica de A como H-módulo. $\square$