

Álgebra de Boole



Introdução

Conforme referido anteriormente, a maioria dos circuitos digitais opera em modo binário, ou seja, os dados de entrada e de saída são **0s** ou **1s**.

Esta característica dos circuitos digitais, permite a utilização da **álgebra de Boole** como uma ferramenta de análise e projecto de sistemas digitais.

Trata-se de uma ferramenta matemática relativamente simples, que permite descrever as relações entre as entradas e saídas dos referidos circuitos, na forma de equações algébricas.



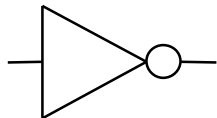
Variáveis e funções lógicas

Variável lógica - tem por domínio 2 valores lógicos distintos: **0** e **1**.

Função lógica - função de variáveis lógicas, que tem como contradomínio o conjunto lógico $\{0,1\}$.

Funções lógicas elementares

● Negação ou Inversão

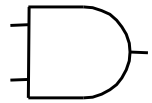


$$F(A) = \bar{A}$$

A	\bar{A}
0	1
1	0



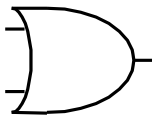
● Intersecção ou Produto Lógico



$$F(A, B) = A.B$$

A	B	A . B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

● Reunião ou Soma Lógica



$$F(A, B) = A + B$$

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Descrição das funções lógicas

As funções lógicas podem ser descritas por:

- Expressões lógicas
- Tabelas de verdade
- Mapas de Karnaugh

Expressões lógicas

As expressões lógicas ligam variáveis e constantes lógicas através das funções elementares, como por exemplo:

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B + C$$

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B + 0 + \overline{B}.C$$



Formas de expressões lógicas

Soma de produtos: Quando a expressão é composta por somas lógicas de produtos lógicos.

$$A.B.C + \overline{A}D + B.D$$

Produto de somas: Quando a expressão é composta por produtos lógicos de somas lógicas.

$$(A + B + C).(\overline{A} + D).(B + D)$$



Há quatro formas particulares:

Forma canónica soma de produtos: Quando a expressão é composta por somas lógicas de produtos lógicos que contêm todas as variáveis da função.

$$F(A, B, C) = A.B.C + \bar{A}.B.C + A.B.\bar{C}$$

Mintermos

Forma canónica produto de somas: Quando a expressão é composta por produtos lógicos de somas lógicas que contêm todas as variáveis da função.

$$F(A, B, C) = (A + B + C).(\bar{A} + B + C).(A + B + \bar{C})$$

Maxterms



Forma mínima soma de produtos: Quando a expressão é composta por somas de produtos em que o número de termos e de variáveis é mínimo.

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}.\overline{B}.C.D + B.\overline{C}$$

Forma mínima produto de somas: Quando a expressão é composta por produtos de somas em que o número de factores e de variáveis é mínimo.

$$F(A, B, C, D) = (\overline{B} + \overline{C}).(B + C).(\overline{A} + \overline{C})$$



Geralmente, a implementação de circuitos digitais faz-se a partir de **formas mínimas**:

- 👉 Não são necessariamente únicas
- 👉 Não implicam necessariamente a realização lógica mais simples em termos de *hardware*



Postulados da álgebra de Boole

P1	$X = 0 \quad \text{ou} \quad X = 1$	
P2	$0 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$
P3	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	$0 + 1 = 1 + 0 = 1$
P4	$1 + 1 = 1$	$0 + 0 = 0$
P5	$\bar{0} = 1$	$\bar{1} = 0$



Teoremas da álgebra de Boole

T1	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
T2	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
T3	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
T4	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
T5	$\bar{\bar{A}} = A$	
T6	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$

Idempotência

Comutatividade

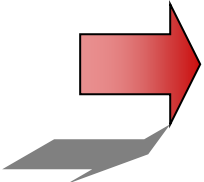


T7	$A.B.C = A.(B.C) = (A.B).C$	$A+B+C = A+(B+C) = (A+B)+C$	Associatividade
T8	$A.(B+C) = A.B + A.C$	$A+B.C = (A+B).(A+C)$	Distributividade
T9	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A+B} = \overline{A}. \overline{B}$	De Morgan
T10	$A + A.B = A$	$A.(A+B) = A$	Absorção
T11	$A + \overline{A}.B = A + B$	$A.(\overline{A} + B) = A.B$	Termo/Factor Menor
T12	$A.B + A.\overline{B} = A$	$(A+B).(A+\overline{B}) = A$	Adjacência Lógica
T13	$A.B + \overline{A}.C + B.C = A.B + \overline{A}.C$	$(A+B).(\overline{A}+C).(B+C) = (A+B).(\overline{A}+C)$	Termo/Factor Incluído



Simplificação de expressões pelos teoremas

A simplificação de expressões lógicas pelos teoremas é um **processo heurístico**:

 Progredimos no sentido que **parece melhor** mas **não há a certeza** de ser atingida a melhor solução (expressão mais simples)

Exemplos:



Aplicação do Teorema T10

$$X + X.Y = X$$

Se um termo ou expressão (X) ocorre num termo “maior” (XY), o termo “maior” é redundante!



$$F = \textcircled{C.D} + A.\bar{B}.\bar{C} + \textcircled{B.C.D} \Leftrightarrow$$

Considerando $X=C.D$ e $Y=B$, pode-se aplicar o teorema T10, obtendo-se:

$$\Leftrightarrow F = C.D + A.\bar{B}.\bar{C}$$



Aplicação do Teorema T11

$$X + \bar{X}.Y = X + Y$$

Se uma variável ou expressão (X) ocorre num termo “maior” (XY) mas na forma negada, essa variável ou expressão na forma negada é redundante!



$$F = A.B + B.E.F + \bar{A}.C.D + \bar{B}.C.D \Leftrightarrow$$

Pelo teorema da Distributividade (T8), coloca-se o termo C.D em evidência:

$$\Leftrightarrow F = A.B + B.E.F + C.D.(\bar{A} + \bar{B}) \Leftrightarrow$$

Aplicando o teorema de De Morgan (T9), transforma-se o termo $\bar{A} + \bar{B}$ em $\overline{A.B}$:

$$\Leftrightarrow F = A.B + B.E.F + C.D.(\overline{A.B}) \Leftrightarrow$$

Considerando $X=A.B$, $Y=C.D$ e $\bar{X}=\overline{A.B}$, pode-se aplicar o teorema T11, obtendo-se finalmente:

$$\Leftrightarrow F = A.B + B.E.F + C.D$$



Aplicação do Teorema T12

$$X.Y + X.\bar{Y} = X$$

Se dois termos de uma expressão só diferem numa variável, que num dos termos ocorre na forma directa e no outro na forma negada, essa variável é redundante em ambos!

$$F = A.B.\bar{C} + A.B.C + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} \Leftrightarrow$$

Aplicando o Teorema T12, duas vezes, obtém-se:

$$\Leftrightarrow F = A.B + \bar{A}.\bar{B}$$



Situações que podem ocorrer

Na expressão seguinte, o teorema T12 seria provavelmente aplicado da seguinte forma:

$$F = A.\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F = A.\bar{B} + \bar{A}.\bar{C}$$

Mas, se a mesma expressão fosse apresentada por outra ordem, aparentemente só se poderia aplicar uma única vez esse teorema:

$$F = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F = \bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C$$

Esta não é a expressão mais simples, no entanto, nenhum teorema lhe pode ser aplicado de forma imediata!