Guía de ejercicios - Series

Daniel Gálvez

Contents

1 Determinar convergencia

1.1 Ejercicios

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{\sqrt{n}+9}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{\sqrt{e}}{n}\right)$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+3}}$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+ln(n)}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)cos^2(n)}{7n^6+2n^4+n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)}{n\sqrt{n}}$
11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+2}{(4n^7-7)^{1/3}}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\,(n)}{n^2}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} nln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{\sqrt{9n^7+1}}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n^3+1)^3 6^n}{n!}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n\sqrt{9n^2+2}}$

1.2 Soluciones

1. Note que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge, pues es una serie geométrica con $x = \frac{1}{3}$, por lo cual la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$ converge. Algo a tener en cuenta, la siguiente desigualdad también es valida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

pero note que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, por lo cual no se puede afirmar nada sobre la convergencia de la serie original.

2. Procederemos mediante comparacion al limite. Se cumple que $a_n = \dfrac{n^{1/3}}{\sqrt{n}+9} > 0$. Para esto usamos

$$b_n = \frac{n^{1/3}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/6}}$$

Calculamos el limite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{1/3}}{\sqrt{n}+9}}{\frac{1}{n^{1/6}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+9} \\ &= 1\end{aligned}$$

Como el limite es distinto de 0, simplemente analizamos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/6}}$, pero esta diverge, pues $p = 1/6 < 1$, por lo cual la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{\sqrt{n}+9}$ también diverge.

3. Para esto podemos usar el criterio de la integral, usando $a_n = f(n) = f(x) = x^2 e^{-x}$. Debemos corroborar que sea positiva, decreciente y continua. Es claro que $a_n > 0$ y continua. Para ver que sea decreciente corroboremos que la derivada sea negativa.

$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

Notamos que es negativa a partir de $x > 2$, igual nos sirve.

Calculamos la integral respectiva

$$\int_2^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{10}{e^2}$$

Luego, como la integral converge, la serie también converge.

4. Para este ejercicio procederemos mediante comparacion al limite. Para $n > 1$ se tiene que $a_n > 0$, por lo cual si podemos ocuparlo. Usamos $b_n = \frac{\pi}{n^2}$, por qué? Note lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}{\frac{\pi}{n^2}} \\
&\text{Ahora hacemos } u = \pi/n^2 \\
&\text{De modo que } u \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{sin(u)}{u} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Luego, como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0$, basta analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$, pero esta converge, pues $p = 2$, por lo cual nuestra serie también converge.

5. Podemos proceder de forma similar tomando nuevamente $b_n = 1/n^2$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \neq 0$$

Como el limite es distinto de 0, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, nuestra serie también converge.

6. Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\sqrt{e}}{n}\right) \\
&= cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{e}}{n}\right) \\
&= cos(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Luego, por el criterio de la divergencia podemos concluir que la serie diverge, pues $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

7. Este se puede hacer de dos formas diferentes, por comparacion directa y comparacion al limite. Iniciemos por la primera. Despreciando los primeros dos terminos podemos obtener la siguiente desigualdad que es fácil de corroborar.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+3}} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3}}$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+3}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

Esta ultima serie diverge, pues $p = 1/2$, por lo cual nuestra serie también diverge.

Ahora usando comparacion al limite. Hacemos la división de terminos de mayor exponente del numerador y denominador, este corresponde a nuestro b_n. El cual resulta

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Calculamos el respectivo limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{n^3+3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+3}} \div \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+3}} \cdot \sqrt{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3+3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3)^{1/2}}{\sqrt{n^3+3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3+3}} \\
&= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Luego, como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, pero esta ultima diverge, pues $p = 1/2$, por lo cual nuestra serie también diverge.

8. Se tiene $\dfrac{n}{n^2+ln(n)} > 0$, por lo cual podemos usar comparacion al limite. Ocupamos

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Calculamos el limite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+ln(n)}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+ln(n)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, pero esta diverge, por lo cual la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+ln(n)}$ también diverge.

9. Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(n-1)cos^2(n)}{7n^6+2n^4+n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{7n^6+2n^4+n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n^6+2n^4+n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n^6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n^5}\end{aligned}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n^5}$ converge, pues $p = 5 > 1$, por lo cual la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)cos^2(n)}{7n^6+2n^4+n}$ converge.

10. Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sin(n)}{n\sqrt{n}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, pues $p = 3/2 > 1$, por lo cual la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n)}{n\sqrt{n}}$ converge.

Nota: En los casos anteriores se puede afirmar que la serie converge absolutamente.

11. Tenemos que $a_n = \dfrac{3n+2}{(4n^7-7)^{1/3}} > 0$, de modo que podemos ocupar comparacion al limite. En este caso tomamos

$$b_n = \frac{3n}{(4n^7)^{1/3}} = \frac{3}{4^{1/3}n^{4/3}}$$

Calculamos el limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+2}{(4n^7-7)^{1/3}}}{\frac{3}{4^{1/3}n^{4/3}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{(4n^7-7)^{1/3}} \frac{4^{1/3}n^{4/3}}{3} \\
&= \frac{4^{1/3}}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^{7/3}+2n^{4/3}}{(4n^7-7)^{1/3}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{4^{1/3}n^{4/3}}$, pero esta converge, pues $p = 4/3 > 1$, por lo cual la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+2}{(4n^7-7)^{1/3}}$ también converge.

12. Se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sin\,(n)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Como esta ultima serie converge, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\,(n)}{n^2}$ converge.

13. Notar que podemos reorganizar la serie de la siguiente manera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}$$

Ahora usamos el criterio de la divergencia, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie diverge por el criterio de la divergencia.

14. Usamos el criterio de la raíz

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(|a_n|\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}\right|\right)^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \cdot 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&= e^{-1} \\
&= \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}
$$

Luego, como el limite es menor a 1, la serie converge por el criterio de la raíz.

Recordar el limite

$$
\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}
$$

15. Como la serie es alternante, procedemos mediante el criterio de Leibniz. Debemos corroborar que

    - $a_n \geq 0$ (positiva)
    - $a_n \geq a_{n+1}$ (decreciente)
    - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

    Entonces

    $$\frac{2n+1}{\sqrt{9n^7+1}} > 0$$

    Es positiva.

    Para ver que sea decreciente podemos calcular su derivada, haciendo $a_n = f(n) = f(x)$ y notar que

    $$f'(x) < 0$$

    Por lo cual es decreciente.

    Finalmente

    $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{9n^7+1}} = 0$$

    Luego, como se cumple todo, la seria converge por el criterio de Leibniz.

16. Procederemos mediante el criterio del cociente.

    $$\begin{aligned}
    \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(3(n+1)^3+1)^3 6^{n+1}}{(n+1)!}}{(-1)^n\frac{(3n^3+1)^3 6^n}{n!}}\right| \\
    &= \lim_{n\to\infty}\left|-1\cdot\frac{(3(n+1)^3+1)^3}{(3n^3+1)^3}\cdot\frac{6^{n+1}}{6^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right| \\
    &= 6\lim_{n\to\infty}\frac{(3(n+1)^3+1)^3}{(3n^3+1)^3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} \\
    &= 6\cdot 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!} \\
    &= 6\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{}{(n+1)} \\
    &= 0 < 1
    \end{aligned}$$

    Luego, como el limite es menor a 1, la serie converge por el criterio del cociente. También se puede concluir que converge absolutamente.

17. Apliquemos el criterio del cociente nuevamente

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!}{(2(n+1))!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n!)}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)((2n)!)} \\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)^2\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{4} < 1
\end{aligned}
$$

Luego, como el limite es menor a 1, la serie converge por el criterio del cociente.

18. Para esto considere el termino general

$$a_n = \frac{n^2+3}{n\sqrt{9n^2+2}}$$

Ahora note que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n\sqrt{9n^2+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{\sqrt{9n^4+2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

Luego, como tal limite es distinto de 0, la serie diverge.

2 Radio e intervalo de convergencia

2.1 Ejercicios

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(4x-8)^n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} x^n$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2^n ln(n)}$

2.2 Soluciones

1. Procedemos usando el criterio del cociente, y recordando que debe converger cuando el limite es menor a 1, imponemos tal condición.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}(4x-8)^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n(4x-8)^n}{n}}\right| &< 1\\
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(4x-8)^{n+1}}{2^n(4x-8)^n}\cdot\frac{n}{n+1}\right| &< 1\\
2\cdot|4x-8|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} &< 1\\
2\cdot|4x-8|\cdot 1 &< 1\\
2\cdot 4|x-2| &< 1\\
|x-2| &< \frac{1}{8}\\
R &= 1/8\\
-1/8 < x-2 &< 1/8\\
-1/8+2 < x &< 1/8+2\\
15/8 < x &< 17/8
\end{aligned}$$

Ahora debemos evaluar en estos puntos.

- $x = \dfrac{15}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(4 \cdot \frac{15}{8} - 8)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(-1)^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

  Esta serie diverge, pues $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n} = \infty$.

- $x = \dfrac{17}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(4 \cdot \frac{17}{8} - 8)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  Esta ultima también diverge, pues $p = 1$.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = \left(\tfrac{15}{8}, \tfrac{17}{8}\right)$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)+1}}{(n+1)!(n+1+1)!2^{2(n+1)+1}}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}} \right| &< 1 \\
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{n!(n+1)!2^{2n+1}}{(n+1)!(n+2)!2^{2n+3}} \right| &<< 1 \\
\left| x^2 \right| \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+2)!} &< 1 \\
\frac{\left| x^2 \right|}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} &< 1 \\
\frac{\left| x^2 \right|}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} &< 1 \\
\frac{\left| x^2 \right|}{4} \cdot 0 &< 1 \\
0 &< 1
\end{aligned}$$

Luego, como el limite siempre es 0, el intervalo de convergencia es

$$I = (-\infty, \infty)$$

3. Lo mismo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2+1}}{\frac{(x-2)^n}{n^2+1}}\right| &< 1 \\
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(x-2)^n}\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\right| &< 1 \\
|x-2|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\right| &< 1 \\
|x-2| &< 1 \\
R &= 1 \\
-1 < x-2 &< 1 \\
-1+2 < x &< 1+2 \\
1 < x &< 3
\end{aligned}$$

Analizamos los extremos

- $x = 1$

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

  Esta ultima converge por el criterio de Leibniz.

- $x = 3$

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

  Lo mismo que antes.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = [1, 3]$$

4. Lo mismo que antes

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+1+1}}}{\frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}}}\right| &< 1 \\
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right| &< 1 \\
|-2|\cdot|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} &< 1 \\
2|x|\cdot 1 &< 1 \\
|x| &< \frac{1}{2} \\
R = 1/2 & \\
-1/2 < x < 1/2 &
\end{aligned}
$$

Analizamos los extremos

- $x = -1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(-1/2)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{(-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

  Esta ultima diverge, pues podemos usar comparacion al limite con $b_n = 1/\sqrt{n}$

- $x = 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n(1/2)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

  Esta ultima converge usando el criterio de Leibniz.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

5. Lo mismo de siempre

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n x^n}{n!}}\right| &< 1\\
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}}{5^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right| &< 1\\
5\cdot|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} &< 1\\
5\cdot|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!} &< 1\\
5\cdot|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)} &< 1\\
5\cdot|x|\cdot 0 &< 1\\
0 &< 1
\end{aligned}
$$

Como el limite siempre es 0, el intervalo de convergencia es

$$I = (-\infty, \infty)$$

6. Para esta serie utilizaremos el criterio de la raíz

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n^2}\right|\right)^{1/n} &< 1\\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} &< 1\\
e^x &< 1\\
x &< ln(1)\\
x &< 0
\end{aligned}
$$

Solo evaluamos en $x = 0$, pero notamos inmediatamente que diverge.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = (-\infty, 0)$$

Notar que para $n \geq 1$ lo de adentro siempre es positivo, independiente de x, por eso podemos quitar el valor absoluto.

7. Ocupamos el criterio del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(-1)^n x^n}{n^2}}\right| &< 1\\
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| &< 1\\
|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} &< 1\\
|x| &< 1\\
R &= 1\\
-1 < x &< 1
\end{aligned}$$

Analizamos los extremos

- $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

  Esta ultima converge, pues $p = 2 > 1$.

- $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

  Esta ultima converge por el criterio de Leibniz.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = [-1, 1]$$

8. No hay que hacer nada, pues la serie diverge independientemente del valor de x.

9. Ocupamos el criterio del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(n+1-2)!}x^{n+1}}{\frac{n}{(n-2)!}x^{n}}\right| &< 1\\
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^{n}}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n-2)!}{(n-1)!}\right| &< 1\\
|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{(n-2)!}{(n-1)(n-2)!} &< 1\\
|x|\cdot 0 &<1\\
0 &<1
\end{aligned}$$

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I=\mathbb{R}$$

10. Ocupamos criterio del cociente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+5)^{n+1}}{2^{n+1}ln(n+1)}}{\frac{(x+5)^{n}}{2^{n}ln(n)}}\right| &<1\\
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{n+1}}{(x+5)^{n}}\cdot\frac{2^{n}ln(n)}{2^{n+1}ln(n+1)}\right| &<1\\
|x+5|\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n)}{ln(n+1)} &< 1\\
\frac{|x+5|}{2} &< 1\\
|x+5| &< 2\\
R &= 2\\
-2 < x+5 &< 2\\
-2-5 < x &< 2-5\\
-7 < x &< -3
\end{aligned}$$

Analizamos los extremos

- $x=-7$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-7+5)^{n}}{2^{n}ln(n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n}}{2^{n}ln(n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{ln(n)}$$

  Esta ultima converge por el criterio de Leibniz.

- $x = -3$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3+5)^n}{2^n ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln(n)}$$

Esta ultima diverge, pues

$$\begin{aligned} n &> ln(n) \\ \frac{1}{ln(n)} &> \frac{1}{n} \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln(n)} &> \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = [-7, -3)$$

3 Series de Taylor

3.1 Ejercicios

1. Encuentre una representación en serie de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

   (c) $f(x) = ln(3 - x)$

   (d) $f(x) = xarctan(x^3)$

   (e) $f(x) = e^x + e^{2x}$

   (f) $f(x) = sin(x)/x$

   (g) $f(x) = 1 - cos(x)$

2. Calcule $\pi \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!}$

3. Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

4. Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

5. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Demuestre que $f''(x) + f(x) = 0$

6. Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{9^{n+1}}$

7. Demuestre que
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$

8. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ usando series de Taylor

9. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$. Asuma que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} sin^{2n}(\theta) d\theta = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$. Demuestre que

   $$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - xsin^2(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{x}{4}\right)$$

   con $|x| < 1$

10. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}(2n+1)}$

11. Demuestre que $\displaystyle\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

3.2 Soluciones

1. Para estos ejercicios procederemos mediante las representaciones ya conocidas. Aunque es posible hacerlo mediante la definición de una serie de Taylor.

   (a) La idea general es siempre arreglar la función a conveniencia, para que sea similar a alguna ya conocida. En este caso usaremos la siguiente representación

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , |x| < 1$$

   Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x^2-x-2} &= \frac{3}{(x-2)(x+1)} \\
&= -\frac{3}{(2-x)(x+1)} \\
&= -\frac{2+1}{(2-x)(x+1)} \\
&= -\frac{2+x-x+1}{(2-x)(x+1)} \\
&= -\left(\frac{2-x}{(2-x)(x+1)} + \frac{x+1}{(2-x)(x+1)}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2-x}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{2(1-x/2)}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-(x/2)}\right) \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right) \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\
\Rightarrow \ \frac{3}{(x-2)(x+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

(b) Nuevamente usaremos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ , |x| < 1$$

En este caso vamos a partir de la serie anterior y derivar. Note que queremos un positivo abajo. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
\frac{-1}{(1+x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dx} x^n \\
\frac{-1}{(1+x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} \\
\frac{1}{(1+x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \\
& \text{Hacemos partir la serie} \\
& \text{desde } n = 0 \\
&= \sum_{n+1=1}^{\infty} (-1)^{n+1+1} (n+1) x^{n+1-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^2 (n+1) x^n \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n
\end{aligned}$$

(c) Para este ejercicio, procederemos de dos formas, la primera asumiendo que no sabemos la representación en serie de $ln(1-x)$, y la segunda asumiendo que si la conocemos.

Para la primera iniciaremos nuevamente por la serie geométrica, y en este caso vamos a integrar. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-x} &= \frac{1}{3(1-x/3)} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} \\
\frac{1}{3-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} \\
\int \frac{1}{3-x}dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}dx \\
-ln(3-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int \frac{x^n}{3^{n+1}}dx \\
-ln(3-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} + C \\
&\text{Para encontrar } C \text{ evaluamos} \\
&\text{con } x = 0 \\
-ln(3-0) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} + C \\
-ln(3) &= 0 + C \\
C &= -ln(3) \\
-ln(3-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} - ln(3) \\
ln(3-x) &= ln(3) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \\
ln(3-x) &= ln(3) - \sum_{n-1=0}^{\infty}\frac{x^{n-1+1}}{(n-1+1)3^{n-1+1}} \\
\Rightarrow\ ln(3-x) &= ln(3) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}
\end{aligned}$$

Ahora conociendo la serie de $f(x) = ln(1-x)$, esta es

$$ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ , \ x \in [-1, 1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} ln(3-x) &= ln(3(1-x/3)) \\ &= ln(3) + ln(1-x/3) \\ &= ln(3) + -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/3)^n}{n} \\ \Rightarrow \ ln(3-x) &= ln(3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n} \end{aligned}$$

(d) Para esto recordamos la serie de $arctan(x)$, la cual es

$$arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ , |x| \leq 1$$

Ahora simplemente reemplazamos y multiplicamos

$$\begin{aligned} arctan(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n+1}}{2n+1} \\ arctan(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+3}}{2n+1} \\ xarctan(x^3) &= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+3}}{2n+1} \\ \Rightarrow \ xarctan(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+4}}{2n+1} \end{aligned}$$

Asumiendo que no sabíamos la representación de $arctan(x)$, la podíamos derivar fácilmente desde la serie geométrica, pues

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx \\ arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \end{aligned}$$

Y haciendo $x = 0$ se tiene $C = 0$, obteniendo así la representación respectiva.

(e) Para esto recordamos la serie de Taylor de la exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^x + e^{2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{(2x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + 2^n x^n}{n!} \\ \Rightarrow \ e^x + e^{2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1+2^n)}{n!} \end{aligned}$$

(f) Para esto recordamos la serie de Taylor de $sin(x)$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$\begin{aligned} sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \frac{sin(x)}{x} &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \frac{sin(x)}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Note que $2n+1 > 0$ para $n \geq 0$, por lo cual podíamos dividir la serie por x.

(g) Para esto recordamos la serie de $cos(x)$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$\begin{aligned} cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ cos(x) - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \\ cos(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^0 \frac{x^{2\cdot 0}}{(2\cdot 0)!} - 1 \\ cos(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 1 - 1 \\ \Rightarrow \ cos(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

2. Para calcular series, nos interesa encontrar alguna serie ya conocida. En este caso note que

$$\begin{aligned}
\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)!} \\
&= \frac{2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)!} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= 2 sin(\pi/2) \\
&= 2 \cdot 1 \\
\Rightarrow \ \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!} &= 2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + 1 - 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{0!} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} - 1 \\
&= e^1 - 1 \\
\Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= e - 1
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} &= -\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \right) \\
&= -\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} \right) \\
&= -ln(1 - 1/2) \\
&= -ln(1/2) \\
&= ln(2) \\
\Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} &= ln(2)
\end{aligned}$$

5. Solo tenemos que derivar la serie dos veces y corroborar lo pedido.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} \\
\frac{d}{dx} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} \\
f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1) x^{2n-2}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1) x^{2n-2}}{(2n)(2n-1)(2n-2)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!} \\
& \text{Hacemos partir la serie} \\
& \text{desde } n = 0 \\
&= \sum_{n+1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)-2}}{(2(n+1)-2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} \\
f''(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Reemplazamos todo

$$\begin{aligned}
f''(x) + f(x) &= 0 \\
-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} (-1+1) &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Se verifica que $f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial.

Nota: al aplicar la segunda derivada la serie no inicia desde $n = 2$ ya que al evaluar $n = 1$ en $f'(x)$ nos queda el termino x, y su derivada es 1, no 0.

6. La ajustaremos a una geométrica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{9^{n+1}} &= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{9^n} \\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(5/9\right)^n \\
&= \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-5/9\right)^n \\
&\text{Tenemos } x = -5/9 \\
&= \frac{1}{9}\frac{-5/9}{1-(-5/9)} \\
&= \frac{1}{9}\cdot\frac{-5}{14} \\
&= \frac{-5}{126}
\end{aligned}$$

Recordar que

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{x}{1-x}$$

para $|x| < 1$

7. Usamos la serie geométrica ya que estamos integrando en un intervalo valido para usarla.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n dx \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{4n} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\Big|_0^1\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1} \\
\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}
\end{aligned}$$

8. Vamos a expandir la exponencial

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(e^x-1\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots-1\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)\\
&= \lim_{x\to 0} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}\cdots\\
&= 1
\end{aligned}$$

9. Tenemos la integral $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-xsin^2(\theta)}d\theta$, donde notamos que el termino $xsin^2(\theta)$ está entre -1 y 1, por lo cual podemos aplicar la serie geométrica.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-xsin^2(\theta)}d\theta &= \int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}(xsin^2(\theta))^n d\theta\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}(xsin^2(\theta))^n d\theta\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}x^n\int_0^{\pi/2}sin^{2n}(\theta)d\theta\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^2)^n(n!)^2}x^n\\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(4)^n(n!)^2}x^n\\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{4}\right)^n\\
&= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{x}{4}\right)\\
\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-xsin^2(\theta)}d\theta &= \frac{\pi}{2}f\left(\frac{x}{4}\right)
\end{aligned}$$

10. Para esto solamente recordamos la serie de Taylor de $arctan(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n+1}(2n+1)} &= \lim_{x\to 0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1/x)^{2n+1}}{(2n+1)}\\
&= \lim_{x\to 0^+} arctan\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= arctan\,(\infty)\\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

11. Para esto usamos la serie de Taylor de la exponencial

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 e^{ln(x^x)}dx &= \int_0^1 e^{xln(x)}dx\\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xln(x))^n}{n!}dx\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(xln(x))^n}{n!}dx\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(ln(x))^n dx\\
&\text{Hacemos } x = e^{-u} \Rightarrow dx = -e^u du,\ \text{con } u = -ln(x)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_1^0 -e^{-u}(e^{-u})^n(ln(e^{-u}))^n du\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n!}\int_0^1 -e^{-u}e^{-un}(-u)^n du\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 (-1)^n e^{-u(1+n)}u^n du\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 e^{-u(1+n)}u^n du\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 e^{-\frac{u}{1/(1+n)}}u^{(n+1)-1} du\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma(n+1)\frac{1}{(1+n)^{n+1}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}n!\frac{1}{(1+n)^{n+1}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(1+n)^{n+1}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}
\end{aligned}$$