Guía de ejercicios - Integrales impropias

Daniel Gálvez

Contents

1 Calcular Integrales

1.1 Ejercicios

1. $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$, con $\lambda > 0$
2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx$, con $\alpha > 0$
3. $\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx$
4. $\int_1^\infty \frac{\pi + \pi e^x}{(x + e^x)^{3/2}} dx$
5. $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} dx$
6. $\int_0^1 \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} dx$
7. $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$
8. $\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) dx$
9. $\int_0^4 \frac{1}{x-3} dx$
10. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$
11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{sin(x)}} dx$
12. $\int_0^\infty cos(at) e^{-st} dt$, con $a \in \mathbb{R}$ y $s > 0$
13. $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$

1.2 Soluciones

1.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx &= \lambda \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^b \right) \\
&= \lambda \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{e^{-\lambda b}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \\
&= \lambda \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} \right) \\
&= \lambda \left(0 + \frac{1}{\lambda} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} dx &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+\alpha^2} dx \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\alpha^2(\frac{x^2}{\alpha^2}+1)} dx \\
&= \frac{1}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(\frac{x}{\alpha})^2+1} dx \\
&= \frac{2}{\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{(\frac{x}{\alpha})^2+1} dx \\
&= \frac{2}{\pi\alpha} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{(\frac{x}{\alpha})^2+1} dx \\
& Hacemos\ u = \frac{x}{\alpha} \ \Rightarrow \ \alpha du = dx \\
&= \frac{2\alpha}{\pi\alpha} \lim_{b\to\infty} \int_0^{b/\alpha} \frac{1}{u^2+1} du \\
&= \frac{2}{\pi} \lim_{b\to\infty} arctan\left(\frac{b}{\alpha}\right) - arctan(0) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}dx &= \int_1^\infty \frac{1+x-x}{x(x+1)}dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1+x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)}dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(ln(x) - ln(x+1) \Big|_1^b \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} ln(b) - ln(b+1) - ln(1) + ln(2) \\
&\text{Note que este limite es de la forma} \\
&\infty - \infty \text{ , entonces reorganizamos} \\
&= \lim_{b\to\infty} ln\left(\frac{b}{b+1}\right) + ln(2) \\
&= ln\left(\lim_{b\to\infty} \frac{b}{b+1}\right) + ln(2) \\
&= ln(1) + ln(2) \\
&= ln(2)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\pi + \pi e^x}{(x+e^x)^{3/2}}dx &= \pi \int_1^\infty \frac{1+e^x}{(x+e^x)^{3/2}}dx \\
&= \pi \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1+e^x}{(x+e^x)^{3/2}}dx \\
&\text{Hacemos } u = x + e^x \;\Rightarrow\; du = 1 + e^x dx \\
&\text{Los nuevos limites son } u = 1 + e^1 \text{ y } u = b + e^b \\
&= \pi \lim_{b\to\infty} \int_{1+e}^{b+e^b} \frac{1}{u^{3/2}}du \\
&= \pi \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{u}} \Big|_{1+e}^{b+e^b} \right) \\
&= \pi \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{b+e^b}} + \frac{2}{\sqrt{1+e}} \right) \\
&= \pi \left(0 + \frac{2}{\sqrt{1+e}} \right) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{1+e}}
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} dx &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} dx + \int_{-1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} dx \\
&= \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} dx + \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^{a} \frac{e^{-\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} dx \\
&\text{Hacemos } u = -\sqrt{-x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{-x}} dx \\
&= 2 \lim_{b\to-\infty} \int_{-\sqrt{-b}}^{-1} e^{u} du + 2 \lim_{a\to 0^-} \int_{-1}^{-\sqrt{-a}} e^{u} du \\
&= 2 \lim_{b\to-\infty} \left(e^{-1} - e^{-\sqrt{-b}} \right) + 2 \lim_{a\to 0^-} \left(e^{-\sqrt{-a}} - e^{-1} \right) \\
&= 2 \lim_{b\to-\infty} \left(e^{-1} - \frac{1}{e^{\sqrt{-b}}} \right) + 2 \lim_{a\to 0^-} \left(\frac{1}{e^{\sqrt{-a}}} - e^{-1} \right) \\
&= 2e^{-1} - 0 + 2 \cdot 1 - 2e^{-1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{b\to 0^+} \int_{b}^{1} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} dx \\
&\text{Usamos integración por partes con} \\
&u = ln(x)\ ,\ dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
&= \lim_{b\to 0^+} \left(2ln(x)\sqrt{x} \Big|_{b}^{1} \right) - \lim_{b\to 0^+} 2 \int_{b}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
&= \lim_{b\to 0^+} \left(2ln(1)\sqrt{1} - 2ln(b)\sqrt{b} \right) - 2 \lim_{b\to 0^+} \left(2\sqrt{x} \Big|_{b}^{1} \right) \\
&= -2 \lim_{b\to 0^+} ln(b)\sqrt{b} - 2 \lim_{b\to 0^+} 2 - 2\sqrt{b} \\
&= -2 \lim_{b\to 0^+} ln(b)\sqrt{b} - 4 \\
&\text{Este ultimo limite es indeterminado } (\infty \cdot 0) \\
&\text{Reorganizamos para aplicar L`Hopital} \\
&= -2 \lim_{b\to 0^+} \frac{ln(b)}{\frac{1}{\sqrt{b}}} - 4 \\
&= -2 \lim_{b\to 0^+} \frac{1/b}{-1/2b^{3/2}} - 4 \\
&= 4 \lim_{b\to 0^+} \sqrt{b} - 4 \\
&= 0 - 4 \\
&= -4
\end{aligned}
$$

7.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x^2}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-x^2}}{-2}\Bigg|_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-b^2}}{-2}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-2e^{b^2}}+\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

8.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{3x+1}\right)dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{x+1}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{ln(x^2+1)}{2}-3ln(x+1)\Bigg|_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{ln(b^2+1)}{2}-3ln(b+1)-\frac{ln(1)}{2}+3ln(1)\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{ln(b^2+1)}{2}-3ln(b+1) \\
&\text{Este ultimo limite es indeterminado,} \\
&\text{por lo cual reorganizamos} \\
&= \lim_{b\to\infty} ln[(b^2+1)^{1/2}]-ln[(b+1)^3] \\
&= \lim_{b\to\infty} ln\left(\frac{\sqrt{b^2+1}}{(b+1)^3}\right) \\
&\text{El denominador es mas grande que el numerador} \\
&= ln(0) \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{x-3}dx &= \int_0^3 \frac{1}{x-3}dx \\
&= \lim_{b\to 3}\int_0^b \frac{1}{x-3}dx \\
&= \lim_{b\to 3}\left(ln|x-3|\Bigg|_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to 3}\left(ln|x-3|-ln(3)\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

10.

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = \lim_{b\to 1^+}\int_b^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt \\
&\text{Hacemos } u = t-1 \Rightarrow du = dt \\
&= \lim_{b\to 1^+}\int_{b-1}^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \lim_{b\to 1^+}\left(2\sqrt{u}\Big|_{b-1}^{1}\right) \\
&= \lim_{b\to 1^+} 2+2\sqrt{b-1} \\
&= 2+0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

11.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{sin(x)}}dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{sin(x)}}dx \\
&\text{Hacemos } u = sin(x) \Rightarrow du = cos(x)dx \\
&= \lim_{b\to 0^+}\int_{sin(b)}^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \lim_{b\to 0^+} 2\sqrt{1}-2\sqrt{sin(b)} \\
&= 2-0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

12.

$$\int_0^\infty cos(at)e^{-st}dt$$

Usando integración por partes varias veces tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty cos(at)e^{-st}dt &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{a^2+s^2}\left(asin(at)-s\,cos(at)\right)\Big|_0^b\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-sb}}{a^2+s^2}\left(asin(ab)-s\,cos(ab)\right)+\frac{s}{a^2+s^2}\right) \\
&= 0+\frac{s}{a^2+s^2} \\
&= \frac{s}{a^2+s^2}
\end{aligned}
$$

Si le interesa saber como calcular mas rápido este tipo de integrales, puede ver el siguiente link .

13.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx &= \int_0^{1} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx \\
&= \lim_{b\to 0^+} \int_b^{1} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx + \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx \\
&\text{Hacemos } u = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\
&\text{También despejamos } u = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x = u^2 \\
&= \lim_{b\to 0^+} \int_{\sqrt{b}}^{1} 2\frac{1}{(u^2+1)}du + \lim_{a\to\infty} \int_1^{\sqrt{a}} 2\frac{1}{(u^2+1)}du \\
&= 2\lim_{b\to 0^+} \left(arctan(u)\Big|_{\sqrt{b}}^{1} \right) + 2\lim_{a\to\infty} \left(\Big|_{1}^{\sqrt{a}} arctan(u) \right) \\
&= 2\lim_{b\to 0^+} arctan(1) - arctan(\sqrt{b}) + 2\lim_{a\to\infty} arctan(\sqrt{a}) - arctan(1) \\
&= 2arctan(1) - 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2arctan(1) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

2 Determinar convergencia

2.1 Ejercicios

1. $\int_{2}^{\infty} \frac{x^5}{x^6 - 1} dx$

2. $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3 + \sqrt{x}} dx$

3. $\int_{0}^{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x - 5}} dx$

4. $\int_{0}^{1} \frac{\pi sin(x) + 4}{x^{1/3}} dx$

5. $\int_{1}^{\infty} \frac{sin(x)}{x(1 + x)} dx$

6. $\int_{0}^{\infty} \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x + 3}} dx$

7. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}} dx$

8. $\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 3x^3 + 5x}}{x^4 + x^2 + 1} dx$

9. $\int_{0}^{1} \frac{xcos(x) + sin(x)}{x^2} dx$

10. $\int_{2}^{\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4} dx$

11. $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x} + 1}{x^{4/3}} dx$

12. $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$

13. $\int_{0}^{1} \frac{sin(x)}{x^2 + xsin(x)} dx$

14. $\int_{0}^{1} \frac{ln(1 + x^{5/2})}{\sqrt{2x^5 + x^6}} dx$

15. $\int_{0}^{1} \frac{1 + arctan(x)}{\sqrt{x^{1.5}}} dx$

16. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{arctan(x)}{x^2} dx$

17. $\int_{0}^{1} \frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

2.2 Soluciones

1. Tenemos que

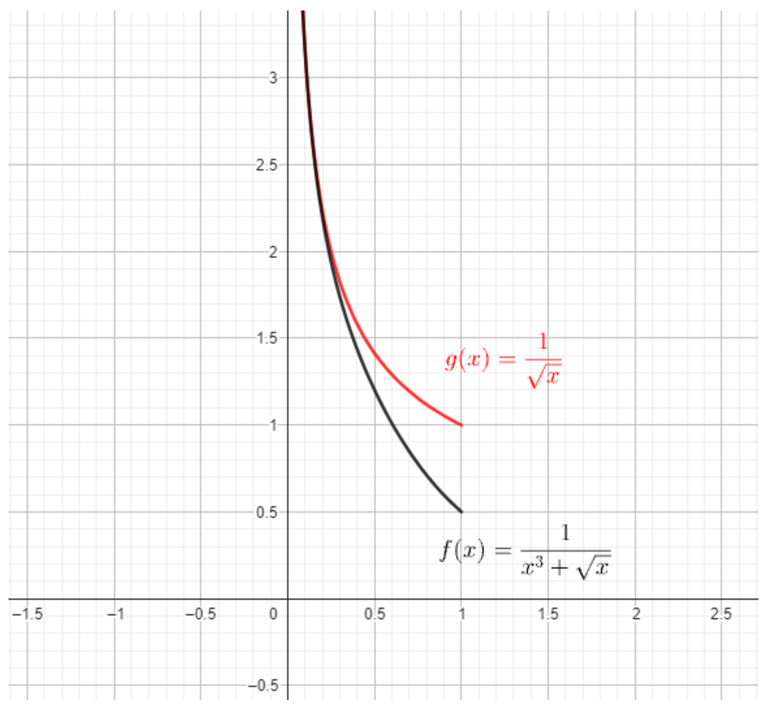
$$\int_2^\infty \frac{x^5}{x^6-1}dx > \int_2^\infty \frac{x^5}{x^6}dx$$
$$\Rightarrow \int_2^\infty \frac{x^5}{x^6-1}dx > \int_2^\infty \frac{1}{x}dx$$

Sabemos que $\int_2^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge, pues $p=1$, por lo cual $\int_2^\infty \frac{x^5}{x^6-1}dx$ también diverge.

2. Tenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Esta ultima integral converge, por lo cual $\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}dx$ también converge. A continuación una imagen de las funciones



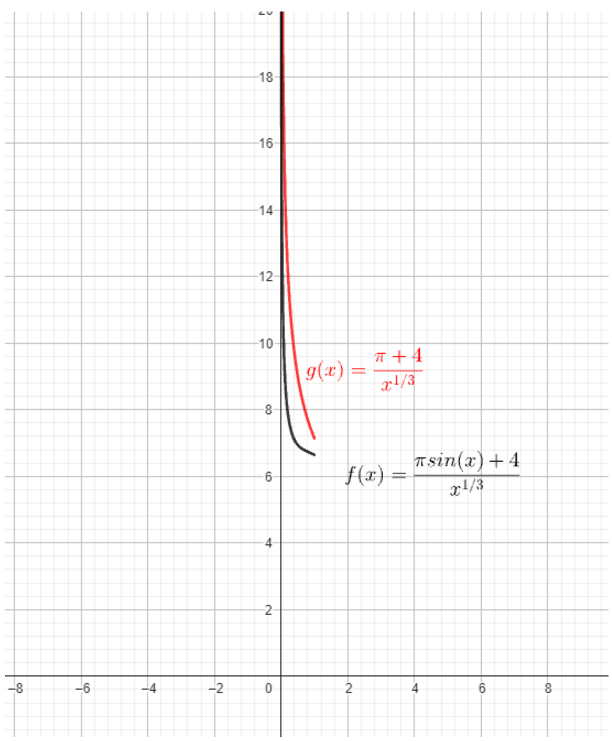
3. Es fácil de calcular y ver que converge.

$$\int_5^5 \frac{6}{\sqrt[5]{x-5}}dx = \lim_{b\to 5^+}\int_b^6 \frac{1}{\sqrt[5]{x-5}}dx = \lim_{b\to 5^+}\int_{b-5}^1 \frac{1}{u^{5/2}}du = \frac{5}{4}$$

4. Podemos armar una desigualdad en torno al $sin(x)$ para llegar a la integral que tenemos, pues sabemos que

$$
\begin{gathered}
-1 \leq sin(x) \leq 1 \quad / \cdot \pi \\
-\pi \leq \pi sin(x) \leq \pi \quad / + 4 \\
4 - \pi \leq \pi sin(x) + 4 \leq \pi + 4 \quad / \cdot \frac{1}{x^{1/3}} \\
\frac{4-\pi}{x^{1/3}} \leq \frac{\pi sin(x) + 4}{x^{1/3}} \leq \frac{\pi + 4}{x^{1/3}} \\
\Rightarrow \ 0 \leq \int_0^1 \frac{\pi sin(x) + 4}{x^{1/3}} dx \leq \int_0^1 \frac{\pi + 4}{x^{1/3}} dx \\
\Rightarrow \ 0 \leq \int_0^1 \frac{\pi sin(x) + 4}{x^{1/3}} dx \leq (\pi + 4) \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx
\end{gathered}
$$

La integral $(\pi + 4) \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ converge, pues $p < 1$. Luego, como esta integral converge, la integral $\int_0^1 \frac{\pi sin(x)+4}{x^{1/3}} dx$ también converge. A continuación una imagen de las funciones.



5. Sabemos que

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq \left| sin(x) \right| \leq 1 \\
& \text{ Recordamos que tenemos } x \in [1, \infty) \\
& 0 \leq \frac{\left| sin(x) \right|}{x(x+1)} \leq \frac{1}{x(x+1)} \\
& 0 \leq \left| \frac{sin(x)}{x(x+1)} \right| \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2} \\
\Rightarrow \; & 0 \leq \int_1^\infty \left| \frac{sin(x)}{x(x+1)} \right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx
\end{aligned}
$$

Luego, como $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge, la integral $\int_1^\infty \left| \frac{sin(x)}{x(x+1)} \right| dx$ también converge. Note que si una integral converge en valor absoluto, entonces es absolutamente convergente, lo cual implica que converge con, y sin valor absoluto, pudiendo concluir así que la integral original converge.

6. Notamos que tenemos una asíntota en $x = 0$, y que la integral va al infinito, por ende la separamos para analizar cada caso por separado.

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx}_{I_2}$$

Iniciemos por I_1, notamos que podemos usar el criterio de comparación en el limite, pues podemos analizar ocupando $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$, y así se nos cancelaran las raíces y nos queda un limite conocido $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(x)}{x}$, el cual da 1, además de que $g(x)$ es sencillo de integrar, usando esto se tendría:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}}{\frac{1}{\sqrt{2x+3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)\sqrt{2x+3}}{x\sqrt{2x+3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

Como el limite es un numero real distinto de 0, solo analizamos $g(x)$, calculando nos queda

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

entonces como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$ converge, I_1 también converge.
Ahora analizando I_2, es mas sencillo, pues sabemos que en el intervalo $[1, \infty)$ se cumple:

$$-1 \leq sin(x) \leq 1$$

$$\frac{-1}{x\sqrt{2x+3}} \leq \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}} \leq \frac{1}{x\sqrt{2x+3}} \text{ , multiplicando por } \frac{1}{x\sqrt{2x+3}}$$

Ahora notamos que podemos hacer una desigualdad sencilla con $\frac{1}{x\sqrt{2x+3}}$, tiene que:

$$0 \leq \left|\frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{2x+3}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

esta ultima desigualdad es fácil de demostrar, luego por transitividad e integrando:

$$0 \leq \int_1^\infty \left|\frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$

Ahora solo analizamos $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$, pero notamos que se tiene $p = \frac{3}{2}$, por lo cual converge. Luego, como $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ converge, I_2 también converge.

Finalmente, como I_1 y I_2 convergen, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx$ también converge.

7. Tenemos asíntota en $x = 2$, y la integral va al infinito. La separamos

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \underbrace{\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx}_{I_2}$$

En este caso procederemos por comparacion al limite. Notar que la función es positiva en el intervalo a integrar ($f(x) > 0$), por lo cual podemos usarlo.

Notemos que I_1 se puede separar de la siguiente manera

$$I_1 = \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{(x-2)(x+2)}}dx = \int_2^3 \frac{1}{x(x-2)^{1/2}(x+2)^{1/2}}dx$$

Usaremos $g(x) = \frac{1}{(x-2)^{1/2}}$. Calculamos el limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x(x-2)^{1/2}(x+2)^{1/2}}}{\frac{1}{(x-2)^{1/2}}} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x(x-2)^{1/2}(x+2)^{1/2}}(x-2)^{1/2} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x(x+2)^{1/2}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Luego, como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{1/2}}dx$, pero es fácil ver que converge (pueden calcular su valor), por lo cual I_2 también converge.

Ahora para I_2 podemos usar $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Calculamos el limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}x^2 \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Luego, como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$, pero esta converge, pues $p > 1$, por lo cual I_2 también converge.

Finalmente como I_1 e I_2 convergen, la integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$ converge.

8. Para analizar esta integral, podemos realizar la división de exponentes de mayor grado del numerador y denominador. En este caso tenemos

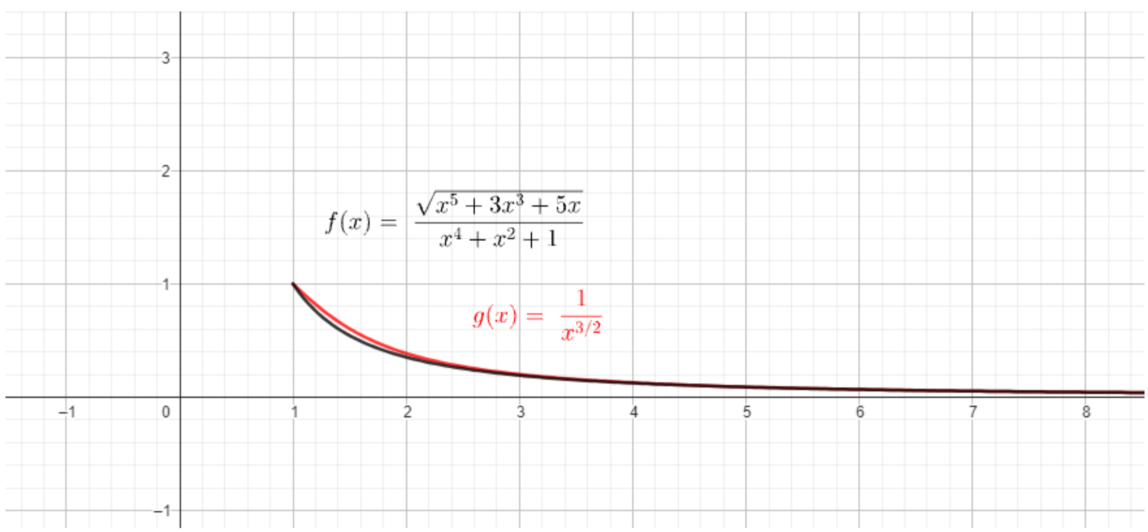
$$\frac{\sqrt{x^5}}{x^4} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Ahora usamos comparacion al limite (podemos usarlo ya que la función es positiva). Calculamos el limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}}{\frac{1}{x^{3/2}}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1} x^{3/2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(x^{3/2})^2(x^5+3x^3+5x)}}{x^4+x^2+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^8+3x^6+5x^4}}{x^4+x^2+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$, pero esta converge, pues $p > 1$, por lo cual la integral $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1} dx$ también converge.

A continuación una imagen de las funciones

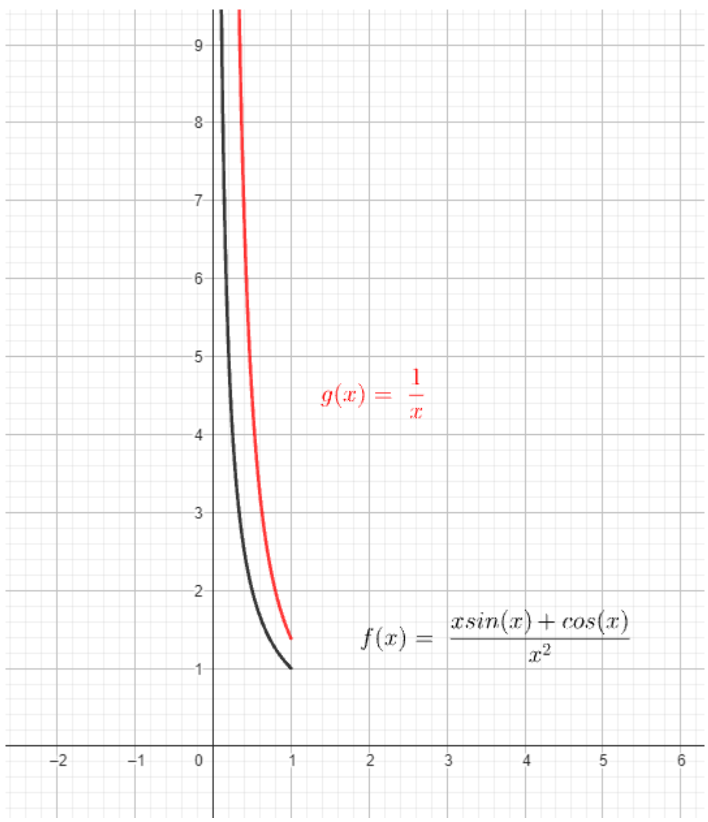


9. Note que la función a integrar es positiva en $(0,1]$, pues $sin(x) > 0$ y $cos(x) > 0$ en tal intervalo, por lo cual podemos usar comparacion al limite. Tomemos $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculamos el limite

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{xcos(x)+sin(x)}{x^2}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{xcos(x)+sin(x)}{x^2}x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{xcos(x)+sin(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x} + cos(x) \\
&= 1+1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, pero esta diverge, por lo cual la integral $\int_0^1 \frac{xcos(x)+sin(x)}{x^2}dx$ también diverge.

A continuación una imagen donde se aprecian ambas funciones



10. Procedemos por comparacion al limite, pues la función es positiva en tal intervalo. Tomemos $g(x) = \dfrac{1}{x^6}$. Calculamos el limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4}}{\frac{1}{x^6}} = \lim_{x\to\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4} x^6$$
$$= \lim_{x\to\infty} sin^2\left(\frac{1}{x}\right) x^2$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)^2$$

Hacemos el cambio de variable

$u = 1/x$, de modo que

$u \xrightarrow{x\to\infty} 0$

Entonces

$$= \lim_{u\to 0} \left(\frac{sin(u)}{u}\right)^2$$
$$= 1^2$$
$$= 1$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_2^\infty \frac{1}{x^6} dx$, pero esta converge, por lo cual la integral $\int_2^\infty \frac{sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4} dx$ también converge.

11. Separamos la integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}+1}{x^{4/3}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-x}+1}{x^{4/3}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{e^{-x}+1}{x^{4/3}} dx}_{I_2}$$

La función es positiva en el intervalo $[0, \infty$, por lo cual podemos usar comparacion al limite. Primero analicemos I_1. Tomemos $g(x) = \dfrac{1}{x^{4/3}}$. Calculamos el limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{-x}+1}{x^{4/3}}}{\frac{1}{x^{4/3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}+1}{x^{4/3}} x^{4/3} = 2$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_0^1 \frac{1}{x^{4/3}} dx$, pero esta diverge, por lo cual I_1 también diverge. Para I_2 también usamos $g(x) = \dfrac{1}{x^{4/3}}$. En este caso, $\int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}$ converge, por lo tanto I_2 también converge.

Finalmente, como I_1 diverge y I_2 converge, la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}+1}{x^{4/3}} dx$ diverge.

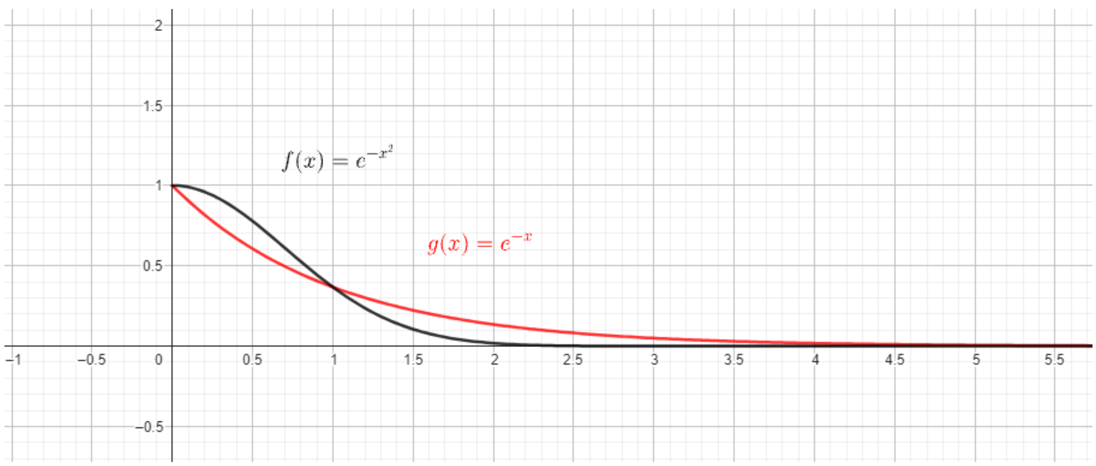
12. Podemos separar la integral de la siguiente manera

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

Nos podemos centrar en $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$, pues la otra integral converge en $[0,1]$. Ahora, sabemos que en el intervalo $[1,\infty)$ se tiene

$$\begin{aligned} &0 < e^{-x^2} < e^{-x} \\ &0 < \int_1^\infty e^{-x^2}dx < \int_1^\infty e^{-x}dx \end{aligned}$$

Y es fácil ver que $\int_1^\infty e^{-x}dx$ converge (pueden calcular su valor), por lo cual $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ también converge. A continuación una imagen de las funciones



13. La función es positiva en el intervalo a integrar, pues $sin(x) > 0$ en $(0,1)$. Podemos usar comparacion al limite. Para esto tomemos $\dfrac{1}{x}$. Calculamos el limite

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{sin(x)}{x^2+xsin(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x^2+xsin(x)}x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x+sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x+sin(x)}\frac{1/x}{1/x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{sin(x)}{x}}{1+\frac{sin(x)}{x}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, pero esta diverge, por lo cual la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{sin(x)}{x^2+xsin(x)}dx$ también diverge.

14. La función es positiva en $(0,1)$, por lo cual podemos usar comparacion al limite. Tomamos la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. ¿Por qué? Note lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{ln(1+x^{5/2})}{\sqrt{2x^5+x^6}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(1+x^{5/2})}{\sqrt{2x^5+x^6}}\sqrt{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(1+x^{5/2})}{x^{5/2}} \frac{x^{5/2}\sqrt{x}}{\sqrt{2x^5+x^6}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(1+x^{5/2})}{x^{5/2}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{5/2}\sqrt{x}}{\sqrt{2x^5+x^6}} \\
&\text{Luego de aplicar L`Hoptial varias veces tenemos} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, pero esta converge, por lo cual la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{ln(1+x^{5/2})}{\sqrt{2x^5+x^6}}dx$ también converge.

15. Sabemos que en el intervalo $(0,1)$ se tiene

$$0 \leq arctan(x) < \tfrac{\pi}{2}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
0 \leq arctan(x) < \frac{\pi}{2} \quad & / + 1 \\
1 \leq 1 + arctan(x) < \frac{\pi}{2} + 1 \quad & / \frac{1}{\sqrt{x^{1.5}}} \\
\frac{1}{\sqrt{x^{1.5}}} \leq \frac{1+arctan(x)}{\sqrt{x^{1.5}}}dx < \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{\sqrt{x^{1.5}}} & \\
\Rightarrow\ 0 < \int_0^1 \frac{1+arctan(x)}{\sqrt{x^{1.5}}}dx \leq \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^{1.5}}}dx &
\end{aligned}
$$

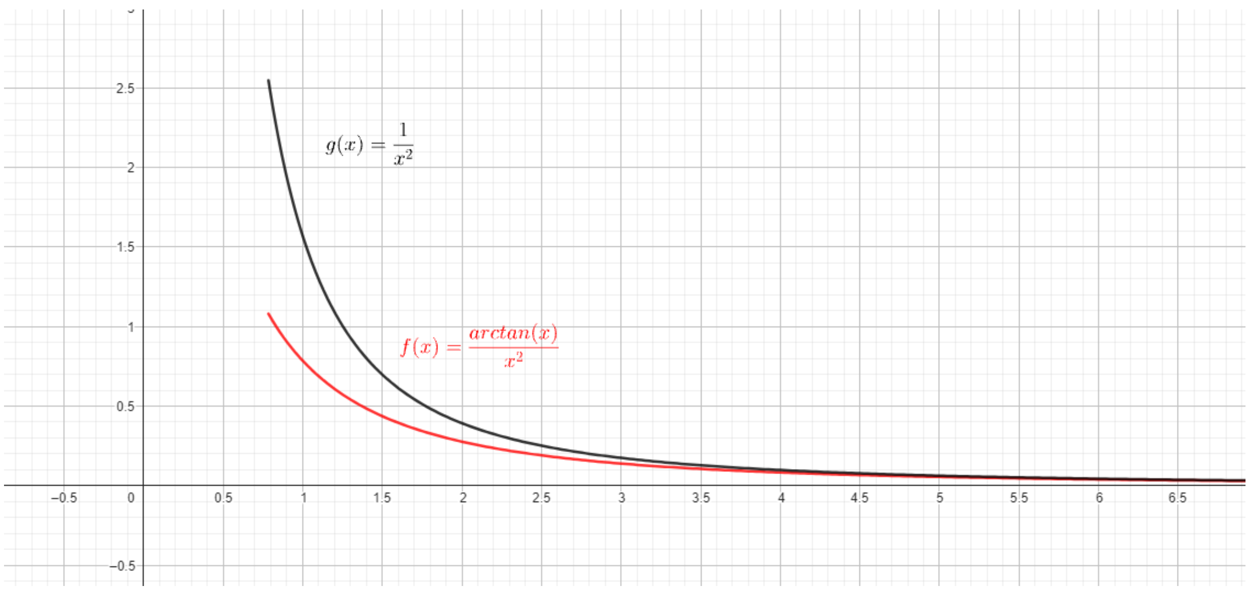
La integral $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^{1.5}}}dx$ converge, por lo cual $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+arctan(x)}{\sqrt{x^{1.5}}}dx$ también converge.

16. Procedemos de forma similar al anterior. En el intervalo $(\pi/4, \infty)$ se tiene

$$0 < arctan(x) < \frac{\pi}{2}$$
$$0 < \frac{arctan(x)}{x^2} < \frac{\pi/2}{x^2}$$
$$0 < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{arctan(x)}{x^2} dx < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{\pi/2}{x^2} dx$$

La integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{\pi/2}{x^2} dx$ converge, por lo cual la integral $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{arctan(x)}{x^2} dx$ también converge.

A continuación una imagen de las funciones



17. Sabemos que la tangente es creciente en el intervalo $(0, 1)$. Entonces

$$tan(x) \geq tan(0) \quad / + 1$$
$$tan(x) + 1 \geq tan(0) + 1 \quad / \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$$
$$\frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}} \geq \frac{tan(0) + 1}{\sqrt[5]{x^3}}$$
$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}} dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx$$

Notamos que $\int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx$ diverge, por lo cual $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}} dx$ tambien diverge.