Cópulas Arquimedeanas

Nicholas Eugenio
Yang Ting Ju

IME - USP

Tópicos

- Função Geradora;
- Cópulas Arquimedeanas Comuns;
- Exemplos;
- Medidas de Dependência;
- Curvas de Nível;
- Família Bi-Paramétrica.

Introdução e Objetivo

- Sejam X e Y V.A.s contínuas com função de distribuição conjunta $H(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ e marginais $F(x) = P(X \leq x)$ e $G(y) = P(Y \leq y)$, respectivamente;
- Se X e Y são independentes, então $H(x,y) = F(x)G(y), \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$;
- Para uma função λ positiva no intervalo $(0,1)$ é possível escrever $\lambda(H(x,y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$.
- Exemplo: membros da família Ali-Mikhalil-Haq que satisfazem a relação

$$\frac{1-H(x,y)}{H(x,y)} = \frac{1-F(x)}{F(x)} + \frac{1-G(y)}{G(y)} + (1-\theta)\left(\frac{1-F(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{1-G(y)}{G(y)}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + (1-\theta)\frac{1-H(x,y)}{H(x,y)} = \left[1 + (1-\theta)\left(\frac{1-F(x)}{F(x)}\right)\right]\left[1 + (1-\theta)\left(\frac{1-G(y)}{G(y)}\right)\right],$$

em que $\lambda(t) = \dfrac{t + (1-\theta)(1-t)}{t}$.

Introdução e Objetivo

- Sejam X e Y V.A.s contínuas com função de distribuição conjunta $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ e marginais $F(x) = P(X \leq x)$ e $G(y) = P(Y \leq y)$, respectivamente;
- Se X e Y são independentes, então $H(x, y) = F(x)G(y), \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$;
- Para uma função λ positiva no intervalo $(0, 1)$ é possível escrever $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$.
- Exemplo: membros da família Ali-Mikhalil-Haq que satisfazem a relação

$$\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)} + \frac{1 - G(y)}{G(y)} + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + (1 - \theta)\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\right]\left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)\right],$$

em que $\lambda(t) = \dfrac{t + (1 - \theta)(1 - t)}{t}$.

Introdução e Objetivo

- Sejam X e Y V.A.s contínuas com função de distribuição conjunta $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ e marginais $F(x) = P(X \leq x)$ e $G(y) = P(Y \leq y)$, respectivamente;
- Se X e Y são independentes, então $H(x, y) = F(x)G(y), \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$;
- Para uma função λ positiva no intervalo $(0, 1)$ é possível escrever $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$.
- Exemplo: membros da família Ali-Mikhalil-Haq que satisfazem a relação

$$\frac{1 - H(x,y)}{H(x,y)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)} + \frac{1 - G(y)}{G(y)} + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + (1 - \theta)\frac{1 - H(x,y)}{H(x,y)} = \left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\right]\left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)\right],$$

em que $\lambda(t) = \dfrac{t + (1 - \theta)(1 - t)}{t}$.

Introdução e Objetivo

- Sejam X e Y V.A.s contínuas com função de distribuição conjunta $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ e marginais $F(x) = P(X \leq x)$ e $G(y) = P(Y \leq y)$, respectivamente;
- Se X e Y são independentes, então $H(x, y) = F(x)G(y), \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$;
- Para uma função λ positiva no intervalo $(0, 1)$ é possível escrever $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$.
- Exemplo: membros da família Ali-Mikhalil-Haq que satisfazem a relação

$$\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)} + \frac{1 - G(y)}{G(y)} + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + (1 - \theta)\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\right]\left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)\right],$$

em que $\lambda(t) = \dfrac{t + (1 - \theta)(1 - t)}{t}$.

Introdução e Objetivo

- Sejam X e Y V.A.s contínuas com função de distribuição conjunta $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ e marginais $F(x) = P(X \leq x)$ e $G(y) = P(Y \leq y)$, respectivamente;
- Se X e Y são independentes, então $H(x, y) = F(x)G(y), \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$;
- Para uma função λ positiva no intervalo $(0, 1)$ é possível escrever $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$.
- Exemplo: membros da família Ali-Mikhalil-Haq que satisfazem a relação

$$\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)} + \frac{1 - G(y)}{G(y)} + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1 + (1 - \theta)\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - F(x)}{F(x)}\right)\right]\left[1 + (1 - \theta)\left(\frac{1 - G(y)}{G(y)}\right)\right],$$

em que $\lambda(t) = \dfrac{t + (1 - \theta)(1 - t)}{t}$.

Motivação e Objetivo

- Definindo $\phi(t) = -\ln[\lambda(t)]$ é possível reescrever $H(x, y)$ como uma soma de funções das marginais:

$$\phi(H(x, y)) = \phi(F(x)) + \phi(G(y))$$

- Equivalentemente, utilizando o Teorema de Sklar $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$, tem-se:

$$\phi(C(u, v)) = \phi(u) + \phi(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v)),$$

em que $\phi^{[-1]}$ é a função pseudo-inversa de ϕ.

Motivação e Objetivo

- Definindo $\phi(t) = -\ln[\lambda(t)]$ é possível reescrever $H(x, y)$ como uma soma de funções das marginais:

$$\phi(H(x, y)) = \phi(F(x)) + \phi(G(y))$$

- Equivalentemente, utilizando o Teorema de Sklar $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$, tem-se:

$$\phi(C(u, v)) = \phi(u) + \phi(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v)),$$

em que $\phi^{[-1]}$ é a função pseudo-inversa de ϕ.

Motivação e Objetivo

- Definindo $\phi(t) = -\ln[\lambda(t)]$ é possível reescrever $H(x, y)$ como uma soma de funções das marginais:

$$\phi(H(x, y)) = \phi(F(x)) + \phi(G(y))$$

- Equivalentemente, utilizando o Teorema de Sklar $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$, tem-se:

$$\phi(C(u, v)) = \phi(u) + \phi(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v)),$$

em que $\phi^{[-1]}$ é a função pseudo-inversa de ϕ.

Motivação e Objetivo

- Definindo $\phi(t) = -\ln[\lambda(t)]$ é possível reescrever $H(x, y)$ como uma soma de funções das marginais:

$$\phi(H(x, y)) = \phi(F(x)) + \phi(G(y))$$

- Equivalentemente, utilizando o Teorema de Sklar $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$, tem-se:

$$\phi(C(u, v)) = \phi(u) + \phi(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v)),$$

em que $\phi^{[-1]}$ é a função pseudo-inversa de ϕ.

Propriedades de ϕ e $\phi^{[-1]}$

- ϕ é uma função contínua, estritamente decrescente de $\mathrm{I} = [0, 1]$ em $[0, \infty]$ tal que $\phi(1) = 0$;
- $\phi^{[-1]}$ é uma função de $[0, \infty]$ em $\mathrm{I} = [0, 1]$ dada por

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases};$$

- $\phi^{[-1]}$ é contínua, não crescente em $[0, \infty]$ e estritamente decrescente em $[0, \phi(0)]$. Além disso, $\phi^{[-1]}(\phi(t)) = t$ para todo $t \in \mathrm{I}$:

$$\phi(\phi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0), & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$
$$= min(t, \phi(0));$$

- Se em $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ as funções ϕ e $\phi^{[-1]}$ satisfizerem as propriedades descritas acima (com ϕ convexa) e se $C(u, v)$ for uma função de distribuição conjunta com marginais uniformes, então C é uma cópula.

Propriedades de ϕ e $\phi^{[-1]}$

- ϕ é uma função contínua, estritamente decrescente de $\mathrm{I} = [0, 1]$ em $[0, \infty]$ tal que $\phi(1) = 0$;
- $\phi^{[-1]}$ é uma função de $[0, \infty]$ em $\mathrm{I} = [0, 1]$ dada por

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases};$$

- $\phi^{[-1]}$ é contínua, não crescente em $[0, \infty]$ e estritamente decrescente em $[0, \phi(0)]$. Além disso, $\phi^{[-1]}(\phi(t)) = t$ para todo $t \in \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} \phi(\phi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0), & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \\ &= min(t, \phi(0)); \end{aligned}$$

- Se em $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ as funções ϕ e $\phi^{[-1]}$ satisfizerem as propriedades descritas acima (com ϕ convexa) e se $C(u, v)$ for uma função de distribuição conjunta com marginais uniformes, então C é uma cópula.

Propriedades de ϕ e $\phi^{[-1]}$

- ϕ é uma função contínua, estritamente decrescente de $\mathrm{I} = [0, 1]$ em $[0, \infty]$ tal que $\phi(1) = 0$;
- $\phi^{[-1]}$ é uma função de $[0, \infty]$ em $\mathrm{I} = [0, 1]$ dada por

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases};$$

- $\phi^{[-1]}$ é contínua, não crescente em $[0, \infty]$ e estritamente decrescente em $[0, \phi(0)]$. Além disso, $\phi^{[-1]}(\phi(t)) = t$ para todo $t \in \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} \phi(\phi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0), & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \\ &= min(t, \phi(0)); \end{aligned}$$

- Se em $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ as funções ϕ e $\phi^{[-1]}$ satisfizerem as propriedades descritas acima (com ϕ convexa) e se $C(u, v)$ for uma função de distribuição conjunta com marginais uniformes, então C é uma cópula.

Propriedades de ϕ e $\phi^{[-1]}$

- ϕ é uma função contínua, estritamente decrescente de $\mathrm{I} = [0, 1]$ em $[0, \infty]$ tal que $\phi(1) = 0$;
- $\phi^{[-1]}$ é uma função de $[0, \infty]$ em $\mathrm{I} = [0, 1]$ dada por

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases};$$

- $\phi^{[-1]}$ é contínua, não crescente em $[0, \infty]$ e estritamente decrescente em $[0, \phi(0)]$. Além disso, $\phi^{[-1]}(\phi(t)) = t$ para todo $t \in \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} \phi(\phi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0), & \text{se } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \\ &= min(t, \phi(0)); \end{aligned}$$

- Se em $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ as funções ϕ e $\phi^{[-1]}$ satisfizerem as propriedades descritas acima (com ϕ convexa) e se $C(u, v)$ for uma função de distribuição conjunta com marginais uniformes, então C é uma cópula.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u,v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u,v) = -\dfrac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u,v) = C(v,u)\ \forall\ u, v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u,v),w) = C(u, C(v,w))\ \forall\ u, v, w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u,u) < u,\ \forall\ u \in (0,1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u,v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u,v) = -\frac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u,v) = C(v,u)\ \forall\ u,v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u,v),w) = C(u, C(v,w))\ \forall\ u,v,w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u,u) < u,\ \forall\ u \in (0,1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u, v) = -\frac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u, v) = C(v, u) \ \forall \ u, v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \ \forall \ u, v, w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u, u) < u, \ \forall \ u \in (0, 1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u, v) = -\frac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u, v) = C(v, u)\ \forall\ u, v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))\ \forall\ u, v, w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u, u) < u,\ \forall\ u \in (0, 1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u,v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u,v) = -\frac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u,v) = C(v,u)\ \forall\ u,v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w))\ \forall\ u,v,w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u,u) < u,\ \forall\ u \in (0,1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u, v) = -\dfrac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u, v) = C(v, u) \ \forall \ u, v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \ \forall \ u, v, w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u, u) < u, \ \forall \ u \in (0, 1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u,v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u,v) = -\dfrac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u,v) = C(v,u) \; \forall \; u, v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u,v), w) = C(u, C(v,w)) \; \forall \; u, v, w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u,u) < u, \; \forall \; u \in (0,1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u, v) = -\frac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u, v) = C(v, u) \ \forall\ u, v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \ \forall\ u, v, w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u, u) < u, \ \forall\ u \in (0, 1)$.

Cópulas Arquimedeanas

- Cópulas definidas por $C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$ são chamadas Cópulas Arquimedeanas;
- Sua função de densidade é $c(u, v) = -\dfrac{\phi''(C)\phi'(u)\phi'(v)}{(\phi'(C))^3} = \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$;
- A função ϕ é chamada de *geradora da cópula Arquimedeana*. Mais precisamente uma **geradora aditiva**;
- A geradora é unicamente definida como a seguir se for absolutamente contínua decrescente:

$$\phi(0) = \infty \iff \phi^{[-1]} = \phi^{-1} \iff C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v));$$

- Propriedades das Cópulas Arquimedeanas:
  - C é **simétrica**: $C(u, v) = C(v, u) \ \forall \ u, v \in \mathrm{I}$;
  - C é **associativa**: $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \ \forall \ u, v, w \in \mathrm{I}$;
  - Se $k > 0$ é uma constante, então $k\phi$ é também uma geradora de C;
  - Sua seção diagonal satisfaz: $\delta_C(u) = C(u, u) < u, \ \forall \ u \in (0, 1)$.

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \;\; \text{e} \;\; c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta}-1), \; \theta \in [-1,\infty]\backslash\{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1}-1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1}-1+v^{-1}-1) \\ &= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}. \end{aligned}$$

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \;\text{ e }\; c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta} - 1),\; \theta \in [-1, \infty]\backslash\{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1, 0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1}-1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1}-1+v^{-1}-1) \\ &= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}. \end{aligned}$$

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \ \text{ e } \ c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta}-1),\ \theta \in [-1,\infty]\backslash\{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1}-1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1}-1+v^{-1}-1) \\ &= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}. \end{aligned}$$

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \ \text{ e } \ c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta}-1), \ \theta \in [-1,\infty]\backslash\{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1, 0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1}-1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1}-1+v^{-1}-1)$$
$$= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}.$$

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \;\text{ e }\; c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta}-1),\; \theta \in [-1,\infty]\backslash\{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1}-1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1}-1+v^{-1}-1)$$
$$= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}.$$

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \ \text{ e } \ c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta}-1), \ \theta \in [-1,\infty]\backslash\{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1}-1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1}-1+v^{-1}-1)$$
$$= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}.$$

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \;\text{ e }\; c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta}-1),\; \theta \in [-1,\infty]\backslash\{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1}-1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1}-1+v^{-1}-1)$$
$$= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}.$$

Cópula de Clayton

- A Cópula de Clayton e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \vee 0 \;\text{ e }\; c_\theta(u,v) = (1+\theta)(uv)^{-1-\theta}(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-2},$$

  conforme Clayton (1978);
- Sua função geradora é:

$$\phi_\theta(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta} - 1),\; \theta \in [-1, \infty] \backslash \{0\};$$

- Convergência da geradora da Cópula de Clayton:
  - $\theta \longrightarrow -1$: geradora de $W(u,v) = \max(u+v-1, 0)$ (limitante inferior de *Fréchet-Hoeffding*);
  - $\theta \longrightarrow 0$: geradora de $\Pi(u,v) = uv$ (Cópula Produto);
  - $\theta \longrightarrow 1$: geradora da Cópula $\dfrac{\Pi(u,v)}{u+v-\Pi(u,v)}$;
- Para $\theta \Rightarrow 1$ tem-se $\phi(t) = (t^{-1} - 1)$ e $\phi^{-1}(t) = (1+t)^{-1}$, então:

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) = \phi^{-1}(u^{-1} - 1 + v^{-1} - 1) \\ &= (u^{-1} + v^{-1} - 1)^{-1} = \frac{uv}{v+u-uv}. \end{aligned}$$

Cópula Gumbel Hougaard

- A Cópula de Gumbel Hougaard é dada por:

$$C_\theta(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{(1)}{\theta}}\right\};$$

- Sua densidade implícita é:

$$c_\theta(u,v) = \frac{(-\ln u)^{\theta-1}(-\ln v)^{\theta-1}}{uv}\exp\left\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right\}\times$$
$$\times\left([(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{(1-\theta)^2}{\theta^2}} + (\theta-1)[(-lnu)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1-2\theta}{\theta}}\right);$$

- Por fim, sua geradora: $\phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$.

Cópula Gumbel Hougaard

- A Cópula de Gumbel Hougaard é dada por:

$$C_\theta(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{(1)}{\theta}}\right\};$$

- Sua densidade implícita é:

$$c_\theta(u,v) = \frac{(-\ln u)^{\theta-1}(-\ln v)^{\theta-1}}{uv}\exp\left\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right\}\times$$
$$\times\left([(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{(1-\theta)^2}{\theta^2}} + (\theta-1)[(-lnu)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1-2\theta}{\theta}}\right);$$

- Por fim, sua geradora: $\phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$.

Cópula Gumbel Hougaard

- A Cópula de Gumbel Hougaard é dada por:

$$C_\theta(u,v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{(1)}{\theta}}\right\};$$

- Sua densidade implícita é:

$$c_\theta(u,v) = \frac{(-\ln u)^{\theta-1}(-\ln v)^{\theta-1}}{uv}\exp\left\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right\}\times$$
$$\times\left([(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{(1-\theta)^2}{\theta^2}} + (\theta-1)[(-lnu)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1-2\theta}{\theta}}\right);$$

- Por fim, sua geradora: $\phi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$.

Cópula de Frank

- A Cópula de Frank e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

e ;

$$c_\theta(u,v) = \frac{\theta(1-e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{[1-e^{-\theta}-(1-e^{-\theta u})(1-e^{-\theta v})]}$$

- Sua função geradora: $\phi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$.

Cópula de Frank

- A Cópula de Frank e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

e ;

$$c_\theta(u,v) = \frac{\theta(1-e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{[1-e^{-\theta}-(1-e^{-\theta u})(1-e^{-\theta v})]}$$

- Sua função geradora: $\phi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$.

Cópula de Frank

- A Cópula de Frank e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = -\tfrac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

e ;

$$c_\theta(u,v) = \frac{\theta(1-e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{[1-e^{-\theta}-(1-e^{-\theta u})(1-e^{-\theta v})]}$$

- Sua função geradora: $\phi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$.

Cópula de Frank

- A Cópula de Frank e sua densidade implícita são dadas, respectivamente, por:

$$C_\theta(u,v) = -\tfrac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

e ;

$$c_\theta(u,v) = \frac{\theta(1-e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{[1-e^{-\theta}-(1-e^{-\theta u})(1-e^{-\theta v})]}$$

- Sua função geradora: $\phi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$.

Exemplo (Acoplamento de Estatísticas de Ordem)

- Seja $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ um conjunto de V.A.s contínuas i.i.d. com função de distribuição F_X;
- Sejam $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(1)}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(n)}(x) = [F_X(x)]^n$;
- A Cópula que conecta as estatísticas de ordem minimal e maximal é dada por:

$$C_{X(1),X(n)}(u, v) = v - [\max\{(1-u)^{1/n} + v^{1/n} - 1, 0\}]^n.$$

Exemplo (Acoplamento de Estatísticas de Ordem)

- Seja $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ um conjunto de V.A.s contínuas i.i.d. com função de distribuição F_X;
- Sejam $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(1)}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(n)}(x) = [F_X(x)]^n$;
- A Cópula que conecta as estatísticas de ordem minimal e maximal é dada por:

$$C_{X(1),X(n)}(u, v) = v - [\max\{(1-u)^{1/n} + v^{1/n} - 1, 0\}]^n.$$

Exemplo (Acoplamento de Estatísticas de Ordem)

- Seja $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ um conjunto de V.A.s contínuas i.i.d. com função de distribuição F_X;
- Sejam $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(1)}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(n)}(x) = [F_X(x)]^n$;
- A Cópula que conecta as estatísticas de ordem minimal e maximal é dada por:

$$C_{X(1),X(n)}(u, v) = v - [\max\{(1-u)^{1/n} + v^{1/n} - 1, 0\}]^n.$$

Exemplo (Acoplamento de Estatísticas de Ordem)

- Seja $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ um conjunto de V.A.s contínuas i.i.d. com função de distribuição F_X;
- Sejam $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(1)}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n$ e $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ com $F_{X(n)}(x) = [F_X(x)]^n$;
- A Cópula que conecta as estatísticas de ordem minimal e maximal é dada por:

$$C_{X(1),X(n)}(u, v) = v - [\max\{(1-u)^{1/n} + v^{1/n} - 1, 0\}]^n.$$

Medidas de Dependência

- Tau de Kendall: $\tau_K = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt$;
- Rho de Spearman: $\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]\,dudv$;
- Upper Tail: $\lambda_U = \lim_{v\to 1}\frac{1-2v+C(v,v)}{1-v} = 2 - 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Lower Tail: $\lambda_L = \lim_{v\to 0}\frac{C(v,v)}{v} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Nelsen (2007) resume tais medidas para as cópulas já citadas:

Tabela: Medidas de dependência e Cópulas Arquimedianas

Cópula	τ_K	ρ_S	λ_U	λ_L
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	-	0	$2^{-1/\theta}$
Gumbel Hougaard	$1-\frac{1}{\theta}$	-	$2-2^{1/\theta}$	0
Frank	$1+\frac{4[D_1(\theta)-1]}{\theta}$	$1-\frac{12[D_2(-\theta)-D_1(-\theta)]}{\theta}$	0	0

$D_k(\gamma) = \frac{k}{\gamma^k}\int_0^\gamma \frac{t^k}{\exp(t)-1}dt, k = 1,2$ é a família de funções *Debye*.

Medidas de Dependência

- Tau de Kendall: $\tau_K = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt$;
- Rho de Spearman: $\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]\, dudv$;
- Upper Tail: $\lambda_U = \lim_{v\to 1} \frac{1-2v+C(v,v)}{1-v} = 2 - 2\lim_{t\to 0^+} \frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Lower Tail: $\lambda_L = \lim_{v\to 0} \frac{C(v,v)}{v} = 2\lim_{t\to\infty} \frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Nelsen (2007) resume tais medidas para as cópulas já citadas:

Tabela: Medidas de dependência e Cópulas Arquimedianas

Cópula	τ_K	ρ_S	λ_U	λ_L
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	-	0	$2^{-1/\theta}$
Gumbel Hougaard	$1-\frac{1}{\theta}$	-	$2-2^{1/\theta}$	0
Frank	$1+\frac{4[D_1(\theta)-1]}{\theta}$	$1-\frac{12[D_2(-\theta)-D_1(-\theta)]}{\theta}$	0	0

$D_k(\gamma) = \frac{k}{\gamma^k}\int_0^\gamma \frac{t^k}{\exp(t)-1}dt, k = 1,2$ é a família de funções *Debye*.

Medidas de Dependência

- Tau de Kendall: $\tau_K = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt$;
- Rho de Spearman: $\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]\,dudv$;
- Upper Tail: $\lambda_U = \lim_{v\to 1}\frac{1-2v+C(v,v)}{1-v} = 2 - 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Lower Tail: $\lambda_L = \lim_{v\to 0}\frac{C(v,v)}{v} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Nelsen (2007) resume tais medidas para as cópulas já citadas:

Tabela: Medidas de dependência e Cópulas Arquimedianas

Cópula	τ_K	ρ_S	λ_U	λ_L
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	-	0	$2^{-1/\theta}$
Gumbel Hougaard	$1-\frac{1}{\theta}$	-	$2-2^{1/\theta}$	0
Frank	$1+\frac{4[D_1(\theta)-1]}{\theta}$	$1-\frac{12[D_2(-\theta)-D_1(-\theta)]}{\theta}$	0	0

$D_k(\gamma) = \frac{k}{\gamma^k}\int_0^\gamma \frac{t^k}{\exp(t)-1}dt, k = 1,2$ é a família de funções *Debye*.

Medidas de Dependência

- Tau de Kendall: $\tau_K = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt$;
- Rho de Spearman: $\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]\,dudv$;
- Upper Tail: $\lambda_U = \lim_{v\to 1}\frac{1-2v+C(v,v)}{1-v} = 2 - 2\lim_{t\to 0^+}\frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Lower Tail: $\lambda_L = \lim_{v\to 0}\frac{C(v,v)}{v} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)}$;
- Nelsen (2007) resume tais medidas para as cópulas já citadas:

Tabela: Medidas de dependência e Cópulas Arquimedianas

Cópula	τ_K	ρ_S	λ_U	λ_L
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	-	0	$2^{-1/\theta}$
Gumbel Hougaard	$1-\frac{1}{\theta}$	-	$2-2^{1/\theta}$	0
Frank	$1+\frac{4[D_1(\theta)-1]}{\theta}$	$1-\frac{12[D_2(-\theta)-D_1(-\theta)]}{\theta}$	0	0

$D_k(\gamma) = \frac{k}{\gamma^k}\int_0^\gamma \frac{t^k}{\exp(t)-1}dt, k = 1, 2$ é a família de funções *Debye*.

Medidas de Dependência

- Tau de Kendall: $\tau_K = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}dt;$
- Rho de Spearman: $\rho_S = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]\,dudv;$
- Upper Tail: $\lambda_U = \lim_{v\to 1} \frac{1 - 2v + C(v,v)}{1 - v} = 2 - 2\lim_{t\to 0^+} \frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)};$
- Lower Tail: $\lambda_L = \lim_{v\to 0} \frac{C(v,v)}{v} = 2\lim_{t\to\infty} \frac{\phi'(t)}{\phi'(2t)};$
- Nelsen (2007) resume tais medidas para as cópulas já citadas:

Tabela: Medidas de dependência e Cópulas Arquimedianas

Cópula	τ_K	ρ_S	λ_U	λ_L
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	-	0	$2^{-1/\theta}$
Gumbel Hougaard	$1 - \frac{1}{\theta}$	-	$2 - 2^{1/\theta}$	0
Frank	$1 + \frac{4[D_1(\theta) - 1]}{\theta}$	$1 - \frac{12[D_2(-\theta) - D_1(-\theta)]}{\theta}$	0	0

$D_k(\gamma) = \frac{k}{\gamma^k}\int_0^\gamma \frac{t^k}{\exp(t) - 1}dt, k = 1,2$ é a família de funções *Debye*.

Propriedades Arquimedeanas

- Axioma Arquimedeano: para números reais positivos, sejam a e $b \in \mathbb{R}$, então existe um inteiro n tal que $na > b$;
- Aplicações:
  - *C-powers* u_C^n de u é descrito recursivamente: $u_C^1 = u$ e $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$, para qualquer $u \in \mathrm{I}$. Então, $u_C^n = \phi^{[-1]}(n\phi(u))$;
  - Se C é uma Cópula Arquimediana gerada por ϕ, para qualquer $u, v \in \mathrm{I}$ existe um inteiro positivo n tal que

$$u_C^n < v.$$

Propriedades Arquimedeanas

- Axioma Arquimedeano: para números reais positivos, sejam a e $b \in \mathbb{R}$, então existe um inteiro n tal que $na > b$;
- Aplicações:
  - *C-powers* u_C^n de u é descrito recursivamente: $u_C^1 = u$ e $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$, para qualquer $u \in \mathrm{I}$. Então, $u_C^n = \phi^{[-1]}(n\phi(u))$;
  - Se C é uma Cópula Arquimediana gerada por ϕ, para qualquer $u, v \in \mathrm{I}$ existe um inteiro positivo n tal que

$$u_C^n < v.$$

Propriedades Arquimedeanas

- Axioma Arquimedeano: para números reais positivos, sejam a e $b \in \mathbb{R}$, então existe um inteiro n tal que $na > b$;
- Aplicações:
  - *C-powers* u_C^n de u é descrito recursivamente: $u_C^1 = u$ e $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$, para qualquer $u \in \mathrm{I}$. Então, $u_C^n = \phi^{[-1]}(n\phi(u))$;
  - Se C é uma Cópula Arquimediana gerada por ϕ, para qualquer $u, v \in \mathrm{I}$ existe um inteiro positivo n tal que

$$u_C^n < v.$$

Curvas de Nível

- Curvas de nível de uma Cópula são dadas por:

$$\{(u,v) \in \mathrm{I}^2 | C(u,v) = t\};$$

- Para Cópulas Arquimedianas e um $t > 0$:

$$\{(u,v) \in \mathrm{I}^2 | \phi(u) + \phi(v) = \phi(t)\};$$

- *Curva 0* de C: curva de nível com $t = 0$;
- $(Z(C))$:*Conjunto 0* de C, área abaixo da Curva 0;

Figura: Exemplos para $C(u,v) = \max\{(1 - [(1-u)^2 + (1-v)^2]^{1/2}, 0)\}$.

Curvas de Nível

- Curvas de nível de uma Cópula são dadas por:

$$\{(u, v) \in \mathrm{I}^2 | C(u, v) = t\};$$

- Para Cópulas Arquimedianas e um $t > 0$:

$$\{(u, v) \in \mathrm{I}^2 | \phi(u) + \phi(v) = \phi(t)\};$$

- *Curva 0* de C: curva de nível com $t = 0$;
- $(Z(C))$:*Conjunto 0* de C, área abaixo da Curva 0;

Figura: Exemplos para $C(u, v) = \max\{(1 - [(1 - u)^2 + (1 - v)^2]^{1/2}, 0)\}$.

Curvas de Nível

- Curvas de nível de uma Cópula são dadas por:

$$\{(u, v) \in \mathrm{I}^2 | C(u, v) = t\};$$

- Para Cópulas Arquimedianas e um $t > 0$:

$$\{(u, v) \in \mathrm{I}^2 | \phi(u) + \phi(v) = \phi(t)\};$$

- *Curva 0* de C: curva de nível com $t = 0$;
- $(Z(C))$:*Conjunto 0* de C, área abaixo da Curva 0;

Figura: Exemplos para $C(u, v) = \max\{(1 - [(1 - u)^2 + (1 - v)^2]^{1/2}, 0)\}$.

Curvas de Nível

- Curvas de nível de uma Cópula são dadas por:

$$\{(u, v) \in \mathrm{I}^2 | C(u, v) = t\};$$

- Para Cópulas Arquimedianas e um $t > 0$:

$$\{(u, v) \in \mathrm{I}^2 | \phi(u) + \phi(v) = \phi(t)\};$$

- *Curva 0* de C: curva de nível com $t = 0$;
- $(Z(C))$:*Conjunto 0* de C, área abaixo da Curva 0;

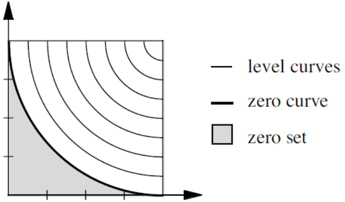

Figura: Exemplos para $C(u, v) = \max\{(1 - [(1 - u)^2 + (1 - v)^2]^{1/2}, 0)\}$.

Família Bi-Paramétrica de Funções Geradoras

- A partir de uma função geradora ϕ pode-se criar famílias paramétricas de funções geradoras. Consequentemente, famílias de Cópulas Arquimedianas;
- Sejam Ω o conjunto de todas as funções ϕ e α e β reais positivos. Define-se, então:

$$\{\phi_{\alpha,1} \in \Omega | \phi_{\alpha,1}(t) = \phi(t^\alpha)\} \text{ é a família de potência interior;}$$
$$\left\{\phi_{1,\beta} \in \Omega | \phi_{1,\beta}(t) = [\phi(t)]^\beta\right\} \text{ é a família de potência exterior;}$$

- Propriedades:

1. Se $\beta \geq 1$, então $\phi_{1,\beta} \in \Omega$;
2. Se $\alpha \in [0, 1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$;
3. Se ϕ é duplamente diferenciável e $t\phi'(t)$ é não decrescente em $[0, 1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$ $\forall \alpha > 0$.

Família Bi-Paramétrica de Funções Geradoras

- A partir de uma função geradora ϕ pode-se criar famílias paramétricas de funções geradoras. Consequentemente, famílias de Cópulas Arquimedianas;
- Sejam Ω o conjunto de todas as funções ϕ e α e β reais positivos. Define-se, então:

$$\{\phi_{\alpha,1} \in \Omega | \phi_{\alpha,1}(t) = \phi(t^\alpha)\} \text{ é a família de potência interior;}$$
$$\left\{\phi_{1,\beta} \in \Omega | \phi_{1,\beta}(t) = [\phi(t)]^\beta\right\} \text{ é a família de potência exterior;}$$

- Propriedades:

1. Se $\beta \geq 1$, então $\phi_{1,\beta} \in \Omega$;
2. Se $\alpha \in [0,1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$;
3. Se ϕ é duplamente diferenciável e $t\phi'(t)$ é não decrescente em $[0,1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega \; \forall \alpha > 0$.

Família Bi-Paramétrica de Funções Geradoras

- A partir de uma função geradora ϕ pode-se criar famílias paramétricas de funções geradoras. Consequentemente, famílias de Cópulas Arquimedianas;
- Sejam Ω o conjunto de todas as funções ϕ e α e β reais positivos. Define-se, então:

$$\{\phi_{\alpha,1} \in \Omega | \phi_{\alpha,1}(t) = \phi(t^\alpha)\} \text{ é a família de potência interior;}$$
$$\left\{\phi_{1,\beta} \in \Omega | \phi_{1,\beta}(t) = [\phi(t)]^\beta\right\} \text{ é a família de potência exterior;}$$

- Propriedades:

1. Se $\beta \geq 1$, então $\phi_{1,\beta} \in \Omega$;
2. Se $\alpha \in [0, 1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$;
3. Se ϕ é duplamente diferenciável e $t\phi'(t)$ é não decrescente em $[0, 1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega \ \forall \alpha > 0$.

Família Bi-Paramétrica de Funções Geradoras

- A partir de uma função geradora ϕ pode-se criar famílias paramétricas de funções geradoras. Consequentemente, famílias de Cópulas Arquimedianas;
- Sejam Ω o conjunto de todas as funções ϕ e α e β reais positivos. Define-se, então:

$$\{\phi_{\alpha,1} \in \Omega | \phi_{\alpha,1}(t) = \phi(t^{\alpha})\} \text{ é a família de potência interior;}$$
$$\left\{\phi_{1,\beta} \in \Omega | \phi_{1,\beta}(t) = [\phi(t)]^{\beta}\right\} \text{ é a família de potência exterior;}$$

- Propriedades:

1. Se $\beta \geq 1$, então $\phi_{1,\beta} \in \Omega$;
2. Se $\alpha \in [0, 1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$;
3. Se ϕ é duplamente diferenciável e $t\phi'(t)$ é não decrescente em $[0, 1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega \ \forall \alpha > 0$.

Família Bi-Paramétrica de Funções Geradoras

- A partir de uma função geradora ϕ pode-se criar famílias paramétricas de funções geradoras. Consequentemente, famílias de Cópulas Arquimedianas;
- Sejam Ω o conjunto de todas as funções ϕ e α e β reais positivos. Define-se, então:

$$\{\phi_{\alpha,1} \in \Omega | \phi_{\alpha,1}(t) = \phi(t^{\alpha})\} \text{ é a família de potência interior;}$$
$$\left\{\phi_{1,\beta} \in \Omega | \phi_{1,\beta}(t) = [\phi(t)]^{\beta}\right\} \text{ é a família de potência exterior;}$$

- Propriedades:

1. Se $\beta \geq 1$, então $\phi_{1,\beta} \in \Omega$;
2. Se $\alpha \in [0,1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$;
3. Se ϕ é duplamente diferenciável e $t\phi'(t)$ é não decrescente em $[0,1]$, então $\phi_{\alpha,1} \in \Omega \; \forall \alpha > 0$.

Exemplo

- $\phi_\theta(t) = \ln\left(\frac{[1-\theta(1-t)]}{t}\right), \theta \in [-1, 1]$ gera uma Cópula Ali-Mikhail-Haq;
- $t\phi'_\theta(t) = t\frac{(t-1)}{(t-1)\theta+1}$ é não decrescente para $\theta \in [0, 1]$;
- A família de potência interior gerada por ϕ_θ é a família bi-paramétrica dada por

$$C_{\theta;\alpha,1}(u, v) = \frac{uv}{[1-\theta(1-u^{1/\alpha})(1-v^{1/\alpha})]^\alpha}, u, v \in \mathrm{I}, \alpha > 0, 0 \leq \theta \leq 1;$$

- Se $\theta = 0 \longrightarrow C_{0;\alpha,1} = \Pi(u, v)$;
- Se $\theta = 1 \longrightarrow C_{1;\alpha,1}$ é um membro da família de Cópulas de Clayton.

Exemplo

- $\phi_\theta(t) = \ln\left(\frac{[1-\theta(1-t)]}{t}\right), \theta \in [-1,1]$ gera uma Cópula Ali-Mikhail-Haq;
- $t\phi'_\theta(t) = t\frac{(t-1)}{(t-1)\theta+1}$ é não decrescente para $\theta \in [0,1]$;
- A família de potência interior gerada por ϕ_θ é a família bi-paramétrica dada por

$$C_{\theta;\alpha,1}(u,v) = \frac{uv}{[1-\theta(1-u^{1/\alpha})(1-v^{1/\alpha})]^\alpha}, u, v \in \mathrm{I}, \alpha > 0, 0 \leq \theta \leq 1;$$

- Se $\theta = 0 \longrightarrow C_{0;\alpha,1} = \Pi(u,v)$;
- Se $\theta = 1 \longrightarrow C_{1;\alpha,1}$ é um membro da família de Cópulas de Clayton.

Exemplo

- $\phi_\theta(t) = \ln\left(\frac{[1-\theta(1-t)]}{t}\right), \theta \in [-1, 1]$ gera uma Cópula Ali-Mikhail-Haq;
- $t\phi'_\theta(t) = t\frac{(t-1)}{(t-1)\theta+1}$ é não decrescente para $\theta \in [0, 1]$;
- A família de potência interior gerada por ϕ_θ é a família bi-paramétrica dada por

$$C_{\theta;\alpha,1}(u, v) = \frac{uv}{[1-\theta(1-u^{1/\alpha})(1-v^{1/\alpha})]^\alpha}, u, v \in \mathrm{I}, \alpha > 0, 0 \leq \theta \leq 1;$$

- Se $\theta = 0 \longrightarrow C_{0;\alpha,1} = \Pi(u, v)$;
- Se $\theta = 1 \longrightarrow C_{1;\alpha,1}$ é um membro da família de Cópulas de Clayton.

Exemplo

- $\phi_\theta(t) = \ln\left(\frac{[1-\theta(1-t)]}{t}\right), \theta \in [-1,1]$ gera uma Cópula Ali-Mikhail-Haq;
- $t\phi'_\theta(t) = t\frac{(t-1)}{(t-1)\theta+1}$ é não decrescente para $\theta \in [0,1]$;
- A família de potência interior gerada por ϕ_θ é a família bi-paramétrica dada por

$$C_{\theta;\alpha,1}(u,v) = \frac{uv}{[1-\theta(1-u^{1/\alpha})(1-v^{1/\alpha})]^\alpha}, u,v \in \mathrm{I}, \alpha > 0, 0 \leq \theta \leq 1;$$

- Se $\theta = 0 \longrightarrow C_{0;\alpha,1} = \Pi(u,v)$;
- Se $\theta = 1 \longrightarrow C_{1;\alpha,1}$ é um membro da família de Cópulas de Clayton.

Exemplo

- $\phi_\theta(t) = \ln\left(\frac{[1-\theta(1-t)]}{t}\right), \theta \in [-1, 1]$ gera uma Cópula Ali-Mikhail-Haq;
- $t\phi'_\theta(t) = t\frac{(t-1)}{(t-1)\theta+1}$ é não decrescente para $\theta \in [0, 1]$;
- A família de potência interior gerada por ϕ_θ é a família bi-paramétrica dada por

$$C_{\theta;\alpha,1}(u, v) = \frac{uv}{[1-\theta(1-u^{1/\alpha})(1-v^{1/\alpha})]^\alpha}, u, v \in \mathrm{I}, \alpha > 0, 0 \leq \theta \leq 1;$$

- Se $\theta = 0 \longrightarrow C_{0;\alpha,1} = \Pi(u, v)$;
- Se $\theta = 1 \longrightarrow C_{1;\alpha,1}$ é um membro da família de Cópulas de Clayton.

Particularidades

- Sejam $\phi \in \Omega$, $C_{\alpha,1}$ a cópula gerada por $\phi_{\alpha,1}$ e $C_{1,\beta}$ a cópula gerada por $\phi_{1,\beta}$, com $\beta \geq 1$ e $\alpha \in [0, \infty]$;
- Propriedades:
  1. Se ϕ é continuamente diferenciável e $\phi'(1) \neq 0$, então:
  $$C_{0,1}(u, v) = \lim_{\alpha \to 0^+} C_{\alpha,1}(u, v) = \Pi(u, v);$$
  2. $$C_{1,\infty}(u, v) = \lim_{\beta \to \infty} C_{1,\beta}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v);$$
- Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétricas:
$$\phi_{\alpha,\beta}(t) = [\phi(t^\alpha)]^\beta.$$

Particularidades

- Sejam $\phi \in \Omega$, $C_{\alpha,1}$ a cópula gerada por $\phi_{\alpha,1}$ e $C_{1,\beta}$ a cópula gerada por $\phi_{1,\beta}$, com $\beta \geq 1$ e $\alpha \in [0, \infty]$;
- Propriedades:
  1. Se ϕ é continuamente diferenciável e $\phi'(1) \neq 0$, então:

$$C_{0,1}(u, v) = \lim_{\alpha \to 0^+} C_{\alpha,1}(u, v) = \Pi(u, v);$$

  2. $$C_{1,\infty}(u, v) = \lim_{\beta \to \infty} C_{1,\beta}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v);$$

- Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétricas:

$$\phi_{\alpha,\beta}(t) = [\phi(t^\alpha)]^\beta.$$

Particularidades

- Sejam $\phi \in \Omega$, $C_{\alpha,1}$ a cópula gerada por $\phi_{\alpha,1}$ e $C_{1,\beta}$ a cópula gerada por $\phi_{1,\beta}$, com $\beta \geq 1$ e $\alpha \in [0, \infty]$;
- Propriedades:
  1. Se ϕ é continuamente diferenciável e $\phi'(1) \neq 0$, então:
  $$C_{0,1}(u, v) = \lim_{\alpha \to 0^+} C_{\alpha,1}(u, v) = \Pi(u, v);$$
  2. $$C_{1,\infty}(u, v) = \lim_{\beta \to \infty} C_{1,\beta}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v);$$
- Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétricas:
$$\phi_{\alpha,\beta}(t) = [\phi(t^\alpha)]^\beta.$$

Particularidades

- Sejam $\phi \in \Omega$, $C_{\alpha,1}$ a cópula gerada por $\phi_{\alpha,1}$ e $C_{1,\beta}$ a cópula gerada por $\phi_{1,\beta}$, com $\beta \geq 1$ e $\alpha \in [0, \infty]$;
- Propriedades:
  1. Se ϕ é continuamente diferenciável e $\phi'(1) \neq 0$, então:
  $$C_{0,1}(u, v) = \lim_{\alpha \to 0^+} C_{\alpha,1}(u, v) = \Pi(u, v);$$
  2. $$C_{1,\infty}(u, v) = \lim_{\beta \to \infty} C_{1,\beta}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v);$$
- Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétricas:
$$\phi_{\alpha,\beta}(t) = [\phi(t^\alpha)]^\beta.$$

Exemplo

- A função $\phi(t) = 1 - t$ gera a cópula $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$;
- A partir de $\phi(t)$ pode-se criar $\phi_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^{\alpha})^{\beta}$, para $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \geq 1$;
- $\phi_{\alpha,\beta}(t)$ gera a Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétrica

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \max\left(\left\{1 - \left[(1 - u^{\alpha})^{\beta} + (1 - v^{\alpha})^{\beta}\right]^{1/\beta}\right\}^{1/\alpha}, 0\right);$$

- Observa-se que: $C_{1,1}(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $C_{0,1}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$, e $C_{\alpha,\infty}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$;
- Por fim, a família da Equação 1 é positivamente ordenada, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ tem-se $C_{\alpha 1,\beta 1} \prec C_{\alpha 2,\beta 2}$ (C_1 é menor que C_2).

Exemplo

- A função $\phi(t) = 1 - t$ gera a cópula $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$;
- A partir de $\phi(t)$ pode-se criar $\phi_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^{\alpha})^{\beta}$, para $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \geq 1$;
- $\phi_{\alpha,\beta}(t)$ gera a Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétrica

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \max\left(\left\{1 - \left[(1 - u^{\alpha})^{\beta} + (1 - v^{\alpha})^{\beta}\right]^{1/\beta}\right\}^{1/\alpha}, 0\right);$$

- Observa-se que: $C_{1,1}(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $C_{0,1}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$, e $C_{\alpha,\infty}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$;
- Por fim, a família da Equação 1 é positivamente ordenada, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ tem-se $C_{\alpha 1,\beta 1} \prec C_{\alpha 2,\beta 2}$ (C_1 é menor que C_2).

Exemplo

- A função $\phi(t) = 1 - t$ gera a cópula $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$;
- A partir de $\phi(t)$ pode-se criar $\phi_{\alpha,\beta}(t) = (1-t^{\alpha})^{\beta}$, para $\alpha \in (0,1]$ e $\beta \geq 1$;
- $\phi_{\alpha,\beta}(t)$ gera a Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétrica

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \max\left(\left\{1 - \left[(1-u^{\alpha})^{\beta} + (1-v^{\alpha})^{\beta}\right]^{1/\beta}\right\}^{1/\alpha}, 0\right);$$

- Observa-se que: $C_{1,1}(u,v) = W(u,v) = \max(u+v-1,0)$, $C_{0,1}(u,v) = \Pi(u,v) = uv$, e $C_{\alpha,\infty}(u,v) = M(u,v) = \min(u,v)$;
- Por fim, a família da Equação 1 é positivamente ordenada, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ tem-se $C_{\alpha 1,\beta 1} \prec C_{\alpha 2,\beta 2}$ (C_1 é menor que C_2).

Exemplo

- A função $\phi(t) = 1 - t$ gera a cópula $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$;
- A partir de $\phi(t)$ pode-se criar $\phi_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^{\alpha})^{\beta}$, para $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \geq 1$;
- $\phi_{\alpha,\beta}(t)$ gera a Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétrica

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \max\left(\left\{1 - \left[(1 - u^{\alpha})^{\beta} + (1 - v^{\alpha})^{\beta}\right]^{1/\beta}\right\}^{1/\alpha}, 0\right);$$

- Observa-se que: $C_{1,1}(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $C_{0,1}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$, e $C_{\alpha,\infty}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$;
- Por fim, a família da Equação 1 é positivamente ordenada, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ tem-se $C_{\alpha 1,\beta 1} \prec C_{\alpha 2,\beta 2}$ (C_1 é menor que C_2).

Exemplo

- A função $\phi(t) = 1 - t$ gera a cópula $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$;
- A partir de $\phi(t)$ pode-se criar $\phi_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^{\alpha})^{\beta}$, para $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \geq 1$;
- $\phi_{\alpha,\beta}(t)$ gera a Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétrica

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \max\left(\left\{1 - \left[(1 - u^{\alpha})^{\beta} + (1 - v^{\alpha})^{\beta}\right]^{1/\beta}\right\}^{1/\alpha}, 0\right);$$

- Observa-se que: $C_{1,1}(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $C_{0,1}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$, e $C_{\alpha,\infty}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$;
- Por fim, a família da Equação 1 é positivamente ordenada, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ tem-se $C_{\alpha 1,\beta 1} \prec C_{\alpha 2,\beta 2}$ (C_1 é menor que C_2).

Exemplo

- A função $\phi(t) = 1 - t$ gera a cópula $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$;
- A partir de $\phi(t)$ pode-se criar $\phi_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^\alpha)^\beta$, para $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \geq 1$;
- $\phi_{\alpha,\beta}(t)$ gera a Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétrica

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \max\left(\left\{1 - \left[(1 - u^\alpha)^\beta + (1 - v^\alpha)^\beta\right]^{1/\beta}\right\}^{1/\alpha}, 0\right);$$

- Observa-se que: $C_{1,1}(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $C_{0,1}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$, e $C_{\alpha,\infty}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$;
- Por fim, a família da Equação 1 é positivamente ordenada, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ tem-se $C_{\alpha 1,\beta 1} \prec C_{\alpha 2,\beta 2}$ (C_1 é menor que C_2).

Exemplo

- A função $\phi(t) = 1 - t$ gera a cópula $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$;
- A partir de $\phi(t)$ pode-se criar $\phi_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^{\alpha})^{\beta}$, para $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \geq 1$;
- $\phi_{\alpha,\beta}(t)$ gera a Família de Cópulas Arquimedianas Bi-Paramétrica

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \max\left(\left\{1 - \left[(1 - u^{\alpha})^{\beta} + (1 - v^{\alpha})^{\beta}\right]^{1/\beta}\right\}^{1/\alpha}, 0\right);$$

- Observa-se que: $C_{1,1}(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$, $C_{0,1}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$, e $C_{\alpha,\infty}(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$;
- Por fim, a família da Equação 1 é positivamente ordenada, isto é, para $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ tem-se $C_{\alpha 1,\beta 1} \prec C_{\alpha 2,\beta 2}$ (C_1 é menor que C_2).

Referências Bibliográficas I

D. G. Clayton. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65(1):141–151, 1978.

R. B. Nelsen. *An introduction to copulas.* Springer Science & Business Media, 2007.