Mapas de Karnaugh

Introdução

Os **mapas de Karnaugh** constituem outro tipo de representação das **funções lógicas**. Estes mapas permitem obter, de forma quase totalmente sistemática e relativamente expedita, as **expressões mínimas** das mesmas.

Se a função lógica a representar no **mapa de Karnaugh** tiver **n** variáveis, o mapa terá $\mathbf{2^n}$ células.

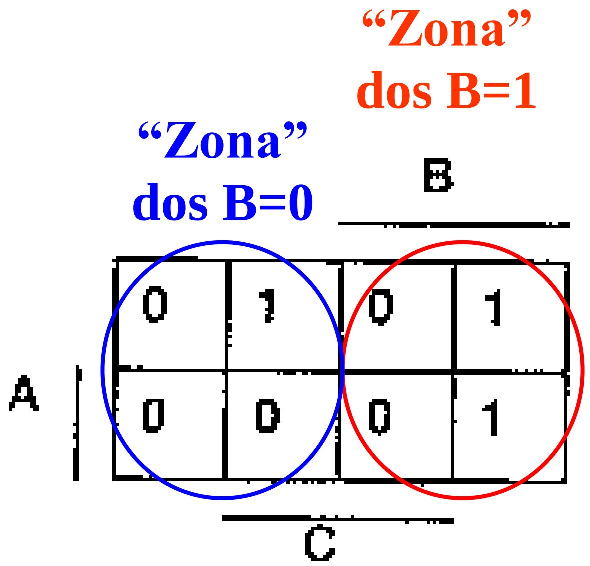
As células são dispostas de modo a possibilitar a aplicação mecânica do **teorema da adjacência lógica** (**T12**). Ou seja, os termos aos quais é possível aplicar o referido teorema, são colocados em células adjacentes.

Exemplo

Considere-se a seguinte função expressa na **forma canónica soma de produtos**:

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.B.\overline{C}$$

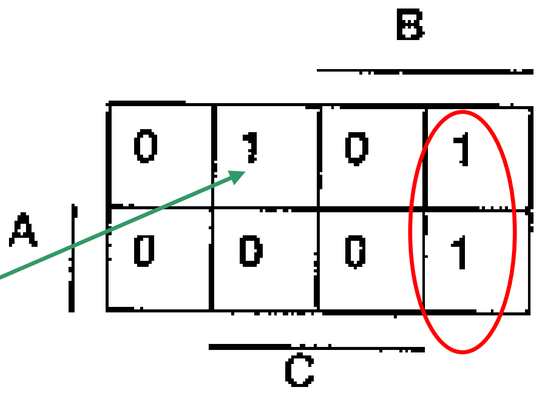
A sua representação no mapa é a seguinte:



Os dois últimos termos desta função podem simplificar-se pelo teorema T12:

$$\overline{A}.B.\overline{C} + A.B.\overline{C} = B.\overline{C}$$

No mapa, corresponde a associar estes termos da seguinte forma:



Este **1** não pode ser associado a mais nenhum $\Rightarrow$ A adjacência lógica não pode ser aplicada outra vez na função dada. A função simplificada pode agora ler-se do mapa:

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + B.\overline{C}$$

No mapa anterior, a correspondência entre as células e os possíveis termos da função na forma canónica soma de produtos, é a seguinte:

			B	B
	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$	$\overline{A}.\overline{B}.C$	$\overline{A}.B.C$	$\overline{A}.B.\overline{C}$
A	$A.\overline{B}.\overline{C}$	$A.\overline{B}.C$	$A.B.C$	$A.B.\overline{C}$
		C	C	

Podem numerar-se as células dos **mapas de Karnaugh** e atribuir números às representações dos termos nas tabelas de verdade $\Rightarrow$ facilita o preenchimento dos mapas a partir destas últimas.

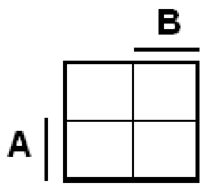
Exemplo

	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

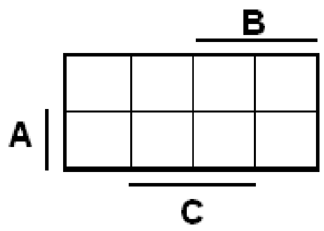
			B	B
	0	1	3	2
A	4	5	7	6
		C	C	

Mapas para funções de 2, 3, 4 e 5 variáveis

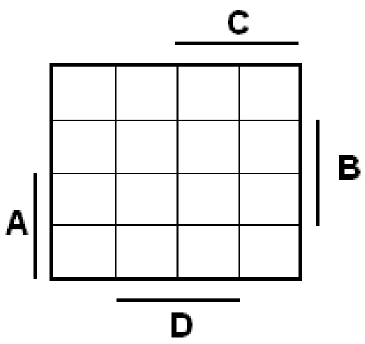
2 variáveis



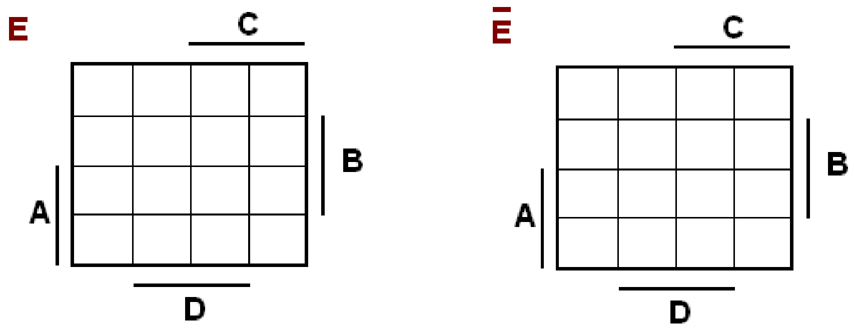
3 variáveis



4 variáveis



5 variáveis



Simplificação de funções

Antes de mais, considere-se a seguinte definição:

> **Grupo de adjacência** - grupo de termos que contém ocorrências idênticas de uma parte das variáveis, tomando as restantes, todas as possíveis combinações de ocorrências.

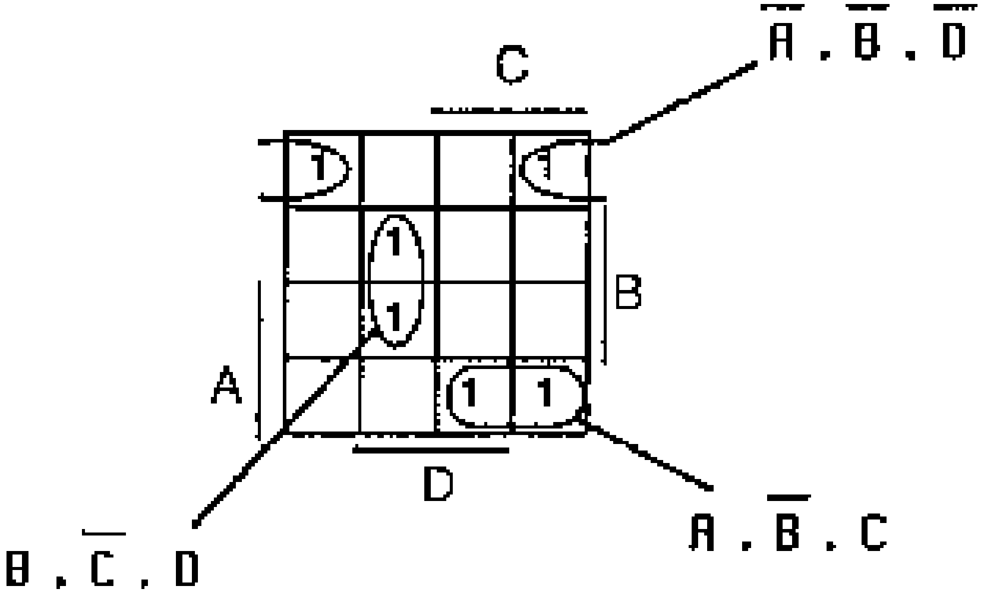
Devido ao modo como um mapa está organizado, um **grupo de adjacência** é composto por **1**'s em posições justapostas e em número de uma **potência de 2**.

Apresentam-se em seguida alguns exemplos de **grupos de adjacência** em mapas com **4** e **5** variáveis.

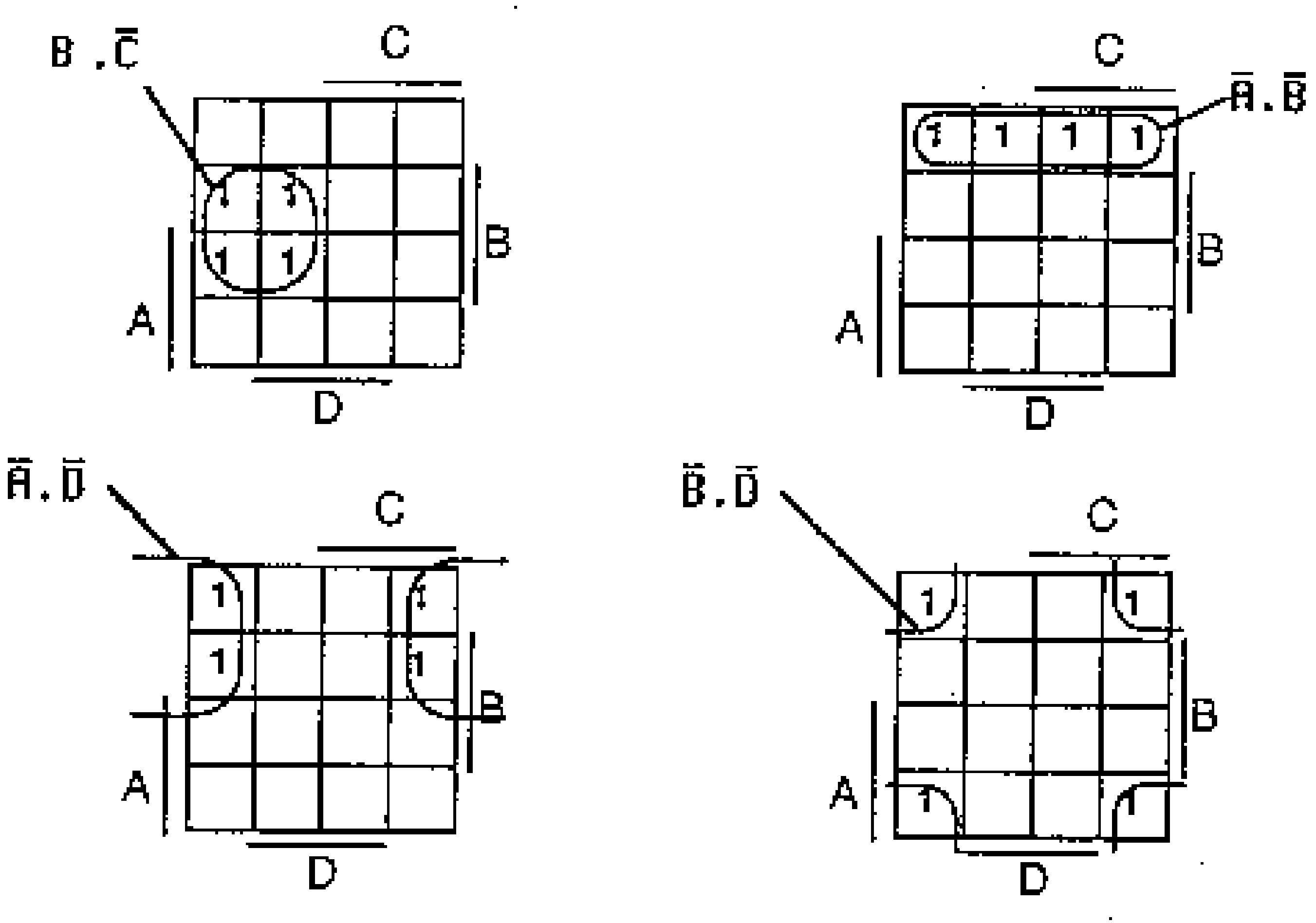
Exemplos de grupos de adjacência em mapas de 4 variáveis

➢ **Grupos de 2 células**:

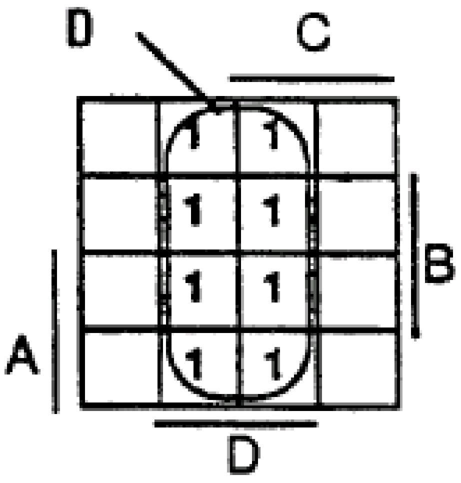
Os **1**'s situados nos cantos são adjacentes uns aos outros: um mapa tem de ser visto como "**<u>enrolado sobre si próprio</u>**" transversal e longitudinalmente.

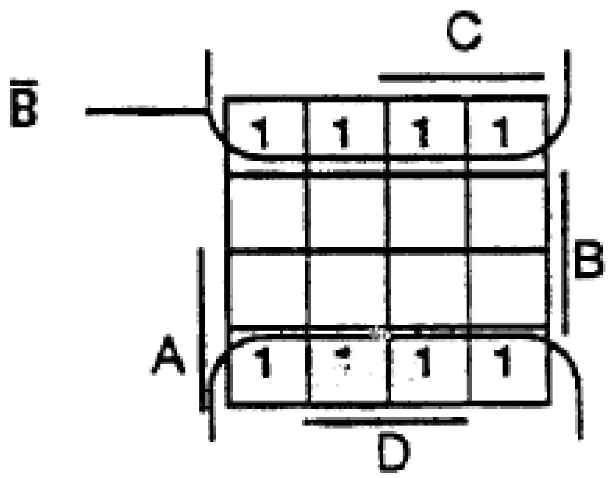


- **Grupos de 4 células:**

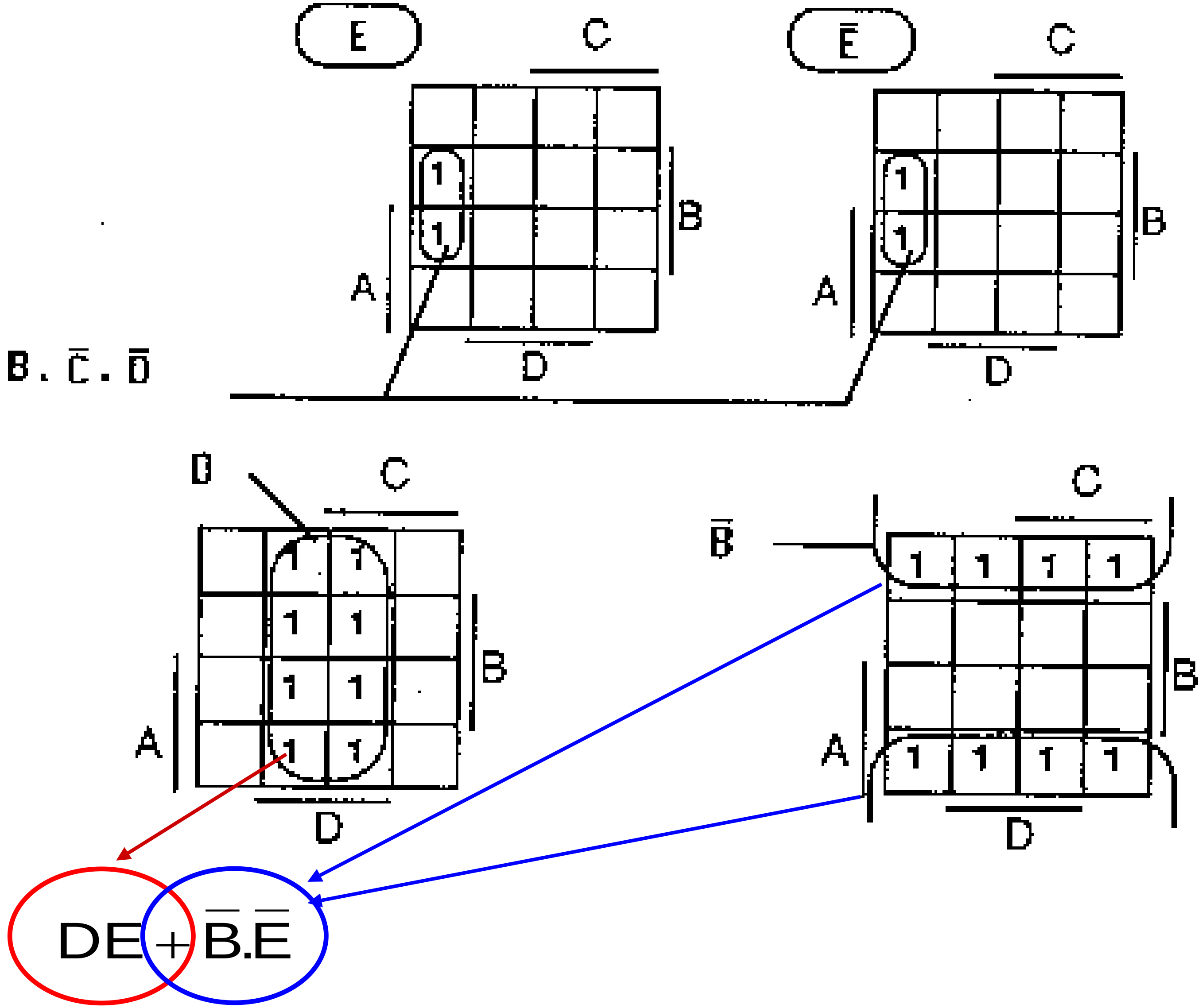


➢ Grupos de 8 células:





Exemplos de grupos de adjacência em mapas de 5 variáveis



Obtenção da forma mínima soma de produtos

A utilização mais comum dos **mapas de karnaugh**, é na obtenção da **forma mínima soma de produtos** para uma função.

Para tal, os **1**'s existentes no mapa devem ser agrupados em **grupos de adjacência** (cujo tamanho é igual a uma potência de 2), tendo em conta os seguintes aspectos:

- Quanto **maior for o grupo de adjacência**, **mais simplificada** fica a expressão lógica correspondente;
- Quanto **menor for o número de grupos de adjacência**, **menos termos** terá a correspondente expressão.

Condições indiferentes (*Don't care conditions*)

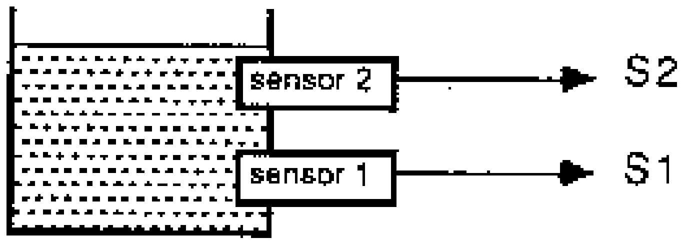
Algumas funções lógicas podem, por vezes, assumir indiferentemente o valor **0** ou **1**, para algumas combinações das suas variáveis de entrada:

- Ou porque essas combinações nunca podem ocorrer;
- Ou porque as saídas do circuito, para essas combinações, nunca são utilizadas.

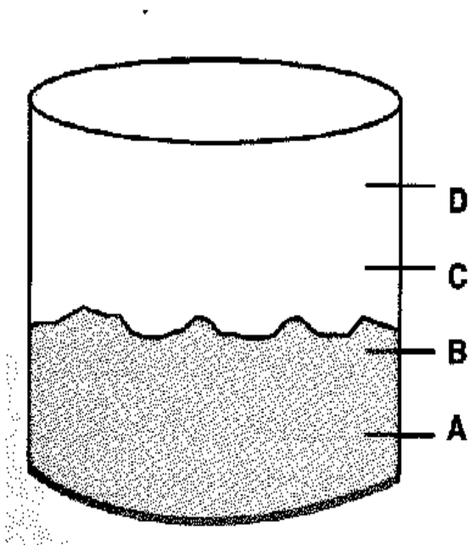
Exemplos

Tanque com sensores de nível

➔ A combinação S1=0 e S2=1 nunca pode ocorrer.



Circuito para detectar quando o nível de líquido se encontra entre B e C



D	C	B	A
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

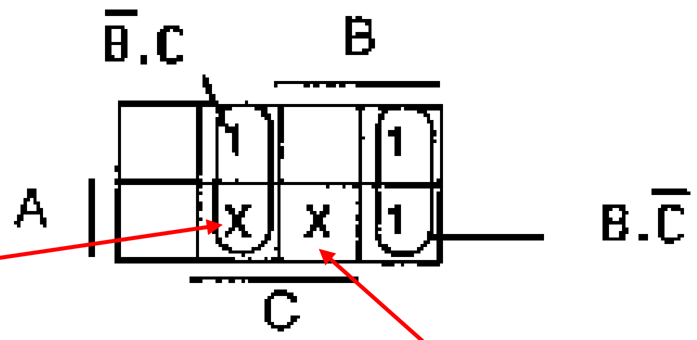
Um detector é activado (=1) quando o líquido atinge o nível do mesmo.

D	*C*	*B*	*A*	OUT
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	X
0	0	1	1	1
0	1	0	0	X
0	1	0	1	X
0	1	1	0	X
0	1	1	1	0
1	0	0	0	X
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	0

No exemplo anterior verificou-se que, para certas combinações de entradas, a **saída era indiferente** - o valor da saída nestas condições não afecta a funcionalidade do circuito.

A uma saída de valor indiferente pode atribuir-se o valor **0** ou **1**, consoante seja mais vantajoso para a simplificação da função.

Os **valores indiferentes** das saídas representam-se por um “**X**” no **mapa de Karnaugh** ou na **tabela de verdade**.



Este **X** considerou-se como sendo **1** para ficar adjacente ao outro **1**, permitindo uma redução na variável A.

Se este **X** fosse considerado como **1** geraria um termo adicional desnecessário. Portanto, considera-se como **0** para não ter de ser associado.

Mapas reduzidos

Os mapas de Karnaugh com mais de 5 variáveis são difíceis de manipular pois precisam de ser representados em vários "planos".

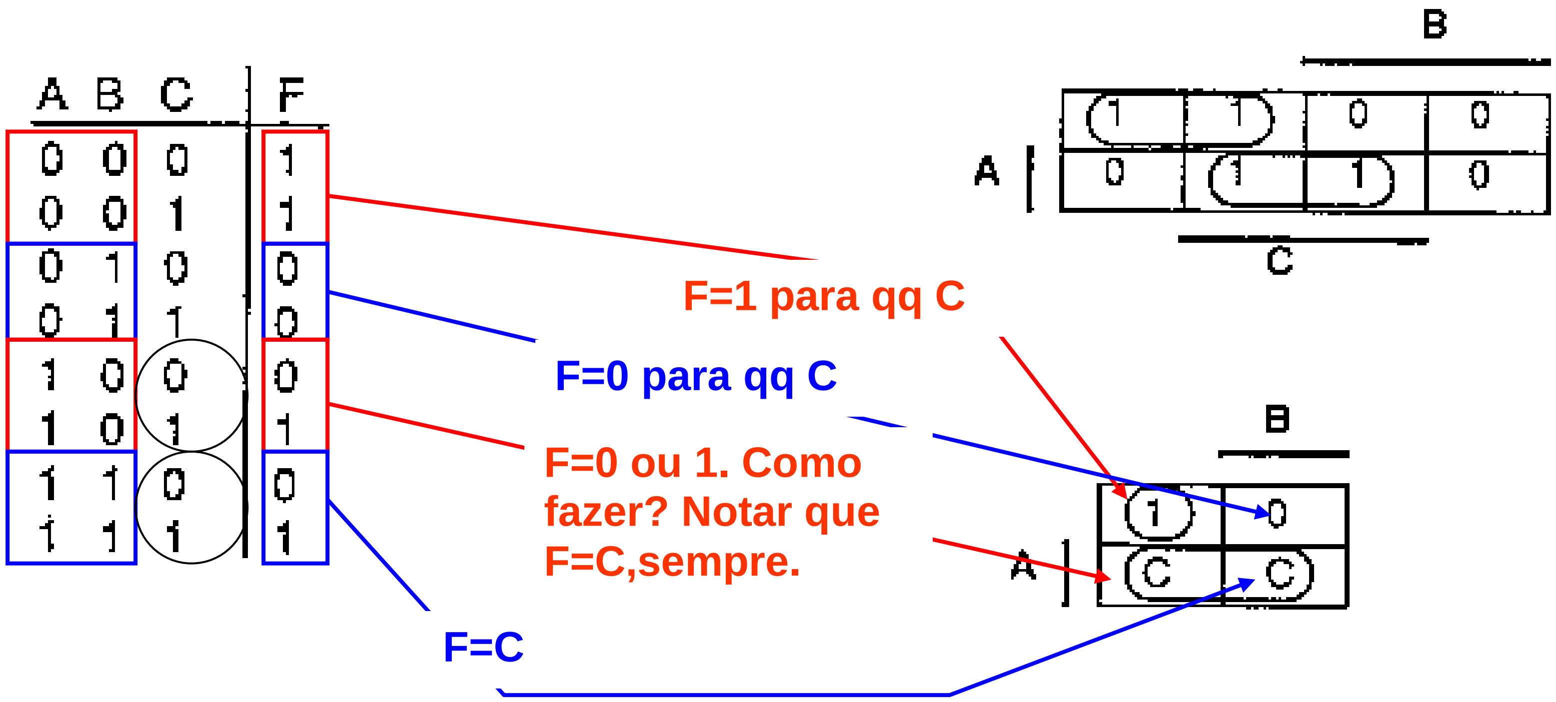
Os **mapas reduzidos** (ou ***variable-entered maps* – VEM**) permitem ultrapassar esta dificuldade: são mapas de Karnaugh em que o nº de células é ainda uma potência de 2 mas inferior a 2^n (n = nº de variáveis da função).

- ☞ Se "entrar" uma variavel no mapa ➔ **redução** do nº de células para **metade**
- ☞ Se "entrarem" duas variáveis no mapa ➔ **redução** do nº de células para **um quarto**

Um **mapa reduzido** contém, para além de valores **0** e **1**, **variáveis lógicas** da função ou mesmo uma **expressão de várias variáveis**.

Exemplo

Redução do mapa de 8 células para metade, fazendo a variável **C** “entrar” no mapa:



Para preencher um **mapa reduzido**, pode começar-se por construir uma **tabela de verdade reduzida**:

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	C
1	1	C

	B	
	1	0
A	C	C

Obtenção de um mapa reduzido quando a tabela original contém **condições indiferentes**:

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	X

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	C
1	1	C . X

		B
	1	0
A	C	C . X

C.X: Se C = 1, F tem um valor opcional

Se C = 0, F tem valor 0

Obtenção de um **mapa reduzido** com 2 variáveis (**C** e **D**) a "entrarem" no mapa:

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

A	B	F
0	0	$\overline{C} . D$
0	1	$\overline{C} . \overline{D} + \overline{C} . D + C . \overline{D}$
1	0	$\overline{C} . D$
1	1	$\overline{C} . \overline{D} + \overline{C} . D + C . D$

Leitura de mapas reduzidos na forma mínima soma de produtos

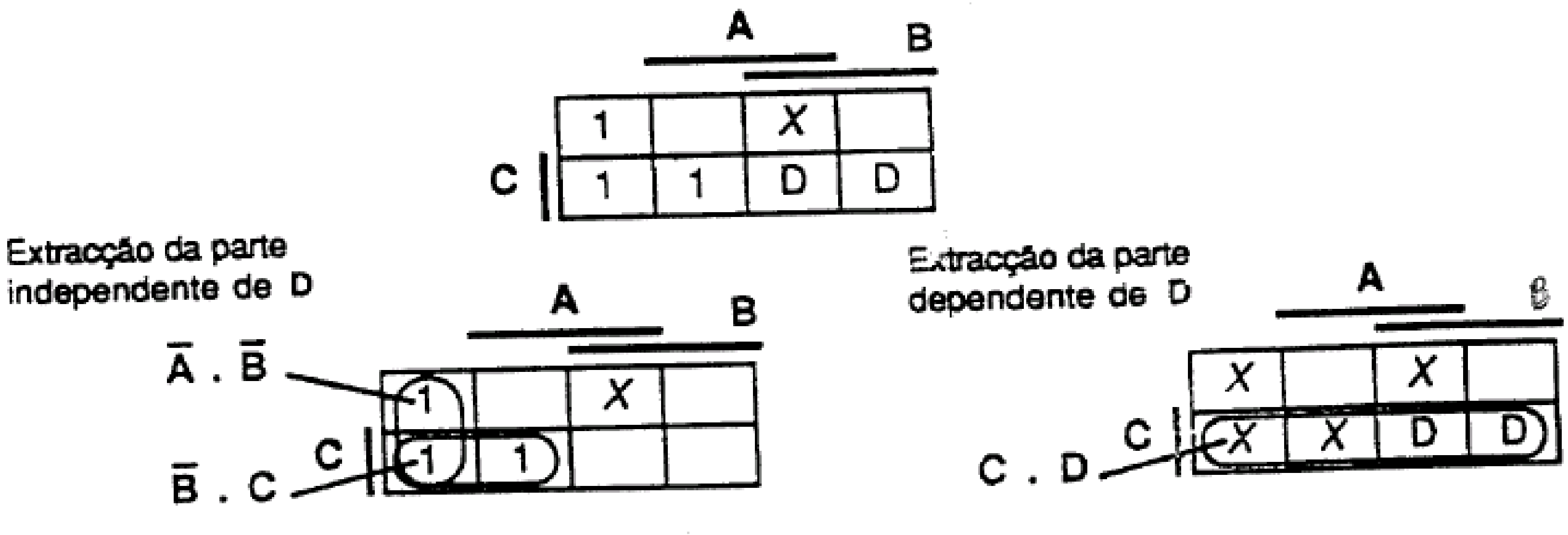
- **Caso em que existe apenas uma variável "entrada" no mapa, com todas as ocorrências da mesma polaridade**

  Se for **D** essa variável:

  - **1ª Fase**: Extracção da **parte não dependente** de **D** (substituir a variável "entrada" por "**0**")

  - **2ª Fase**: Extracção da **parte dependente** de **D** ("**1**s" e "**X**s" passam a ser considerados opcionais)

Exemplo



A expressão de **F** na **forma mínima soma de produtos** é:

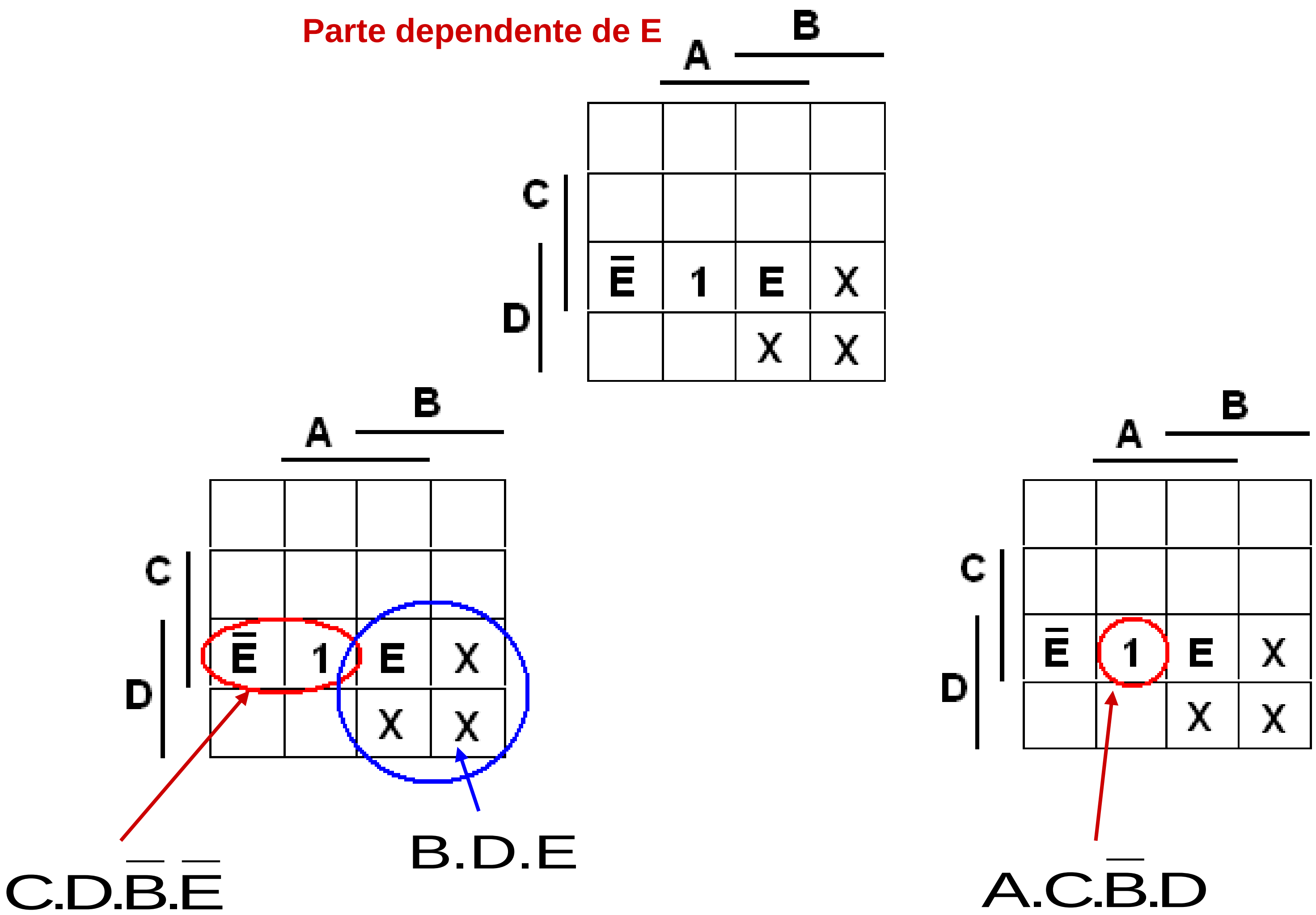
$$F = \overline{A}.\overline{B} + \overline{B}.C + C.D$$

- **Caso em que existe apenas uma variável “entrada” no mapa, com ocorrência das duas polaridades**

  Se for **E** essa variável:

  - **1ª Fase**: Extrair primeiro a **parte dependente** dessa variável
  - **2ª Fase**: Extrair a **parte não dependente** de **E** (substituir a variável “entrada” por “**0**”)

Exemplo



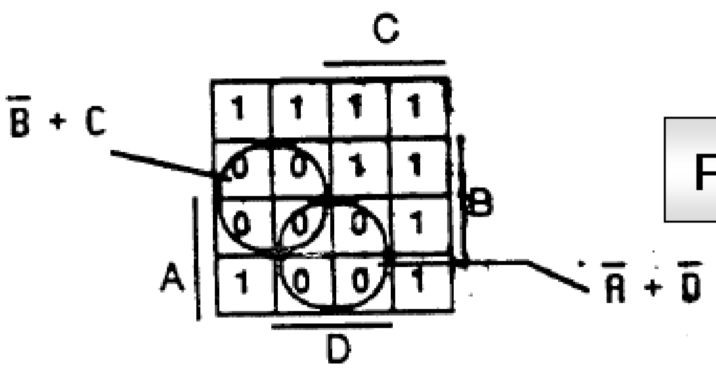
$$F = C.D.\bar{B}.\bar{E} + B.D.E + A.C.\bar{B}.D$$

Leitura de mapas de Karnaugh na forma mínima produto de somas

A partir dos **mapas de Karnaugh**, também é possível extrair uma função na **forma mínima produto de somas**:

- Agrupam-se os **0**'s (da mesma forma que se agrupam os **1**'s na **forma mínima soma de produtos**)
- Resultam factores em que as ocorrências das variáveis aparecem negadas

Exemplo



$$F = (\overline{B} + C).(\overline{A} + \overline{D})$$