Día 2

Daniel M.

October 24, 2019

Salvo que se indique todo lo contrario G será un grupo profinito y todos los G-módulos vendrán equipados con la topología discreta.

Definición 1. Sea $(I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y dirigido. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en una categoría $\mathcal{A}$ y sea $\{f_{ij}\}_{i \leq j}$ una familia de morfismos que verifican $f_{ij} \in \mathrm{Mor}(A_i, A_j)$, $f_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ y $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ para $i \leq j \leq k$. Al par $((A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j})$ le llamamos un **sistema directo**.

Un **límite directo** es un par $(X, (\phi_i)_{i \in I})$ donde X es un objeto en la categoría, $\phi_i : X_i \to X$ verifican $\phi_i = \phi_j \circ f_{ij}$ para $i \leq j$ y además para cualquier otro $(Y, (\psi_i)_{i \in I})$ con la misma propiedad hay un único morfismo $u : X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

A una propiedad de ese tipo se le denomina una *propiedad universal.* La notación para el límite directo es $X = \varinjlim A_i$.

Proposición 1. *El límite directo es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Con la misma notación que antes, sean $(X, (\phi_i)_{i \in I})$ y $(Y, (\psi_i)_{i \in I})$ dos límites inversos. Por la propiedad universal, sabemos que existen dos morfismos únicos $u : X \to Y$ y $v : Y \to X$ tal que $\phi_i = v \circ \psi_i$ y $\psi_i = u \circ \phi_i$.

Combinando ambas obtenemos $\phi_i = v \circ u \circ \phi_i$ y también $\psi_i = u \circ v \circ \psi_i$. Como u, v son únicas y $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y$ satisfacen las identidades, deducimos que $u \circ v = \mathrm{id}_X$ y $v \circ U = \mathrm{id}_Y$ de lo que deducimos que son isomorfismos. $\square$

Proposición 2. *La categoría de R-módulos tiene límites directos*

A continuación podemos estudiar cómo los grupos de cohomología $H^n(G, A)$ de un grupo profinito G con coeficientes en A se construyen a partir la cohomología de cocientes los G/U, donde U es un subgrupo normal y abierto.

Dados dos subgrupos normales y abiertos $V \subseteq U$ de G, las proyecciones canónicas:

$$G^{n+1} \to (G/V)^{n+1} \to (G/U)^{n+1}$$

inducen homomorfismos de complejos de cocadenas:

$$C^\bullet(G/U, A^U) \to C^\bullet(G/V, A^V) \to C^\bullet(G, A).$$

De aquí obtenemos homomorfismos:

$$H^n(G/U, A^U) \to H^n(G/V, A^V) \to H^n(G, A).$$

Es decir, los grupos $H^n(G/U, A^U)$ donde U recorre subgrupos normales y abiertos forman un sistema directo con un homomorfismo canónico:

$$\varinjlim_U H^n(G/U, A^U) \to H^n(G, A).$$

Proposición 3. *El homomorfismo canónico es en realidad un isomorfismo:*

$$\varinjlim_U H^n(G/U, A^U) \xrightarrow{\sim} H^n(G, A).$$

Demostración. El homomorfismo de complejos:

$$\varinjlim_U C^\bullet(G/U, A^U) \to C^\bullet(G, A)$$

es en realidad un isomorfismo. La inyectividad se sigue de la inyectividad de los homomorfismos $C^\bullet(G/U, A^U) \to C^\bullet(G, A)$.

Para ver que es sobreyectivo, sea $x : G^{n+1} \to A$ una cocadena de G. Como A tiene la topología discreta x es localmente constante. Afirmo que podemos encontrar un subgrupo normal y abierto H_0 de G tal que x es constante en las clases laterales de H_0^{n+1} en G^{n+1}.

Por compacidad, sea $\operatorname{im} x = \{a_1, ..., a_n\}$ y sean $U_i = x^{-1}(a_i)$. Como los U_i son abiertos, los podemos escribir como una unión de clases laterales $U_i = \cup g_i H_i$, donde los H_i son abiertos y normales. Como además U_i es cerrado y por tanto compacto, la unión es finita y de la forma $g_i H$ si tomamos H la interseccion de los correspondientes H_i. Tomando un H_0 suficientemente pequeño logramos escribir todos los $x^{-1}(a_i)$ como una unión de clases laterales de H_0 y obtenemos que x es constante en ellas. Todo esto lo podemos hacer por que al ser G profinito hay una base fundamental de entornos del elemento neutro formada por subgrupos abiertos. Además tenemos que para $h \in H_0$:

$$x(\sigma_0, ..., \sigma_n) = x(h\sigma_0, ..., h\sigma_n) = hx(\sigma_0, ..., \sigma_n),$$

luego x factoriza de la siguiente manera:

$$G^{n+1} \longrightarrow (G/H_0)^{n+1} \xrightarrow{x_{H_0}} A^{H_0},$$

y x es la imagen de la clase de x_{H_0} en $\varinjlim_U C^n(G/U, A^U)$. Luego efectivamente es sobreyectivo. Para terminar utilizamos que $\varinjlim$ es un un functor exacto:

$$\begin{aligned} \varinjlim_U H^n(G/U, A^U) &\simeq H^n \varinjlim_U C^\bullet(G/U, A^U) \\ &\simeq H^n(C^\bullet(G, A)) \\ &= H^n(G, A). \end{aligned}$$

□

1 Cohomología de Tate para grupos finitos

Sea G un grupo finito en esta sección. Denotamos por $N_G : A \to A$ la función norma $N_G a = \sum_{g \in G} ga$ y sean:

$$\hat{H}^n(G, A) = \begin{cases} A^G/N_G A, & \text{para } n = 0 \\ H^n(G, A) & \text{para } n \geq 1, \end{cases}$$

a los que denominamos **grupos modificados de cohomología**. Además de A^G podemos definir un módulo de elementos cofijos $A_G = A/I_G A$, donde $I_G A$ es el subgrupo de A generado por elementos de la forma $ga - a, a \in A$ y $g \in G$. A_G es el cociente más grande de A en el que G actúa trivialmente. Sea $H_0(G, A) = A_G$.

Nótese que siempre que G sea finito, $I_G A \subseteq \ker N_G = {}_{N_G}A$, luego podemos denotar:

$$\hat{H}_0(G,A) = {}_{N_G}A/I_G A.$$

Todo esto nos da una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \hat{H}_0(G,A) \longrightarrow H_0(G,A) \xrightarrow{N_G} H^0(G,A) \longrightarrow \hat{H}^0(G,A) \longrightarrow 0,$$

donde $N_G : H_0(G,A) \to H^0(G,A)$ es inducida por N_G. El primer y el último término que no son cero son respectivamente el núcleo y conúcleo de N_G.

A continuación vamos a extender nuestros grupos de cohomología a todo $n \in \mathbb{Z}$. Para $n \geq 0$, sea $\mathbb{Z}[G^{n+1}]$ el grupo abeliano libre generado por elementos de G^{n+1}, que tiene estructura de G-módulo. Consideremos la **resolución estándar completa** de $\mathbb{Z}$:

$$\cdot \longrightarrow X_2 \xrightarrow{\partial_2} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} X_{-2} \longrightarrow \cdots$$

donde $X_n = X_{-1-n} = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$ para $n \geq 0$ y los homomorfismos para $n > 0$ son:

$$\partial_n(\sigma_0, ..., \sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma_0, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_n)$$

$$\partial_{-n}(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}) = \sum_{\tau \in G} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma_0, ..., \sigma_{i-1}, \tau, \sigma_{i+1}, ..., \sigma_{n+1}).$$

A su vez definimos $\partial_0 : X_0 \to X_{-1}$ como:

$$\partial_0(\sigma_0) = \sum_{\tau \in G} \tau.$$

A partir de esto, la **resolución estándar completa** de A se define tomando $X^\bullet(X_\bullet, A), \partial^n = \mathrm{Hom}(\partial_n, A)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Uno puede demostrar que el complejo $X^\bullet$ es exacto porque la identidad es null-homotópica.

Definición 2. Para $n \in \mathbb{Z}$ definimos el enésimo grupo de cohomología de Tate $\hat{H}(G,A)$ como el grupo de cohomología del complejo:

$$\hat{C}^\bullet(G,A) = ((X^n)^G)_{n \in \mathbb{Z}}$$

en el término n:

$$\hat{H}^n(G,A) = H^n(\hat{C}^\bullet(G,A)).$$

Obsérvese que para $n \geq 0$ obtenemos los grupos d e cohomología modificados de antes y que para $n = -1$ obtenemos $\hat{H}_0(G, A)$. Las dimensiones negativas corresponden a la homología, algo que veremos más adelante.

2 Módulos inducidos

Dada una sucesión exacta corta:

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

con su correspondiente sucesión larga, es importante observar que si se verifica $H^n(G, B) = H^{n+1}(G, B) = 0$ para algún n entonces:

$$\delta : H^n(G, C) \to H^{n+1}(G, A)$$

es un isomorfismo, lo cual motiva la siguiente definición:

Definición 3. Un G-módulo A es **acíclico** si $H^n(G, A) = 0$ para todo $n > 0$. A es **cohomológicamente trivial** si $H^n(H, A) = 0$ para todos los subgrupos cerrados $H \leq G$ y para todo $n > 0$.

Un ejemplo importante de módulos cohomológicamente triviales son los G-módulos inducidos:

$$\mathrm{Ind}_G(A) = \mathrm{Map}(G, A),$$

es decir las funciones continuas $x : G \to A$ con la acción dada por $(\sigma x)(g) = \sigma x(\sigma^{-1} g)$. Cuando G es finito tenemos un isomorfismo:

$$\mathrm{Ind}_G(A) \cong A \otimes \mathbb{Z}[G]$$

dado por $x \mapsto \sum_{g \in G} x(g) \otimes g$.

Proposición 4. *i) El functor $A \mapsto \mathrm{Ind}_G(A)$ es exacto.*

ii) Un G-módulo inducido A también es un H-módulo inducido para todo subgrupo cerrado $H \leq G$. Además si H es normal, A^H es un G/H-módulo inducido.

iii) $A \otimes B$ es G-inducido si uno de los dos lo es. Lo mismo es cierto para $\mathrm{Hom}(A, B)$ si G es finito.

iv) Si U recorre los subgrupos normales abiertos de G, tenemos:

$$\mathrm{Ind}_G(A) = \varinjlim_{U} \mathrm{Ind}_{G/U}(A^U).$$

Como comentábamos, el resultado más importante de esta sección sobre módulos inducidos es el siguiente:

Proposición 5. *Los G-módulos inducidos $M = \mathrm{Ind}_G(A)$ son cohomológicamente triviales. Si además G es finito, tenemos que $\hat{H}^n(G, M) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideramos las resoluciones estándar $X^\bullet(G, A)$ y $X^\bullet(G, \mathrm{Ind}_G(A))$, es decir aquellas en las que:

$$X^n = \mathrm{Map}(G^{n+1}, A); X^n = \mathrm{Map}(G^{n+1}, \mathrm{Ind}_G(A))$$

respectivamente. Tenemos una aplicación:

$$X^n(G, \mathrm{Ind}_G(A))^G \to X^n(G, A)$$

dada por $x(\sigma_0, ..., \sigma_n) \mapsto y(\sigma_0, ..., \sigma_n) = x(\sigma_0, ..., \sigma_n)(1)$. De hecho, esto un isomorfismo (ejercicio: encontrar el inverso) luego tenemos un isomorfismo de complejos:

$$C^\bullet(G, \mathrm{Ind}_G(A)) \cong X^\bullet(G, A).$$

El primer día demostramos que $X^\bullet(G, A)$ era exacta, luego:

$$H^n(G, \mathrm{Ind}_G(A)) = H^n(C^\bullet(G, \mathrm{Ind}_G(A))) = 0$$

para $n \geq 1$. Si H es un subgrupo cerrado de G, por la proposición anterior podemos escribir $\mathrm{Ind}_G(A) = \mathrm{Ind}_H(B)$ para algún B y entonces:

$$H^n(H, \mathrm{Ind}_G(A)) = 0.$$

Cuando G es finito, se puede repetir el argumento en el complejo extendido $(X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ para obtener $\hat{H}^n(G, \mathrm{Ind}_G(A)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Este resultado nos permite aplicar una técnica conocida como *dimension shifting* que consiste en reducir demostraciones sobre todos los grupos de cohomología a una única dimension. Dado A, definimos A_1 con la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \mathrm{Ind}_G(A) \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0,$$

donde ia es la función constante $ia(\sigma) = a$. Si $H \leq G$ es un subgrupo cerrado, por la proposición anterior tenemos que el homomorfismo:

$$\delta : H^n(H, A_1) \to H^{n+1}(H, A)$$

es sobreyectivo para $n = 0$ y un isomorfismo para $n > 0$. Aplicando el mismo proceso inductivamente para $A_0 = A$ y $A_+ = (A_{p-1})_1$ para $p > 0$ obtenemos:

Proposición 6. *Para $n, p \geq 0$ y cualquier subgrupo H de G, tenemos un homomorfismo canónico:*

$$\delta^p : H^n(H, A_p) \to H^{n+p}(H, A)$$

que es sobreyectivo para $n = 0$ y un isomorfismo para $n > 0$.

Si G es un grupo finito, también podemos obtener un resultado parecido para la cohomología de Tate. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A_{-1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_G(A) \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0,$$

donde $\nu : x \mapsto \sum_{g \in G} x(g)$. Definimos $A_p = (A_{p+1})_{-1}$ para $p < 0$; utilizando que $\mathrm{Ind}_G(A) \cong A \otimes \mathbb{Z}[G]$ es fácil ver que:

$$A_p \cong A \otimes J_G^{\otimes p} \text{ y } A_{-p} \cong I_G^{\otimes p}$$

para $p \geq 0$, donde I_G, J_G vienen dados por las sucesiones:

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{N_G} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow J_G \longrightarrow 0.$$

A ϵ se le denomina *augmentation map*:

$$\epsilon : \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in G} a_\sigma,$$

y al G-módulo I_G se le llama *augmentation ideal*. Como $\hat{H}^n(H, \mathrm{Ind}_G(A)) = 0$, obtenemos isomorfismos canónicos:

$$\hat{H}^n(H, A) \cong \hat{H}^{n-p}(H, A_p)$$

para todo $n, p \in \mathbb{Z}$.

Volviendo a caso general de un grupo profinito G, otra forma de calcular los grupos de cohomología es utilizando resoluciones acíclicas $Y^\bullet$ de A, en cuyo caso $H^n(G, A) \cong H^n(H^0(G, Y^\bullet))$ (ver Proposición 1.3.9).

3 El producto cup

Recordamos que dados dos G-módulos A y B, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ con la acción diagonal también es un G-módulo. Esto nos permite definir para $p, q \geq 0$:

$$C^p(G, A) \times C^q(G, B) \xrightarrow{\cup} C^{p+q}(G, A \otimes B)$$

dado por:

$$(a \cup b)(\sigma_0, ..., \sigma_{p+q}) = a(\sigma_0, ..., \sigma_q) \otimes b(\sigma_p, ..., \sigma_{p+q}).$$

Esta función verifica la siguiente formula:

$$\partial(a \cup b) = (\partial a) \cup b + (-1)^p (a \cup \partial b),$$

que puede verificarse con un simple cálculo. Claramente, si a y b son cociclos entonces $a \cup b$ también es un cociclo. Además, si uno es un cociclo y el otro es un coborde, $a \cup b$ también es un coborde. En definitiva, $\cup$ induce una aplicación bilineal:

$$H^p(G, A) \times H^q(G, B) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G, A \otimes B),$$

dado por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cup \beta$. A esta aplicación le llamamos **producto cup**. También se le llama producto cup a la composición:

$$H^p(G, A) \times H^q(G, B) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G, A \otimes B) \longrightarrow H^{p+q}(G, C),$$

que viene inducida por una aplicación bilineal $A \times B \to C$ que factoriza en el producto tensorial.

Cada vez que definimos una aplicación nueva en la cohomología, tenemos que verificar sus propiedades functoriales y su compatibilidad con las anteriores. Directamente de la definición se sigue que el producto cup conmuta con homomorfismos $A \to A', B \to B'$. A continuación demostramos la compatibilidad con δ:

Proposición 7. *Sean*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \text{ } y \text{ } 0 \to C' \to C \to C'' \to 0.$$

dos sucesiones exactas de G-módulos. Sea B otro G-módulo y supongamos que existe un emparejamiento $A \times B \to C$ que induce $A' \times B \to C'$ y $A'' \times B \to C''$. Entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} H^p(G,A'') & \times & H^q(G,B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G,C'') \\ \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ H^{p+1}(G,A') & \times & H^q(G,B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G,C') \end{array}$$

Es decir, $\delta(\alpha'' \cup \beta) = \delta\alpha'' \cup \beta$.

Análogamente, dadas dos sucesiones exactas:

$$0 \to B' \to B \to B'' \to 0 \text{ y } 0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

con un emparejamiento $A \times B \to C$ que induce $A \times B' \to C'$ y $A \times B'' \to C''$, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} H^p(G,A) & \times & H^q(G,B'') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G,C'') \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle(-1)^p\delta} \\ H^p(G,A) & \times & H^{q+1}(G,B') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G,C'). \end{array}$$

Es decir, $(-1)^p\delta(\alpha \cup \beta'') = \alpha \cup \delta\beta''$.

Demostración. Demostramos la primera igualdad, siendo análoga la demostración de la segunda. Sean $\alpha'' = \overline{a''}, \beta = \overline{b}$ para $a'' \in Z^p(G,A''), b \in Z^q(G,A)$.

El functor $A \mapsto C^p(G,A)$ es exacto, luego podemos elegir $a \in C^p(G,A)$ que esté en la preimagen de a''. Entonces por definición de δ, $\delta\alpha'' \in H^{p+1}(G,A')$ es representado por $\partial a \in Z^{p+1}(G,A')$ (identificando A' con su imagen en A).

A su vez, $\delta(\alpha'' \cup \beta)$ es representado por $\partial(a \cup b) = \partial a \cup b$, ya que $\partial b = 0$. Pasando a cohomología esto significa:

$$\delta(\alpha'' \cup \beta) = \delta\alpha'' \cup \beta.$$

□

Proposición 8. *El producto cup verifica:*

i) $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$.

ii) $\alpha \cup \beta = (-1)^{pq}(\beta \cup \alpha)$.

Demostración. La primera afirmación es una comprobación directa. Para la segunda utilizaremos el método de *dimension shifting* introducido en la Proposición 6. Recordamos que existen homomorfismos sobreyectivos $\delta^n : H^0(G, A_n) \to H^n(G, A)$. Aplicando la proposición anterior p y q veces respectivamente obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(G, A_p) & \times & H^0(G, B_q) & \xrightarrow{\cup} & H^0(G, (A \otimes B_q)_p) & = & H^0(G, A_p \otimes B_q) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta^p} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^p} & & \\
H^p(G, A') & \times & H^0(G, B_q) & \xrightarrow{\cup} & H^p(G, (A \otimes B)_q) & = & H^p(G, A \otimes B_q) \\
\downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^p} & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^{pq}\delta^q} & & \\
H^p(G, A & \times & H^q(G, B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, A \otimes B) & &
\end{array}$$

Para $p = q = 0$ la identidad es trivial. Como las flechas verticales son sobreyectivas, obtenemos $\alpha \cup B = (-1)^{pq}(\beta \cup \alpha)$ para $p, q \geq 0$. □

El producto cup también se puede definir en dimensiones arbitrarias cuando G es finito (es decir, para cohomología de Tate) y de manera que los resultados que hemos demostrado también se cumplan. Esto se puede consultar en la Proposición 1.4.7 del libro.

4 Cambios en el grupo G

En esta sección estudiaremos cómo se comportan los grupos de cohomología en la siguiente situación: tenemos dos grupos profinitos G y G', un G-módulo A y respectivamente un G'-módulo A' junto a homomorfismos:

$$\phi : G' \to G, f : A \to A'$$

que verifican $f(\phi(\sigma')a) = \sigma' f(a)$. Esto nos permite obtener otro homomorfismo $C^n(G, A) \to C^n(G', A')$ dado por $a \mapsto f \circ a \circ \phi$. Claramente esto conmuta con ∂ luego induce un homomorfismo:

$$H^n(G, A) \to H^n(G', A').$$

De hecho, los $H^n(G, A)$ es functorial tanto en A como een G, es decir, dados $G'' \to G' \to G$ y $A'' \to A' \to A$, el homomorfismo:

$$H^n(G, A) \to H^n(G'', A'')$$

es la composición de los dos homomorfismos intermedios. Esto nos permite generalizar la Proposición 3.

Proposición 9. *Si* $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$ *y* $A = \varinjlim_{i \in I} A_i$, *entonces:*

$$H^n(G, A) \cong \varinjlim_{i \in I} H^n(G_i, A_i).$$

Demostración. La acción de G sobre A se define de la siguiente manera: