Ejercicios resueltos - Procesos Estocásticos

Daniel Gálvez - daniel.glvez@uc.cl

Contents

Material usado

- “Ejercicio x de libro” hace referencia al ejercicio x del respectivo capitulo del libro Introduction to Probability Models, edición 11, de Sheldon M. Ross.
- Se utilizo Essentials of Stochastic Processes, edición 3, de Rick Durrett.
- Se utilizo Introduction to Stochastic Processes with R, de Robert P. Dobrow.
- Se utilizaron las ayudantías correspondientes al primer semestre del año 2023. Se pueden encontrar en el siguiente link.
- Se utilizaron ejercicios de las clases del profesor Mauricio Castro.
- Los recordatorios se basaron en las clases del profesor Mauricio Castro.

1 Cadenas de Markov a tiempo discreto

1.1 Recordatorios

I denota al espacio de estados.

Un estado es absorbente si $P_{ii} = 1$

$P_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ corresponde a la probabilidad de ir de i a j en un paso.

$P_{ij}^m = P(X_{n+m} = j|X_n = i)$ corresponde a la probabilidad de ir de i a j en m pasos.

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_k P_{ik}^m P_{kj}^n$$

La m ésima transición, es decir, la probabilidad $P_{ij}^m = P(X_{n+m} = j|X_n = i)$ se puede calcular mediante la m ésima potencia de la matriz de transición.

Diremos que i alcanza a j, denotado por $i \to j$, si existe algún $n \geq 0$ tal que $P_{ij}^n > 0$.

Diremos que $C \subset I$ es un conjunto cerrado de estados si solo si ningún estado fuera de C puede ser alcanzado desde algún estado en C , es decir, si solo si $P_{ij}^n = 0$, $\forall i \in C$, $j \notin C$ $\forall n \geq 0$.

La cerradura de un estado $i \in I$ se define por $C(i) = \{j \in I : i \to j\}$. Básicamente son todos los estados que alcanza i. Lo anterior es sin importar la cantidad de pasos que necesite para i para alcanzar algún estado j.

Una matriz de transición P es irreductible si solo si $C(i) = I$ para todo $i \in I$. Básicamente que la cerradura de cada estado es el espacio de estados, osea, que todos los estados se alcanzan entre si.

d corresponde al periodo de cada estado. Se calcula como el MCD entre todos los pasos de cada camino posible que hay para empezar en el estado i, y volver al estado i.

Si $d = 1$, se dice que i es aperiódico, en caso contrario, i es de periodo d.

Un estado transiente es el cual se puede estar un numero finito de pasos. Es decir, que una vez que se sale de este estado, ya no se puede volver mas.

f_{ij}^n corresponde a la probabilidad de que la primera llegada a j partiendo de i se realice en n pasos.

f_{ii}^n es la probabilidad de que el primer retorno a i sea en n pasos

$f_{ij} = \sum_{n\geq 1} f_{ij}^n = P(X_n = j, \text{algún} n \geq 0 | X_0 = i)$

f_{ii} es la probabilidad de retornar a i en un tiempo finito.

Diremos que i es recurrente o persistente si $f_{ii} = 1$

Diremos que i es transiente si $f_{ii} < 1$

Si i es recurrente, entonces $\mu_i = \sum_{n\geq 1} n f_{ii}^n$ corresponde a la esperanza del tiempo de retorno o tiempo medio de retorno.

i es persistente no nulo si $\mu_i < \infty$.

i es persistente nulo si $\mu_i = \infty$

i es ergodico si es aperiódico y persistente no nulo.

Si queremos calcular f_{ij}^n, podemos hacer lo siguiente: Hacer Q_j como la matriz de transición con 0 en la j esima columna, y calcular recursivamente usando f_j la j esima columna de la matriz de transición.

$$f_j^n = Q_j f^{n-1}$$

Lo anterior nos entrega una vector de la forma

$$f_{ij}^n = \begin{bmatrix} f_{1j}^n \\ f_{2j}^n \\ f_{3j}^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Otra forma para lo anterior, es resolver

$$(\mathbf{I} - Q_j) f_j = P_j$$

Donde Q_j es la matriz de transición con 0 en la columna j, $f_j = \begin{bmatrix} f_{1j} & f_{2j} & f_{3j} & \cdots \end{bmatrix}^T$, y $P_j = \begin{bmatrix} P_{1j} & P_{2j} & P_{3j} & \cdots \end{bmatrix}^T$

La distribución estacionaria se calcula mediante

$$\pi = \pi\mathbb{P}$$
$$\sum_i \pi_i = 1$$

Teorema: Si la matriz de transición tiene espacio de estados finito, es irreducible y aperiódica, entonces la distribución estacionaria existe.

Puede existir la distribución estacionaria sin ser aperiódica.

Si la matriz de transicion es doblemente estocastica, entonces la distribucion estacionaria es la uniforme discreta.

Para calcular probabilidades de absorción podemos reorganizar la matriz $\mathbb{P}$ de forma tal que

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline 0 & \mathbf{I} \end{array}\right)$$

Donde $\mathbf{Q}$ de $T \times T$ con estados transientes, $\mathbf{R}$ de $K \times K - T$. Luego, la probabilidad de absorción se puede calcular como

$$S = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} R$$

Y el tiempo esperado para entrar de un estado transiente a otro es

$$S = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$$

Una cadena de Markov es reversible si se cumple

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

para todo i, j en el espacio de estados.

1.2 Ejercicios

1. Suponga que la probabilidad de llover mañana dependa de la condición previa del tiempo, solo a través de si llueve o no hoy día y no de las condiciones del tiempo en dıas pasados. Suponga que si llovió hoy día entonces lloverá mañana con probabilidad α y si no llovió hoy entonces mañana lloverá con probabilidad β. ¿Como podemos representar este ejemplo usando cadenas de Markov?

   Sea Ω el espacio de estados. Podemos plantear Ω como

   $$\Omega = \{\text{llueve, no llueve}\}$$

   $$\Omega := \{0{,}1\}$$

   La matriz de transición corresponde a

   $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Suponga que si llueve o no hoy depende de las condiciones pasadas del tiempo atravesé de los dos últimos días. Por ejemplo, si llovió en los dos días pasados, entonces lloverá mañana con probabilidad 0.7. Si llovió hoy pero no ayer, lloverá mañana con probabilidad 0.5. Si llovió ayer pero no hoy, lloverá mañana con probabilidad 0.4. Si no llovió en los dos días pasados lloverá mañana con probabilidad 0.2.

   Podemos plantear el espacio de estados como

   $$\Omega = \{\text{llovió hoy y ayer, llovió ayer y no ayer, no llovió hoy y si ayer, no llovió hoy ni ayer}\}$$

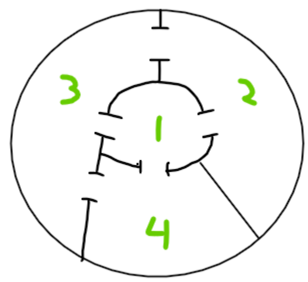
   $$\Omega := \{0, 1, 2, 3\}$$

   Para poder plantear la matriz, hay que pensar de la siguiente forma, si hoy llovió y ayer llovió (LL), entonces al dar el siguiente paso nos movemos al día de mañana, donde no llueve, y ayer que ya llovió, nos queda (NL). Otro ejemplo para entender es que si hoy llovió y ayer no, entonces pasar a que mañana llueva y ayer no llovió, es el evento imposible, pues ayer si llovió. Entonces la matriz nos queda como

   $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Considere un ratón entrenado en el siguiente laberinto. Al estar en un sector en un instante dado elige una puerta de salida al azar y se cambia de sector ¿Cual es la ley de probabilidad después de dos cambios de sector?, ¿Como cambian los resultados si inicialmente el ratón es colocado en el sector 1?, ¿Que pasa si el estado inicial es aleatorio?

   El laberinto corresponde a



   Podemos plantear el espacio de estados como

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

   Asumiendo equiprobabilidad se tiene que la matriz de transición es

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   La ley de probabilidad luego de 2 cambios de sector esta dada por P^2.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & 1/3 & 1/9 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/9 & 4/9 & 1/9 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Si el ratón es colocado inicialmente en 1, entonces podemos obtener las probabilidades mediante

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbb{P}^2$$

Si el ratón es colocado aleatoriamente, entonces podemos obtener las probabilidades mediante

$$\begin{bmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix} \mathbb{P}^2$$

4. Sea la matriz

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 3/5 & 1/15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcule la probabilidad de retornar al estado 3 dado que el estado inicial es el 3.

Para esto hacemos

$$Q_3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 3/5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

y

$$f^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{pmatrix}$$

Entonces calculamos

$$f^2 = Q_3 f^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \cdot 1/3 \\ 3/5 \cdot 1/3 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = Q_3 f^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/3 \\ 3/5 \cdot 1/6 \cdot 1/3 \end{pmatrix}$$

Luego de un par de cálculos es fácil notar que

$$f^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \left(1/6\right)^{n-1} \\ 1/5 \left(1/6\right)^{n-2} \end{pmatrix}$$

De modo que la probabilidad de retornar al estado 3 en un tiempo finito es

$$f_{33} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{6^{n-2}} = \frac{23}{75}$$

5. Considere el ejemplo 1 con matriz de transición

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcule la probabilidad de que llueve en 4 días, dado que llovió hoy.

Para esto usamos Chapman-Kolmogorov. Nos interesa P^4_{00}. Entonces

$$\begin{aligned} P^4_{00} = P^{2+2}_{00} &= \sum_{k=0}^{1} P^2_{0k}P^2_{k0} \\ &= \frac{61}{100}\frac{61}{100} + \frac{39}{100}\frac{13}{25} \\ &= 0.5749 \end{aligned}$$

6. An urn always contains 2 balls.Ball colors are red and blue.At each stage a ball is randomly chosen and then replaced by a new ball, which with probability 0.8 is the same color, and with probability 0.2 is the opposite color, as the ball it replaces.If initially both balls are red, find the probability that the fifth ball selected is red.

Dado que nos interesan las bolas rojas, podemos plantear el siguiente espacio de estados

$$\Omega = \{0 \text{ bolas rojas}, 1 \text{ bola roja}, 2 \text{ bolas rojas}\}$$

De modo que la matriz de transición esta dada por

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Note que para calcular P_{10} se razono de la siguiente manera: Hay una roja, y pasar a tener 0 rojas, es que se eligio entre las dos bolas, la azul, por lo cual la probabilidad se obtiene mediante

$$P_{10} = P(\text{elegir azul}) \times P(\text{color contrario al rojo}) = \frac{1}{2} \times 0.2 = 0.1$$

Y P_{12} se saca por complemento.

La probabilidad de interés se puede obtener mediante

$$
\begin{aligned}
P(\text{5ta bola sea roja}) &= \sum_{i=0}^{2} P(\text{5ta roja}, X_4 = i | X_0 = 2) \\
&= \sum_{i=0}^{2} \frac{P(\text{5ta roja}, X_4 = i, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \frac{P(\text{5ta roja}, X_4 = i, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} \frac{P(X_4 = i, X_0 = 2)}{P(X_4 = i, X_0 = 2)} \\
&= \sum_{i=0}^{2} P(\text{5ta roja}|X_4 = i, X_0 = 2) P(X_4 = i | X_0 = i) \\
&= \sum_{i=0}^{2} P(\text{5ta bola sea roja } |X_4 = i) P(X_4 = i | X_0 = 2) \\
&= 0P_{2,0}^4 + \frac{1}{2}P_{2,1}^4 + 1P_{2,2}^4 \\
&= 0.7084
\end{aligned}
$$

De la linea 4 a la 5 se uso la propiedad markoviana.

7. In a sequence of independent flips of a fair coin, let N denote the number of flips until there is a run of three consecutive heads. Find $P(N \leq 8)$.

   Se pide la probabilidad de que en menos de 8 lanzamientos aparezcan 3 caras consecutivas. Podemos plantear el espacio de estados como

$$
\Omega = \\
\{\text{0 caras consecutivas, 1 cara consecutiva, 2 caras consecutivas, 3 caras consecutivas}\} \\
\Omega := \{0, 1, 2, 3\}
$$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

   Entonces nos interesa la probabilidad de pasar de tener 0 caras a tener 3 caras de forma consecutiva en los primeros 8 lanzamientos corresponde a $P_{0,3}^8 \approx 0.418$

8. **Ejercicio 3 -Ayudantia 1**

   Sea $\pi^{(0)} := \pi_0$. Calculamos lo necesario

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 2) &= \sum_{i=1}^{3} P_{i2}\pi_i^{(0)} \\
&= P_{12}\pi_1^{(0)} + P_{22}\pi_2^{(0)} + P_{32}\pi_3^{(0)} \\
&= 0.34
\end{aligned}
$$

   Para calcular $P(X_2 = 3)$, debemos calcular $\pi^{(1)}$, lo cual se hace de forma análoga al anterior, obteniendo así

$$
\pi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.34 & 0.36 \end{pmatrix}
$$

   Ahora si

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 3) &= \sum_{i=1}^{3} P_{i3}\pi_i^{(1)} \\
&= P_{12}\pi_1^{(1)} + P_{22}\pi_2^{(1)} + P_{32}\pi_3^{(1)} \\
&= 0.312
\end{aligned}
$$

   Para calcular $\mathbb{E}(X_1)$ usamos la definición de esperanza

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1) &= 1 \cdot P(X_1 = 1) + 2 \cdot P(X_1 = 2) + 3 \cdot P(X_1 = 3) \\
&= 0.3 + 2 \cdot 0.34 + 3 \cdot 0.36
\end{aligned}
$$

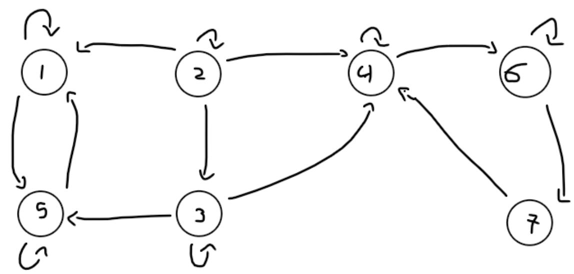
   Para las probabilidades podemos hacer lo siguiente

$$
\begin{aligned}
P(X_7 = 2|X_5 = 3) &= P_{32}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{3} P_{3k}P_{k2} \\
&= 0.35
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1) &= P(X_2 = 3, X_1 = 2, X_0 = 1)\frac{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}{P(X_1 = 2, X_0 = 1)}\frac{P(X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \\
&= P(X_2 = 3|X_1 = 2, X_0 = 1)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_0 = 1) \\
&= P(X_2 = 3|X_1 = 2)P(X_1 = 2|X_0 = 1)P(X_0 = 1) \\
&= P_{23}P_{12}\pi_1^{(0)} \\
&= 0.036
\end{aligned}
$$

9. **Ejercicio 1 - Ayudantía 2**

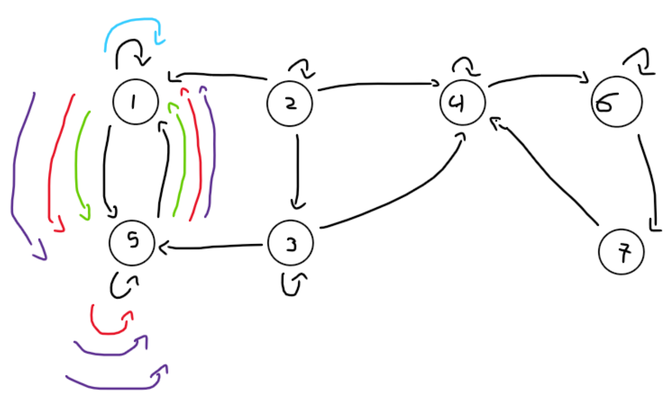
Podemos dibujar la cadena



La cerradura de cada estado corresponde a

- $C(1) = \{1, 5\}$
- $C(2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = I$
- $C(3) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $C(4) = \{4, 6, 7\}$
- $C(5) = \{1, 5\}$
- $C(6) = \{4, 6, 7\}$
- $C(7) = \{4, 6, 7\}$

Luego, como hay cerraduras diferentes de I, la cadena no es irreducible. Los estados transientes son $\{2, 3\}$, y los recurrentes son $\{1, 5, 4, 6, 7\}$. No existen estados absorbentes. Los conjuntos cerrados son $\{1, 5\}$ y $\{4, 6, 7\}$. Para calcular el periodo de cada estado, se mostrara un ejemplo para entender, y luego poner los resultados



Para llegar al uno, se puede dar 1 paso (celeste), se pueden dar 2 pasos (verde), se pueden dar 3 pasos (rojo), se pueden dar 4 pasos (morado), y así sucesivamente...

Entonces, una forma de calcular el MCD es haciendo la siguiente tabla

Estado	Pasos	MCD
1	{1,2,3,4,...}	1
2	{1,2,3,4,...}	1
3	{1,2,3,4,...}	1
4	{1,3,4,...}	1
5	{1,2,3,4,...}	1
6	{1,3,4,...}	1
7	{3,4,5,...}	1

Dado que todos los estados son aperiódicos (periodo 1), la cadena es aperiódica.

10. **Ejercicio 2 - Ayudantía 2** Nos interesa calcular f_{12}^4,f_{22}^4 y f_{32}^4. Para esto armamos lo correspondiente

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ f^1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos recursivamente f^4, obteniendo

$$f^4 = \begin{pmatrix} 1/2^4 \\ 1/2^4 + 1/2^4 \\ 1/2^4 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene que $f_{12}^4 = 1/2^4$, $f_{22}^4 = 1/2^4 + 1/2^4$ y $f_{32}^4 = 1/2^4$.

11. **Ejercicio 3 - Ayudantía 2** Haciendo el dibujo podemos ver que $C(2) = \{2, 4\}$, por lo cual la cadena no es irreducible. Para demostrar que el estado 1 es transiente, podemos hacer lo mismo que antes

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \ , \ f_1^1 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculando recursivamente se llega a que

$$f_1^n = \begin{pmatrix} 0.3 \cdot 0.5^{n-1} \\ 0 \\ 0.5^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $n \geq 2$

Entonces para que el estado 1 sea transiente, se debe tener $f_{11} < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} f_{11} &= 0.4 + \sum_{n=2}^{\infty} 0.3 \cdot 0.5^{n-2} \\ &= 0.4 + 0.3 \sum_{n=2}^{\infty} 0.5^{n-1} \\ &= 0.7 < 1 \end{aligned}$$

Luego, para demostrar que el estado 2 es recurrente, se debe cumplir $f_{22} = 1$. Calculando recursivamente análogo al anterior se llega a que

$$f_{22}^n = 0.5^n$$

par $n \geq 1$.

Entonces

$$\begin{aligned} f_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} 0.5^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

12. **Ejercicio 1 - Ayudantía 3** Para que el estado 1 sea ergodico, debe ser aperiódico y persistente no nulo. Haciendo el dibujo es fácil ver que es aperiódico. Ahora debemos corroborar que $\mu_1 < \infty$.

    Calculando recursivamente como antes se llega a que

    $$f_{11}^n = (1-p)q^{n-3}(1-q)$$

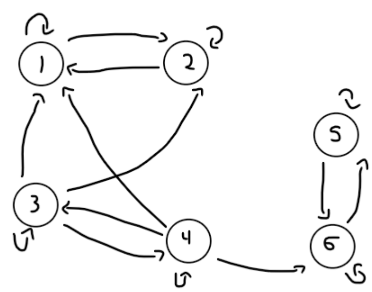
    para $q \geq 3$. Entonces

    $$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 \cdot p + 2 \cdot 0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(1-p)q^{n-3}(1-q) \\ &= p + (1-q)(1-p) \sum_{n=3}^{\infty} nq^{n-3} \\ &= p + (1-q)(1-p) \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)q^n \\ &= p + (1-q)(1-p) \left(\sum_{n=0}^{\infty} nq^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3q^n \right) \end{aligned}$$

Luego, como $q \in (0,1)$, lo anterior converge. Corroborándose así que el estado 1 es ergodico.

13. **Ejercicio 2 - Ayudantía 3**

Dibujamos



Se tiene que las cerraduras son

- $C(1) = \{1, 2\}$
- $C(2) = \{1, 2\}$
- $C(3) = I$
- $C(4) = I$
- $C(5) = \{5, 6\}$
- $C(6) = \{5, 6\}$

Para determinan la clasificación de cada estado, podemos recordar que si $i \longleftrightarrow j$, entonces la clase se comparte, del dibujo se tiene que

$$\text{Conjuntos de Estados recurrentes: } \{1, 2\} \text{ y } \{5, 6\}$$

$$\text{Estados transientes: } \{3, 4\}$$

Basta con demostrar entonces que 1 y 5 son recurrentes, y que 3 es transiente.

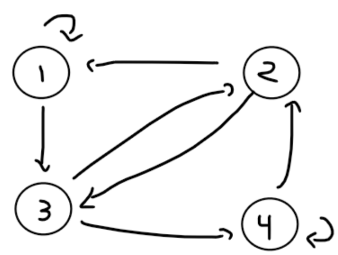
14. **Ejercicio 1 - Ayudantía 4**

    La primera matriz no tiene distribución estacionaria, ya que no es irreducible. La segunda si tiene, a pesar de ser no aperiódica, podemos calcular su distribución estacionaria y llegar a que vale

    $$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1-p}{2} & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \end{pmatrix}$$

15. **Ejercicio 2 - Ayudantía 4**

    Podemos hacer un dibujo

    La cerradura de cada estado es

    - $C(1) = I$
    - $C(2) = I$
    - $C(3) = I$
    - $C(4) = I$

    La cadena es irreducible. Luego, calculando el MCD es fácil ver que es aperiódica, y como tiene espacio de estados finitos la distribución estacionaria existe. Calculando

    $$\pi = \pi P$$
    $$\sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1$$

    Se tiene $\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \end{pmatrix}$

16. **Ejercicio 3 - Ayudantía 4**

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & V & 30 & 15 & P & A \\
\hline
V & 0.55 & 0.35 & 0 & 0.05 & 0.05 \\
30 & 0.15 & 0.54 & 0.25 & 0.05 & 0.01 \\
15 & 0.2 & 0 & 0.75 & 0.04 & 0.01 \\
P & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Los estados transientes corresponden a $V, 30, 15$, y los absorbentes P, A. Para calcular el tiempo esperado tomamos la matriz Q como

$$
Q = \begin{array}{c|ccc}
 & V & 30 & 15 \\
\hline
V & 0.55 & 0.35 & 0 \\
30 & 0.15 & 0.54 & 0.25 \\
15 & 0.2 & 0 & 0.75
\end{array}
$$

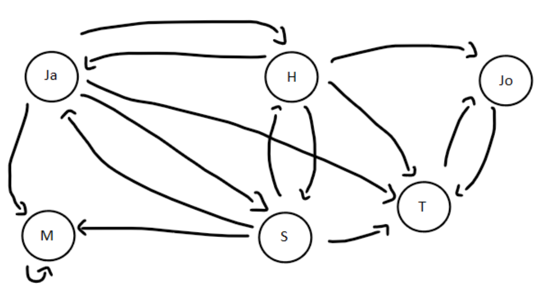
Ahora solo hay que calcular $S = (\mathbf{I} - Q)^{-1}$. Y para la probabilidad de que se pague el préstamo se debe calcular $S = (\mathbf{I} - Q)^{-1}R$. Con R la matriz de los estados absorbentes.

17. **Ejercicio 4 - Ayudantía 4**

El espacio de estados son los niños.

$$\Omega = \{\text{Ja,H,Jo,M,S,T}\}$$

Las iniciales de cada uno. Un dibujo de la cadena es



La matriz de transición corresponde a

$$Q = \begin{array}{c} \\ Ja \\ H \\ Jo \\ M \\ S \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} Ja & H & Jo & M & S & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mediante el dibujo y el contexto, se tiene que $\{M, Jo, T\}$ son recurrentes, y $\{Ja, H, S\}$ transientes. Para calcular el tiempo esperado podemos usar Q como

$$Q = \begin{array}{c} \\ Ja \\ H \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Ja & H & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculamos $S = (\mathbf{I} - Q)^{-1}$ para el tiempo esperado, y $S = (\mathbf{I} - Q)^{-1}R$ para la probabilidad de absorción.

18. **Ejercicio 4 - Ayudantía 5** La matriz de transición es

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

19. Considere una cadena de Markov $\{X_n\}$, para $n = 0, 1, ...$ con espacio de estados $I = \{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

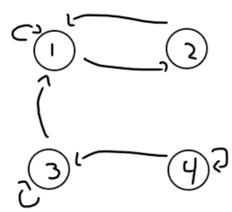
(a) Clasifique los estados de la cadena de Markov, determine si es irreducible o no y el periodo de los estados.

(b) Determine el tiempo medio de recurrencia para el estado 1.

(c) Calcule formalmente la probabilidad de que alguna vez la cadena ingrese al estado 3, dado que el estado inicial es el 4.

(d) ¿Cuál es el tiempo esperado que la cadena pasa en el estado 3 cuando parte desde el estado 3?

El dibujo de la cadena es



(a) Con el dibujo es fácil ver que $\{1, 2\}$ son recurrentes y $\{3, 4\}$ transientes. Tenemos que la cerradura del estado 1 es $C(1) = \{1, 2\}$, por lo cual no es irreducible. También es fácil calcular y llegar a que la cadena es aperiódica.

(b) Se pide μ_1. Entonces buscamos lo necesario

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \ , \ f_1^1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculando de manera recursiva se llega a que

$$f_1^1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ f_1^2 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 2/3 \cdot 1/3 \\ 2^2/3^2 \end{pmatrix} \ , \ f_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \\ 2^2/3^3 + 2^2/3^3 \end{pmatrix}$$

para $n \geq 4$ se tiene que $f_{11}^n = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot 0 + \cdots \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

(c) Nos piden f_{43}, entonces buscamos lo necesario

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \ , \ f_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Calculando recursivamente se llega a que

$$f_{43}^n = \frac{2}{3} \frac{1}{3^{n-1}}$$

para $n \geq 1$.

Entonces

$$f_{43} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{1}{3^{n-1}} = 1$$

(d) Para el tiempo esperado, podemos aprovechar que el 3 es un estado transiente, además de que la matriz ya esta ordenada por estados transientes y recurrentes, de modo que

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Hacemos el calculo respectivo

$$S = (\mathbf{I} - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Luego, el tiempo esperado que la cadena pasa en el estado 3 cuando parte del estado 3 es de $\frac{3}{2}$.

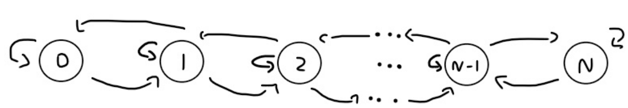
20. En cada instante, una urna contiene N bolitas, algunas de ellas son de color negro, y las restantes de color blanco. Considere un experimento para el que en cada etapa se lanza una moneda con probabilidad $0 < p < 1$ de dar cara. Si sale cara, entonces se escoge al azar una bolita de la urna y se reemplaza por una bolita blanca; si sale sello, se escoge al azar una bolita de la urna y se reemplaza por una de color negro. Sea X_n el número de bolitas blancas en la $n-$ésima etapa.

(a) Clasifique los estados de la cadena.

(b) Encuentre las probabilidades de transición.

(c) Para $N = 1$ determine si la cadena es reversible en el tiempo o no. ¿Cuál es la distribución estacionaria?

(a) Un dibujo de la cadena es



Donde fácilmente se puede ver que todos los estados se comunican, por lo cual es irreducible. Todos los estados son aperiódicos.

(b) Sea i el numero de bolitas blancas. Las probabilidades de transición están dadas por

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = i | X_n = i) &= P(\text{Salga cara y salga bola blanca}) + P(\text{Salga sello y salga bola negra}) \\
&= \frac{pi}{N} + \frac{(1-p)(N-i)}{N} \\
P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) &= P(\text{Salga cara y salga bola negra}) \\
&= \frac{p(N-i)}{N} \\
P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) &= P(\text{Salga sello y salga bola blanca}) \\
&= \frac{(1-p)i}{N}
\end{aligned}$$

(c) Para el caso $N = 1$ la matriz es

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Calculando la distribución estacionaria se tiene

$$\pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \end{pmatrix}$$

Para que sea reversible en el tiempo se debe corroborar que

$$\begin{aligned}
\pi_0 P_{01} &= \pi_1 P_{10} \\
(1-p)p &= p(1-p)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la cadena es reversible.

21. Un individuo posee r paraguas que utiliza para ir de su casa a la oficina, y viceversa. Si está en casa (la oficina) al principio (final) del día y está lloviendo, se llevará un paraguas a la oficina (casa), siempre que haya uno que llevarse. Si no llueve, nunca se lleva el paraguas. Supongamos que, independientemente del pasado, llueve al principio (final) del día con probabilidad p.

   (a) Defina una cadena de Markov con $r+1$ estados, que le ayude a determinar la proporción de tiempo que el individuo se moja. Nota: El individuo se moja si está lloviendo y todos los paraguas están en su otra ubicación).

   (b) Considere el caso $r = 2$. Muestre que la probabilidades en el límite están dadas por:

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{q}{r+q} & i = 0 \\ \dfrac{1}{r+q} & i = 1, ..., r \end{cases}$$

   (c) Considerando $r = 2$, ¿Cual es la fracción del tiempo que el individuo se moja?

   (a) Las probabilidades de transición están dadas por

$$P(X_{n+1} = r | X_n = 0) = 1$$
$$P(X_{n+1} = r - i | X_n = i) = 1 - p$$
$$P(X_{n+1} = r - i + 1 | X_n = i) = p$$

   (b) Para el caso $r = 2$, podemos plantear la matriz de la siguiente manera

$$\text{Casa} \rightarrow \text{Oficina} \quad \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \overset{\text{Oficina} \rightarrow \text{Casa}}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

   Tomemos los siguientes ejemplos para entender el porqué de la matriz. Recordar que hay un total de 2 paraguas. Si vamos de la casa a la oficina, donde hay 1 paraguas, y luego nos devolvemos a la casa, donde hay un total de 1 paraguas, entonces no se ocupo el de la oficina, por lo cual no llovió $(1-p)$. Si vamos de la casa a la oficina, donde hay 1 paraguas, y luego nos devolvemos a la casa donde hay 2 paraguas, entonces tuvimos que usar el paraguas de la oficina, es decir, llovió (p).

Luego, basta con resolver $\pi = \pi P$, $\sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1$.

(c) La fracción del tiempo que el individuo se moja es de $p\frac{q}{r+q}$.

22. Considere la siguiente variante de un paseo aleatorio en los enteros $\{0, 1, ..., N\}$: en cada instante, e independientemente de cualquier otra cosa, se lanza una moneda con probabilidad $0 < p < 1$ de dar cara. Si sale cara, y el estado actual es i, entonces el siguiente estado será $i + 1$, excepto cuando el estado actual es N, en cuyo caso el estado siguiente es también N (es decir, hay una barrera en N). En cambio, si al lanzar la moneda sale sello, el siguiente estado será 0, cualquiera que sea el estado actual. Modele esta situación como una cadena de Markov, muestre que dicha cadena es ergódica, y calcule la fracción de tiempo que, en el largo plazo, se visita un estado distinto de 0.

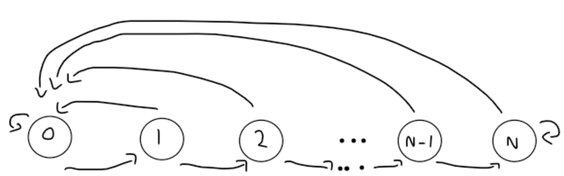
Podemos plantear las probabilidades de transición como

$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = P_{i,i+1} = p$$
$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = i) = P_{i,0} = 1 - p = q$$

La matriz de transición corresponde a

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & N-1 & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{matrix} & \begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ q & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un dibujo de la cadena es



Notamos que la cadena es irreducible, pues todos los estados se comunican. Se tiene que $P_{0,0} > 0$, entonces el estado 0 es aperiódico, y como todos se comunican, la cadena es aperiódica. Dado las dos condiciones anteriores, y tener espacio de estados finito, los estados son recurrentes no nulos. Por lo cual la cadena es ergodica.

Planteamos las ecuaciones de balance

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= q\sum_{i=0}^{N}\pi_i \\
\pi_1 &= \pi_0 p \\
\pi_2 &= \pi_1 p \\
&\vdots \\
\pi_{N-1} &= \pi_{N-2} p \\
\pi_N &= \pi_{N-1} p + \pi_N p \\
\sum_{i=0}^{N}\pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

Reemplazando la ultima ecuación en la primera se tiene que $\pi_0 = q$. Ahora

$$
\begin{aligned}
\pi_1 = \pi_0 p &\Rightarrow \pi_1 = qp \\
\pi_2 = \pi_1 p &\Rightarrow \pi_2 = qp^2 \\
\pi_3 = \pi_2 p &\Rightarrow \pi_3 = qp^3 \\
&\vdots \\
\pi_{N-1} = \pi_{N-2} p &\Rightarrow \pi_{N-1} = qp^{N-1}
\end{aligned}
$$

En general $\pi_k = qp^n$ para $n = 0, .., N-1$. Reemplazos esto en la penúltima ecuación

$$
\begin{aligned}
\pi_N &= \pi_{N-1} p + \pi_N p \\
\pi_N &= qp^{N-1} p + \pi_N p \\
\pi_N - p\pi_N &= qp^N \\
\pi_N(1-p) &= qp^N \\
\pi_N q &= qp^N \\
\pi_N &= p^N
\end{aligned}
$$

Luego, la probabilidad en el largo plazo de visitar un estado distinto de 0 es

$$
\begin{aligned}
P(\text{Visitar un estado distinto de } 0) &= 1 - P(\text{Visitar el estado } 0) \\
&= 1 - q \\
&= p
\end{aligned}
$$

23. Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una secuencia de números positivos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ con $a_i < 1, \forall i$. Considere una cadena de Markov con espacio de estado en los enteros no negativos con probabilidad de transición $p_{0,i} = a_i$, $p_{i,0} = a_i$ y $p_{i,i} = 1 - a_i$ para $i \geq 1$. El objetivo de este problema es mostrar que la cadena es irreducible, aperiódica y recurrente, pero la distribución estacionaria no existe.

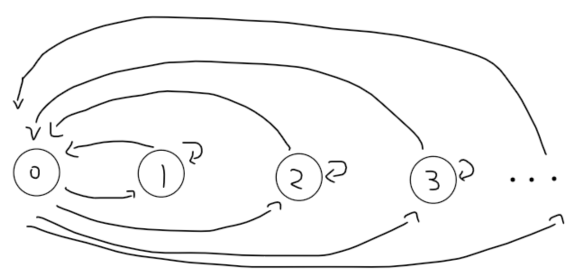
    (a) Explique por que la cadena es irreducible y aperiódica

    (b) Calcule $f_{00}^{(n)}$ y muestre que la cadena es recurrente.

    (c) Muestre que la distribución estacionaria no existe.

    (d) Suponga ahora que $p_{0,i} = a_i$, $p_{i,0} = 1 - a_i$ y $p_{i,i} = a_i$ para $i \geq 1$. ¿En este caso existe la distribución estacionaria? Si es así, demuéstrelo.

    (a) Un dibujo de la cadena es

    Del dibujo podemos ver que todos los estados se comunican, además de tener que $P_{0,i} \geq 0$ y $P_{1,} \geq 0$ para $i \geq 1$, por lo cual es irreducible. Dado que todos los estados se comunican, comparten la clase, y tenemos que $P_{i,i} > 0$ para $i \geq 1$, siendo los estados $i = 1, 2, ...$ aperiódicos, lo cual implica que el estado 0 también lo sea.

    (b) Calculamos recursivamente lo pedido. La matriz de transición es

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \dots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & a_1 & a_2 & \dots \\
a_1 & 1 - a_1 & 0 & \dots \\
a_2 & 0 & 1 - a_2 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Con

$$Q_0 = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 1-a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad f_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Calculamos las primeras iteraciones para encontrar el patrón

$$f_0^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \cdots \\ a_1(1-a_1) \\ a_2(1-a_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$f_0^{(3)} = \begin{pmatrix} a_1^2(1-a_1) + a_2^2(1-a_2) + \cdots \\ a_1(1-a_1)^2 \\ a_2(1-a_2)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$f_0^{(4)} = \begin{pmatrix} a_1^2(1-a_1)^2 + a_2^2(1-a_2)^2 + \cdots \\ a_1(1-a_1)^3 \\ a_2(1-a_2)^3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Se obtiene que $f_{00}^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2(1-a_i)^{n-2}$ para $n \geq 2$. Ahora nos interesa que $f_{11} = 1$ para que sea recurrente. Entonces

$$\begin{aligned} f_{00} &= \sum_{n=2}^{\infty} f_{00}^{(n)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2(1-a_i)^{n-2} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_i^2(1-a_i)^{n-2} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_i^2(1-a_i)^{n} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{1-(1-a_i)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{a_i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Luego, el estado 0 es recurrente, y como la cadena es irreducible, entonces todos los estados son recurrentes.

(c) Planteamos las ecuaciones de balance

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \pi_i \\
\pi_1 &= \pi_0 a_1 + \pi_1 (1 - a_1) \\
\pi_2 &= \pi_0 a_2 + \pi_2 (1 - a_2) \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que $\pi_n = \pi_0$. Reemplazando esto en la ultima ecuación tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1 \\
\sum_{i=0}^{\infty} \pi_0 &= 1 \\
\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} 1 &= 1
\end{aligned}
$$

Lo cual no tiene solución, lo que demuestra que la distribución estacionaria no existe.

(d) Plantemos las ecuaciones nuevamente

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \sum_{i=1}^{\infty}(1-a_i)\pi_i \\
\pi_1 &= \pi_0 a_1 + \pi_1 a_1 \\
\pi_2 &= \pi_0 a_2 + \pi_2 a_2 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}$$

En general $\pi_n = \dfrac{a_n}{1-a_n}\pi_0$. Reemplazamos esto en la ultima ecuación

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1 \\
\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\pi_0 a_i}{1-a_i} &= 1
\end{aligned}$$

Dado que a_n esta acotado entre 0 y 1, la serie converge, por lo cual si existe la distribución estacionaria.

24. **Ejercicio 1 del libro**

La matriz de transición corresponde a

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

25. **Ejercicio 5 del libro**

Se tiene que la distribución inicial es $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$. Para calcular lo pedido necesitamos π_3. Esto se calcula mediante

$$\pi_3 = \pi_0 P^3$$

Haciendo el calculo correspondiente se tiene

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 59/144 & 43/216 & 169/432 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3) &= 0 \cdot \frac{59}{144} + 1 \cdot \frac{43}{216} + 2 \cdot \frac{169}{432} \\ &= \frac{53}{54}\end{aligned}$$

26. **Ejercicio 8 del libro**

    Leyendo bien el problema, podemos pensar que la distribución inicial corresponde a que salga cara o sello respectivamente, es decir, $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, pues es el primer lanzamiento es equiprobable. Para la matriz de transición, podemos pensar en que el espacio de estados son las monedas, $\Omega = \{\text{Moneda I, Moneda II}\}$. A modo de ejemplo, si hoy estamos con la moneda I, entonces mañana seguiremos con la moneda I con probabilidad 0.7, pues salio hoy salio cara. Entonces

    $$P = \begin{array}{c} \\ \text{M I} \\ \text{M II} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{M I} & \text{M II} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$

    Para calcular la probabilidad pedida nos interesa π_3. Entonces

    $$\pi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P^3$$

    Lo cual nos da $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1333/2000 & 667/2000 \end{pmatrix}$

    Luego, la probabilidad pedida es $\dfrac{1333}{2000}$. La probabilidad de que el viernes salga cara dado que el lunes salio cara es simplemente lo mismo, pero con P^4.

27. **Ejercicio 9 del libro**

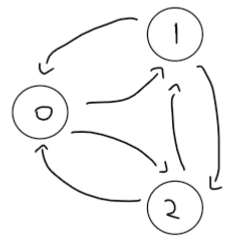
    El espacio de estados puede ser la racha de caras que llevamos, es decir, $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. La matriz de transición es

    $$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

    La probabilidad de interés corresponde a $P^{10}_{0,3} = \dfrac{65}{128}$.

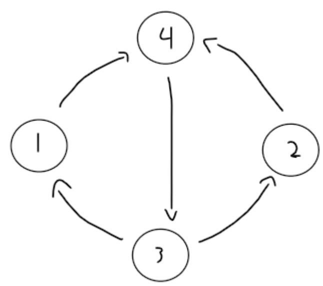
28. **Ejercicio 14 del libro**

Un dibujo de P_1 es



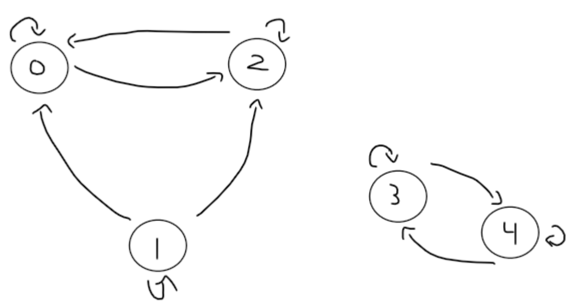
Donde claramente se ve que $\{0, 1, 2\}$ son recurrentes. Y además la cadena es periódica.

Un dibujo de P_2 es



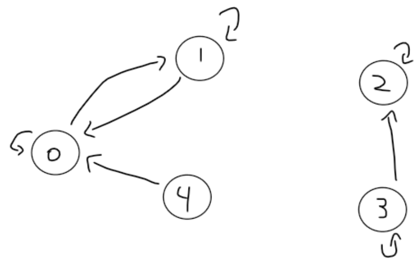
Donde claramente se ve que $\{1, 2, 3, 4\}$ son recurrentes.

Un dibujo de P_3 es



Donde claramente se ve que $\{0, 2\}$ y $\{3, 4\}$ son recurrentes y $\{1\}$ transiente.

Un dibujo de P_4 es



Donde claramente se ve que $\{3\}$ y $\{4\}$ son transientes, y $\{0,1\}$ y $\{2\}$ son recurrentes.

29. **Ejercicio 18 del libro**

    La matriz de transición corresponde a

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{M I} & \text{M II} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{M I} \\ \text{M II} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

    Para encontrar la proporción, hay que resolver

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 0.6 + \pi_2 0.5 \\ \pi_2 &= \pi_1 0.4 + \pi_2 0.5 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

    Resolviendo se llega a que $\pi = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

    Luego, la proporción de flips que usa la moneda 1 es de $\frac{5}{9}$. Para la otra probabilidad es simplemente calcular $P^5_{1,2}$.

30. **Ejercicio 21 del libro**

    Para la distribución estacionaria podemos notar que la matriz de transición suma 1 tanto en columnas como filas, por lo cual es doblemente estocástica. Usando el teorema 1.1 se tiene que la distribución estacionaria es

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

31. **Ejercicio 24 del libro**

    El espacio de estados es $\Omega = \{\text{Rojo, Azul , Blanco}\}$. La matriz de transición es

$$P = \begin{array}{r} \\ \text{Rojo} \\ \text{Azul} \\ \text{Blanca} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rojo} & \text{Azul} & \text{Blanca} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 3/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/7 & 2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \end{array}$$

    Resolviendo $\pi = \pi P$ se llega a que

$$\pi = \begin{pmatrix} 25/89 & 36/89 & 28/89 \end{pmatrix}$$

32. **Ejercicio 28 del libro**

    En el largo plazo podemos calcular la probabilidad pedida como

$$P(\text{Comer}) = \\ P(\text{Ganar})P(\text{Comer}|\text{Se gano}) + P(\text{Perder})P(\text{Comer}|\text{Se perdió})$$

    De modo que nos resulte una matriz de transición mas fácil de plantear. Usando los espacio de estados $\Omega = \{\text{Ganar,Perder}\}$Esta corresponde a

$$P = \begin{array}{r} \\ \text{Ganar} \\ \text{Perder} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Ganar} & \text{Perder} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

    Resolviendo las ecuaciones de balance se llega a que

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

    La probabilidad pedida corresponde a

$$\begin{aligned} P(\text{Comer}) &= P(\text{Ganar})P(\text{Comer}|\text{Se gano}) + P(\text{Perder})P(\text{Comer}|\text{Se perdió}) \\ &= 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

33. **Ejercicio 30 del libro**

    Podemos usar el espacio de estados como $\Omega = \{\text{Camión,Auto}\}$, Y la matriz

$$P = \begin{array}{r} \\ \text{Camión} \\ \text{Auto} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Camión} & \text{Auto} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

    P_{01} se puede interpretar como: La probabilidad de que un camión siga a un auto es $1/5$. Se pide la distribución estacionaria. Calculando se obtiene

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{15}{19} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

    De modo que la fracción de autos es de $\frac{4}{19}$, pues esto corresponde a la proporción de camiones que hay por auto.

34. **Ejercicio 31 del libro**

    Podemos tomar el espacio de estados como $\Omega = \{\text{Sunny, Cloudy, Rainy}\}$. De modo que la matriz de transición es

$$P = \begin{array}{r} \\ \text{S} \\ \text{C} \\ \text{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{S} & \text{C} & \text{R} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

    La distribución estacionaria nos queda como

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

35. **Ejercicio 34 del libro**

    La matriz de transición corresponde a

$$P = \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & 1-p_3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

    Y basta con resolver $\pi = \pi P$. Para la probabilidad se puede plantear de la siguiente manera: Sea A el evento de moverse en contra de las manecillas, y $F = i$ la posición en que esta. Entonces

$$P(A) = P(A|F=1)P(F=1) + P(A|F=2)P(F=2) + P(A|F=3)P(F=3)$$

36. **Ejercicio 35 del libro**

    La matriz corresponde a

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{array}$$

    Y basta con calcular $\pi = \pi P$.

37. **Ejercicio 36 del libro**

    La matriz corresponde a

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0.2 & 0.8 \end{array}$$

    La primera probabilidad corresponde a

$$P(\text{Probabilidad de ir de 0 a 0})P(\text{Probabilidad de enviar un mensaje desde 0})+ \\ P(\text{Probabilidad de ir de 0 a 1})P(\text{Probabilidad de enviar un mensaje desde 1}) = p_0 0.4 + p_1 0.6$$

    La segunda probabilidad corresponde a

$$p_0 P^4_{0,0} + p_1 P^4_{0,1} = 0.2512 p_0 + 0.7488 p_1$$

    Para el largo plazo resulta $\pi_0 p_0 + \pi_1 p_1$

38. **Ejercicio 38 del libro**

    Similar al anterior

39. **Ejercicio 40**

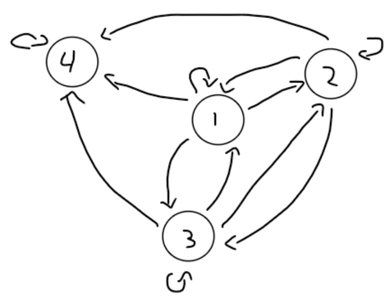
    Tenemos que las probabilidades de transición son

$$P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = \frac{1}{2}$$
$$P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = \frac{1}{2}$$
$$P(X_{n+1} = 12 | X_n = 1) = \frac{1}{2}$$
$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 12) = \frac{1}{2}$$

Luego, la matriz es doblemente estocástica (se puede plantear la matriz y verificarlo), por lo cual la distribución estacionaria es $\pi_i = \frac{1}{2}$ para $i = 1, ..., 12$

40. **Ejercicio 63 del libro**

Notemos que calcular lo pedido a mano es muy difícil, en vez de eso, podemos usar una interpretación y llegar a lo pedido de una manera mas eficiente. Dibujemos la cadena



Donde notamos que los estados $\{1, 2, 3\}$ son transientes, por lo cual podemos calcular el tiempo medio de recurrencia mediante

$$S = (\mathbf{I} - Q)^{-1}$$

con

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Haciendo los cálculos se llega a que

$$S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2.20 & 1.37 & 0.62 \\ 0.96 & 3.10 & 0.89 \\ 1.31 & 2.06 & 1.93 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde se obtiene que

$$s_{13} = 0.62\ ,\ s_{23} = 0.89\ ,\ s_{33} = 1.93$$

Ahora calculemos los f_{i3}.

$$\begin{aligned}
f_{13} &= \frac{s_{13}}{s_{33}} = 0.32 \\
f_{23} &= \frac{s_{23}}{s_{33}} = 0.46 \\
f_{33} &= \frac{s_{33}-1}{s_{33}} = 0.48
\end{aligned}$$

41. **Ejercicio 2.12 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Las probabilidades de los extremos corresponden a

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) &= 1 \\
P(X_{n+1} = K-1|X_n = K) &= 1
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que hay i bolitas azules en la urna izquierda, entonces hay $K-i$ bolitas negras. En la urna derecha, hay $K-i$ azules, e i rojas. Por lo cual las probabilidades de transición corresponden a

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = i+1|X_n = i) &= P(\text{Salga roja en la izquierda})P(\text{Salga azul en la derecha}) \\
&= \frac{K-i}{K}\frac{K-i}{K} \\
&= \frac{(K-i)^2}{K^2} \\
P(X_{n+1} = i-1|X_n = i) &= P(\text{Salga azul en la izquierda})P(\text{Salga roja en la derecha}) \\
&= \frac{i^2}{K^2} \\
P(X_{n+1} = i|X_n = i) &= P(\text{Salga azul en izquierda})P(\text{Salga azul en derecha})+ \\
&\quad P(\text{Salga roja en izquierda})P(\text{Salga roja en derecha}) \\
&= \frac{i}{K}\frac{K-i}{K} + \frac{K-i}{K}\frac{i}{K} \\
&= \frac{2i(K-i)}{K^2}
\end{aligned}$$

2 Proceso Poisson

1. If immigrants to area A arrive at a Poisson rate of ten per week, and if each immigrant is of English descent with probability $\frac{1}{12}$, then what is the probability that no people of English descent will emigrate to area A during the month of February?

   Se tiene $\lambda = 10$ en una semana. Se tiene que es descendiente de ingles son probabilidad $\frac{1}{12}$ y que no sea descendiente de ingles $\frac{11}{12}$. Armemos el proceso con dos tipos. Sea $N_1(t) = \#$ inmigrantes descendientes de ingleses, y $N_2(t) = \#$ inmigrantes no descendientes de ingleses. Nos interesa la probabilidad de que ningún inmigrante descendiente de ingles llegue al área A durante 4 semanas, pues un mes tiene 4 semanas. Entonces, es de interés la probabilidad $P(N_2(4) = 0)$, pues queremos que no llegue nadie descendiente de ingles. Por lo cual la media de $N_2(t)$ es

$$\tau = \#\text{ Semanas} \times \lambda \times \text{Probabilidad descendiente ingles}$$
$$\tau = 4 \times 10 \times \frac{1}{12} = \frac{10}{3}$$

   Entonces

$$P(N_2(4) = 0) = \frac{(10/3)^0 e^{-10/3}}{0!} = e^{-10/3}$$

2. Considere un sistema en el cual individuos, en cualquier momento son clasificados en uno de r posibles estados. Acorde a una cadena de Markov se tiene probabilidades de transición $P_{i,j}$, $i, j = 1, ..., r$. Un individuo está en el estado i durante un periodo de tiempo e independientemente de los estados previos, estará en el estado j durante el siguiente periodo de tiempo con probabilidad P_{ij}. Los individuos se mueven de manera independiente. El número de individuos en los estados $1, 2, ..., r$ son variables aleatorias independientes Poisson con medias $\lambda_1, ..., \lambda_r$. Se está interesado en la distribución conjunta del número de individuos en los estados $1, 2, ..., r$ en el tiempo n.

   Sea el proceso $N_j(i)$ la cantidad de individuos que inicialmente están en i, y pasan al estado j en el tiempo n, con $j = 1, ..., r$. Por enunciado, tenemos que la probabilidad de estar durante un determinado tiempo en un determinado estado es $P_{i,j}$, por lo cual, al tiempo n, la probabilidad es la enésima transición, es decir, $P^n_{i,j}$. Ahora, el numero de individuos en el estado i, es *Poisson* con λ_i, por lo cual se tiene que

$$N_j(i) \sim P(\lambda_i P^n_{i,j})$$

   Ahora, como tenemos que todo es independiente, nos interesa el numero total de individuos en cada estado $j = 1, ..., r$ al tiempo n , es decir, nos interesa la suma del proceso desde $i = 1$ hasta $i = r$, es decir, nos interesa

$$\sum_{i=1}^{r} N_j(i)$$

   Como cada proceso individual es Poisson independiente de cada una, se tiene que el numero total de individuos en cada estado j al tiempo n es Poisson con media $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P^n_{i,j}$, para $j = 1, ..., r$.

3. Un local de completos abre a las 08:00 horas. De 08:00 a 11:00 horas llegan clientes (en promedio) de manera creciente y constante con una tasa de 5 clientes por hora a las 08:00 y alcanzando un máximo de 20 clientes a las 11:00. De 11:00 a 13:00 horas (en promedio), la tasa de llegadas de clientes se mantiene constante en 20 clientes por hora. En promedio, la tasa de llegadas cae constantemente desde las 13:00 hasta el cierre (17:00), momento en el cual registra 12 clientes por hora. Se asume que el # de clientes que llegan en intervalos disjuntos de tiempo al local son independientes. Interesa la probabilidad que ningún cliente llegue el día lunes entre las 08:30 y 09:30 horas.

   Destacar los intervalos disjuntos. En el intervalo $[8, 11]$ se tiene la función $5 + 5(t - 8)$, pues en cada hora llegan 5 clientes, iniciando desde las 8. En el intervalo $[11, 13]$, se tiene la función constante 20. En el intervalo $[13, 17]$, se tiene la función $20 - 2(t - 13)$, pues desde las 13 horas decae constantemente hasta llegar a 12 clientes por hora, a las 17 horas. Notar que cada tiempo corresponde a la hora del día. Entonces la función de intensidad es

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 8 \\ 5 + 5(t-8) & 8 \leq t \leq 11 \\ 20 & 11 \leq t \leq 13 \\ 20 - 2(t-13) & 13 \leq t \leq 17 \\ 0 & 17 < t \leq 24 \end{cases}$$

   Entonces, nos interesa la probabilidad de que ningún cliente llegue el día lunes entre las 8:30 y 9:30, el numero de arrobos puede modelarse mediante la media $\lambda = m\left(\frac{17}{2} + 1\right) - m\left(\frac{17}{2}\right) = m(19/2) - m(17/2)$, pues $\frac{17}{2} + 1 = 9.30$ y $\frac{17}{2} = 8.30$, entonces la media se calcula como

$$\int_{17/2}^{19/2} 5 + 5(t-8)dt = 10$$

   Entonces el proceso $N(19/2) - N(17/2)$ es Poisson de parámetro $\lambda = 10$. Luego, como nos interesa que nadie llegue, nos piden

$$P(N(19/2) - N(17/2) = 0) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = e^{-10}$$

   Por lo cual, la probabilidad de que ningún cliente llegue entre las 8:30 y 9:30 es de e^{-10}.

4. Suponga que llegan ofertas no negativas para comprar un artículo que desea vender según un proceso de Poisson con tasa λ. Suponga que cada oferta es el valor de un variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$. Una vez presentada la oferta para usted, debe aceptarlo o rechazarlo y esperar la próxima oferta. Suponemos que usted incurre en costos a una tasa c por unidad de tiempo hasta que se vende el artículo, y que su objetivo es para maximizar su rendimiento total esperado, donde el rendimiento total es igual a la cantidad recibido menos el costo total incurrido. Supongamos que emplea la política de aceptar la primera oferta que es mayor que algún valor especificado y. (Este tipo de política, que nosotros llamada política y, se puede demostrar que es óptima.) ¿Cuál es el mejor valor de y? Cuál es el máximo rendimiento neto esperado?

   Tenemos que

   - Cada oferta $\sim f(x)$
   - Se tiene un costo c por cada oferta hasta que se venda
   - Se acepta de inmediato si al oferta es $> y$

   En base a lo que tenemos, podemos denotar como $\overline{F}(x) = P(X > x)$, si la oferta es mayor a un valor x, es de interés en particular que sea mayor a y, por lo cual, cada oferta $\sim \overline{F}(y)$. Entonces cada oferta en particular es un proceso Poisson con taza $\lambda\overline{F}(y)$. Notar que el tiempo hasta que se acepte una oferta es $Exp(\lambda\overline{F}(y))$. Esto pensarlo de la siguiente manera, si tenemos una oferta que se rechaza, entonces hay que esperar un tiempo t_i para la otra oferta, y si se acepta, entonces el tiempo es t_i, pero t_i es exponencial, y con el parámetro mencionado anteriormente. Entonces, denotemos por $R(y)$ el retorno total esperado según la política. Esto se puede calcular de la siguiente manera

   $$\mathbb{E}[R(y)] = \mathbb{E}[\text{Aceptar la oferta}] - \mathbb{E}[c\cdot\text{Tiempo para aceptar la oferta}]$$

   Pues tenemos que calcular la esperanza de aceptar una oferta cualquiera, y a eso, debemos restarle el tiempo que nos demoramos en aceptar, y recordar que cada oferta que rechazamos nos cuesta un valor c. Recordamos que $\mathbb{E}[\text{Tiempo para aceptar la oferta}]$ es exponencial. Entonces

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[R(y)] &= \mathbb{E}[\text{Aceptar la oferta}] - c\mathbb{E}[\text{Tiempo para aceptar la oferta}] \\ &= \mathbb{E}(X|X > y) - \frac{c}{\lambda\overline{F}(y))} \\ &= \int_0^\infty x f_{X|X>y}(x)dx - \frac{c}{\lambda\overline{F}(y))}\end{aligned}$$

5. **Ejemplo 4 - El problema de los cupones**

   Hay m tipos diferentes de cupones Cada vez que una persona recoge un cupón se trata, independientemente de los obtenidos con anterioridad, de un cupón tipo j con probabilidad p_j, con $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Sea N el número de cupones que hay que coleccionar para tener una colección completa de al menos uno de cada tipo. Encuentre $\mathbb{E}[N]$.

   Tenemos

   - m tipos de cupones diferentes
   - Cada cierto tiempo se encuentre un cupón j con probabilidad p_j

   En base al enunciado y a lo anterior, podemos armar el proceso Poisson con taza $\lambda = 1$, pues nos interesa uno cada tipo en particular. Ahora, es claro que en particular, es un proceso Poisson con j tipos, denotemos el proceso $N_j(T)$ el numero de cupones de tipo j recolectados en el tiempo t, el cual corresponde a iid Poisson de taza $\lambda p_j = 1 \cdot p_j = p_j$. Denotemos X_j el tiempo en que el primer evento ocurre del j esimo proceso, es decir, el tiempo en que salga un cupón del tipo j, y sea

   $$X = \underset{1\leq j\leq m}{max} X_j$$

   el tiempo en tener un cupón de tipo j. Cada X_j es exponencial de parámetro p_j, pues es el tiempo entre obtener un cupón de un tipo y otro. Ahora hagamos los siguientes cálculos

   $$\begin{aligned} P(X < t) &= P(\underset{1\leq j\leq m}{max} X_j < t) \\ &= P(X_1 < t)P(X_2 < t)\cdots P(X_j < t) \\ &= \prod_{j=1}^{m}(1 - e^{-p_j t}) \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty P(X > t)dt \\ &= \int_0^\infty \prod_{j=1}^{m}(1 - e^{-p_j t})dt \end{aligned}$$

   Ahora, tenemos el tiempo esperado hasta que tengamos un cupón del tipo j. Pero nos interesa la cantidad esperada. Antes de esto, es lógico pensar que podemos plantear X como la suma de los tiempos de llegada de un cupón de cada tipo, es decir

$$X = \sum_{i=1}^{N} t_i$$

Pero $t_i \sim Exp(1)$. Ahora notemos que X esta condicionado al numero de cupones que hay que coleccionar, luego

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|N))$$

Pero la cantidad de cupones es independiente del tiempo, por lo cual

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|N) &= N\mathbb{E}(t_1) \\ &= N \cdot 1 \\ \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(N) \end{aligned}$$

Pero ya tenemos esta expresión.

6. **Ejercicio 37 del libro**

   Notar que podemos expresar la esperanza de la siguiente forma

   $\mathbb{E}$[Tiempo entre reemplazos] = $\mathbb{E}$[tiempo hasta que falle] + $\mathbb{E}$[Tiempo en que se repara]

   Pero por enunciado,

   $$\mathbb{E}[\text{tiempo hasta que falle }] = \tfrac{1}{\mu}$$

   Ahora, para el tiempo en que se repara, notamos que por enunciado nos dicen que el tiempo en reparar es un proceso Poisson, de taza λ, por lo cual, el tiempo desde que ocurre un fallo hasta el reemplazo, es exponencial λ, entonces

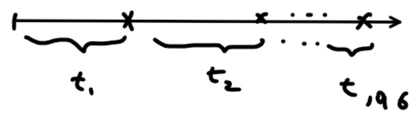
   $$\mathbb{E}[\text{Tiempo en que se repara }] = \tfrac{1}{\lambda}$$

   Finalmente

   $$\mathbb{E}[\text{Tiempo entre reemplazos}] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}$$

7. **Ejercicio 39 del libro**

Antes de calcular cosas, veamos que nos piden. Nos piden el tiempo esperado de vida, pero notemos que suceden 2.5 errores por año, gráficamente



Donde cada t_i denota los errores por año, es decir, el tiempo es años, por lo cual cada año es exponencial 2.5. Ahora, podríamos reformular la pregunta de la siguiente manera, cual es el tiempo esperado hasta que ocurran 196 errores? Ahora es mas claro, pues esto corresponde a la suma de los tiempos, es decir, la suma de los t_i, pues esto corresponde a los tiempos entre errores por año. Entonces nos interesan 196 errores, por lo cual $T_{196} \sim Gamma(196, 2.5)$. Notar también que T_n corresponde el tiempo al que ocurre el n esimo error, por lo cual nos interesaba saber el tiempo al que ocurre el 196 error.

(a) Se nos pide el tiempo esperado de vida, pero ya planteamos esto, por lo cual el tiempo esperado de vida de un individuo es $\frac{196}{2.5} = 78.4$ años

(b) se nos pide la varianza del tiempo de vida de un individuo, lo mismo que antes, la varianza es de $\frac{196}{(2.5)^2} = 31.36$ años

8. **Ejercicio 42 del libro**

   En nuestro caso es T_n.

   (a) $\mathbb{E}(T_4) = \dfrac{4}{\lambda}$

   (b) $\mathbb{E}[T_4|N(1) = 2] = \mathbb{E}(T_2 + t_3 + t_4|N(1) = 2)$

$$= \mathbb{E}[T_2|N(1) = 2] + \mathbb{E}[t_3|N(1) = 2] + \mathbb{E}[t_4|N(1) = 2]$$

Ahora notamos que las ultimas dos esperanzas, son independientes de $N(1) = 2$, pues recordemos que t_3 es el tiempo entre el 2 y tercer llegada, y no tiene nada que ver con la cantidad de llegadas al tiempo 1, análogo para t_4. Para la primer esperanza, recordemos que el tiempo de la segunda llegada, esta condicionada a una cantidad de personas al instante $t = 1$, por lo cual importa el orden, implicando que la conjunta sea

$$f_{T_1,T_2}|N(1) = 2 = \begin{cases} 2 & 0 < T_1 < T_2 < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Nos interesa la esperanza de T_2, por lo cual

$$\mathbb{E}[T_2|N(1) = 2] = \int_0^1 \int_{T_1}^1 2T_2 dT_1 dT_2 = \frac{2}{3}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_4|N(1) = 2] &= \mathbb{E}[T_2|N(1) = 2] + \mathbb{E}[t_3|N(1) = 2] + \mathbb{E}[t_4|N(1) = 2] \\ &= \frac{2}{3} + \mathbb{E}[t_3] + \mathbb{E}[t_4] \\ \mathbb{E}[T_4|N(1) = 2] &= \frac{2}{3} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

9. **Ejercicio 43 del libro**

Tenemos

- 2 servidores
- Personas llegan a una taza exponencial λ
- # de personas $\sim P(\lambda t)$
- Llega algún cliente, y si hay un cliente dentro del servidor, se va
- Pasa por el servidor 1 y luego por el 2

Sea S_1 el tiempo en el servidor 1, y S_2 el tiempo en el servidor 2. Notemos que t corresponde al tiempo entre llegada, es decir, es exponencial λ. Ahora, analicemos el problema, nos piden la proporción (probabilidad) de personas que completan el servidor 2, es decir, la proporción de personas que completan el sistema, entonces, si t es el tiempo entre llegada de personas, queremos que el tiempo entre estar en el servidor 1 y 2, sea menor al tiempo de llegada de la otra personas, pues en caso contrario tendremos que abandonar el sistema. Entonces se pide

$$P(S_1 + S_2 < t) = P(t > S_1 + S_2)$$

Ahora note el siguiente trucaso

$$\begin{aligned}
P(t > S_1 + S_2 | t > S_1) &= \frac{P(t > S_1 + S_2, t > S_1)}{P(t > S_1)} \\
P(t > S_1 + S_2 | t > S_1) &= \frac{P(t > S_1 + S_2)}{P(t > S_1)} \quad / \cdot P(t > S_1) \\
P(t > S_1) P(t > S_1 + S_2 | t > S_1) &= P(t > S_1 + S_2)
\end{aligned}$$

Tenemos lo que queríamos, ahora solo recordamos la perdida de memoria y notamos que t y S_i son exponenciales, por lo cual

$$\begin{aligned}
P(t > S_1 + S_2) &= P(t > S_1) P(t > S_1 + S_2 | t > S_1) \\
&= P(S_1 < t) P(t > S_2) \\
&= P(S_1 < t) P(S_2 < t) \\
&= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda} \frac{\mu_2}{\mu_2 + \lambda}
\end{aligned}$$

10. **Pregunta 44 del libro**

    Sabemos que t corresponde al tiempo entre llegadas de los autos, es decir, $t \sim Exp(\lambda)$. Queremos que en un intervalo de tiempo T no halla ningún auto, es decir, nos interesa

$$P(N(T) = 0) = e^{-\lambda T}$$

11. **Ejercicio 47 del libro**

    (a) El tiempo esperado hasta que otra persona llegue, sabiendo que ambos servidores están llenos se puede modelar de la siguiente manera. Denotemos S_1 y S_2 los respectivos servidores, por enunciado $S_i \sim Exp(\mu)$. Y también por enunciado sabemos que la llegada de clientes t es exponencial λ. Por lo cual podemos expresar la esperanza de la siguiente manera:

    Sea W el tiempo de interés.

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[\text{ tiempo en que se desocupe un servidor }] + \mathbb{E}[\text{ tiempo en que llegue cliente }]$$

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[min(S_1, S_2)] + \tfrac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\lambda}$$

    (b) Denotemos por W_i el tiempo hasta que ambos servidores estén llenos cuando se empieza en el server i. Se tienen la siguiente relación

$$\mathbb{E}[W_0] = \mathbb{E}[\text{ llegue la primera persona }] + \mathbb{E}[W_1]$$

$$\mathbb{E}[W_0] = \frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}[W_1]$$

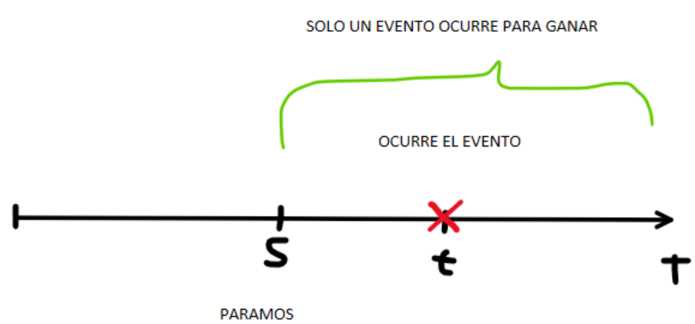
12. **Ejercicio 48 del libro**

   a) Podemos dar un argumento geométrico. Sabemos que en la llegada de una persona, estaban todos los n servidores llenos, luego, al llegar la otra persona, le va a dar igual lo que halla pasado antes, pues por la perdida de memoria, al sistema le da igual, por lo cual es equivalente a pensar que la segunda persona o segundo arribo t_2 (sin contar las personas que ya están en el sistema) sea menor al tiempo que lleva atender los n servidores, es decir, nos interesa la esperanza de $t_1 < min(S_n)$, pero esto es una exponencial $n\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, por lo cual

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{n\lambda}{\lambda + \mu}$$

13. **Ejercicio 49 del libro**

   (a) Gráficamente se tiene



   Entonces, para ganar es de interés que en el intervalo $(s, T]$ ocurra solo un evento, entonces esto es

$$P(N(T-s) = 1) = \lambda[T-s]e^{-\lambda[T-s]}$$

   Las partes siguientes son solo calculo

14. **Pregunta 50 del libro**

    Si analizamos bien el problema, podemos darnos cuenta que X esta condicionado a la llegada del tren, es decir, depende de la hora que llegue, pero este tiempo distribuye uniforme, $U \sim (0,1)$, por lo cual el proceso de interés es $\{X = N(7u), 0 < u < 1\}$. Entonces

    (a) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|U]] = \mathbb{E}[7U] = 7\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

    (b) $Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|U)] + Var[\mathbb{E}[X|U]] = \frac{7}{2} + Var(7U) = \frac{7}{2} + \frac{49}{12}$

15. **Pregunta 53 del libro**

    (a) Se pide que durante los 5 días no llueve, ya que por día se sacan 1000 unidades de agua, por lo cual

    $$P(N(5) = 0) = e^{-1}$$

16. **Pregunta 61 del libro**

Tenemos

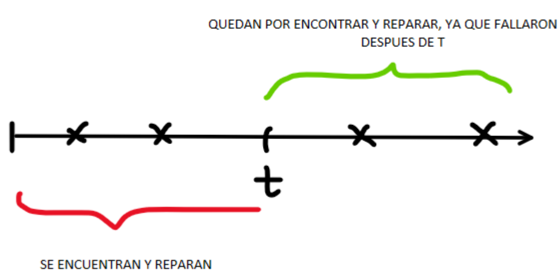
- Numero de banderas $\sim P(c\bar{t})$
- Cada bandera en particular falla al instante t según una distribución G provocando que el sistema se caiga
- Si falla el sistema se localiza y repara la bandera

Por enunciado, nos dicen que G representa el tiempo de fallo de una bandera, es decir, que el tiempo de que ocurra un fallo antes o igual al tiempo $\bar{t}$ es

$$P(t \leq \bar{t}) = G(\bar{t})$$

O verlo de otra manera, el tiempo entre fallos, es exponencial $G(\bar{t})$. Nos interesa la distribución del numero de fallos al tiempo $\bar{t}$, por lo cual esto es una Poisson con taza $cG(\bar{t})$.

En la b) nos pide la cantidad de banderas que quedan por arreglar. Pero veamos el siguiente dibujo



Entonces, esto se puede expresar como

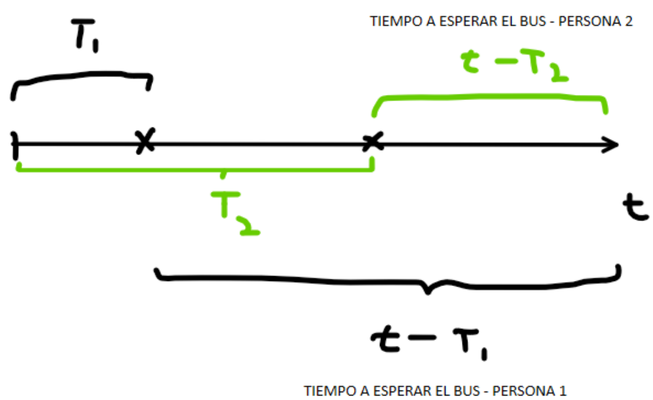
$$\begin{aligned} P(\ \times \text{ falle después de } t\ ) &= P(t > \bar{t}) \\ &= 1 - P(t \leq \bar{t}) \\ &= 1 - G(\bar{t}) \end{aligned}$$

Ahora recordamos que cada fallo tiene constante c, la cantidad de banderas que quedan por arreglar es Poisson $c(1 - G(\bar{t}))$

17. **Ejercicio 1 - Ayudantía 7**

Suponga que las personas llegan a un paradero de autobús de acuerdo con un proceso de Poisson con tasa λ. El autobús sale en el tiempo t. Sea X la cantidad total de tiempo de espera de todos los que suben al autobús en el tiempo t. Queremos determinar $Var(X)$. Sea $N(t)$ el numero que llegaron hasta el tiempo t. Determine expresiones para

(a) Primero notemos que nos interesa el tiempo de espera de todas las personas en conjunto, veamos el siguiente dibujo



Entonces, X esta condicionado al numero de personas que lleguen tal tiempo t, y como queremos la suma de cada persona en particular se tiene que

$$X = \sum_{i=1}^{N(t)} t - T_i$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|N(t)=n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} t - T_i \;\middle|\; N(t)=n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} t - T_i \;\middle|\; N(t)=n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} t - T_i \;\middle|\; N(t)=n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} t \;\middle|\; N(t)=n\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \;\middle|\; N(t)=n\right] \\
&= nt - \frac{nt}{2} \\
&= \frac{nt}{2} \\
&= \frac{N(t)t}{2}
\end{aligned}
$$

(b) Lo mismo que antes

$$
\begin{aligned}
Var(X|N(t)=n) &= Var\left[\sum_{i=1}^{N(t)} t - T_i \;\middle|\; N(t)=n\right] \\
&= Var\left[\sum_{i=1}^{n} t - T_i \;\middle|\; N(t)=n\right] \\
&= 0 + (-1)^2 Var\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \;\middle|\; N(t)=n\right] \\
&= \frac{nt^2}{12} \\
&= \frac{N(t)t^2}{12}
\end{aligned}
$$

(c) Ahora para la varianza, usamos varianza iterada.

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[Var(X|N(t)=n)] + Var(\mathbb{E}[X|N(t)=n]) \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{N(t)t^2}{12}\right] + Var\left(\frac{N(t)t}{2}\right) \\
&= \frac{\lambda t^3}{12} + \frac{\lambda t^3}{4}
\end{aligned}
$$

18. **Ejercicio 2 - Ayudantía 7**

Wayne Gretsky anoto una media de 6 participaciones de juego por partido. Suponga que la distribución de las participaciones sigue un Proceso Poisson. Además el 60% de estos fueron goles y el 40% fueron asistencias. Supongamos que se pago una bonificación de 300 dolares por un gol y 100 dolares por una asistencia.

Sean los siguientes procesos

- $N(t) = \#$ de participaciones por partido, asumiendo $t = 1$ hora
- $N_1(t) = \#$ de goles por partido $(\lambda t \cdot 0.6)$
- $N_2(t) = \#$ de asistencias por partido $(\lambda t \cdot 0.4)$

Es fácil ver que

- $N(t) \sim P(6t)$
- $N_1(t) \sim P(3.6t)$
- $N_2(t) \sim P(2.4t)$

(a) Se pide la esperanza y desviación estándar de las ganancias

$$\mathbb{E}[300N_1(t) + 100N_1(t)] = 300 \cdot 3.6 + 100 \cdot 2.4$$

$$Var(300N_1(t) + 100N_1(t)) = 300^2 \cdot 3.6 + 100^2 \ldots 2.4$$

(b) Se pide

$$P(N_1(1) = 4, N_2(1) = 2) = P(N_1(1) = 4)P(N_2(1) = 2)$$

(c) Se pide

$$\begin{aligned}
P(N(1/2) = 4|N(1) = 6) &= \frac{P(N(1/2) = 4, N(1) = 6)}{P(N(1) = 6)} \\
&= \frac{P(N(1/2) = 4, N(1) - N(1/2) = 2)}{P(N(1) = 6)} \\
&= \frac{P(N(1/2) = 4)P(N(1) - N(1/2) = 2)}{P(N(1) = 6)}
\end{aligned}$$

19. **Ejercicio 4 - Ayudantía 7**

El trafico en Snyder Hill Road en Ithaca, New York, sigue un proceso de Poisson con una tasa de 2/3 de un vehículo por minuto. El 10% de los vehículos son camiones, el otro 90% son automóviles.

(a) ¿Cual es la probabilidad de que pase al menos un camión en una hora?

Tenemos

- $N(t) = \#$ vehículos $\sim P(2/3t)$
- $N_1(t) = \#$ camiones $\sim P(1/15t)$
- $N_2(t) = \#$ autos $\sim P(0.6t)$

Se pide

$$P(N_1(60) \geq 1) = 1 - P(N_1(60) < 1)$$

(b) Dado que han pasado diez camiones en una hora, ¿cual es el numero esperado de vehículos que han pasado?

Se pide

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(60)|N_1(60) = 10] &= \mathbb{E}[N_1(60) + N_2(60)|N_1(60) = 10] \\
&= \mathbb{E}[10 + N_2(60)|N_1(60) = 10] \\
&= \mathbb{E}[10|N_1(60) = 10] + \mathbb{E}[N_2(60)|N_1(60) = 10] \\
&= 10 + \mathbb{E}[N_2(60)] \\
&= 10 + 36 \\
&= 46
\end{aligned}$$

(c) Dado que han pasado 50 vehículos en una hora, ¿cual es la probabilidad había exactamente 5 camiones y 45 autos?

Se pide

$$\begin{aligned}
P(N_1(60) = 5, N_2(60) = 45|N(60) = 50) &= \frac{P(N_1(60) = 5, N_2(60) = 45, N(60) = 50)}{P(N(60) = 50)} \\
&= \frac{P(N_1(60) = 5, N_2(60) = 45)}{P(N(60) = 50)} \\
&= \frac{P(N_1(60) = 5)P(N_2(60) = 45)}{P(N(60) = 50)}
\end{aligned}$$

20. A store opens at 8 a.m. From 8 until 10 a.m. customers arrive at a Poisson rate of four an hour. Between 10 a.m. and 12 p.m. they arrive at a Poisson rate of eight an hour. From 12 p.m. to 2 p.m. the arrival rate increases steadily from eight per hour at 12 p.m. to ten per hour at 2 p.m.; and from 2 to 5 p.m. the arrival rate drops steadily from ten per hour at 2 p.m. to four per hour at 5 p.m. Determine the probability distribution of the number of customers that enter the store on a given day.

    Podemos plantear la función de intensidad como

$$\lambda(t) = \begin{cases} 4 & 8 \leq t \leq 10 \\ 8 & 10 \leq t \leq 12 \\ t - 4 & 12 \leq t \leq 14 \\ 38 - 2t & 14 \leq t \leq 17 \end{cases}$$

    Nos interesa la tasa total del día, la cual corresponde a la suma de las tasas. Entonces

$$\lambda = m(17) - m(8) = \int_8^{10} 4dt + \int_{10}^{12} 8dt + \int_{12}^{14} t - 4dt + \int_{14}^{17} 38 - 2tdt$$

21. Students arrive at the cafeteria for lunch according to a nonhomo-geneous Poisson process. The arrival rate increases linearly from 100 to 200 students per hour between 11 a.m. and noon. The rate stays constant for the next 2 hours, and then decreases linearly down to 100 from 2 to 3 p.m. Find the probability that there are at least 400 people in the cafeteria between 11:30a.m. and 1:30 p.m.

    Podemos plantear la funcion de intensidad de forma sencilla como

$$\lambda(t) = \begin{cases} 100t + 100 & 0 \leq t \leq 1 \\ 200 & 1 \leq t \leq 3 \\ 500 - 100t & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

    Nos interesa obtener la tasa entre las 11:30 y 1:30, que en nuestro caso equivale a

$$\lambda = m(5/2) - m(1/2) = \int_{1/2}^{1} 100t + 100dt + \int_{1}^{5/2} 200dt = 387.5$$

    En particular nos interesa

$$P(m(5/2) - m(1/2) \geq 400) = 1 - \sum_{k=0}^{399} \frac{(387.5)^k e^{-387.5}}{k!}$$

22. **Ejercicio 6.36 de Introduction to Stochastic Processes with R**

    Se pide la distribución de la cantidad de gente entre las 9:00 y las 12:00.

    $$\lambda = \int_9^{12} t^2 dt = 9$$

    Por lo cual

    $$P(N_3 = k) = \frac{e^{-9}k^9}{k!}$$

23. **Algunas ideas demostraciones**

    Si $s < t$ y $0 \geq m \geq n$, entonces

    $$P(N(s) = m|N(t) = n) = \binom{n}{m}\left(\frac{s}{t}\right)^m\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

    Es fácil de demostrar, pues

    $$\begin{aligned} P(N(s) = m|N(t) = n) &= \frac{P(N(s) = m, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{P(N(s) = m, N(t) - N(s) = n - m)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{P(N(s) = m)P(N(t) - N(s) = n - m)}{P(N(t) = n)} \end{aligned}$$

    Calcular $\mathbb{E}[T_5|N(2) = 5]$, con taza $\lambda = 3$

    $$\begin{aligned} P(T_5 \leq t_5|N(2) = 5) &= \frac{P(T_5 \leq t_5, N(2) = 5)}{P(N(2) = 5)} \\ &= \frac{P(N(t) \geq 5, N(2) = 5)}{P(N(2) = 5)} \\ &= \frac{P(N(t) = 5, N(2) = 5)}{P(N(2) = 5)} \\ &= \frac{P(N(t) = 5)P(N(2) - N(t) = 5)}{P(N(2) = 5)} \\ F_{T_5|N(2)=5} &= \frac{t^5}{32}, t \in [0, 2] \\ \frac{dF_{T_5|N(2)=5}}{dt} &= \frac{5t^4}{32} \end{aligned}$$

    Ahora,

$$\mathbb{E}[T_5|N(2)=5] = \int_0^2 t\frac{5t^4}{32}dt = \frac{5}{3}$$

24. **Ejercicio 6.1 de Introduction to Stochastic Processes with R**

    Acá $N_t = N(t)$.

$$\begin{aligned} P(N_1=2, N_4=6) &= P(N_1=2, N_4-N_1=4) \\ &= P(N_1=2)P(N_4-N_1=4) \\ &= P(N_1=2)P(N_3=4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N_4=6|N_1=2) &= \frac{P(N_4=6, N_1=2)}{P(N_1=2)} \\ &= \frac{P(N_1=2, N_4-N_1=4)}{P(N_1=2)} \\ &= \frac{P(N_1=2)P(N_3=4)}{P(N_1=2)} \\ &= P(N_3=4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N_1=2|N_4=6) &= \frac{P(N_1=2, N_4=6)}{P(N_4=6)} \\ &= \frac{P(N_1=2)P(N_3=4)}{P(N_4=6)} \end{aligned}$$

25. **Ejercicio 6.2 de Introduction to Stochastic Processes with R**

    Igual que antes, $N_t = N(t)$. Con $\lambda = 2$ se tiene que $\mathbb{E}(N_3) = 2+2+2 = 6$, y $\mathbb{E}(N_4) = 2+2+2+2 = 8$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_3N_4) &= \mathbb{E}(N_3(N_4-N_3+N_3)) \\ &= \mathbb{E}(N_3(N_4-N_3) + \mathbb{E}(N_3^2) \\ &= \mathbb{E}(N_3)(\mathbb{E}(N_4-N_3)) + (Var(N_3) + \mathbb{E}(N_3)^2) \\ &= 6(8-6) + 42 \\ &= 54 \end{aligned}$$

26. **Ejercicio 6.3 de Introduction to Stochastic Processes with R**

    Tenemos que $\lambda = 5$ por minutos. Se pide que no hallan llamadas en 30 segundos, por lo cual

$$\begin{aligned} P(N(1/2)=0) &= \frac{e^{-5/2}(5/2)^0}{0!} \\ &= e^{-5/2} \end{aligned}$$

Se pide que en el primer minuto lleguen 4 llamadas, y 6 en el otro minuto. Entonces

$$
\begin{aligned}
P(N(1)=4, N(2)-N(1)=6) &= P(N(1)=4)P(N(2)-N(1)=6) \\
&= P(N(1)=4)P(N(1)=6)
\end{aligned}
$$

Similar al anterior, se pide

$$
\begin{aligned}
P(N(5)=25, N(1)=6) &= P(N(5)-N(1)=19, N(1)=6) \\
&= P(N(5)-N(1)=19)P(N(1)=6) \\
&= P(N(4)=19)P(N(1)=6)
\end{aligned}
$$

27. **Ejercicio 6.4 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Se tiene $\lambda = 3$ por hora. Se pide

$$
\begin{aligned}
P(N(1/2) \geq 2) &= 1 - P(N(1/2) < 2) \\
&= 1 - P(N(1/2)=1) - P(N(1/2)=0)
\end{aligned}
$$

Se pide

$$
\begin{aligned}
P(N(3)=10, N(2)=8) &= P(N(3)-N(2)=2, N(2)=8) \\
&= P(N(1)=2)P(N(2)=8)
\end{aligned}
$$

Se pide

$$
\begin{aligned}
P(N(1/4)=1|N(1)=6) &= \frac{P(N(1/4)=1, N(1)=6)}{P(N(1)=6)} \\
&= \frac{P(N(1/4)=1, N(1)-N(1/4)=5)}{P(N(1)=6)} \\
&= \frac{P(N(1/4)=1)P(N(1)-N(1/4)=5)}{P(N(1)=6)} \\
&= \frac{P(N(1/4)=1)P(N(3/4)=5)}{P(N(1)=6)}
\end{aligned}
$$

28. **Ejercicio 6.8 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Notar que nos entregan las tasas en distintos tiempos, por lo cual las pasamos todas a tasa por hora. Entonces

$$
\begin{aligned}
N_A &= \#\text{de autos},\ \lambda_A = 12 \\
N_B &= \#\text{de buses},\ \lambda_B = 6 \\
N_M &= \#\text{de motos},\ \lambda_M = 2
\end{aligned}
$$

Se pide

$$
\begin{aligned}
P(N_A(1/3)=2, N_B(1/3)=0, N_M(1/3)=0) &= P(N_A(1/3)=2)P(N_B(1/3)=0)P(N_M(1/3)=0) \\
&= \frac{e^{-4}4^2}{2!}\frac{e^{-2/3}(2/3)^1}{1!}\frac{e^{-2}2^0}{0!}
\end{aligned}
$$

Se pide la probabilidad de que ningún vehículo tenga cambio, y como esto no depende del vehículo en particular que es, podemos hacer una superposición con tasa

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{4}(12+6+2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Se pide que en 10 minutos ningún vehículo tenga cambio exacto, y como λ esta en hora, entonces

$$P(N(1/6)=0) = \frac{e^{-5/6}(5/6)^0}{0!}$$

29. **Ejercicio 6.15 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Tenemos las siguientes tasas

$$\begin{aligned} N_{Ma} &= \#\text{falla major} \ , \ \lambda_{Ma} = 1.5 \\ N_{Mi} &= \#\text{falla minor} \ , \ \lambda_{Mi} = 3 \end{aligned}$$

Se pide que dos errores ocurran en una hora, podemos superponer las tasas, de modo que

$$P(N(1)=2) = \frac{e^{-4.5}(4.5)^2}{2!}$$

Se pide que en media hora no ocurran fallos major, entonces

$$P(N_{Ma}(1/2)=0) = \frac{e^{-1.5/2}(1.5/2)^0}{0!}$$

Lo ultimo se puede calcular como

$$\begin{aligned} P(N_{Ma}(2) \geq 2 \cup N_{Mi}(2) \geq 2) &= 1 - P(N_{Ma}(2) \geq 2 \cap N_{Mi}(2) \geq 2) \\ &= 1 - P(N_{Ma}(2) \leq 1)P(N_{Mi}(2) \leq 1) \end{aligned}$$

30. **Ejercicio 6.16 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Tenemos $\lambda = 2$ por semana. Podemos definir el proceso de conteo para los accidentes con alcohol, de modo que $\lambda_A = 3/2$. Entonces en el primero se pide

$$P(N_A(1)=3) = \frac{e^{-3/2}(3/2)^3}{3!}$$

Se pide que ocurra al menos un accidente mañana, ojo con la tasa, recordemos que esta por semana, por lo cual la tasa por día es $2/7$. Entonces lo pedido corresponde a

$$\begin{aligned} P(N(1) \geq 1) &= 1 - P(N(1)=0) \\ &= 1 - \frac{e^{-2/7}(2/7)^0}{0!} \end{aligned}$$

Para lo ultimo, sea N_{Na} la cantidad de accidentes sin alcohol, con respectiva tasa $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Se pide

$$\begin{aligned}
P(N_A(4) < 3|N(4) = 6) &= \frac{P(N_A(4) < 3, N(4) = 6)}{P(N(4) = 6)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \frac{P(N_A(4) = k, N(4) = 6)}{P(N(4) = 6)} \\
&= \frac{1}{P(N(4) = 6)} \sum_{k=0}^{2} P(N_A(4) = k, N_{Na}(4) + N_A(4) = 6) \\
&= \frac{1}{P(N(4) = 6)} \sum_{k=0}^{2} P(N_A(4) = k, N_{Na}(4) + k = 6) \\
&= \frac{1}{e^{-4}4^6 6^{-1}} \sum_{k=0}^{2} P(N_A(4) = k) P(N_{Na}(4) = 6 - k) \\
&= \frac{1}{e^{-8}8^6 6!^{-1}} \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-3/2\cdot 4}6^k}{k!} \frac{e^{-2}2^{6-k}}{(6-k)!}
\end{aligned}$$

Reorganizamos un poco

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}$$

31. **Ejercicio 6.21 de Introduction to Stochastic Processes with R**

$$\begin{aligned}
Corr(N(t), N(s)) &= \frac{\mathbb{E}[N(s)N(t))] - \mathbb{E}(N(t))\mathbb{E}(N(s))}{\sqrt{\mathbb{E}(N(t))\mathbb{E}(N(s))}} \\
&= \frac{\mathbb{E}[N(s)(N(t) - N(s) + N(s))] - \lambda^2 st}{\sqrt{\lambda^2 st}} \\
&= \frac{\mathbb{E}[N(s)(N(t) - N(s))] + \mathbb{E}[N(s)^2] - \lambda^2 st}{\lambda\sqrt{st}} \\
&= \frac{\mathbb{E}[N(s)]\mathbb{E}[N(t) - N(s)] + \lambda s + \lambda^2 s^2 - \lambda^2 st}{\lambda\sqrt{st}} \\
&= \frac{\lambda s(\lambda t - \lambda s) + \lambda s + \lambda^2 s^2 - \lambda^2 st}{\lambda\sqrt{st}} \\
&= \frac{\lambda s}{\lambda\sqrt{st}} \\
&= \sqrt{\frac{s}{t}}
\end{aligned}$$

32. Suponga que vehículos pasan por un determinado punto de una carretera de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de uno por minuto. Se sabe que 5% de los vehículos son camionetas.

Tenemos que

- $N(t) = \#$ de vehículos , $\lambda = 1$ por minuto.
- $N_1(t) = \#$ de camionetas , $\lambda = 1 \cdot 0.05 = 0.05$ por minuto
- $N_2(t) = \#$ de otros vehículos , $\lambda = 1 \cdot 0.95 = 0.95$ por minuto

a) Calcule la probabilidad que al menos una camioneta pase por dicho punto en una hora.

$$\begin{aligned} P(N_1(60) \leq 1) &= 1 - P(N_1(60) = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{-3}3^0}{0!} \end{aligned}$$

b) Dado que diez camionetas han pasado en una hora, ¿cual es el numero total esperado de vehículos que pasaron en ese periodo?

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N(60)|N_1(60) = 10) &= \mathbb{E}(N_1(60) + N_2(60)|N_1(60) = 10) \\ &= \mathbb{E}(10|N_1(60) = 10) + \mathbb{E}(N_2(60)|N_1(60) = 10) \\ &= 10 + \mathbb{E}(N_2(60)) \\ &= 10 + 57 \\ &= 67 \end{aligned}$$

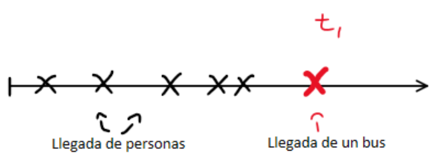
c) Si 50 vehículos pasaron en una hora, ¿cual es la probabilidad que cinco de ellos hayan sido camionetas?

$$\begin{aligned} P(N_1(60) = 5)|N(60) = 50) &= \frac{P(N_1(60) = 5, N(60) = 50)}{P(N(60) = 50)} \\ &= \frac{P(N_1(60) = 5, N_1(60) + N_2(60) = 50)}{P(N(60) = 50)} \\ &= \frac{P(N_1(60) = 5, 5 + N_2(60) = 50)}{P(N(60) = 50)} \\ &= \frac{P(N_1(60) = 5, N_2(60) = 45)}{P(N(60) = 50)} \\ &= \frac{P(N_1(60) = 5)P(N_2(60) = 45)}{P(N(60) = 50)} \end{aligned}$$

33. Suponga que los buses llegan a un terminal de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda_B > 0$. Por su parte, los pasajeros llegan al mismo terminal de acuerdo a otro proceso de Poisson con tasa $\lambda_P > 0$. Suponga que ambos procesos son independientes. Apenas llega un bus, todos las personas que están esperando se suben a dicho bus (suponemos que hay capacidad suficiente para acomodar a todos quienes están esperando). Calcule

    a) La probabilidad de que k personas estén esperando cuando llega un bus, $k = 0, 1, 2, ...$

    Podemos hacer un dibujo de lo que tenemos



    Del dibujo, podemos ver que nos piden la probabilidad de que k personas estén esperando hasta que llegue el bus, es decir, hay que esperar hasta que se cumple t_1, denotémoslo por t_1^B, de los buses. Por lo cual nos piden $P(N(t_1^B) = k)$.. Recordamos que $t^B \sim Exp(\lambda_B)$. Entonces podemos condicionar sobre el tiempo de llegadas de los buses.

$$\begin{aligned}
P(N(t_1^B) = k) &= \int_0^\infty P(N(t_1^B) = k | t_1^B = t) f_{t_1^B}(t) dt \\
&= \int_0^\infty P(N(t_1^B) = k | t_1^B = t) \lambda_B e^{-\lambda_B t} dt \\
&= \int_0^\infty P(N(t) = k | t_1^B = t) \lambda_B e^{-\lambda_B t} dt \\
&= \int_0^\infty P(N(t) = k) \lambda_B e^{-\lambda_B t} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_P t} (\lambda_P t)^k}{k!} \lambda_B e^{-\lambda_B t} dt \\
&= \frac{\lambda_P^k \lambda_B}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-t(\lambda_P + \lambda_B)} dt \\
&= \frac{\lambda_P^k \lambda_B}{k!} \Gamma(k+1) \left(\frac{1}{\lambda_B + \lambda_P} \right)^{k+1}
\end{aligned}$$

34. **Ejercicio 2.15 de Essentials of stochastic processes**

Para calcular el segundo, existe la siguiente formula

$$\mathbb{E}(T_i|N(t) = n) = \frac{it}{n+1}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{12}|N(2) = 5) &= \frac{12 \cdot 2}{5+1} \\ &= 4\end{aligned}$$

El ultimo se calcula como sigue

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N(5)|N(2) = 5) &= \mathbb{E}(N(5) - N(2) + N(2)|N(2) = 5) \\ &= \mathbb{E}(N(5) - N(2)|N(2) = 5) + \mathbb{E}(N(2)|N(2) = 5) \\ &= \mathbb{E}(N(5) - N(2)) + 5 \\ &= 15 - 6 + 5 \\ &= 14\end{aligned}$$

35. **Ejercicio 2.16 de Essentials of stochastic processes**

Tenemos $\lambda = 3$ en horas.Para la a) se pide

$$P(N(2) = 0) = e^{-6}$$

Para la b) nos interesa la primera llegada, es decir, t_1, y sabemos que $t_1 \sim Exp(3)$.

36. **Ejercicio 2.17 de Essentials of stochastic processes**

Se tiene $\lambda = 4$ por hora. Para la a) se pide

$$P(N(1) < 2) = P(N(1) = 0) + P(N(1) = 1)$$

Para la b) se pide

$$\begin{aligned}P(N(2) - N(1) < 2|N(1) = 6) &= P(N(2) - N(1) < 2) \\ &= P(N(1) < 2))\end{aligned}$$

En la c) se pide $\mathbb{E}(T_{10}) = \dfrac{10}{4}$

37. **Ejercicio 2.21 de Essentials of stochastic processes**

Se tiene que $X \sim P(\lambda T)$ con $\lambda = 24$, con $T \sim U(1,2)$, osea que tenemos $X|T$,. Usamos esperanza y varianza iterada.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|T)] \\
&= \mathbb{E}[\lambda T] \\
&= \mathbb{E}[24T] \\
&= 24\mathbb{E}[T] \\
&= 24 \cdot \frac{3}{2} \\
&= 36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[Var(X|T)] + Var(\mathbb{E}[X|T]) \\
&= \mathbb{E}[24T] + Var(24T) \\
&= 24 \cdot \frac{3}{2} + 24^2 Var(T) \\
&= 36 + \frac{24^2}{12} \\
&= 84
\end{aligned}$$

38. **Ejercicio 2.21 de Essentials of stochastic processes**

Para la a) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T|T < c) &= \frac{\mathbb{E}(T|T < c)}{P(T < c)} \\
&= \frac{\int_0^c t\lambda e^{-\lambda t} dt}{1 - e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{ce^{-\lambda c}}{1 - e^{-\lambda c}}
\end{aligned}$$

39. **Ejercicio 2.30 de Essentials of Stochastic Processes**

Sea $N_1(t)$ la cantidad de hombres, con respectiva tasa $\lambda = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$, y $N_2(t)$ la cantidad de mujeres, con respectiva tasa $\lambda = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$. En la a) se pide

$$\begin{aligned}
P(N_1(1) = 2, N_2(1) = 3) &= P(N_1(1) = 2)P(N_2(1) = 3) \\
&= \frac{e^{-3}3^2}{2!} \frac{e^{-1}}{3!}
\end{aligned}$$

40. **Ejercicio 2.33 de Essentials of Stochastic Processes**

    Tenemos $\lambda = 10$ por hora, para lo pedido dejaremos la tasa en el mismo tiempo. En la a) se pide

$$\begin{aligned} P(N(1/30) = 2|N(1/12) = 2) &= \frac{P(N(1/30) = 2, N(1/12) = 2)}{P(N(1/12) = 2)} \\ &= \frac{P(N(1/30) = 2, N(1/12) - N(1/30) = 0)}{P(N(1/12) = 2} \\ &= \frac{P(N(1/30) = 2)P(N(1/12) - N(1/30) = 0)}{P(N(1/12) = 2} \\ &= \frac{\frac{e^{-1/3}(1/3)^2}{2!}\frac{e^{-1/2}(1/2)^0}{0!}}{\frac{e^{-5/6}(5/6)^2}{2!}} \\ &= \frac{2^2}{5^2} \end{aligned}$$

    En la b) se pide

$$\begin{aligned} P(N(1/30) \geq 1|N(1/12) = 2) &= 1 - P(N(1/30) < 1|N(1/12) = 2) \\ &= 1 - P(N(1/30) = 0|N(1/12) = 2) \\ &= 1 - \frac{P(N(1/30) = 0, N(1/12) = 2)}{P(N(1/12) = 2)} \\ &= 1 - \frac{P(N(1/30) = 0, N(1/12) - N(1/30) = 2)}{P(N(1/12) = 2)} \\ &= 1 - \frac{P(N(1/30) = 0)P(N(1/12) - N(1/30) = 2)}{P(N(1/12) = 2)} \\ &= 1 - \frac{3^5}{5^2} \end{aligned}$$

41. **Ejercicio 2.34 de Essentials of Stochastic Processes**

    Tenemos

$$\begin{aligned} N(t) &= \# \text{ de puntos por juego },\ \lambda = 6 \text{ por juego} \\ N_1(t) &= \# \text{ de goles por juego },\ \lambda = 6 \cdot 0.6 = 3.6 \text{ por juego} \\ N_2(t) &= \# \text{ de asistencias por juego },\ \lambda = 6 \cdot 0.4 = 2.4 \text{ por juego} \end{aligned}$$

    En la a) se pide

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{Ganancia}) &= \mathbb{E}[3N_1(1)] + \mathbb{E}[1N_2(1)] \\ &= 3 \cdot 3.6 + 1 \cdot 2.4 \\ &= 13.2K \end{aligned}$$

Para la varianza

$$\begin{aligned} Var(\text{Ganancia}) &= Var[3N_1(1)] + Var[1N_2(1)] \\ &= 3^2 \cdot 3.6 + 1 \cdot 2.4 \\ &= 34.8K \end{aligned}$$

En la *b*) se pide

$$\begin{aligned} P(N_1(1) = 4, N_2(1) = 2) &= P(N_1(1) = 4)P(N_2(1) = 2) \\ &= \frac{e^{-3.6}(3.6)^4}{4!} \frac{e^{-2.4}(2.4)^2}{2!} \end{aligned}$$

En la *c*) se pide

$$P(N(1/2) = 4 | N(1) = 6)$$

3 Cadenas de Markov a tiempo continuo

3.1 Recordatorios

Algunos lemas y notaciones

$$q_{ij} = v_i P_{ij}$$

$$v_i = \sum_j v_i P_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

$$P_{i,j}(t+s) = \sum_{k=0} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

Ecuación de retroceso o Backward Equations. Para estados i, j y $t \geq 0$ se tiene

$$P_{i,j}^{'}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Ecuaciones de adelanto o Forward Equations

$$P_{i,j}^{'}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

La matriz Q contiene la información de las tasas. En la diagonal contiene la suma de las filas de la respectiva fila.

La distribución estacionaria existe si todos los estados se comunican, y la cadena es recurrente positiva. Esta ecuación se plantea de la siguiente forma

$$v_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

La estacionaria también se puede calcular de la siguiente forma

$$\pi Q = 0$$

También existen estados absorbentes, podemos reorganizar Q de manera tal que

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & V \end{bmatrix}$$

Donde V representa los estados transientes. El tiempo esperado que el proceso esta en el estado j hasta que se absorbe, dado que inicio en el estado i corresponde a $F_{i,j}$, donde

$$F = -V^{-1}$$

El tiempo medio hasta la absorción es $\sum_j F_{ij}$

Al igual que en el tiempo discreto, diremos que la cadena es reversible si

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$$

Con q las entradas de la matriz Q

3.2 Ejercicios

1. considere una maquina que trabaja según un tiempo exponencial con media $1/\lambda$ antes que se malogre. Suponga que para arreglar la maquina se requiere un tiempo exponencial con media $1/\mu$. La maquina esta operativa en el tiempo $t = 0$. Interesa calcular la probabilidad de que la maquina este operativa en $t = 10$.

   Para resolver esto, primero encontremos los estados, es fácil ver que estos son 2, se malogra, y se arregla. Es decir

   $$\Omega = \{0, 1\} = \{Se\ Malogra\ ,\ Se\ Arregla\}$$

   También

   $$v_0 = \lambda$$

   $$v_1 = \mu$$

   La matriz de las tasas corresponde a

   $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

   Pues la maquina se malogra con tasa λ, ya que en cuando se malogra, se debe arreglar. Así mismo, cuando la maquina esta en reparación, se demora en reparar con tasa μ. La matriz de interés esta dada por

   $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} P'_{00} & P'_{01} \\ P'_{10} & P'_{11} \end{pmatrix} \end{array}$$

   Nos interesa la probabilidad de que la maquina este operativa en $t = 10$, es decir, que la maquina siga sin malograrse, o que no pase a reparación, en particular nos interesa $P'_{00}(t)$. Usando la ecuación de adelanto tenemos que

   $$P'_{00}(t) = q_{10}P_{01} - v_0 P_{00}$$

   Recordamos que se debe cumplir $P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1 \ \Rightarrow\ P_{01} = 1 - P_{00}(t)$. Reemplazamos esto ultimo en la ecuación de adelanto.

$$
\begin{aligned}
P_{00}^{'}(t) &= q_{10}(1 - P_{00}(t)) - v_0 P_{00} \\
&= \mu - \mu P_{00} - \lambda P_{00} \\
P_{00}^{'}(t) &= \mu - P_{00}(\mu + \lambda) \\
h'(t) &= \mu - h(t)(\mu + \lambda)
\end{aligned}
$$

Hacemos un cambio de variable

$$g(t) = \mu - h(t)(\mu + \lambda) \ \Rightarrow \ g'(t) = -h(t)'(\mu + \lambda) \ \Rightarrow \ h'(t) = \frac{-g'(t)}{\mu + \lambda}$$

Entonces

$$\Rightarrow \ \frac{-g'(t)}{\mu + \lambda} = g(t)$$

Resolviendo la EDO con la condición $P_{00}(0) = 1$ se tiene que

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-t(\mu+\lambda)} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

Luego, la probabilidad pedida es

$$P_{00}(10) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-10(\mu+\lambda)} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

2. Un peluquero corta el pelo a 3 clientes por hora (cada corte de pelo requiere de un tiempo exponencial de media 20 min). Clientes llegan a la peluquería según un proceso Poisson de tasa 2. Los clientes se van si en la sala de espera están las 2 sillas ocupadas. Interesa la proporción de tiempo que las sillas están ocupadas.

   Usamos como medida de tiempo la hora. Definamos un espacio de estados adecuado, sabemos que solo hay un asiento, y dos personas en fila, por lo cual podemos plantear lo siguiente

   $$\Omega = \{0, 1, 2, 3\} = \{\text{No hay nadie, Se atiende 1, 1 en fila, 2 en fila}\}$$

   Donde se tiene que

   $$
   \begin{aligned}
   v_0 &= 2 \\
   v_1 &= 3
   \end{aligned}
   $$

La matriz de tasas es

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos percatarnos que corresponde a un modelo $M/M/1/2$, pues se tiene un servidor (1 peluquero) y una fila de tamaño 2 (2 en espera).

Ahora, como nos piden la proporción del tiempo en que las sillas están ocupadas, nos interesa encontrar la distribución estacionaria, entonces

$$\pi Q = 0$$
$$\sum_{i=0}^{3} \pi_i$$

Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} -2\pi_0 + 3\pi_1 = 0 \\ 2\pi_0 - 5\pi_1 + 3\pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 5\pi_2 + 3\pi_3 = 0 \\ 2\pi_2 - 3\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

El cual tiene como solución

$$\pi = \begin{bmatrix} 27/65 & 18/65 & 12/65 & 8/65 \end{bmatrix}$$

Recordamos que el estado 3 corresponde a que las sillas están ocupadas, por lo cual, la proporción del tiempo que las sillas están ocupadas es de 8/65.

3. Se tiene 3 estados del clima (1=soleado, 2=cubierto,3=lluvioso). Hay sol por un numero de días con distribución exponencial de media 3, y luego se pone cubierto. Cielo cubierto por un numero de días con distribución exponencial de media 4, y se torna lluvioso. Lluvia permanece por un numero de días con distribución exponencial de media 1, y luego sale el sol. Plantee la matriz de tasas.

   Hay que tener cuidado con lo que nos dan, pues nos entregan todo según la media de una exponencial, pero la media de una exponencial es $1/\lambda$, por lo cual tenemos $\lambda = 1/a$.

Tenemos el espacio de estados $\Omega = \{1,2,3\} = \{$ Soleado, Cubierto, Lluvioso $\}$, con

$$v_0 = 1/3$$
$$v_1 = 1/4$$
$$v_2 = 1$$

La matriz de tasas corresponde a

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Sea la matriz de tasas dada por

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} -(q_{12}+q_{13}) & q_{12} & q_{13} \\ 0 & -q_{23} & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde los estados 2 y 3 son transientes, y el 1 absorbente. Obtenga los tiempos medios de absorción.

Note que podemos reorganizar la matriz de la siguiente manera

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{13} & -(q_{12}+q_{13}) & q_{12} \\ q_{23} & 0 & -q_{23} \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz que nos ayuda a encontrar lo pedido es

$$V = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} -(q_{12}+q_{13}) & q_{12} \\ 0 & -q_{23} \end{pmatrix} \end{array}$$

Luego

$$F = -V^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{q_{12}+q_{13}} & \frac{q_{12}}{q_{23}(q_{12}+q_{13})} \\ 0 & \frac{1}{q_{23}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Para encontrar lo pedido, basta sumar por filas.

5. Un taller consta de tres maquinas y dos reparadores. La cantidad de tiempo que una maquina trabaja antes de averiarse se distribuye exponencialmente con una media de 10. Si la cantidad de tiempo que se demora un solo trabajador en una maquina distribuye exponencialmente con una media de 8.

   a) ¿Cual es el numero promedio de maquinas que no están en uso?
   b) ¿Cual es la proporción de tiempo que están ocupados los dos trabajadores?

   Primero declaremos el espacio de estados, como nos piden las maquinas que no están en uso, podemos definir el espacio de estados como el numero de maquinas no operativas. Entonces

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

   Ahora, sabemos que

$$\alpha = \text{Tiempo que trabaja una maquina hasta averiarse} \sim Exp(1/10)$$
$$\beta = \text{Tiempo en que se repara una maquina} \sim Exp(1/8)$$

   Razonemos la matriz de las tasas de la siguiente forma:

   q_{01} representa pasar de tener 0 maquinas no operativas, a tener 1 no operativa, es decir, de las tres maquinas, cual es la que primero falla. La tasa corresponde a $q_{01} = min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 3/10$.

   q_{10} representa pasar te tener 1 maquina no operativa, a tener 0 no operativas. $q_{10} = 1/8$.

   q_{12} representa pasar de tener 1 maquina no operativa, a tener 2 no operativas, es decir, de las dos restantes, cual falla primero. La tasa corresponde a $q_{12} = min\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2/10$.

   q_{21} representa pasar de tener 2 maquinas no operativas, a tener 1 no operativa, es decir, de las dos maquinas, cual se repara primero. La tasa corresponde a $q_{21} = min\{\beta_1, \beta_2\} = 2/8$.

   q_{23} representa pasar de tener 2 maquinas no operativas, a tener 3 no operativas, es decir, fallo otra. La tasa corresponde a 1/10.

   q_{32} representa pasar de tener 3 maquinas no operativas, a tener 2 no operativas, es decir, cual de los dos reparadores termino primero con una reparación. La tasa corresponde a $q_{32} = min\{\beta_1, \beta_2\}$.

   Las demás entradas de la matriz valen 0. α_i representa el tiempo que trabaja una maquina cualquiera hasta averiarse, para algún $i = 1, 2, 3$. β_k representa el tiempo en que un reparador se demora en reparar la maquina, para algún $k = 1, 2$.

La matriz de tasas esta dada por

$$Q = \begin{array}{c} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{1} \\ \color{blue}{2} \\ \color{blue}{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \color{blue}{0} & \color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3/10 & 3/10 & 0 & 0 \\ 1/8 & -13/40 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/4 & -7/20 & 1/10 \\ 0 & 0 & 2/8 & -2/8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para la a) debemos calcular $\pi Q = 0$, el cual tiene solución

$$\pi = \begin{bmatrix} 125/761 & 300/761 & 240/761 & 96/761 \end{bmatrix}$$

Como nos interesa el promedio de tiempo, debemos calcular la esperanza

$$0 \cdot 125/761 + 1 \cdot 300/761 + 2 \cdot 240/761 + 3 \cdot 96/761 = \frac{1068}{671}$$

Para la b), nos interesa la proporción del tiempo que ambos reparadores estén ocupados, esto solo ocurre si hay 2 o 3 maquinas en reparación, por lo cual

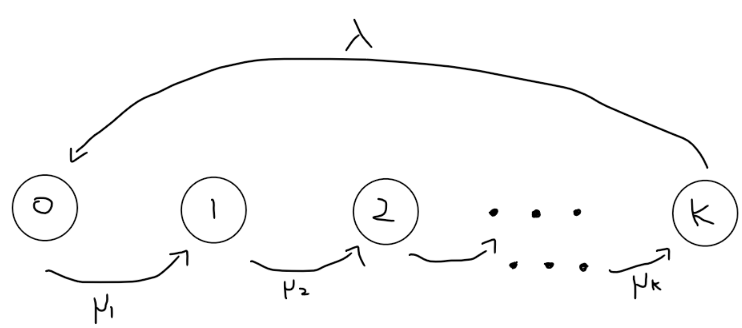
$$\pi_2 + \pi_3 = 240/761 + 96/761 = 336/761$$

6. Después de ser reparada, una maquina funciona por un tiempo exponencial con tasa λ y luego falla. En caso de falla, comienza un proceso de reparación. El proceso de reparación procede secuencialmente a través de k distintas fases. Primero se debe realizar una reparación de fase 1, luego una de fase 2, y así sucesivamente. Los tiempos para completar estas fases son independientes, tomando la fase i un tiempo exponencial con tasa μ_i $i = 1, ..., k$.

   a) ¿Que proporción de tiempo pasa la maquina en una reparación de fase i?

   b) ¿Que proporción de tiempo esta funcionando la maquina?

   Podemos hacer un dibujo de la situación



Para plantear las ecuaciones de balance detallado, se pueden definir de la siguiente manera:

Tasa que el proceso deja el estado $\cdot \pi_l =$ Tasa a la que entra el estado $\cdot \pi_{l-1}$

Entonces

$$\lambda\pi_0 = \mu_k\pi_k \tag{1}$$
$$\mu_1\pi_1 = \lambda\pi_0 \tag{2}$$
$$\mu_2\pi_2 = \mu_1\pi_1 \tag{3}$$
$$\mu_3\pi_3 = \mu_2\pi_2 \tag{4}$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=0}^{k}\pi_i = 1 \tag{5}$$

A partir de (3) podemos ver el patrón $\mu_i\pi_i = \mu_{i-1}\pi_{i-1}$. Ahora, despejemos (2)

$$\mu_1\pi_1 = \lambda\pi_0 \;\Rightarrow\; \pi_1 = \frac{\lambda\pi_0}{\mu_1}$$

Reemplazamos en (3)

$$\mu_2\pi_2 = \mu_1\pi_1 \;\Rightarrow\; \pi_2 = \frac{\lambda\pi_0}{\mu_2}$$

Lo mismo en (4)

$$\mu_3\pi_3 = \mu_2\pi_2 \;\Rightarrow\; \pi_3 = \frac{\mu_2\pi_2}{\mu_3} \;\Rightarrow\; \pi_3 = \frac{\lambda\pi_0}{\mu_3}$$

De acá obtenemos que para $i = 1, ..., k$ se tiene

$$\pi_i = \frac{\lambda\pi_0}{\mu_i}$$

Reemplazando esto en (5) de la siguiente forma

$$\sum_{i=0}^{k}\pi_i = 1$$

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{k}\pi_i = 1$$

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$$

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda \pi_0}{\mu_i} = 1$$

$$\pi_0 + \pi_0 \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu_i} = 1$$

Despejamos, de modo que

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu_i}}$$

Ahora reemplazando esto en $\pi_i = \frac{\lambda \pi_0}{\mu_i}$, se tiene que

$$\pi_i = \frac{\lambda}{\mu_i} \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu_i}}$$

Luego, la proporción del tiempo en el estado i es

$$\pi_i = \frac{\lambda}{\mu_i} \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu_i}} \ , \ i = 1, ..., k$$

La proporción del tiempo que funciona la maquina corresponde a

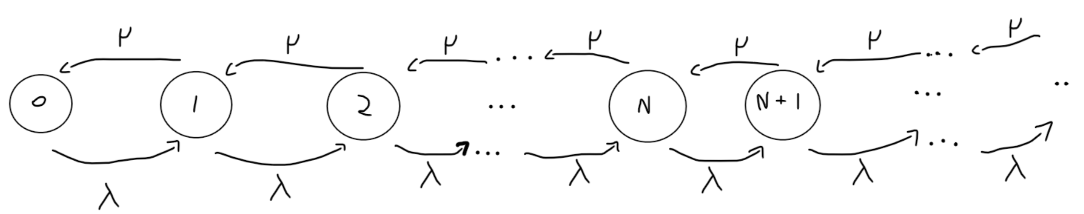
$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda}{\mu_i}}$$

7. Distribución estacionaria del modelo $M/M/1$.

Recordemos que este modelo considera lo siguiente

- Clientes llegan a una estación de servicio.
- Existe un solo servidor (una sola caja o una sola persona que atiende)
- En cada llegada, el cliente va directamente al servidor si es que esta libre
- En caso contrario, se forma una fila de espera
- Las llegadas se hacen de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ
- El tiempo entre llegadas sucesivas es exponencial con tasa λ y media $1/\lambda$
- Cuando el servidor finaliza el servicio, el cliente se va de la estación y el siguiente cliente en la fila es atendido
- Se asume que el tiempo de servicio es exponencial con media $1/\mu$ (independientes)

Para orientarnos, hagamos un dibujo



Sin perdida de generalidad, demostremos la distribución para el espacio de estados infinito. Las ecuaciones de balance quedan como

$$\begin{aligned}
\mu\pi_1 &= \lambda\pi_0 \\
\mu\pi_2 &= \lambda\pi_1 \\
\mu\pi_3 &= \lambda\pi_2 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Despejamos π_1

$$\mu\pi_1 = \lambda\pi_0 \;\Rightarrow\; \pi_1 = \frac{\lambda\pi_0}{\mu}$$

Despejamos π_2

$$\mu\pi_2 = \lambda\pi_1 \;\Rightarrow\; \pi_2 = \frac{\lambda\pi_1}{\mu} \;\Rightarrow\; \pi_2 = \frac{\lambda^2\pi_0}{\mu^2}$$

Despejamos π_3

$$\mu\pi_3 = \lambda\pi_2 \;\Rightarrow\; \pi_3 = \frac{\lambda\pi_2}{\mu} \;\Rightarrow\; \pi_3 = \frac{\lambda^3\pi_0}{\mu^3}$$

En general se tiene

$$\pi_i = \frac{\lambda^i\pi_0}{\mu^i} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0$$

Ahora recordamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1 \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i\pi_0}{\mu^i} &= 1 \\
\pi_0 \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right) &= 1 \\
\pi_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu}
\end{aligned}$$

Reemplazamos en el patrón

$$\pi_i = \frac{\lambda^i\pi_0}{\mu^i} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Notar que la serie $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\mu^i}$ converge $\iff \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

Por lo tanto, la distribución estacionaria del modelo $M/M/1$ es

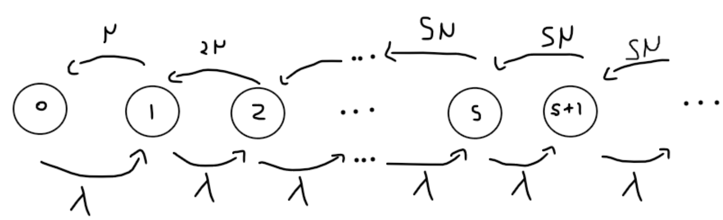
$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

8. Distribución estacionaria del modelo $M/M/s$

   Recordemos que este modelo considera lo siguiente

   - Modelo similar al anterior, pero con s servidores.
   - Un cliente que llega primero espera en la fila y luego se dirige a alguno de los servidores desocupados.
   - Cada servidor atiende con tasa μ.
   - Las tasas son: $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \leq n \leq s \\ s\mu & n > s \end{cases}$
   - Si hay n clientes en el sistema ($n < s$), n servidores están ocupados.
   - Dado que cada uno atiende a tasa μ, la tasa global de salidas es $n\mu$
   - Si hay n clientes ($n > s$), s servidores trabajan a tasa μ y por lo tanto la tasa global de salidas es $s\mu$

   Veamos un dibujo para ilustrar la situación



   Nuevamente sin perdida de generalidad, demostremos la distribución para el espacio de estados infinito. Las ecuaciones de balance detallado se escriben como

$$
\begin{aligned}
\mu\pi_1 &= \lambda\pi_0 \\
2\mu\pi_2 &= \lambda\pi_1 \\
3\mu\pi_3 &= \lambda\pi_2 \\
&\vdots \\
(n-1)\mu\pi_{s-1} &= \lambda\pi_{s-2} \\
n\mu\pi_s &= \lambda\pi_{s-1} \\
s\mu\pi_{s+1} &= \lambda\pi_s \\
s\mu\pi_{s+2} &= \lambda\pi_{s+1} \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{\infty} \pi_0 &= 1
\end{aligned}
$$

Despejamos como siempre

$$\mu\pi_1 = \lambda\pi_0 \;\Rightarrow\; \pi_1 = \frac{\lambda\pi_0}{\mu}$$

$$2\mu\pi_2 = \lambda\pi_1 \;\Rightarrow\; \pi_2 = \frac{\lambda\pi_1}{2\mu} \;\Rightarrow\; \pi_2 = \frac{\lambda^2\pi_0}{2\cdot 1\cdot \mu^2}$$

$$3\mu\pi_3 = \lambda\pi_2 \;\Rightarrow\; \pi_3 = \frac{\lambda\pi_2}{3\mu} \;\Rightarrow\; \pi_3 = \frac{\lambda^3\pi_0}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \mu^3}$$

$$\vdots$$

$$(s-1)\mu\pi_{s-1} = \lambda\pi_{s-2} \;\Rightarrow\; \pi_{s-1} = \frac{\lambda\pi_{s-2}}{(s-1)\mu}$$

$$\Rightarrow\; \pi_{s-1} = \frac{\lambda^{s-1}\pi_0}{(s-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \mu^{s-1}}$$

$$s\mu\pi_s = \lambda\pi_{s-1} \;\Rightarrow\; \pi_s = \frac{\lambda\pi_{s-1}}{s\mu} \;\Rightarrow\; \pi_s = \frac{\lambda^s\pi_0}{s\cdot(s-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \mu^s}$$

$$s\mu\pi_{s+1} = \lambda\pi_s \;\Rightarrow\; \pi_{s+1} = \frac{\lambda\pi_s}{s\mu} \;\Rightarrow\; \pi_{s+1} = \frac{\lambda^{s+1}\pi_0}{s(s!)\mu^{s+1}}$$

$$s\mu\pi_{s+2} = \lambda\pi_{s+1} \;\Rightarrow\; \pi_{s+2} = \frac{\lambda\pi_{s+1}}{s\mu} \;\Rightarrow\; \pi_{s+2} = \frac{\lambda^{s+2}\pi_0}{s^2(s!)\mu^{s+2}}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$$

De acá se obtiene lo siguiente

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k\pi_0}{k!\mu^k} & 1 \le k \le s \\ \dfrac{\lambda^k\pi_0}{s^{k-s}(s!)\mu^k} & k > s \end{cases}$$

Para obtener π_0 tenemos que reemplazar en la ultima ecuación (la suma), pero notar que hay que separarla, pues hasta s tiene una forma, y para $s \ge$ tiene otra forma. Entonces

$$\pi_0 + \sum_{k=1}^{s}\frac{\lambda^k\pi_0}{k!\mu^k} + \sum_{k=s}^{\infty}\frac{\lambda^k\pi_0}{s^{k-s}(s!)\mu^k} = 1$$

$$\pi_0\left(1 + \sum_{k=1}^{s-1}\frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{s+k}}{s^{s+k-s}(s!)\mu^k}\right) = 1$$

$$\pi_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^k \right) = 1$$

$$\pi_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\lambda/s\mu} \right) = 1$$

Despejando π_0 se tiene que

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\lambda/s\mu}}$$

Lo anterior provisto de que $\dfrac{\lambda}{s\mu} < 1$.

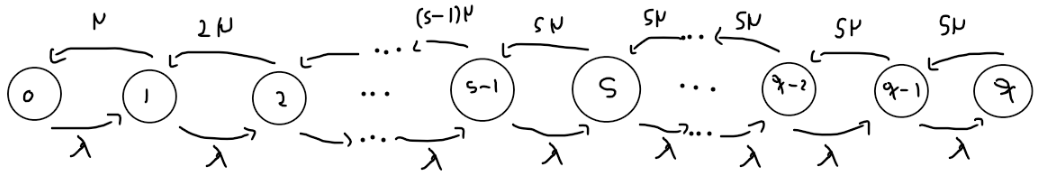
Luego, la distribución estacionaria del modelo $M/M/s$ esta dada por

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k \pi_0}{k!\mu^k} & 1 \leq k \leq s \\ \dfrac{\lambda^k \pi_0}{s^{k-s}(s!)\mu^k} & k \geq s \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\lambda/s\mu}}$$

9. Distribución estacionaria del modelo $M/M/s/q$

   Recordemos que este modelo se tienen s servidores, al igual que en $M/M/s$, excepto que la fila tiene un limite de q personas. Un dibujo de esto es



   Las ecuaciones de balance detallado se escriben como

$$
\begin{aligned}
\mu\pi_1 &= \lambda\pi_0 \\
2\mu\pi_2 &= \lambda\pi_1 \\
3\mu\pi_3 &= \lambda\pi_2 \\
&\vdots \\
(s-1)\mu\pi_{s-1} &= \lambda\pi_{s-2} \\
s\mu\pi_s &= \lambda\pi_{s-1} \\
s\mu\pi_{s+1} &= \lambda\pi_s \\
&\vdots \\
s\mu\pi_{q-1} &= \lambda\pi_{q-2} \\
s\mu\pi_q &= \lambda\pi_{q-1} \\
\sum_{i=0}^{q} \pi_0 &= 1
\end{aligned}
$$

   Despejando todo de manera habitual se tiene que

$$
\pi_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k \pi_0}{k!\mu^k} & 1 \leq k \leq s \\ \dfrac{\lambda^k \pi_0}{s^{k-s}(s!)\mu^k} & s < k \leq q \end{cases}
$$

   Para encontrar π_0 aplicamos la restricción de la suma

$$\pi_0 + \sum_{k=1}^{s} \frac{\lambda^k \pi_0}{k!\mu^k} + \sum_{k=s+1}^{q} \frac{\lambda^k \pi_0}{s^{k-s}(s!)\mu^k} = 1$$

Despejando π_0 se tiene

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{s} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{k=s+1}^{q} \frac{\lambda^k}{s^{k-s}(s!)\mu^k}}$$

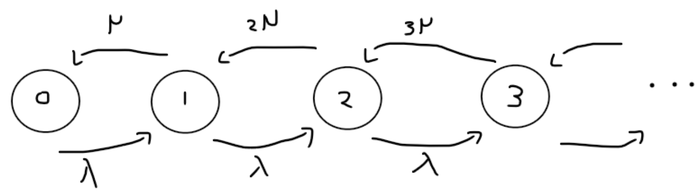
Luego, la distribución estacionaria del modelo $M/M/s/q$ es

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k \pi_0}{k!\mu^k} & 1 \leq k \leq s \\ \dfrac{\lambda^k \pi_0}{s^{k-s}(s!)\mu^k} & s < k \leq q \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{s} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \sum_{k=s+1}^{q} \frac{\lambda^k}{s^{k-s}(s!)\mu^k}}$$

10. Distribución estacionaria del modelo $M/M/\infty$

En este modelo tenemos ∞ servidores. Un dibujo seria



Las ecuaciones de balance detallado nos quedan como

$$
\begin{aligned}
\mu\pi_1 &= \lambda\pi_0 \\
2\mu\pi_2 &= \lambda\pi_1 \\
3\mu\pi_3 &= \lambda\pi_2 \\
4\mu\pi_4 &= \lambda\pi_3 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que

$$\pi_k = \frac{\lambda^k \pi_0}{\mu^k k!}$$

Aplicamos la condición de la suma

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \pi_i &= 1 \\
\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i &= 1 \\
\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \pi_0}{\mu^k k!} &= 1 \\
\pi_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \pi_0}{\mu^k k!} \right) &= 1 \\
\pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \pi_0}{\mu^k k!} &= 1
\end{aligned}
$$

Recordamos la serie de Taylor de la exponencial, de modo que al despejar nos queda

$$\pi_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

Reemplazando en π_k nos queda

$$\pi_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda/\mu}}{\mu^k k!}$$

Luego, la distribución estacionaria del modelo $M/M/\infty$ es una Poisson!

$$\pi_k = \frac{(\lambda/\mu)^k e^{-\lambda/\mu}}{k!} \ , \ k = 0, 1, ...$$

11. **Ejercicio 3 del libro**

No corresponde a un proceso de nacimiento y muerte. Podemos plantear la cadena de markov con el siguiente espacio de estados:

$$\Omega = \{ \text{ Ambas funcionan, solo la 1 funciona, solo la 2 funciona, ambas malas y se repara 1, ambas malas y se repara 2 } \}$$

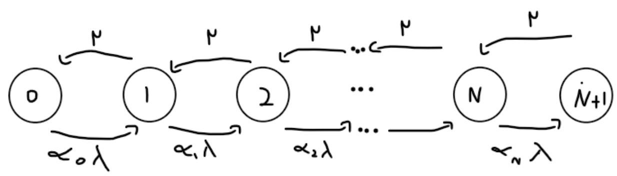
$$\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Podemos plantear la matriz Q de la siguiente forma, asumiendo que la primera maquina en fallar, es la primera en ser reparada

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\mu_2) & 0 & \mu_2 & 0 \\ \mu & 0 & -(\mu+\mu_1) & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

12. **Ejercicio 4 del libro**

    Podemos hacer un dibujo para tener una idea



    Luego, las tasas de nacimiento son:

$$\lambda_n = \alpha_n \lambda$$

    Las tasas de muerte son:

$$\mu_n = \mu$$

13. **Ejercicio 5 del libro**

    Si tenemos i infectados, entonces estos pueden contagiar a $(N - i)$ no infectados con probabilidad

$$\frac{i(N-i)}{\binom{N}{2}}$$

    La tasa de un nacimiento (un infectado) es de

$$\lambda_n = \frac{i(N-i)}{\binom{N}{2}} \lambda p$$

    Luego, queremos ver el tiempo esperado hasta que todos estén infectados, esto se calcula mediante

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\binom{N}{2}}{\lambda p (N-i) i}$$

    Notar que se tiene un proceso de nacimiento puro, pues solo se infectan.

14. **Ejercicio 6 del libro**

Para esto usamos las ecuaciones vistas en clase, pagina 18.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_0) &= \frac{1}{\lambda}\\
\mathbb{E}(T_1) &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda}\mathbb{E}(T_0) = \frac{1}{2\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)\\
\mathbb{E}(T_2) &= \frac{1}{3\lambda} + \frac{2\mu}{3\lambda}\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{3\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)\\
\mathbb{E}(T_3) &= \frac{1}{4\lambda} + \frac{3\mu}{4\lambda}\mathbb{E}(T_3) = \frac{1}{4\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^3}{\lambda^3}\right)\\
\mathbb{E}(T_4) &= \frac{1}{5\lambda} + \frac{4\mu}{5\lambda}\mathbb{E}(T_4) = \frac{1}{4\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^3}{\lambda^3} + \frac{\mu^4}{\lambda^4}\right)\\
\mathbb{E}(T_5) &= \frac{1}{6\lambda} + \frac{5\mu}{6\lambda}\mathbb{E}(T_5) = \frac{1}{4\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^3}{\lambda^3} + \frac{\mu^4}{\lambda^4} + \frac{\mu^5}{\lambda^5}\right)
\end{aligned}
$$

Ya podemos calcular lo que se pide.

$$\mathbb{E}(\text{ir de 0 a 4}) = \mathbb{E}(T_0) + \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2) + \mathbb{E}(T_3) + \mathbb{E}(T_4)$$

$$\mathbb{E}(\text{ir de 2 a 5}) = \mathbb{E}(T_2) + \mathbb{E}(T_3) + \mathbb{E}(T_4) + \mathbb{E}(T_5)$$

15. **Ejercicio 8 del libro**

El espacio de estados puede ser planteado como

$$\Omega = \{ \text{ Ambas maquinas trabajan, una se repara y otra funciona, una se repara y la otra espera } \}$$

Las tasas son:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2\lambda & \mu_0 &= 0 \\ \lambda_1 &= \lambda & \mu_1 &= \mu \\ \lambda_2 &= 0 & \mu_2 &= \mu \end{aligned}$$

La matriz de las tasas corresponde a

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

Para las ecuaciones de retroceso necesitamos saber v_i, pero recordamos que estos corresponden a la diagonal de la matriz, sin el $-$, entonces

$$\begin{aligned} v_0 &= 2\lambda \\ v_1 &= \lambda + \mu \\ v_2 &= \mu \end{aligned}$$

Ahora podemos plantear las ecuaciones

$$\begin{aligned} P_{0j}^{'}(t) &= \sum_{k\neq 0}^{2} q_{0k}P_{kj} - v_0P_{0j} = q_{01}P_{1j} + q_{02}P_{2j} - v_0P_{0j} \\ P_{1j}^{'}(t) &= \sum_{k\neq 1}^{2} q_{1k}P_{kj} - v_1P_{1j} = q_{10}P_{0j} + q_{12}P_{2j} - v_1P_{1j} \\ P_{2j}^{'}(t) &= \sum_{k\neq 2}^{2} q_{2k}P_{kj} - v_2P_{2j} = q_{20}P_{0j} + q_{21}P_{1j} - v_2P_{2j} \end{aligned}$$

Reemplazando los que tenemos, se llega a que las ecuaciones de retroceso son:

$$\begin{aligned}
P_{0j}^{'}(t) &= 2\lambda P_{1j}(t) - 2\lambda P_{0j}(t)\\
P_{1j}^{'}(t) &= \mu P_{0j}(t) + \lambda P_{2j}(t) - (\lambda+\mu)P_{0j}(t)\\
P_{2j}^{'}(t) &= \mu P_{1j}(t) - \mu P_{2j}(t)
\end{aligned}$$

16. **Ejercicio 9 del libro**

De manera similar al proceso de solo nacimiento se tiene

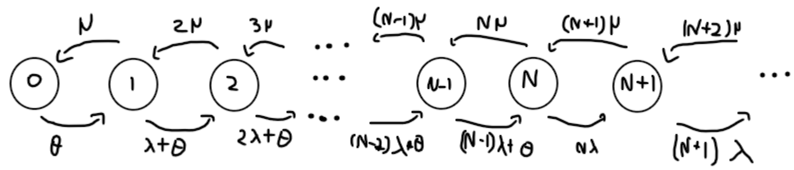
$$P_{ij}(t) = \frac{(\mu t)^{i-j}e^{-\mu t}}{(i-j)!} \text{ para } 1 \leq j \leq i$$

Ahora, usando la restricción de la suma, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i} P_{ij}(t) &= 1\\
P_{i0}(t) + \sum_{j=1}^{i} P_{ij}(t) &= 1\\
1 - \sum_{j=1}^{i} P_{ij}(t) &= P_{i0}(t)\\
1 - \sum_{k=0}^{i-1} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!} &= P_{i0}(t)\\
1 - P(Y \leq i-1) &=\\
P(Y > i) &=\\
\sum_{k=i}^{\infty} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!} &= P_{i0}(t)
\end{aligned}$$

17. **Problema 12 del libro**

El ejercicio no es tan preciso, y hay que asumir algunas cosas que salen en el libro (ver pagina 361). Podemos hacer un dibujo de la situación



Generalicemos lo pedido, para luego evaluar el caso particular.

$$
\begin{aligned}
\mu\pi_1 &= \theta\pi_0 \\
2\mu\pi_2 &= (\lambda+\theta)\pi_1 \\
3\mu\pi_3 &= (2\lambda+\theta)\pi_2 \\
&\vdots \\
(N-1)\mu\pi_{N-1} &= ((N-2)\lambda+\theta)\pi_{N-2} \\
N\mu\pi_N &= ((N-1)\lambda+\theta)\pi_{N-1} \\
(N+1)\mu\pi_{N+1} &= N\lambda\pi_N \\
(N+2)\mu\pi_{N+2} &= (N+1)\lambda\pi_{N+1}
\end{aligned}
$$

Procediendo de la misma manera que en los modelos anteriores, se llega a que

$$
\pi_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!\mu^k}((k-1)\lambda+\theta)\cdots(2\lambda+\theta)(\lambda+\theta)\theta\pi_0 & 1 \leq k \leq N \\ \dfrac{N\lambda^{k-N}}{k\mu^k}\dfrac{((N-1)\lambda+\theta)\cdots(2\lambda+\theta)(\lambda+\theta)\theta\pi_0}{N!} & k \geq N+1 \end{cases}
$$

Solo falta despejar π_0

$$
\pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} = 1
$$

$$
\pi_0 + \pi_0 \sum_{k=1}^{N} \frac{((k-1)\lambda+\theta)\cdots(2\lambda+\theta)(\lambda+\theta)\theta}{k!\mu^k} +
$$

$$
\pi_0 \frac{N((N-1)\lambda+\theta)\cdots(2\lambda+\theta)(\lambda+\theta)\theta}{N!\lambda^N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1
$$

Haciendo el despeje respectivo se tiene que

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}\frac{((k-1)\lambda+\theta)\cdot\cdot(2\lambda+\theta)(\lambda+\theta)\theta}{k!\mu^k}+\frac{N((N-1)\lambda+\theta)\cdot\cdot(2\lambda+\theta)(\lambda+\theta)\theta}{N!\lambda^N}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

Ya que tenemos todo, planteemos la distribución estacionaria para el caso particular.

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k}\pi_0 & 1 \leq k \leq 3 \\ \dfrac{3}{k2^k}\pi_0 & k \geq 4 \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{3}\frac{((k-1)+1)\cdot\cdot(2+1)(1+1)1}{k!2^k}+3\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

Resolviendo todo, se tiene que la distribución estacionaria es

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k(1+3ln(2)-9/8)} & 1 \leq k \leq 3 \\ \dfrac{3}{k2^k(1+3ln(2)-9/8)}\pi_0 & k \geq 4 \end{cases}$$

Luego, la proporción del tiempo en que la inmigración es restringida esta dada por

$$\begin{aligned} P(Restringida) &= 1 - P(No\, restringida) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{2}\pi_k \end{aligned}$$

18. **Ejercicio 13 del libro**

Tenemos las tasas. Asumiendo que se puede tener a solo 1 cliente esperando, pues el otro se esta cortando el pelo, podemos plantear el siguiente espacio de estados

$$\Omega = \{ \text{ No hay nadie, hay 1 cliente cortándose el pelo, hay 1 cliente cortándose el pelo y otro esperando } \}$$

$$\Omega := \{0, 1, 2\}$$

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para este caso particular es fácil encontrar la distribución estacionaria, la cual corresponde a

$$\pi = \begin{bmatrix} 16/37 & 12/37 & 9/37 \end{bmatrix}$$

Se pide el numero promedio de clientes en la tienda

$$\sum_{i=0}^{2} i\pi_i = \frac{30}{37}$$

Los potenciales clientes que entran a la tienda esta dada cuando hay solo 1 cliente cortándose el pelo, y obviamente hay 1 lugar para esperar, es decir,

$$\pi_0 + \pi_1 = \frac{28}{37}$$

19. **Ejercicio 14 del libro**

Nos dicen que hay 2 autos en la fila (incluyéndonos) y 1 en servicio. Podemos plantear la siguiente matriz de tasas con espacio de estados como sigue:

$$\Omega\{ \text{ No hay autos, 1 auto en servicio, 1 auto en servicio y 1 esperando, 1 auto en servicio y 2 esperando } \}$$

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -20 & 20 & 0 & 0 \\ 12 & -32 & 20 & 0 \\ 0 & 12 & -32 & 20 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Notar que se paso la tasa de servicio ($\mu = 5$) en minutos, a una hora, pues recordar que las tasas deben estar en el mismo tiempo.

Planteando las ecuaciones, es fácil llegar a que la distribución estacionaria corresponde a

$$\pi = \begin{bmatrix} 27/272 & 45/272 & 75/272 & 125/272 \end{bmatrix}$$

Se pide la fracción de clientes que pasan en la gasolinera, esto corresponde a lo siguiente

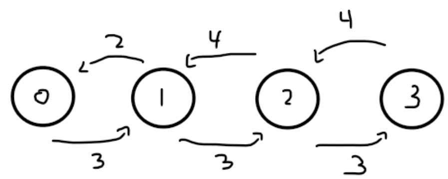
$$\sum_{i=1}^{3} \pi_i = \frac{245}{272}$$

La fracción de clientes que se pierde corresponde cuando hay 1 auto en servicio y 2 en fila, es decir

$$\pi_3 = \frac{125}{272}$$

20. **Ejercicio 15 del libro**

Tenemos un $M/M/2/3$. Podemos hacer el dibujo



Las ecuaciones de balance nos quedan como

$$\begin{aligned}
2\pi_1 &= 3\pi_0 \\
4\pi_2 &= 3\pi_1 \\
4\pi_3 &= 3\pi_2
\end{aligned}$$

De acá se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{3}{2}\pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{3^2}{8}\pi_0 \\
\pi_3 &= \frac{3^3}{32}\pi_0
\end{aligned}$$

Imponemos la condición de la suma, de modo que se tiene

$$\begin{aligned}
\pi_0 + \sum_{i=1}^{3} \pi_i &= 1 \\
\pi_0 + \frac{3}{2}\pi_0 + \frac{3^2}{8}\pi_0 + \frac{3^3}{32}\pi_0 &= 1 \\
\pi_0 &= \frac{1}{1 + 3/2 + 3^2/8 + 3^3/32}
\end{aligned}$$

Luego, por complemento se tiene que la fracción de potenciales clientes es

$$1 - \pi_3$$

21. **Ejercicio 16 del libro**

Definamos los estados para tener una idea

$$\Omega\{ \text{ no hay nadie, unido a una partícula inaceptable, unido a una partícula aceptable } \}$$

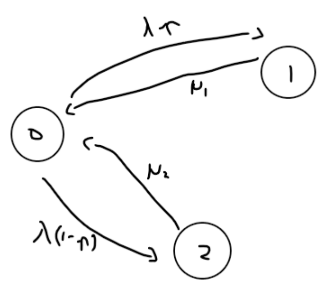
Las ecuaciones quedan como

$$\mu_2\pi_2 = \alpha\pi_0$$
$$\mu_1\pi_1 = (1-\alpha)\lambda\pi_0$$
$$\sum_{i=0}^{2}\pi_i = 1$$

22. **Ejercicio 17 del libro**

Similar al anterior podemos hacer un dibujo según el espacio de estados

$$\Omega = \{ \text{ Trabaja, fallo tipo I, fallo tipo II } \}$$



Las ecuaciones quedan como

$$\mu_1\pi_1 = \lambda p\pi_0$$
$$\mu_2\pi_2 = (1-p)\lambda\pi_0$$
$$\sum_{i=0}^{2}\pi_i = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda p}{\mu_1} + \frac{(1-p)\lambda}{\mu_2}}$$

23. **Ejercicio 19 del libro**

Podemos plantear el siguiente espacio de estados

$$\Omega = \{ \text{ Ambas trabajan, falla maquina 1 y trabaja maquina 2, falla maquina 2 y trabaja maquina 1, ambas fallan } \}$$

La matriz Q nos queda como

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_2+\lambda_1) & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para encontrar la proporción del tiempo podemos resolver el sistema

$$\pi Q = 0$$
$$\sum_{i=0}^{3} \pi_i = 0$$

24. **Ejercicio 20 del libro**

Podemos intuir que se trata de un $M/M/1$, pues hay solo un reparador, y solo repara 1, y las demás esperan (solo la otra maquina restante). Sean los siguientes estados

$$\Omega\{ \text{ ambas trabajan, entra a reparación 1 y trabaja 2, entra a reparación 2 y 1 ya esta en reparación } \}$$

Se pide el tiempo esperado hasta que ambas entren estén en reparación. Recordando la formula de la clase (pagina 19), se tiene que

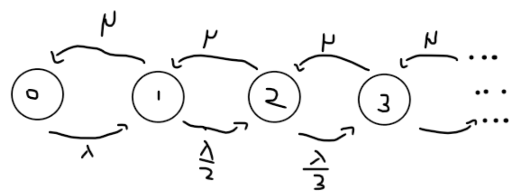
$$\mathbb{E}(\text{Ir de 0 a 2}) = \frac{2-0}{\lambda-\mu} - \frac{(\mu/\lambda)}{\lambda-\mu}\frac{(1-(\mu/\lambda)^2)}{1-\mu/\lambda} = \frac{2}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda^2}$$

Para la proporción del tiempo que trabajan la maquinas, se busca $\pi_0 + \pi_1$, es decir, resolviendo las ecuaciones de balance

$$\mu\pi_1 = \lambda\pi_0$$
$$\mu\pi_2 = \lambda\pi_1$$
$$\sum_{i=0}^{2} = 1$$

25. **Ejercicio 22 del libro**

Un dibujo puede ser



Las ecuaciones de balance son

$$
\begin{aligned}
\mu\pi_1 &= \lambda\pi_0 \\
\mu\pi_2 &= \frac{\lambda}{2}\pi_1 \\
\mu\pi_3 &= \frac{\lambda}{3}\pi_2 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

Donde fácilmente se puede encontrar que

$$\pi_k = \frac{(\lambda/\mu)^k\pi_0}{k!}$$

Despejamos π_0

$$
\begin{aligned}
\pi_0\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\right) &= 1 \\
\pi_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} &= 1
\end{aligned}
$$

Despejando se tiene $\pi_0 = e^{-\lambda/\mu}$, y reemplazando en π_k se tiene que la distribución limite del numero de clientes esta dada por

$$\pi_k = \frac{(\lambda/\mu)^k e^{-\lambda/\mu}}{k!}\ ,\ k = 0, 1, ...$$

26. **Ejercicio 24 del libro**

Podemos considerar esto como un proceso de nacimiento y muerte, donde los nacimientos son las llegadas de los taxis, y las muertes la llegada de clientes, es decir, $\lambda = 1$ y $\mu = 2$. Podemos plantear las ecuaciones de balance como

$$\begin{aligned} 2\pi_1 &= \pi_0 \\ 2\pi_2 &= \pi_1 \\ 2\pi_3 &= \pi_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} &= 1 \end{aligned}$$

Es fácil calcular y darse cuenta que

$$\pi_k = \frac{1}{2^{k+1}}$$

El numero esperado de taxis esperando es

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \frac{1}{2^{i+1}}$$

La otra proporción se calcula como

$$1 - P(\text{ no halla ningún taxi }) = 1 - \pi_0 = \tfrac{1}{2}$$

27. **Ejercicio 32 del libro**

Se ve algo difícil, pero vamos paso por paso. Definamos el espacio de estados

$$\Omega = \{ \text{ No hay nadie, hay 1 cliente, hay 2 clientes,..., hay } n \text{ clientes } \}$$

Podemos ver del enunciado que si hay servidores disponible, se eligen con misma probabilidad, por lo cual en los estados 1 y 2, pueden haber 2 casos, denotémoslos con i', j'. Entonces, según estos casos, tenemos las dos siguientes matrices de tasas

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} -\lambda/2 & \lambda/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1+\mu_2 & -(\mu_1+\mu_2+\lambda) & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\mu_1+\mu_2) \end{pmatrix} \end{array}$$

La otra matriz puede ser

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} -\lambda/2 & \lambda/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_2+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_1 & -(\mu_1+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1+\mu_2 & -(\mu_1+\mu_2+\lambda) & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\mu_1+\mu_2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces, a modo de resumen se tiene

$$q_{01} = \frac{\lambda}{2}$$

$$q_{10} = \mu_1 \ , \ q_{12} = \lambda \text{ o } q_{1'0} = \mu_2 \ , \ q_{12} = \lambda$$

$$q_{21} = \mu_2 \ , \ q_{23} = \lambda \text{ o } q_{2'1} = \mu_1 \ , \ q_{23} = \lambda$$

$$q_{n,n+1} = \lambda \ , \ q_{n+1,n} = \mu_1 + \mu_2$$

Juntando las dos condiciones en las mismas ecuaciones de balance, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_1\pi_1 &= \frac{\lambda}{2}\pi_0 \\
\mu_2\pi_{1'} &= \frac{\lambda}{2}\pi_0 \\
\mu_1\pi_2 &= \lambda\pi_{1'} \\
\mu_2\pi_2 &= \lambda\pi_1 \\
(\mu_1+\mu_2)\pi_3 &= \lambda\pi_2 \\
(\mu_1+\mu_2)\pi_4 &= \lambda\pi_3 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1
\end{aligned}$$

Luego de resolver, basta con comprobar que se cumple

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}\ \forall i, j$$

Es decir, se debe corroborar

$$\begin{aligned}
\pi_1 q_{10} &= \pi_0 q_{01} \\
\pi_2 q_{21} &= \pi_1 q_{12} \\
\pi_{1'} q_{1'0} &= \pi_0 q_{01} \\
\pi_2 q_{21'} &= \pi_{1'} q_{1'2} \\
\pi_{n+1} q_{n+1,n} &= \pi_n q_{n+1,n}
\end{aligned}$$

28. Un sistema se mueve entre 3 estados como una cadena de markov a tiempo continuo con matriz de tasas dada por

$$\begin{bmatrix} -2\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & -2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix}$$

Muestre que, dado que el proceso inicia en cualquier estado i en el tiempo 0, la distribución condicional que este en el estado j en el tiempo t esta dada por

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}e^{-3\lambda t} & i = j \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}e^{-3\lambda t} & i \neq j \end{cases}$$

Básicamente se pide corroborar las ecuaciones de retroceso o adelanto. Usemos las de adelanto, primero derivemos

$$P_{ij}^{'}(t) = \begin{cases} -2\lambda e^{-3\lambda t} & i = j \\ \lambda e^{-3\lambda t} & i \neq j \end{cases}$$

Debemos verificar que para $i = j$ se cumple

$$\begin{aligned} -2\lambda e^{-3\lambda t} &= \sum_{k \neq i} q_{ki} P_{ik} - v_i P_{ii} \\ &= \lambda \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda t} \right) - 2\lambda \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3\lambda t} \right) \\ &= -2\lambda e^{-3\lambda t} \end{aligned}$$

Ahora debemos verificar para $i \neq j$

$$\begin{aligned} \lambda e^{-3\lambda t} &= \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{jk} - v_j P_{ij} \\ &= \lambda \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3\lambda t} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda t} \right) - 2\lambda \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3\lambda t} \right) \\ &= \lambda e^{-3\lambda t} \end{aligned}$$

29. **Ejercicio 7.1 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Recordamos que $P_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{v_i}$, además de $P_{ii} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} P_{01} &= \frac{q_{01}}{v_0} = 1 \quad , \quad P_{02} = \frac{q_{02}}{v_0} = 0 \\ P_{10} &= \frac{q_{10}}{v_1} = \frac{1}{2} \quad , \quad P_{12} = \frac{q_{12}}{1} = \frac{1}{2} \\ P_{20} &= \frac{q_{20}}{v_2} = \frac{1}{2} \quad , \quad P_{21} = \frac{q_{21}}{v_2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La embedded markov chain es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

30. **Ejercicio 7.2 de Introduction to Stochastic Processes with R**

La matriz Q esta dada por

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para la $b)$ es $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{3}$- Para la $c)$ es $\frac{1}{q_{34}} = \frac{1}{2}$. Para la $d)$ es solo resolver $\pi Q = 0$.

31. **Ejercicio 7.4 de Introduction to Stochastic Processes with R**

La matriz Q esta dada por

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

32. **Ejercicio 7.7 de Introduction to Stochastic Processes with R**

    Podemos usar las ecuaciones de adelanto de forma tal que $P'(t) = P(t)Q$. Es decir, que las ecuaciones de adelanto están dadas por

$$\begin{bmatrix} P_{00}^{'}(t) & P_{01}^{'}(t) & P_{02}^{'}(t) \\ P_{10}^{'}(t) & P_{11}^{'}(t) & P_{12}^{'}(t) \\ P_{20}^{'}(t) & P_{21}^{'}(t) & P_{22}^{'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

33. **Ejercicio 7.14 de Introduction to Stochastic Processes with R**

    La matriz Q esta dada por

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 6 & 2 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

    Resolviendo $\pi Q = 0$ se tiene que la estacionaria es

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{11}{25} & \frac{8}{25} & \frac{6}{25} \end{bmatrix}$$

34. **Ejercicio 7.19 de Introduction to Stochastic Processes with R**

    Se trata de un $M/M/1$, por lo cual $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$. Se pide la probabilidad a largo plazo de que los clientes suban a un taxi. Esto se calcula mediante

$$\begin{aligned} P(\text{subir a un taxi}) &= 1 - P(\text{no subir}) \\ &= 1 - (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

35. **Ejercicio 7.22 de Introduction to Stochastic Processes with R**
Definamos el espacio de estados como

$$\Omega = \{ \text{ Tom esta en la 1 pregunta, en la 2, en la 3, en la 4, termino } \}$$
$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, C\}$$

La matriz de tasas corresponde a

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/20 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/30 & 1/40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/40 & 1/40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculando e^{45Q} se obtiene lo pedido

36. **Ejercicio 7.23 de Introduction to Stochastic Processes with R**
Definamos el espacio de estados como

$$\Omega = \{ \text{ Todas trabajan, falla 1, falla 2, falla 3, falla 4 } \}$$

La matriz de tasas es

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4/10 & 4/10 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & -12/20 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & -7/10 & 2/10 & 0 \\ 0 & 0 & 2/4 & -3/5 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolviendo $\pi Q = 0$ se tiene

$$\pi = \begin{bmatrix} 625/2513 & 1000/2513 & 600/2513 & 240/2513 & 48/2513 \end{bmatrix}$$

Se pide la cantidad de maquinas esperada que trabajan en el largo plazo, es decir

$$4 \cdot 625/2513 + 3 \cdot 1000/2513 + 2 \cdot 600/2513 + 1 \cdot 240/2513 + 0 \cdot 48/2513 \approx 2.76$$

37. **Ejercicio 7.24 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Corresponde a un proceso de nacimiento y muerte dado por

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \frac{\lambda}{i+1} \\ \mu_i &= \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

Entonces, las ecuaciones de balance global son

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\pi_1 &= \lambda\pi_0 \\ \frac{1}{\alpha}\pi_2 &= \frac{\lambda}{2}\pi_1 \\ \frac{1}{\alpha}\pi_3 &= \frac{\lambda}{3}\pi_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1\end{aligned}$$

Despejando se tiene que

$$\pi_n = \frac{(\lambda\alpha)^n}{n!}\pi_0$$

Reemplazando en la ultima condición, se obtiene

$$\pi_n = \frac{(\alpha\lambda)^n e^{-\lambda\alpha}}{n!}$$

El numero esperado en el largo plazo es de $\alpha\lambda$. La probabilidad de que en el largo plazo haya al menos 2 esta dada por

$$\begin{aligned}P(\text{Al menos 2 en la fila}) &= 1 - (P(\text{1 en fila}) + P(\text{0 en fila})) \\ &= 1 - e^{-\alpha\lambda}(1 + \lambda\alpha)\end{aligned}$$

38. **Ejercicio 7.26 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Podemos definir el espacio de estados como

$$\Omega = \{ \text{ ninguna falla, 1 falla, falla 1 mientras reparan otra, falla 1 mientras reparan 2 } \}$$

$$\Omega := \{0, 1, 2, 3\}$$

La matriz Q esta dada por

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3/24 & 3/24 & 0 & 0 \\ 1/6 & -6/24 & 2/24 & 0 \\ 0 & 2/6 & -9/24 & 1/24 \\ 0 & 0 & 3/6 & -3/6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolviendo $\pi Q = 0$, nos interesa π_0, el cual corresponde a $\pi_0 = 0.512$.

39. **Ejercicio 7.26 de Introduction to Stochastic Processes with R**

Para esto, podemos reordenar Q de forma tal que

$$Q = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De modo que podemos calcular $F = -V^{-1}$, con

$$V = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

De este modo, la probabilidad de absorción esta dada por $A_{2,5}$. Donde

$$A = F \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

40. **Ejercicio 4.4 de Essentials of stochastic processes**

Podemos plantear el siguiente espacio de estados

$$\Omega = \{\text{Hay 3 computoras, hay 2, hay 1, hay 0}\}$$
$$\Omega := \{0, 1, 2, 3\}$$

La matriz de tasas corresponde a

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolviendo $\pi Q = 0$ se tiene que

$$\pi = \begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

En el largo plazo el ratio de ventas esta corresponde a

$$2(1 - \pi_3) = \frac{6}{5}$$

41. **Ejercicio 4.5 de Essentials of stochastic processes**

Podemos plantear el espacio de estados como sigue

$$\Omega = \{\text{Ambas trabajan, falla maquina 1, falla maquina 2, falla maquina 1 y luego la 2, falla maquina 2 y luego la 1}\}$$

La matriz de tasas nos queda como

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -(\lambda 1 + \lambda 2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_2) & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para la b) es solo reemplazar y resolver $\pi Q = 0$

42. **Ejercicio 4.7 de Essentials of stochastic processes**

Podemos definir el siguiente espacio de estados

$$\Omega = \{\text{No hay llamadas, responde 1, responde 2, responde 1 y 2}\}$$

La matriz de tasas nos quedas como

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Basta resolver $\pi Q = 0$.

43. **Ejercicio 4.7 de Essentials of stochastic processes**

Podemos definir el siguiente espacio de estados

$$\Omega = \{\text{No hay nadie, se sirve 1, se sirve 1 y otro espera}\}$$

Hay que convertir la tasa de servicio a hora, lo que nos queda como $\mu = 10$ por hora. Entonces la matriz de tasas nos queda como

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 10 & -30 & 20 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolviendo $\pi Q = 0$ se obtiene

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Sabemos que en una hora llegan a tasa $\lambda = 20$, por lo cual en promedio se sirven $20 \cdot \frac{3}{7} = 8.57$ autos.

44. **Ejercicio de Essentials of stochastic processes**

Definamos el siguiente espacio de estados

$$\Omega = \{\text{No hay nadie, entro al 1, entro al 2, entro al que esta desocupado, espero a ser atendido}\}$$

$$\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

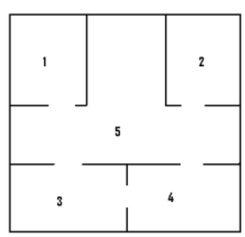
La matriz de tasas queda como

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -9 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3+5 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculando $\pi Q = 0$ se tiene

$$\pi = \begin{bmatrix} 4/11 & 2/11 & 2/11 & 2/11 & 1/11 \end{bmatrix}$$

45. Un ratón entrenado se mueve entre los sectores del laberinto esquematizado en la figura. Suponga que, independientemente de cualquier otra cosa, el tiempo que el ratón gasta en el sector i tiene distribución $exp(\lambda_i)$, $i = 1, ..., 5$, para después dirigirse a un sector escogido al azar entre aquellos sectores accesibles mediante las aberturas indicadas.



a) Modele esta situación como una cadena de Markov (tiempo continuo) y especifique todos sus parámetros.

La matriz de tasas corresponde a

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 5 & 0 & -\lambda_3 & \frac{\lambda_3}{2} & \frac{\lambda_3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_4}{2} & -\lambda_4 & \frac{\lambda_4}{2} \\ \frac{\lambda_5}{4} & \frac{\lambda_5}{4} & \frac{\lambda_5}{4} & \frac{\lambda_5}{4} & -\lambda_5 \end{pmatrix} \end{array}$$

4 Proceso de Renovación

4.1 Recordatorios

Podemos obtener la probabilidad de renovación mediante

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

Donde F_n representa la acumulada de la enésima convolución.
La función valor medio o función de renovación se puede obtener como

$$m(t) = \mathbb{E}(N(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} F_n$$

$$m(t) = \mathbb{E}(N(t)) = F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx$$

Sea $\mathbb{E}(t_i) = \mu$ el tiempo entre llegadas, si $P(t_i > 0) > 0$ entones con probabilidad 1

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

Para $n \to \infty$. $\frac{1}{\mu}$ es la tasa del proceso de renovación.

Suponga que en el instante en que ocurre la i llegada del proceso, se obtiene una cantidad r_i (recompensa). Sea $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} r_i$, el total de recompensa obtenido en el tiempo t. Asumiendo que los pares (t_i, r_i), $i = 1, 2, ...$, son independientes e igualmente distribuidos, entonces

$$\frac{R(t)}{t} \to \frac{\mathbb{E}(r_i)}{\mathbb{E}(t_i)} = \frac{\mathbb{E}(\text{costo del ciclo})}{\mathbb{E}(\text{largo del ciclo})}$$

con probabilidad 1, para $n \to \infty$.

Un ciclo se define como el tiempo en el cual ocurre una renovación. Entonces el promedio de costo de recompensa por unidad de tiempo en el largo plazo es igual al costo de la recompensa esperada alcanzada durante el ciclo, dividido por el largo del intervalo del ciclo.

$$= \int_0^T th(t)dt + \int_T^{\infty} Th(t)dt$$

$$= \int_0^T th(t)dt + T[1 - F(t)]$$

$$\mathbb{E}(t_i) = \int_0^T th(t)dt + T[1 - H(t)]$$

4.2 Ejercicios

1. Una radio funciona con una sola batería. Cuando falla, es reemplazada inmediatamente. El tiempo de vida se distribuye uniformemente en el intervalo $(30, 60)$. ¿Cual es la tasa de reemplazo de las baterías?

   Sabemos que $t_i \sim U(30, 60)$, por lo cual $\mathbb{E}(t_i) = 45$. Luego, para $n \to \infty$ se tiene que la tasa de reemplazos es de

$$\frac{1}{45}$$

2. Encuentre la función de valor medio para $t_i \sim U(0, 1)$

   En el caso de la uniforme (0,1) tenemos que $f_{t_i}(t) = 1$ y $F_{t_i}(t) = t$, reemplazando todo se tiene

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x)1dx$$
$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x)dx$$

   Con un cambio de variable nos queda

$$m(t) = t + \int_0^t m(y)dy$$

   Derivamos respecto de t

$$m'(t) = 1 + m(t)$$

   Resolviendo la edo se llega que la función de valor medio es

$$m(t) = e^t - 1$$

3. Siguiendo el ejercicio 1. Supongamos que ahora debemos ir a comprar una batería a la tienda, cuyo tiempo es distribuido por una uniforme $(0, 1)$. Cual es la tasa promedio que se cambia la batería?

   Ahora nos interesa

$$\mu = \mathbb{E}(\text{tiempo en que falla la batería}) + \mathbb{E}(\text{tiempo que demora en ir a comprar batería })$$

   Se tiene que

$$\mu = \frac{91}{2} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{2}{91}$$

   En el largo plazo, se cambian dos baterías cada 91 horas.

4. El tiempo de vida de un auto tiene densidad $h(\cdot)$. Se reemplaza cada vez que se descompone o pasa una cantidad de años igual a T. Un auto nuevo vale A millones de pesos. Un costo extra de B millones es realizado si el auto se descompone antes del tiempo T. ¿Cual es el costo de esta situación en el largo plazo?

   El valor esperado del costo/recompensa en ciclo es

$$A + BP(t \leq T)$$

$$\mathbb{E}(r_i) = A + BH(T)$$

   El costo de la estrategia es el cociente de ambos

$$\frac{R(t)}{t} \to \frac{\mathbb{E}(r_i)}{\mathbb{E}(t_i)} = \frac{A + BH(T)}{\int_0^T th(t)dt + T[1 - H(T)]}$$

   Para el caso particular de $A = 10$, $B = 3$ y $h \sim U(0, 10)$ se tiene

$$\frac{R(t)}{t} \to \frac{10 + 3T/10}{\int_0^T t/10dt + T[1 - T/10]}$$

$$\frac{R(t)}{t} \to \frac{10 + 3T/10}{T^2/20 + T - T^2/10}$$

   Si minimizamos $G(T) = \frac{10+3T/10}{T^2/20+T-T^2/10}$ y asumimos que el auto se descompone antes de un tiempo $T \leq 10$, se obtiene que se debe comprar un auto nuevo, cuando el auto antiguo alcance una edad de 8.83 años.

5. El tiempo de vida de un automóvil tiene una distribución H y una densidad de probabilidad h. La Sra. Jones compra un automóvil nuevo tan pronto como se rompe o alcanza la edad de T años. Un automóvil nuevo cuesta C_1 dolares y se incurre en un costo adicional de C_2 dolares cada vez que se descompone un automóvil. Suponiendo que un automóvil de T años en funcionamiento tiene un valor de reventa esperado $R(T)$, ¿cual es el costo promedio a largo plazo de la Sra. Jones?

   Podemos pensar que la esperanza del ciclo es

$$\mathbb{E}(r_i) = C_1 + C_2 H(T) - R(T)P(X \geq T)$$

   Lo anterior proviene de

$$(C_1 + C_2)P(X < T) + (C_1 - R(T))P(X \geq T)$$

$$\underbrace{(C_1 + C_2)P(X < T)}_{A} + \underbrace{(C_1 - R(T))P(X \geq T)}_{B}$$

   Donde A corresponde al pago de cambiar el auto y arreglar el auto antiguo si falla antes de T, y B corresponde a la compra del auto nuevo, menos la reventa que gano del auto antiguo. A pasa cuando es menor a T años, y B pasa cuando es mayor o igual a T año. Lo dice el enunciado. Ahora solo planteamos. El costo promedio a largo plazo de la Sra. Jones es

$$\frac{C_1 + C_2 H(T) - R(T)[1 - H(T)]}{\int_0^T th(t)dt + T[1 - H(T)]}$$

6. Suppose that customers arrive at a train depot in accordance with a renewal process having a mean interarrival time μ. Whenever there are N customers waiting in the depot, a train leaves. If the depot incurs a cost at the rate of nc dollars per unit time whenever there are n customers waiting, what is the average cost incurred by the depot?

   Tenemos que el largo del ciclo es $N\mu$, pues un ciclo corresponde a cuando el tren se va, pero este se va cuando hay N clientes. Ahora el costo del ciclo, se menciona que hay un costo por unidad de tiempo nc cuando hay n clientes esperando, podemos intuir que entre la n y $n+1$ llegada hay un costo de nc, y la esperanza esta dada por

   $$\mathbb{E}(\text{costo del ciclo}) = \mathbb{E}[cT_1 + 2cT_2 + \cdots + (N-1)T_{n-1}] = \tfrac{c\mu N(N-1)}{2}$$

   Donde $\mathbb{E}(T_n) = \mu$ y T_n es el tiempo entre la n y $n+1$ llegada, de modo que en el largo plazo, el costo promedio es de

   $$\frac{\mathbb{E}(\text{costo del ciclo})}{\mathbb{E}(\text{largo del ciclo })} = \frac{c\mu N(N-1)}{2\mu N} = \frac{c(N-1)}{2}$$

7. **Ejercicio 2 del libro**

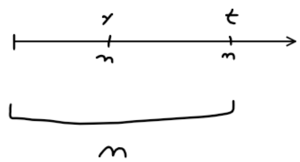
   Sabemos que si $X_i \sim P(\mu)$ entonces $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\mu)$, $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} X_i \sim P((n+1)\mu)$. Entonces

   $$P(N(t) = n) = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \frac{e^{-n\mu}(n\mu)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \frac{e^{-(n+1)\mu}((n+1)\mu)^k}{k!}$$

   Recordar que t es continuo, por eso se aplica la función parte entera.

8. **Ejercicio 3 del libro**

   Para encontrar $P(N(t) = n|S_n = y)$ podemos hacer un dibujo



   Por lo cual

$$
\begin{aligned}
P(N(t) = n|S_n = y) &= P(X_{n+1} > t|S_n = y) \\
&= 1 - P(X_{n+1} \leq t|S_n = y) \\
&= 1 - P(X_{n+1} \geq t - y) \\
&= 1 - F(t - y)
\end{aligned}
$$

   para $y < t$. Para lo ultimo ya nos entregan y tenemos todo, solo reemplazamos

$$
\begin{aligned}
P(N(t) = n) &= \int_0^t (1 - (1 - e^{-\lambda(t-y)}))\frac{\lambda^n y^{n-1} e^{-n\lambda y}}{(n-1)!} dy \\
&= \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n t^n}{n(n-1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

9. **Ejercicio 3.1 de Essentials of stochastic processes**

   La probabilidad al largo plazo corresponde a

$$
\frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)} = \frac{2}{2+7} = \frac{2}{9}
$$

   Donde $X \sim P(2)$ e $Y \sim Geo(7)$

10. **Ejercicio 3.2 de Essentials of stochastic processes**

    EL costo del ciclo es por cuanto trabaja (11 meses) y el largo del ciclo es cuanto trabaja + cuanto demora en encontrar de nuevo un trabajo.

$$
\frac{11}{11+3} = \frac{11}{14}
$$

11. **Ejercicio 3.3 de Essentials of stochastic processes**

    Nuevamente, el costo de un ciclo es el largo de la calle (10 pies), y el largo del ciclo es donde se ubican + costo del ciclo. Y donde se ubican $\sim U(0,10)$, se tiene

$$\frac{10}{10+5} = \frac{10}{15}$$

12. **Ejercicio 3.7 de Essentials of stochastic processes**

    Tenemos que el costo de un ciclo corresponde al costo de las multas, lo cual se calcula como

$$\mathbb{E}(\text{Costo del ciclo}) = 0.9 \cdot 80 + 0.1 \cdot 300 = 102$$

    El largo del ciclo, es el tiempo promedio que le toma hacer todas las multas

$$\mathbb{E}(\text{Largo del ciclo}) = 0.9 \cdot 5 + 0.1 \cdot 30 + 10 = 17.5$$

    En el largo plazo, la tasa de multas es de

$$\frac{102}{17.5} = \$5.83 \text{ por minuto}$$

13. **Ejercicio 3.16 de Essentials of stochastic processes**

    Podemos hacer una función por partes que represente el gasto. Recordar que ocurre el cambio si falla antes de c meses o hasta cumplir c meses.

$$\begin{cases} 1200 & T < c \\ 300 & T \geq c \end{cases}$$

    Lo anterior corresponde al costo del ciclo.Entonces tomando esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{costo del ciclo}) &= 1200P(T < c) + 300P(T \geq c) \\ &= 1200 \int_0^c \frac{2t}{900} dt + 300(1 - P(T < c)) \\ &= \frac{4c^2}{3} + 300 \left(1 - \frac{c^2}{900}\right) \\ &= 300 + c^2 \end{aligned}$$

    Finalmente, recordando la formula para el largo del ciclo, tenemos que

$$\frac{\mathbb{E}(r_i)}{\mathbb{E}(t_i)} = \frac{300 + c^2}{\int_0^c \frac{2t^2}{900} dt + c\left(1 - \int_0^c \frac{2t}{900} dt\right)} = \frac{300 + c^2}{c - c^3/2700}$$

14. **Ejercicio 3.17 de Essentials of stochastic processes**

    Hay que esperar un total de

    $$1 + 2 + \cdots + k - 1$$

    minutos para que el tour inicie, pues cuando hay k personas empieza. Entonces, el costo del ciclo es

    $$\mathbb{E}(\text{costo del ciclo}) = 20 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 0.1$$

    Y el largo del ciclo son el total de personas que hay que esperar para que empiece el tour, es decir, k personas. De modo que en el largo plazo el costo por unidad esta dado por

    $$\frac{20 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 0.1}{k}$$

15. Mr. Vedder tiene la norma de comprar un auto nuevo en cuanto el viejo se avería o cumple 6 años, lo que ocurra primero. El tiempo hasta la avería de los autos que compra son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformemente en el intervalo [0,10] años. Cada auto nuevo cuesta 20.000 USD. Mr, Vedder incurre en un costo aleatorio adicional cada vez que el auto se avería. Este coste adicional por avería se distribuye exponencialmente con una medía de 4.000 USD, Mr. Vedder puede cambiar su auto después de 6 años si no se avería, y sólo si no se avería recibir un valor aleatorio en USD distribuido uniformemente en el intervalo [1000, 3000].

    a) A largo plazo y sin considerar el hecho que Mr. Vedder cambia su auto cuando cumple 6 años, ¿cuál es la tasa de reemplazo de los autos de Mr, Vedder?

       Se refiere al tiempo a largo plazo de la uniforme [0,10]. Su esperanza es $\frac{0+10}{2} = 5$. Por lo cual, la tasa de reemplazo de los autos es de

       $$\tfrac{1}{5}$$

       En el largo plazo.

    b) A largo plazo y bajo el escenario original (no el del item (a)), ¿qué proporción de los autos que compra Mr. Vedder se averían antes de ser sustituidos?

       Básicamente nos piden la probabilidad de falla. Recordamos que este tiempo es uniforme (0,10). Entonces

       $$\begin{aligned} P(X < 6) &= \int_0^6 \frac{1}{10} dx \\ &= \frac{6}{10} \end{aligned}$$

c) Bajo el escenario original (no el del ítem (a)), ¿cuál es la media y varianza del tiempo que Mr. Vedder tiene cada auto?

La pregunta hace referencia al largo del ciclo. Por lo cual solo recordamos la formula.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t_i) &= \int_0^6 x\frac{1}{10}dx + 6\left(1 - \int_0^6 \frac{1}{10}du\right)\\ &= \frac{18}{10} + \frac{12}{5}\\ &= 4.2 \text{ años}\end{aligned}$$

Para la varianza calculamos $\mathbb{E}(t_i^2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t_i^2) &= \int_0^6 x^2\frac{1}{10}dx + 6^2\left(1 - \int_0^6 \frac{1}{10}du\right)\\ &= 21.6\end{aligned}$$

De modo que la varianza es

$$\begin{aligned}Var(t_i) &= 21.6 - (4.2)^2\\ &= 4.96 \text{ años}\end{aligned}$$

d) ¿Cuál es el costo medio anual a largo plazo de la estrategia de compra de autos de Mr. Vedder?

Para esto podemos definir la siguiente función por partes, con $T \sim U(0, 1)$.

$$X = \begin{cases} 20000 + Exp(1/4000) & T < 6\\ 20000 - U(1000, 3000) & T \geq 6\end{cases}$$

Entonces, recordamos la formula del costo/largo del ciclo.

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(r_i)}{\mathbb{E}(t_i)} &= \frac{\mathbb{E}[X]}{\int_0^6 \frac{x}{10}dx + 6[1 - \frac{6}{10}]}\\ &= \frac{\mathbb{E}[20000 + Exp(1/4000)]P(T < 6) + \mathbb{E}[20000 - U(1000, 3000)]P(T \geq 6)}{\int_0^6 \frac{x}{10}dx + 6[1 - \frac{6}{10}]}\\ &= \frac{21600}{4.2}\end{aligned}$$

5 Proceso de Ramificación

5.1 Recordatorios

Si $X_0 = 1$, entonces $\mathbb{E}(X_n) = \mu^n$

$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_0^i P_i$

5.2 Ejercicios

1. **Ejercicio 64 del libro - Cap 4**

   Sabemos que $\mathbb{E}(X_1) = \mu\mathbb{E}(X_0) = \mu$, y en general $\mathbb{E}(X_n) = \mu^n$. Luego, el numero esperado de individuos es de

   $$\begin{aligned} 1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \cdots &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \\ &= \frac{1}{1-\mu} \end{aligned}$$

   Si $X_0 = n$, entonces se tiene que $\mathbb{E}(X_1) = n\mu$, y en general $\mathbb{E}(X_m) = n\mu^m$. Luego, el numero esperado de individuos es

   $$\begin{aligned} n + n\mu + n\mu^2 + n\mu^3 + \cdots &= \sum_{i=0}^{\infty} n\mu^i \\ &= \frac{n}{1-\mu} \end{aligned}$$

2. **Ejercicio 66 del libro - Cap 4**

   Para la a) se resuelve $\pi_0 = \frac{1}{4} + \pi_0^2 \frac{3}{4}$, cuya solución mas pequeña es $\pi_0 = 1/3$.

   Para la b) se resuelve $\pi_0 = \frac{1}{4} + \frac{\pi_0}{2} + \pi_0^2 \frac{1}{3}$. Cuya única solución es π_0.

   Para la b) se resuelve $\pi_0 = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{3}$. Cuya solución mas pequeña es $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3. Consider a branching process with offspring distribution $Geo(\alpha)$; that is, $p_k = \alpha(1-\alpha)^k$ for $k \geq 0$.

   a) For what values of $\alpha \in (0,1)$ is the extinction probability $q = 1$.

      Podemos resolver esto de dos maneras diferentes, en este caso procederemos usando μ. Para que la población se extinga con probabilidad 1, se debe cumplir que $\mu \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2 (1-\alpha)^k \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha} \leq 1 \\
1-\alpha &\leq \alpha \\
\alpha &\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

      Por lo cual, para que la población se extinga con probabilidad 1, se debe tener que $\alpha \in [1/2, 1)$

   b) Give a formula for the extinction probability of the branching process for any value of the parameter $\alpha \in (0,1)$.

      Nos interesa π_0. Entonces

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0^k \alpha (1-\alpha)^k \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (\pi_k (1-\alpha))^k \\
&= \alpha \frac{1}{1-(\pi_0(1-\alpha))} \\
\pi_0 &= \alpha \frac{1}{1-(\pi_0(1-\alpha))} \\
(1-\pi_0)(\alpha - (1-\alpha)\pi_0) &= 0
\end{aligned}$$

      Cuya solución mas pequeña es $\pi_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha}$