1 Extensiones de módulos

En esta sección vamos a ver la relación de los grupos de cohomología de dimensión 1 con el problema de clasificar ciertas sucesiones exactas cortas.

Definición 1. Sean $(G, \cdot)$ un grupo finito y $(A, +)$ un grupo abeliano. Decimos que E es una extensión de G por A si existe una sucesión exacta corta de $\mathbb{Z}$-módulos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0.$$

Nótese que podemos identificar A con el subgrupo normal $i(A) \trianglelefteq E$ tal que $G \simeq E/A$. Es decir, E actúa de forma natural en A por conjugación. Esto nos permite definir a su vez una acción de G en A: dado $g \in G$, sea $\overline{g} \in E$ tal que $\pi(\overline{g}) = g$. Entonces:

$$i(g \cdot a) := \overline{g} i(a) \overline{g}^{-1}.$$

Es fácil comprobar que esta acción verifica todos las propiedas que requiere un G-módulo. Esto nos permite definir extensiones de G por el G-módulo A si acompañamos al grupo A de esta estructura.

Definición 2. Dos extensiones son equivalentes si existe un homomorfismo $\phi : E \to E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "\pi'"] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En este caso, uno puede comprobar que ϕ es un isomorfismo.

Definición 3. Dada una sucesión exacta corta de R-módulos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

decimos que *escinde* si existe un homomorfismo $\sigma : C \to B$ tal que $g\sigma = \mathrm{id}_C$. A σ se le denomina una sección.

Por ejemplo la siguiente s.e.c. de grupos abelianos no escinde:

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2 \to 0.$$

Sea E una extensión de G por A escindida. Identificando E con $A \times G$ como conjuntos podemos deducir la operación de grupo:

$$(i(a)\sigma(g))(i(a')\sigma(g')) = i(a)\sigma(g)i(a')\sigma(g)^{-1}\sigma(g)\sigma(g') = i(a)i(ga')\sigma(g)\sigma(g').$$

Es decir, la operación viene dada por:

$$(a, g) \cdot (a', g') = (a + ga', gg'),$$

lo cual corresponde al producto semidirecto $A \rtimes G$. Es decir, que si una extensión de G por A escinde, éste es isomorfa a $A \rtimes G$.

Definición 4. Sean $\sigma, \sigma' : G \to E$ dos secciones. Decimos que son conjugadas si existe $a \in A$ tal que $\sigma(g) = i(a)\sigma'(g)i(a)^{-1}$ para todo $g \in G$.

Proposición 1. *Las extensiones de G por A escindidas corresponden a 1-cociclos inhomogéneos. Es decir, a homomorfismos cruzados $x : G \to A$ tal que $x(gg') = x(g) + gx(g')$.*

Demostración. La sección $G \to A \rtimes G$ tiene que tener la forma $g \mapsto (x(a), g)$ para algún $x : G \to A$. Como se tiene que verificar $\sigma(gg') = \sigma(g)\sigma(g')$ tenemos que:

$$(x(gg'), gg') = (x(g), g) \cdot (x(g'), g') = (x(g) + gx(g'), gg').$$

□

Proposición 2. *Dos homomorfismos cruzados correspondientes a secciones conjugadas difieren en un 1-coborde.*

Demostración. Sea $a \in A$ tal que $\sigma(g)i(a) = i(a)\sigma'(g)$, es decir:

$$(x(g), g) \cdot (a, 1) = (a, 1) \cdot (x(g'), g').$$

Esto implica que $x(g) + ga = a + x'(g)$, luego $x(g) - x'(g) = ga - a$ que es el resultado que queríamos. □

Conclusión: podemos interpretar el grupo $H^1(G, A)$ como las secciones de una extensión escindida de G por A módulo que las secciones sean conjugadas.

2 Otros ejemplos

Teorema 1.