1 Módulos inducidos (continuación)

Proposición 1. *Los G-módulos inducidos $M = \mathrm{Ind}_G(A)$ son cohomológicamente triviales. Si además G es finito, tenemos que $\hat{H}^n(G, M) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideramos las resoluciones estándar $X^\bullet(G, A)$ y $X^\bullet(G, \mathrm{Ind}_G(A))$, es decir aquellas en las que:

$$X^n = \mathrm{Map}(G^{n+1}, A); X^n = \mathrm{Map}(G^{n+1}, \mathrm{Ind}_G(A))$$

respectivamente. Tenemos una aplicación:

$$X^n(G, \mathrm{Ind}_G(A))^G \to X^n(G, A)$$

dada por $x(\sigma_0, ..., \sigma_n) \mapsto y(\sigma_0, ..., \sigma_n) = x(\sigma_0, ..., \sigma_n)(1)$. De hecho, esto un isomorfismo (ejercicio: encontrar el inverso) luego tenemos un isomorfismo de complejos:

$$C^\bullet(G, \mathrm{Ind}_G(A)) \cong X^\bullet(G, A).$$

El primer día demostramos que $X^\bullet(G, A)$ era exacta, luego:

$$H^n(G, \mathrm{Ind}_G(A)) = H^n(C^\bullet(G, \mathrm{Ind}_G(A))) = 0$$

para $n \geq 1$. Si H es un subgrupo cerrado de G, por la proposición anterior podemos escribir $\mathrm{Ind}_G(A) = \mathrm{Ind}_H(B)$ para algún B y entonces:

$$H^n(H, \mathrm{Ind}_G(A)) = 0.$$

Cuando G es finito, se puede repetir el argumento en el complejo extendido $(X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ para obtener $\hat{H}^n(G, \mathrm{Ind}_G(A)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Este resultado nos permite aplicar una técnica conocida como *dimension shifting* que consiste en reducir demostraciones sobre todos los grupos de cohomología a una única dimension. Dado A, definimos A_1 con la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \mathrm{Ind}_G(A) \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0,$$

donde ia es la función constante $ia(\sigma) = a$. Si $H \leq G$ es un subgrupo cerrado, por la proposición anterior tenemos que el homomorfismo:

$$\delta : H^n(H, A_1) \to H^{n+1}(H, A)$$

es sobreyectivo para $n = 0$ y un isomorfismo para $n > 0$. Aplicando el mismo proceso inductivamente para $A_0 = A$ y $A_+ = (A_{p-1})_1$ para $p > 0$ obtenemos:

Proposición 2. *Para $n, p \geq 0$ y cualquier subgrupo H de G, tenemos un homomorfismo canónico:*

$$\delta^p : H^n(H, A_p) \to H^{n+p}(H, A)$$

que es sobreyectivo para $n = 0$ y un isomorfismo para $n > 0$.

Si G es un grupo finito, también podemos obtener un resultado parecido para la cohomología de Tate. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A_{-1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_G(A) \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0,$$

donde $\nu : x \mapsto \sum_{g \in G} x(g)$. Definimos $A_p = (A_{p+1})_{-1}$ para $p < 0$; utilizando que $\mathrm{Ind}_G(A) \cong A \otimes \mathbb{Z}[G]$ es fácil ver que:

$$A_p \cong A \otimes J_G^{\otimes p} \text{ y } A_{-p} \cong I_G^{\otimes p}$$

para $p \geq 0$, donde I_G, J_G vienen dados por las sucesiones:

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{N_G} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow J_G \longrightarrow 0.$$

A ϵ se le denomina *augmentation map*:

$$\epsilon : \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in G} a_\sigma,$$

y al G-módulo I_G se le llama *augmentation ideal*. Como $\hat{H}^n(H, \mathrm{Ind}_G(A)) = 0$, obtenemos isomorfismos canónicos:

$$\hat{H}^n(H, A) \cong \hat{H}^{n-p}(H, A_p)$$

para todo $n, p \in \mathbb{Z}$.

Volviendo a caso general de un grupo profinito G, otra forma de calcular los grupos de cohomología es utilizando resoluciones acíclicas $Y^\bullet$ de A, en cuyo caso $H^n(G, A) \cong H^n(H^0(G, Y^\bullet))$ (ver Proposición 1.3.9).

2 El producto cup

Recordamos que dados dos G-módulos A y B, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ con la acción diagonal también es un G-módulo. Esto nos permite definir para $p, q \geq 0$:

$$C^p(G, A) \times C^q(G, B) \xrightarrow{\cup} C^{p+q}(G, A \otimes B)$$

dado por:

$$(a \cup b)(\sigma_0, ..., \sigma_{p+q}) = a(\sigma_0, ..., \sigma_q) \otimes b(\sigma_p, ..., \sigma_{p+q}).$$

Esta función verifica la siguiente formula:

$$\partial(a \cup b) = (\partial a) \cup b + (-1)^p (a \cup \partial b),$$

que puede verificarse con un simple cálculo. Claramente, si a y b son cociclos entonces $a \cup b$ también es un cociclo. Además, si uno es un cociclo y el otro es un coborde, $a \cup b$ también es un coborde. En definitiva, $\cup$ induce una aplicación bilineal:

$$H^p(G, A) \times H^q(G, B) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G, A \otimes B),$$

dado por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cup \beta$. A esta aplicación le llamamos **producto cup**. También se le llama producto cup a la composición:

$$H^p(G, A) \times H^q(G, B) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G, A \otimes B) \longrightarrow H^{p+q}(G, C),$$

que viene inducida por una aplicación bilineal $A \times B \to C$ que factoriza en el producto tensorial.

Cada vez que definimos una aplicación nueva en la cohomología, tenemos que verificar sus propiedades functoriales y su compatibilidad con las anteriores. Directamente de la definición se sigue que el producto cup conmuta con homomorfismos $A \to A', B \to B'$. A continuación demostramos la compatibilidad con δ:

Proposición 3. *Sean*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \text{ y } 0 \to C' \to C \to C'' \to 0.$$

dos sucesiones exactas de G-módulos. Sea B otro G-módulo y supongamos que existe un emparejamiento $A \times B \to C$ que induce $A' \times B \to C'$ y $A'' \times B \to C''$. Entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
H^p(G,A'') \arrow[d, "\delta"] & \times & H^q(G,B) \arrow[d, "id"] \arrow[r, "\cup"] & H^{p+q}(G,C'') \arrow[d, "\delta"] \\
H^{p+1}(G,A') & \times & H^q(G,B) \arrow[r, "\cup"] & H^{p+q+1}(G,C')
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\delta(\alpha'' \cup \beta) = \delta\alpha'' \cup \beta$.

Análogamente, dadas dos sucesiones exactas:

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0 \text{ y } 0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

con un emparejamiento $A \times B \to C$ que induce $A \times B' \to C'$ y $A \times B'' \to C''$, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
H^p(G,A) \arrow[d, "id"] & \times & H^q(G,B'') \arrow[d, "\delta"] \arrow[r, "\cup"] & H^{p+q}(G,C'') \arrow[d, "(-1)^p\delta"] \\
H^p(G,A) & \times & H^{q+1}(G,B') \arrow[r, "\cup"] & H^{p+q+1}(G,C').
\end{tikzcd}$$

Es decir, $(-1)^p\delta(\alpha \cup \beta'') = \alpha \cup \delta\beta''$.

Demostración. Demostramos la primera igualdad, siendo análoga la demostración de la segunda. Sean $\alpha'' = \overline{a''}, \beta = \overline{b}$ para $a'' \in Z^p(G,A''), b \in Z^q(G,A)$.

El functor $A \mapsto C^p(G,A)$ es exacto, luego podemos elegir $a \in C^p(G,A)$ que esté en la preimagen de a''. Entonces por definición de δ, $\delta\alpha'' \in H^{p+1}(G,A')$ es representado por $\partial a \in Z^{p+1}(G,A')$ (identificando A' con su imagen en A).

A su vez, $\delta(\alpha'' \cup \beta)$ es representado por $\partial(a \cup b) = \partial a \cup b$, ya que $\partial b = 0$. Pasando a cohomología esto significa:

$$\delta(\alpha'' \cup \beta) = \delta\alpha'' \cup \beta.$$

□

Proposición 4. *El producto cup verifica:*

i) $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$.

ii) $\alpha \cup \beta = (-1)^{pq}(\beta \cup \alpha)$.

Demostración. La primera afirmación es una comprobación directa. Para la segunda utilizaremos el método de *dimension shifting* introducido en la Proposición 2. Recordamos que existen homomorfismos sobreyectivos $\delta^n : H^0(G, A_n) \to H^n(G, A)$. Aplicando la proposición anterior p y q veces respectivamente obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(G, A_p) & \times & H^0(G, B_q) & \xrightarrow{\cup} & H^0(G, (A \otimes B_q)_p) & = & H^0(G, A_p \otimes B_q) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta^p} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^p} & & \\
H^p(G, A') & \times & H^0(G, B_q) & \xrightarrow{\cup} & H^p(G, (A \otimes B)_q) & = & H^p(G, A \otimes B_q) \\
\downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^p} & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^{pq}\delta^q} & & \\
H^p(G, A & \times & H^q(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, A \otimes B) & &
\end{array}$$

Para $p = q = 0$ la identidad es trivial. Como las flechas verticales son sobreyectivas, obtenemos $\alpha \cup B = (-1)^{pq}(\beta \cup \alpha)$ para $p, q \geq 0$. □

El producto cup también se puede definir en dimensiones arbitrarias cuando G es finito (es decir, para cohomología de Tate) y de manera que los resultados que hemos demostrado también se cumplan. Esto se puede consultar en la Proposición 1.4.7 del libro.

3 Cambios en el grupo G

En esta sección estudiaremos cómo se comportan los grupos de cohomología en la siguiente situación: tenemos dos grupos profinitos G y G', un G-módulo A y respectivamente un G'-módulo A' junto a homomorfismos:

$$\phi : G' \to G, f : A \to A'$$

que verifican $f(\phi(\sigma')a) = \sigma' f(a)$. Esto nos permite obtener otro homomorfismo $C^n(G, A) \to C^n(G', A')$ dado por $a \mapsto f \circ a \circ \phi$. Claramente esto conmuta con ∂ luego induce un homomorfismo:

$$H^n(G, A) \to H^n(G', A').$$

De hecho, los $H^n(G, A)$ es functorial tanto en A como een G, es decir, dados $G'' \to G' \to G$ y $A'' \to A' \to A$, el homomorfismo:

$$H^n(G, A) \to H^n(G'', A'')$$

es la composición de los dos homomorfismos intermedios.

Proposición 5. *Si* $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$ *y* $A = \varinjlim_{i\in I} A_i$*, entonces:*

$$H^n(G, A) \cong \varinjlim_{i\in I} H^n(G_i, A_i).$$

Los tres casos más relevantes de homomorfismos $H^n(G, A) \to H^n(G', A')$ más un caso adicional son los siguientes:

Conjugación: dados un subgrupo cerrado H de G, un G-módulo A y un H-módulo B, podemos definir para $\sigma, \tau \in G$:

$$\tau^\sigma = \sigma^{-1}\tau\sigma, {}^\sigma H = \sigma H \sigma^{-1}.$$

Los homomorfismos ${}^\sigma H \to H$ dado por $\tau \mapsto \tau^\sigma$ y $B \to \sigma B$ dado por $b \mapsto \sigma b$ son compatibles e inducen un isomorfismo que llamamos conjugación:

$$\sigma_* : H^n(H, B) \to H^n({}^\sigma H, \sigma B).$$

Además se verifica $1_* = \mathrm{id}$ and $(\sigma\tau)_* = \sigma_*\tau_*$

Inflation: dados un subgrupo normal cerrado H de G y un G-módulo A, tenemos que A^H es un G/H-módulo. Las proyecciones e inclusiones canónicas son compatibles e inducen un homomorfismo:

$$inf_G^{G/H} : H^n(G/H, A^H) \to H^n(G, A)$$

llamado inflation, que cuando $H \subseteq F$ son dos subgrupos cerrados y normales verifica:

$$inf_G^{G/H} \circ inf_{G/H}^{G/F} = inf_G^{G/F}.$$

Restricción: para cualquier subgrupo cerrado H de G y cualquier G-módulo A podemos considerar la inclusión $H \hookrightarrow G$ y la id_A, que inducen:

$$res_H^G : H^n(G, A) \to H^n(H, A).$$

Claramente la restricción verifica:

$$res_F^H \circ res_H^G = res_F^G.$$

Correstricción: si H es un subgrupo abierto, podemos definir una familia de funciones norma inducida por la resolución estándar $X^\bullet(G,A)$ que resulta ser una resolución acíclica de A (como H-módulo) ya que $\mathrm{Ind}_G(X^{n-1}) = X^n$. Es decir:

$$H^n(H,A) = H^n((X^\bullet)^H).$$

Entonces para $n \geq 0$ tenemos la aplicación norma $N_{G/H} : (X^n)^H \to (X^n)^G$ que conmuta con ∂ luego induce un homomorfismo de complejos:

$$N_{G/H} : (X^\bullet)^H \to (X^\bullet)^G$$

que al tomar cohomología nos da los homomorfismos canónicos:

$$cor_G^H : H^n(H,A) \to H^n(G,A).$$

Para $n = 0$ se trata de la norma usual. Además como $N_{G/H} \circ N_{H/F} = N_{G/F}$, también se verifica:

$$cor_G^H \circ cor_H^F = cor_G^F.$$

4 Propiedades básicas

Sea G un grupo profinito. En esta sección recopilaremos algunas propiedades de lo grupos de cohomología que se usarán frecuentemente. Al igual que para el caso finito, definimos $\hat{H}^n(G,A) = H^n(G,A)$ para $n \geq 1$.

Recordamos que $cor_G^U \circ res_U^G = (G:U)$, de lo cual obtenemos:

Proposición 6. *Sea G un grupo profinito y U un subgrupo abierto. Si G es finito o $n \geq 1$, entonces para todo G-módulo A tal que $\hat{H}^n(U,A) = 0$ se cumple:*

$$(G:U)\hat{H}^n(G,A) = 0.$$

En particular, si G es finito, el teorema de Lagrange nos dice que $|G|$ aniquila $\hat{H}^n(G,A)$. Además, si A es finitamente generado $H^n(G,A)$ es finito.

De la proposición anterior obtenemos que para grupos profinitos arbitrarios, $H^n(G,A)$ son grupos de torsión para $n \geq 1$, ya que el día 2 demostramos que $H^n(G,A) = \varinjlim_U H^n(G/U, A^U)$, donde U recorre los subgrupos normales de G.

Proposición 7. *Sea G un grupo finito y A un G-módulo. Supongamos que la multiplicación por P es un automorfismo de A para todo primo $p|\#G$. Entonces para todo $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\hat{H}^i(G,A) = 0.$$

Para G profinito, el resultado se cumple para $i \geq 1$ y A es cohomológicamente trivial si:

1. *A es un grupo de torsión cuyo orden (supernatural) es coprimo con $|G|$.*
2. *A es un grupo profinito abeliano cuyo orden es coprimo con $|G|$.*
3. *A es divisible y libre de torsión.*