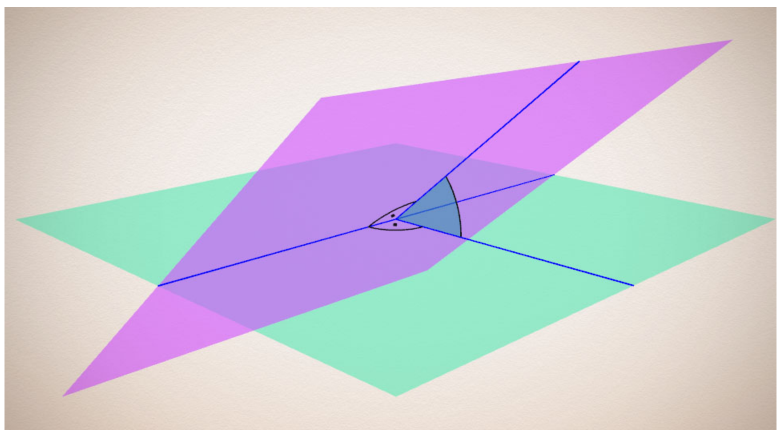
Sistema coordenado tridimensional

Daniel Gálvez

July 26, 2023



Contents

1 Geometría en $\mathbb{R}^3$

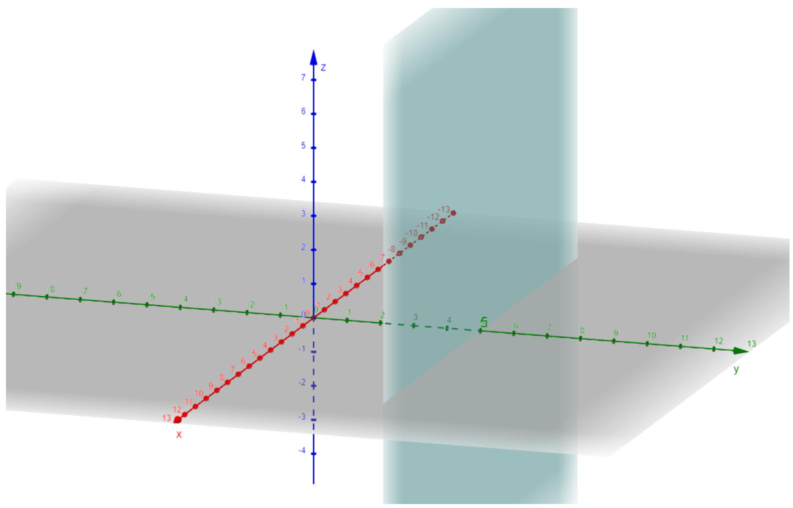
Las siguientes imágenes muestran la gráfica de algunas ecuaciones, de forma que se pueda entender la lógica de las gráficas. Para esto, podemos recordar la siguiente ecuación:

- Ecuación del circulo

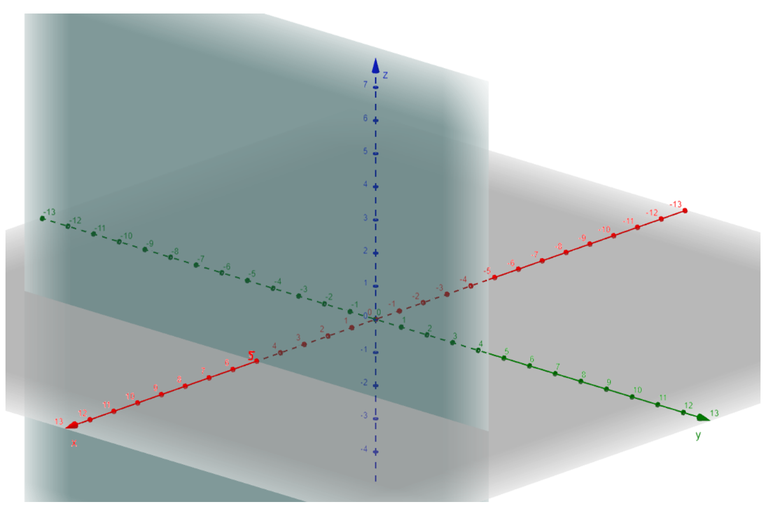
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

  Con centro en (h,k) y radio r

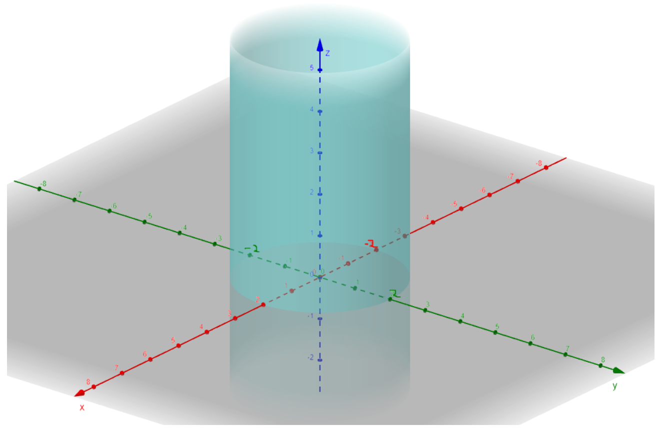
- $y=5$, corresponde a un plano que intersecta solo a $y=5$



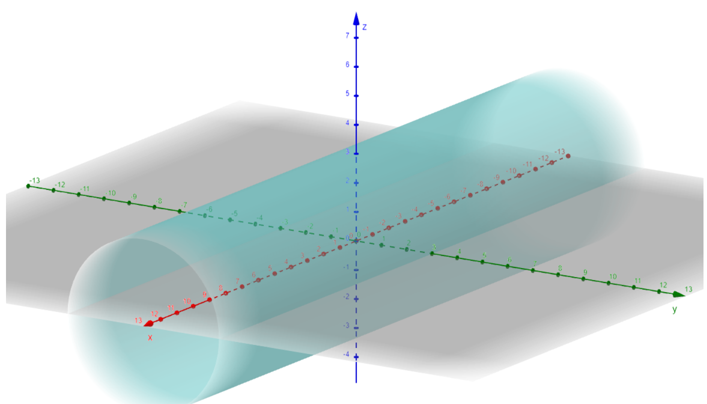
- $x=5$, igual que lo anterior, solo que en $x=5$



- $x^2 + y^2 = 4$, corresponde a un cilindro centrado en el origen, de radio 2. Como no hay variable z, el cilindro se ubica en este eje.

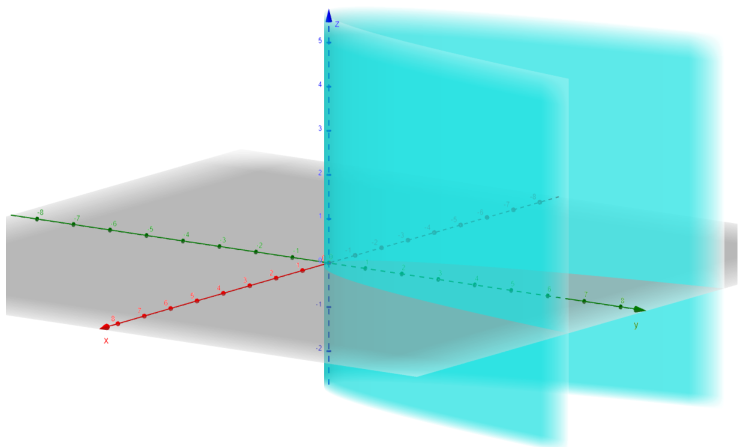


- $y^2 + z^2 = 9$, corresponde a un cilindro centrado en el origen, de radio 3. Como no hay variable x, el cilindro se ubica en este eje.

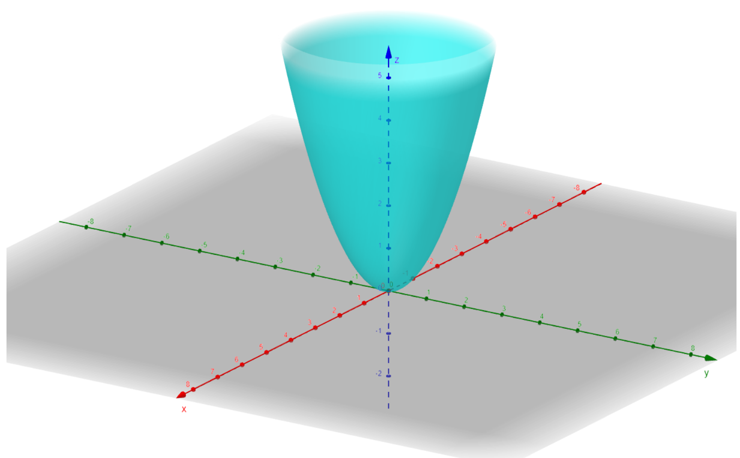


Podemos ver que en ambos casos se trata de un circulo a una determinada posición de la variable que no esta presente en la ecuación, por lo cual para graficar esto solo es necesario recordar la ecuación del circulo.

- $y = x^2$, corresponde a la parábola ya conocida, pero que ubica en el eje de la variable ausente.

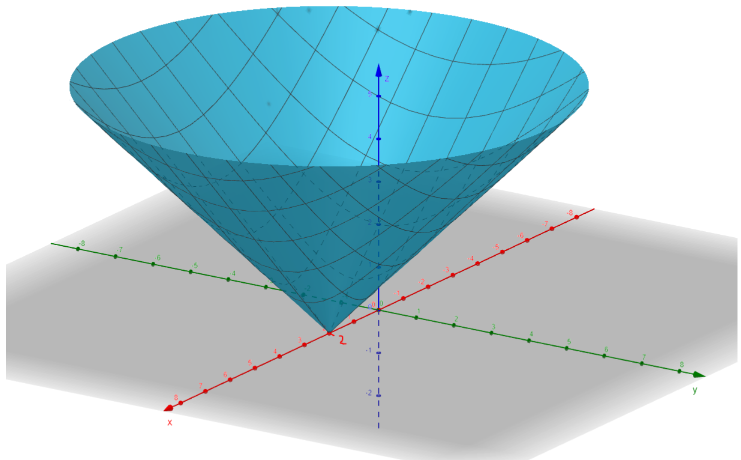


- $z = x^2 + y^2$, corresponde a un paraboloide centrado en el origen.

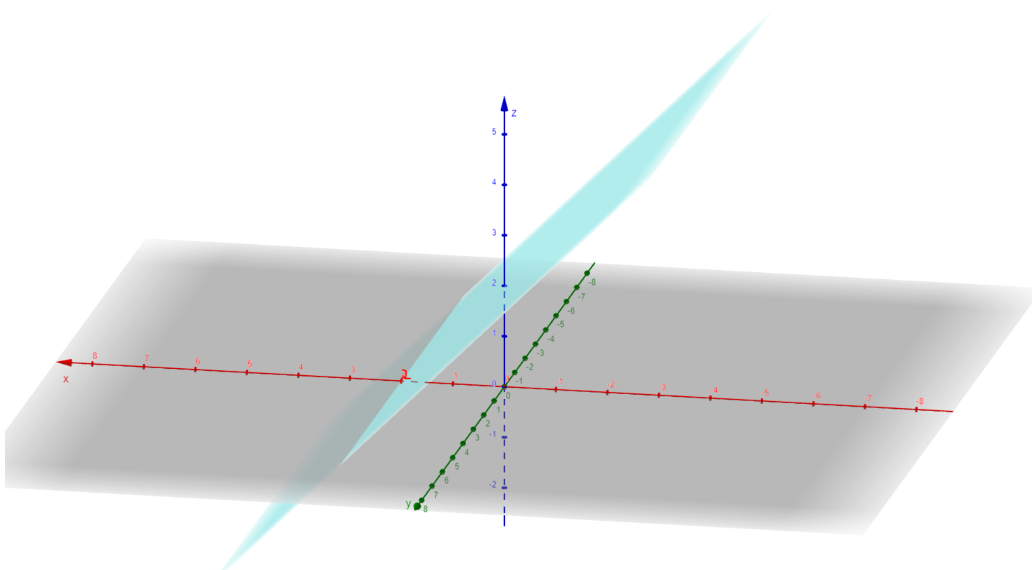


En cuanto al paraboloide, este funciona de forma similar que lo anterior. En la imagen se ve un paraboloide que esta ubicado en el eje z, pero si fuese $y = z^2 + x^2$, este estaría ubicado en el eje y. Para saber donde esta ubicado, se analiza igual que un circulo, es decir, podemos fijar un z y ver donde esta ubicado el circulo que resulta.

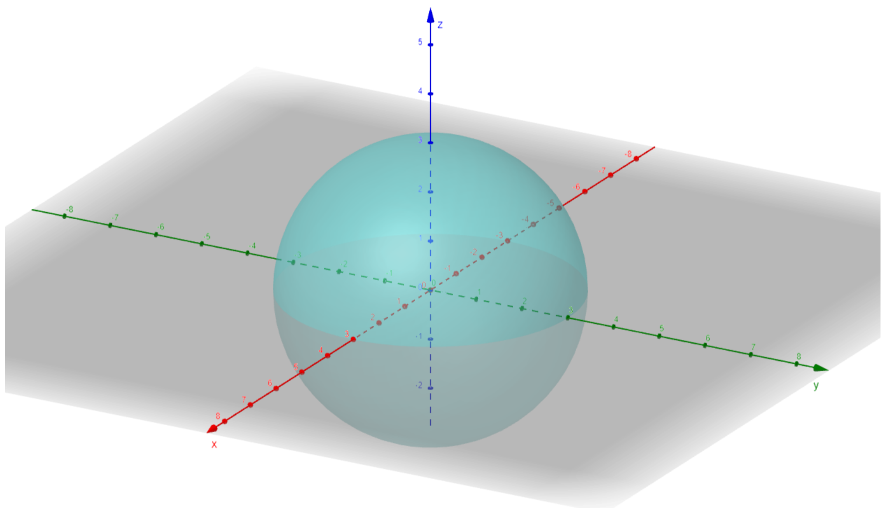
- $z = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, corresponde a un cono centrado en $(2,0)$. Para ver donde esta centrado igual que en el paraboloide.



- $z = 2 - x$, corresponde al plano que intersecta al eje x en $x = 2$ y a z en $z = 2$. Para ver donde intersecta x se hace $z = 0$ y $x = 0$ para ver donde intersecta a z.



- $x^2+y^2+z^2=9$, corresponde a una esfera de radio 3 centrada en el origen. Notar que es la extensión del circulo en $\mathbb{R}^3$.



Algunas formulas y ecuaciones

(i) La ecuación de la esfera es

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-t)^2=r^2$$

Con centro en $C=(h,k,t)$ y radio r.

(ii) La distancia entre dos puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ es

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(iii) El punto medio del segmento entre $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ es

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

1. Calcule la distancia entre $P_1(2,-1,7)$ y $P_2(1,-3,5)$

   Usando la formula anterior se tiene

   $|P_1P_2|=\sqrt{(1-2)^2+(-3-(-1))^2+(5-7)^2}=3$

2. Demuestre que $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 2 + z^2 = 0$ es la ecuación de una esfera e identificar donde está centrada y su radio.

   Para esto, solo debemos arreglar la ecuación para que tenga la forma de la ecuación de la esfera. Para lograrlo buscamos completar cuadrados y reorganizar términos de forma conveniente.

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + 2 + z^2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 1 + z^2 = 0$$

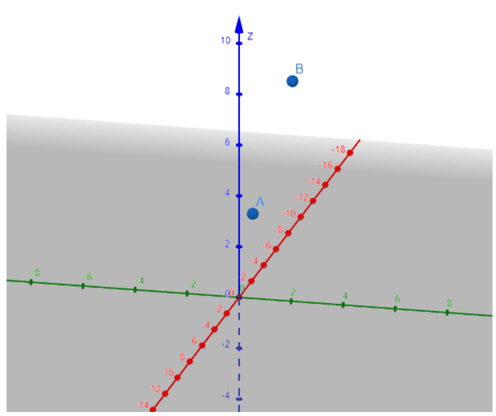
   Ahora nos falta completar cuadrados para y, por lo cual podemos sumar 3

$$(x-1)^2 + y^2 + 4y + 1 + z^2 = 0 \ / + 3$$
$$(x-1)^2 + y^2 + 4y + 1 + 3 + z^2 = 3$$
$$(x-1)^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 = (\sqrt{3})^2$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = (\sqrt{3})^2$$
$$(x-1)^2 + (y-(-2))^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$$

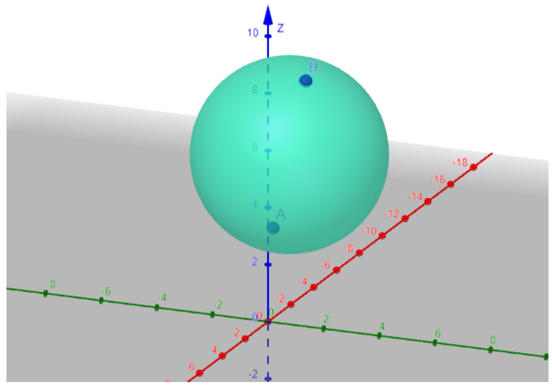
   Corresponde a una esfera de radio $\sqrt{3}$ centrada en $(1, -2, 0)$

3. Obtenga la ecuación de una esfera si uno de sus diámetros tiene tiene puntos terminales en $A(2, 1, 4)$ y $B(4, 3, 10)$.

   Los puntos describen los extremos de la esfera, y como nos señalan que corresponden también al diámetro, podemos obtener todo en base a los puntos. Primero veamos una gráfica de lo que esta pasando.



Como sabemos que el diámetro está dado por los dos puntos, tendríamos una esfera de la siguiente forma:



Ahora, como queremos buscar la ecuación de la esfera, necesitamos buscar el radio y el centro de esta. Para determinar el centro, podemos calcular el punto medio entre los dos puntos, por lo cual:

$$C = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{10+4}{2}\right) = (3, 2, 7)$$

Solo nos falta el radio. Para esto podemos calcular la distancia entre los dos puntos, y dividirlo en dos. Pues recordar que el radio es la mitad del diámetro.

$$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{44}$$

Como nos interesa la mitad, el radio seria $r = \dfrac{\sqrt{44}}{2}$. Ya que tenemos todo, aplicamos la formula de la esfera:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-7)^2 = \left(\frac{\sqrt{44}}{2}\right)^2$$

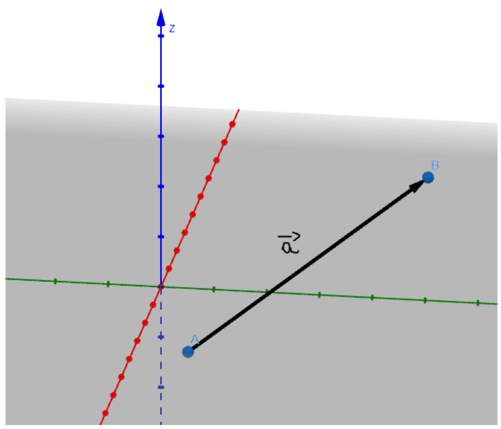
2 Vectores

2.1 Introducción y propiedades

Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ el punto de inicio y $B(x_2, y_2, z_2)$ el punto final del vector $\overrightarrow{a}$. El vector $\overrightarrow{a}$ con representación $\overrightarrow{AB}$ esta dado por:

$$\overrightarrow{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

En el espacio se puede apreciar de la siguiente manera:



Si solo nos indican el vector $\overrightarrow{a} = \langle x, y, z \rangle$, asumimos que parte desde el origen.

(i) La longitud, norma o magnitud del vector $\overrightarrow{a} = \langle x, y, z \rangle$ se denota por $\|\overrightarrow{a}\|$, y está dado por la siguiente formula:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Si $\|\overrightarrow{a}\| = 1$, se dice que $\overrightarrow{a}$ es un vector unitario.

(ii) La suma de dos vectores $\overrightarrow{a} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\overrightarrow{b} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ esta dada por:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \rangle$$

Funciona de forma análoga para la resta.

(iii) La multiplicación de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por un vector $\overrightarrow{a} = \langle x, y, z \rangle$ esta dada por

$$\lambda \overrightarrow{a} = \langle \lambda x, \lambda y, \lambda z \rangle$$

Propiedades

En general estas propiedades son validas para vectores de dimensión n, pero nos centraremos en tres dimensiones. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
- $\overrightarrow{u} + 0 = \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = 0$
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{u} = \lambda(\mu\overrightarrow{u})$
- $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$

Recordar los vectores canónicos.

$$\hat{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$$
$$\hat{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$$
$$\hat{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$$

2.2 Producto punto

Sea $\overrightarrow{a} = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$ y $\overrightarrow{b} = \langle x_1, y_1, z_2\rangle$. El producto punto entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ se denota como $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, y se calcula de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Notar que el producto punto entre dos vectores es un numero real.

Propiedades

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$
- $\lambda(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) = (\lambda\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}(\lambda\overrightarrow{u})$

El producto punto también nos permite definir lo siguiente

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}$$

(i) Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$. Si θ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, entonces

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \; \|\overrightarrow{b}\| \; cos(\theta)$$

(ii) Si θ es el ángulo no cero entre los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, entonces

$$cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \; \|\overrightarrow{b}\|}$$

(iii) Dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son perpendiculares si y solo si $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. Esto pasa cuando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

2.3 Producto cruz

Sea $\overrightarrow{a} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\overrightarrow{b} = \langle x_1, y_1, z_2 \rangle$. El producto cruz de entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ se denota como $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ y se calcula de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \langle y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2 \rangle$$

Notar que el producto cruz de dos vectores es un vector perpendicular (ortogonal) a $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$. Es decir, el vector resultante genera un ángulo de 90° con $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

Una forma mas sencilla de calcularlo es de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Sean $\overrightarrow{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$ y $\overrightarrow{b} = \langle 7, 3, 6 \rangle$. Calcular $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 12i - 6j - 11k$$
$$= \langle 12, -6, -11 \rangle$$

Recordar que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Propiedades

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$
- $(\lambda \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$

(i) El vector $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ es perpendicular al plano generado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

(ii) Si θ es el ángulo entre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ (de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$) entonces:

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\| \, \|\overrightarrow{b}\| \, sin(\theta)$$

(iii) Dos vectores no cero $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son paralelos si y solo si:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

(iv) El área de un paralelogramo generado por $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ es $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|$

(v) El área de un triangulo generado por dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ es $\dfrac{\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|}{2}$

1. Determine un vector unitario que sea ortogonal a $\overrightarrow{a} = 3i+j$ y $\overrightarrow{b} = 2i+k$.

   Sabemos que el vector resultante del producto cruz de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ es ortogonal a ambos. Los vectores que nos entregan son equivalentes a $\langle 3, 1, 0\rangle$ y $\langle 2, 0, 1\rangle$. Entonces calculamos:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = i - 3j - 2k = \langle 1, -3, -2\rangle$$

   Nos piden que sean unitario, por lo cual calculamos su norma para analizar esto.

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

   Nos percatamos que no es unitario, por lo cual no normalizamos, es decir, dividimos el vector por la norma.

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \sqrt{14}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|}{\sqrt{14}} = 1$$

Recordando el vector resultante del producto cruz se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\langle 1, -3, -2\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\rangle$$

Por lo tanto, un vector unitario ortogonal a $\overrightarrow{a} = 3i + j$ y $\overrightarrow{b} = 2i + k$ es $\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\rangle$.

2. Determine el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$ y $\overrightarrow{b}\langle 5, -3, 2\rangle$.

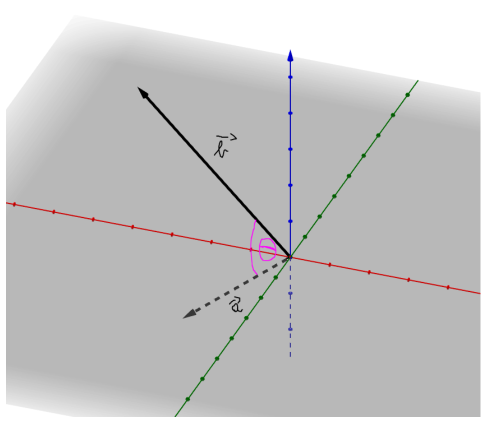
   Para esto solo recordamos que el ángulo de dos vectores esta dado por $cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\ \|\overrightarrow{b}\|}$. Por lo cual solo calculamos lo necesario:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$
$$\|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 2$$

   Reuniendo todo se tiene:

$$cos(\theta) = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$
$$\theta = arcos\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 84^\circ$$

   Geométricamente se calcula el siguiente ángulo:



3. Determine para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, los vectores $\overrightarrow{a} = 2i + 2j - k$ y $\overrightarrow{b} = 5i - 4j + \alpha k$ son perpendiculares.

   Recordamos que dos vectores son perpendiculares cuando $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. Entonces:

   $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot -4 + -1 \cdot \alpha = 2 - \alpha$$

   Imponiendo la condición:

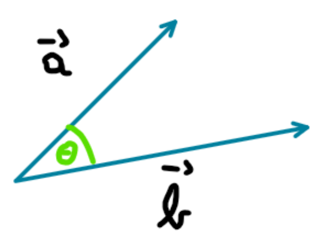
   $$2 - \alpha = 0 \ \Rightarrow \ \alpha = 2$$

4. Interprete geométricamente que sucede con el ángulo de dos vectores no nulos (en $\mathbb{R}^3$) cuando el producto punto de estos es mayor a 0.

   Por enunciado tenemos que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0$. Ahora recordando la formula del ángulo entre dos vectores, tenemos que el producto de las normas de los vectores también es mayor a 0, por lo cual tendríamos:

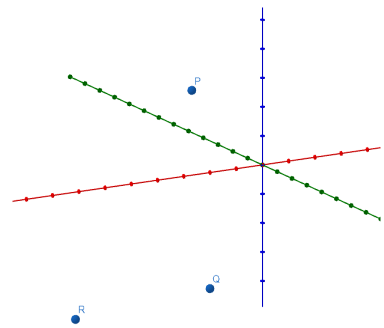
   $$cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \, \|\overrightarrow{b}\|}$$
   $$cos(\theta) = \frac{> 0}{> 0}$$
   $$cos(\theta) > 0$$

   Ahora recordamos que $cos(\theta) > 0$ si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Pero si esto pasa, se genera un ángulo agudo. De manera gráfica:



5. Sean los puntos $P(1,-3,-2), Q(2,0,-4)$ y $R(6,-2,-5)$. Determine el área del triangulo que forman los puntos y verifique que es un triangulo rectángulo.

   Para que sea mas fácil entender lo que necesitamos, podemos ver que sucede en el espacio.

   Primero busquemos los vectores correspondientes. En este caso tomaremos $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$, aunque sirve cualquier otra combinación. Entonces:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 2-1, 0-(-3), -4-(-2)\rangle = \langle 1,3,-2\rangle$$
$$\overrightarrow{PR} = \langle 6-1, -2-(-3), -5-(-2)\rangle = \langle 5,1,-3\rangle$$
$$\overrightarrow{QR} = \langle 6-2, -2-0, -5-(-4)\rangle = \langle 4,-2,-1\rangle$$

   Ahora recordando que el área de un triangulo esta dado por la formula $\dfrac{\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|}{2}$, necesitamos calcular el producto cruz de dos vectores a elección y luego calcularle la norma. Elegimos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \langle -7,-7,-14\rangle$$

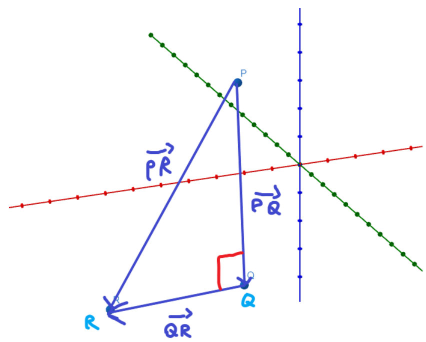
   Ahora calculamos la norma:

$$\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \sqrt{(-7)^2+(-7)^2+(-14)^2} = 7\sqrt{6}$$

   Juntando todo se tendría que el área del triangulo es:

$$A = \frac{7\sqrt{6}}{2}$$

Para verificar que es un triangulo rectángulo tomamos $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PQ}$, el producto punto de estos debe ser > 0, ya que es un ángulo agudo, y también el producto punto entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ debe ser 0, ya que son perpendiculares, formando un ángulo de $90°$. Para tener una mejor idea de todo esto, podemos dibujar los puntos y vectores, como se aprecia en la siguiente imagen:



$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) = 6 > 0$$
$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) = 0$$

Como $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ son perpendiculares, y $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} > 0$, el triangulo formado por los puntos P, Q y R es rectángulo.

6. Determine un vector perpendicular al plano definido por los puntos $P(4, 5, 6)$ $Q(-2, 5-1)$ y $R(1, -1, 1)$.

   Queda como ejercicio para el lector. Proceder igual que en el anterior y recordar que determina el producto cruz.

3 Rectas y planos

3.1 Rectas

Una recta L en el espacio tridimensional de puede definir mediante las siguientes ecuaciones:

(i) Forma vectorial

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v}$$

Donde

$$\overrightarrow{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

$$\overrightarrow{v} = \langle a, b, c \rangle$$

$$t \in \mathbb{R}$$

(ii) Forma parametrica

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

(iii) Forma simétrica

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

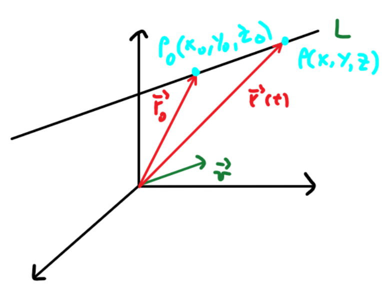
Si $a = 0$, se puede escribir como:

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Funciona de forma análoga para b o c

- $\overrightarrow{v}$ da la dirección de la recta. Es paralelo a la recta.
- $\overrightarrow{r_0}$ es el vector que inicia en el origen y termina en un punto arbitrario $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la recta L.

Gráficamente se tiene:



3.2 Planos

Un plano en el espacio se puede definir mediante dos ecuaciones:

(i) Forma vectorial

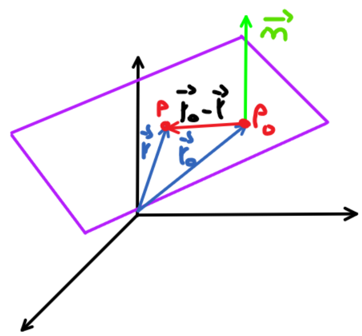
$$\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0$$

(ii) Forma escalar

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- $\overrightarrow{n}$ corresponde al vector normal.
- $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$ corresponde al vector que se genera de dos puntos arbitrarios $P(x, y, z)$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano.

Gráficamente se tiene:



(i) La ecuación del plano se puede escribir como

$$ax + by + cz + d = 0$$

Donde d es un numero independiente de x, y, z.

(ii) Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos. Dos vectores no cero son paralelos si y solo si $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$

(iii) La distancia entre un punto $P(x, y, z)$ y un plano $ax + by + cz + = 0$ esta dada por:

$$D = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1. Encuentre la ecuaciones vectorial y paramétrica de la recta que pasa por el punto $(5,1,3)$ y es paralela al vector $i+4j-2k$. Y encuentre otros dos puntos sobre la recta.

   Por enunciado tendríamos que el vector que da la dirección es $i+4j-2k$, pues recordar que una recta es siempre paralelo a su vector director, por lo cual tenemos $\overrightarrow{v} = \langle 1,4,-2\rangle$. Y como queremos que pase por el punto $(5,1,3)$, se tiene $\overrightarrow{r_0} = \langle 5,1,3\rangle$.

   La ecuación vectorial es:

   $$\overrightarrow{r}(t) = \langle 5,1,3\rangle + \langle 1,4,-2\rangle t$$

   La ecuación parametrica es:

   $$\begin{aligned} x &= 5+t \\ y &= 1+4t \\ z &= 3-2t \end{aligned}$$

   Ahora para encontrar un punto que pasa por la recta, podemos evaluar con algún $t \in \mathbb{R}$.

   Tomando $t=1$ se tiene:

   $$(6,5,1)$$

   Tomando $t=0$ se tiene:

   $$(5,1,3)$$

2. Encuentre las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A=(2,4,-3)$ y $B=(3,-1,1)$.

   Solo nos entregan dos puntos, por lo cual podemos obtener el vector director mediante el vector resultante de $\overrightarrow{AB}$, entonces:

   $$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \langle 3-1, -1-4, 1-(-3)\rangle = \langle 1,-5,4\rangle \\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v} &= \langle 1,-5,4\rangle \end{aligned}$$

   Ahora como queremos que pase por los dos puntos, podemos tomar el punto A, de forma que $\overrightarrow{r_0} = \langle 2,4,-3\rangle$ (igual se pudo haber elegido el punto B).

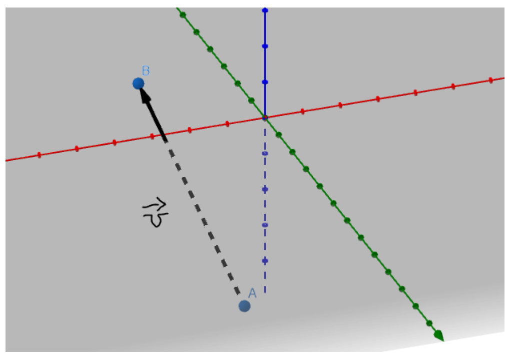
La ecuación simétrica es:

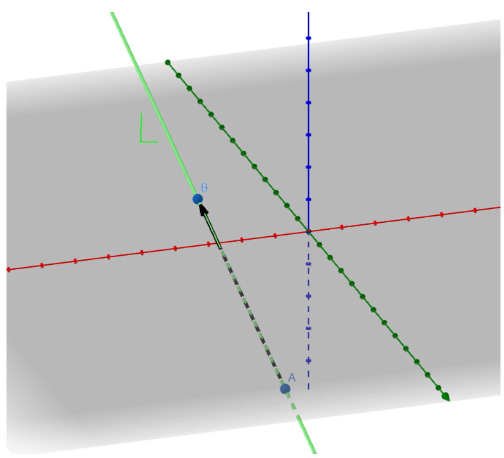
$$x = 2 + t$$
$$y = 4 - 5t$$
$$z = -3 + 4t$$

Para obtener la ecuación parametrica podemos despejar t en cada ecuación anterior. Por lo cual la ecuación paramétrica es:

$$x - 2 = \frac{4-y}{5} = \frac{z+3}{4}$$

Gráficamente se tiene:





3. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $p = (7, 4, -1)$ con vector normal $\overrightarrow{n} = 2i + 3j + 9k$.

   Solo necesitamos recordar la ecuación del plano, ya que nos entregan todo lo necesario. Por lo cual la ecuación del plano es:

$$2(x-7) + 3(y-4) + 9(z-(-1)) = 0$$
$$2(x-7) + 3(y-4) + 9(z+1) = 0$$
$$2x + 3y + 9z - 17 = 0$$

4. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y que sea paralela a la recta

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y}{2} = z + 2$$

   y escríbala de tres formas diferentes.

   Primero podemos identificar el vector director. Recordamos que el vector director es paralelo a la recta, pero por enunciado nos indican que la recta debe ser paralela a la recta dada, por lo cual podemos identificar el vector director de la recta dada.

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+2}{1}$$

   Ya tendríamos que:

$$\overrightarrow{v} = \langle 3, 2, 1 \rangle$$

   Y como queremos que pase por el punto $(1, 0, -1)$, la recta buscada escrita en tres formas diferentes es:

   (i)

$$\overrightarrow{r}(t) = \langle 1, 0, -1 \rangle + \langle 3, 2, 1 \rangle t$$

   (ii)

$$x = 1 + 3t$$
$$y = 2t$$
$$z = -1 + t$$

   (iii)

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$$

5. Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2,1,1)$, $B(-1,-1,10)$, $C(1,3,-4)$

   Para esto podemos calcular los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, para luego obtener un vector normal y recordar la formula del plano. Entonces:

$$\overrightarrow{AB} = \langle -1-2, -1-1, 10-1 \rangle = \langle -3, -2, 9 \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle 1-2, 3-1, -4-1 \rangle = \langle -1, 2, -5 \rangle$$

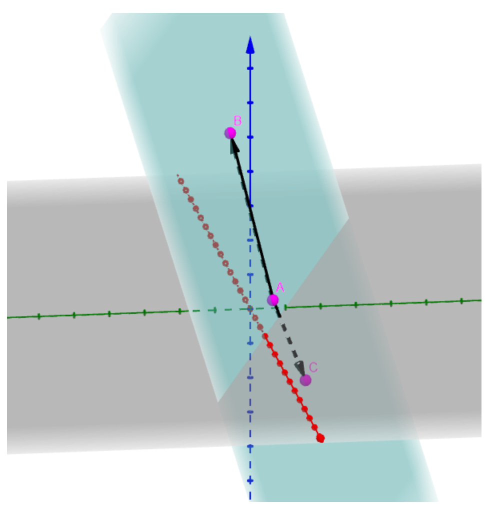
   Ahora necesitamos el vector normal, el cual esta dado por el producto cruz de los vectores anteriores, ya que esta es perpendicular a estos. Entonces:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= i(10-18) - j(15+9+k(-6-2))$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n} = \langle -8, -24, -8 \rangle$$

   Como nos interesa que pase por los puntos A, B, C, elegimos cualquiera de estos y recordamos la ecuación del plano. En nuestro caso tomamos el punto A. La ecuación del plano es:

$$-8(x-2) + -24(y-1) + -8(z-1) = 0$$
$$-8(x-2) - 24(y-1) - 8(z-1) = 0$$
$$-8x - 24y - 8z + 48 = 0$$

   Gráficamente:



6. Sea $L_1 : \overrightarrow{r}(t) = \langle 1,2,2\rangle + \langle 1,2,6\rangle t$ y L_2 la recta de intersección de los planos $\pi_1 : x-y+2z+1=0$ y π_1 y $\pi_2 : -2x+y-4z+2=0$. Encuentre el punto de intersección entre L_1 y L_2.

   Primero tenemos que buscar la recta que resulta de la intersección entre π_1 y π_2. Para esto podemos calcular el producto cruz entre los vectores normales de los planos, ya que este nos da el vector director de la recta que buscamos. De los planos se obtiene que los vectores normales son:

$$\overrightarrow{n_1} = \langle 1,-1,2\rangle$$
$$\overrightarrow{n_2} = \langle -2,1,-4\rangle$$

   Recordar que son los coeficientes que acompañan a x, y, z respectivamente.

   Calculamos el producto cruz:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= i(4-2) - j(-4+4) + k(1-2)$$
$$= \langle 2,0,-1\rangle$$

   Ahora tomamos algún punto que se encuentre en la intersección de los planos. Para esto podemos hacer $z=0$ y resolver el sistema. Entonces si $z=0$ se tiene:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ -2x+y+2=0 \end{cases}$$

   Donde al resolver se obtiene que $x=3$ y $y=4$. Por lo cual podemos tomar el punto $(3,4,0)$. Ya que tenemos todo, la recta que resulta de la intersección de π_1 y π_2 es:

$$L_2 : \langle 3,4,0\rangle + \langle 2,0,-1\rangle s$$

   Ahora solo nos falta ver el punto de intersección entre L_1 y L_2. Para esto primero debemos asegurarnos de que no sean paralelas, es decir, que el producto cruz de los vectores directores sean distinto del vector 0. Es fácil calcular y notar que:

$$\langle 1,2,5\rangle \times \langle 2,0,-1\rangle \neq \overrightarrow{0}$$

Como ya corroboramos que no son paralelas, debemos buscar el punto de intersección, para esto podemos pasar las rectas a la ecuación parametrica, para luego resolver el sistema. Recordando las rectas:

$$L_1 : \overrightarrow{r}(t) = \langle 1, 2, 2\rangle + \langle 1, 2, 6\rangle t$$
$$L_2 : \overrightarrow{r}(s) = \langle 3, 4, 0\rangle + \langle 2, 0, -1\rangle s$$

Ahora pasándolas a la ecuación parametrica se tiene:

$$\begin{array}{cc} x = 1 + t & x = 3 + 2s \\ y = 2 + 2t & y = 4 \\ z = 2 + 6t & z = -s \end{array}$$

Igualando cada componente se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 + t = 3 + 2s \\ 2 + 2t = 4 \\ 6 + 2t = -s \end{cases}$$

Resolviendo se puede llegar a que $s = \dfrac{-1}{2}$, pero al sustituir en cualquier otra ecuación se obtienen soluciones diferentes para t, que luego no satisfacen algunas ecuaciones, por lo cual el sistema no tiene solución, y al no tener solución, las rectas no se intersectan en ninguna parte, de manera que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Nota:

Otra forma de verificar que dos rectas o planos son paralelos es que los vectores normales o directores son múltiplo del otro.

Gráfica de las rectas y sus vectores de dirección: