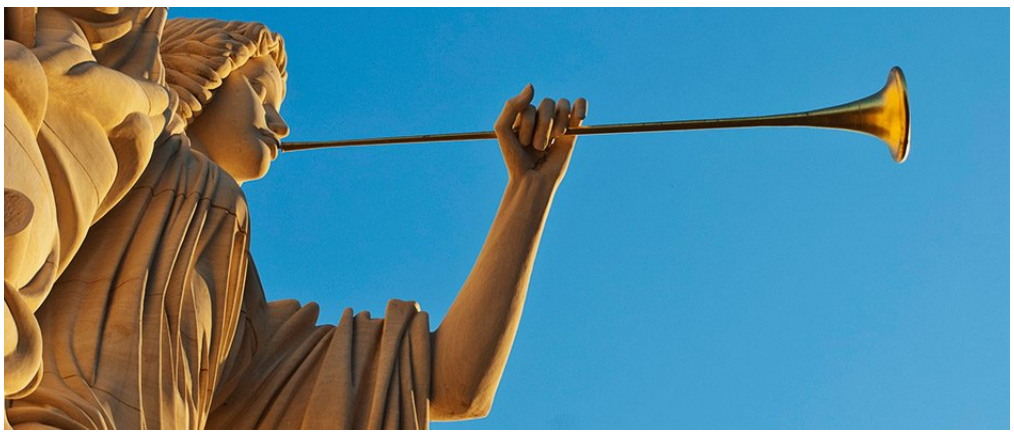
Criterios de convergencia para series e integrales impropias - Calculo II

Daniel Gálvez

September 11, 2023



Summary

1 Calculo de integrales impropias

Para calcular integrales impropias solo es necesario saber calcular limites e integrar. Existen tres casos de integrales impropias.

- Integral que va al infinito o menos infinito (Tipo I)
- Integral que tiene en uno de sus limites una asíntota vertical de la función a integrar o algún punto donde no este definida (Tipo II)
- Integral que es una mezcla de los dos casos anteriores. (Tipo III)

A continuación hay algunos ejemplos:

La siguiente integral no tiene una asíntota de la función a integrar, pero va al infinito, por lo cual es de tipo I

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

La siguiente integral no va al infinito, pero tiene en uno de sus limites una asíntota de la función, por lo cual es de tipo II

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

La siguiente integral tiene ambos casos, ya que la integral tiene un limite donde la función no esta definida $x = 1$, y también va al menos infinito.

$$\int_{-\infty}^1 \frac{sin(x)}{x-1} dx$$

No es muy importante saber de que tipo son en particular, solo es necesario saber como tratarla según los limites de la integral. En cualquier caso, el calculo de la integral debería resultar sencillo, y solo hay que analizar bien el limite.

El calculo de las integrales se realiza de la siguiente manera:

En el caso de tipo I

$$\int_b^{\infty} h(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_b^t h(x)dx$$

En el caso de tipo II

$$\int_b^{a} f(x)dx = \lim_{t\to a}\int_b^t f(x)dx$$

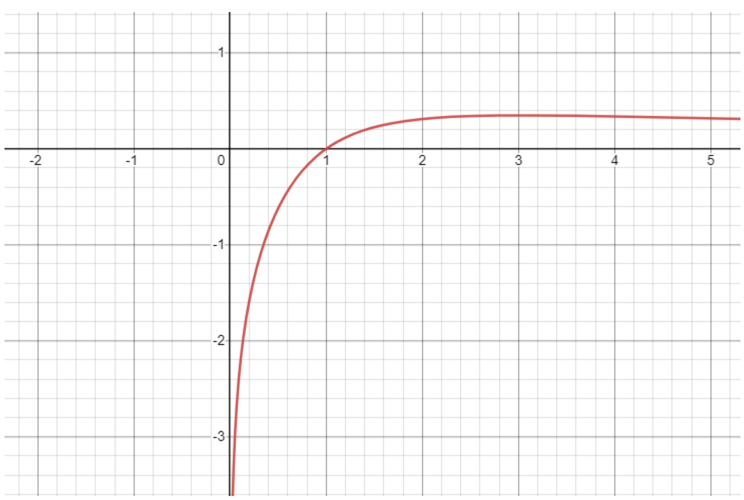
En el caso de tipo III

$$\int_c^{\infty} t(x)dx = \lim_{t\to c}\int_t^d t(x)dx + \lim_{w\to\infty}\int_d^w t(x)dx$$

En la mayoría de casos hay que tomar los limites por la izquierda o por la derecha, dependiendo el caso. Por ejemplo la integral $\int_0^1 \frac{ln(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ se calcularía como:

$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{ln(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Esto ya que la función no esta definida para valores negativos, pues $ln(x)$ solo esta definida para $x > 0$, por lo cual debemos analizar el limite por el lado derecho. A continuación se puede observar una gráfica de la función.



Cabe recalcar que en esta sección solo nos delimitaremos a calcular integrales impropias que sean aceptablemente sencillas de integrar, pues las integrales mencionadas anteriormente son difíciles de resolver, aunque mas adelante se podrá hacer un análisis respecto a su convergencia o divergencia. También señalar que hay que tener cuidado cuando hagamos cambio de variable, ya que los limites cambian de forma particular.
En el caso de que algún limite sea infinito, diremos que la integral diverge.

1. Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} -e^{-t} + 1 \\
&= \lim_{t\to\infty} 1 - \frac{1}{e^t} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

2. Calcular $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

Notamos que en uno de los limites de la integral hay una asíntota de la función a integrar, pues en $x = 2$ se va al infinito. Ahora tenemos que aplicar el limite por la derecha, ya que la función esta definida para $x > 2$ debido a la raíz..

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{t\to 2^+} \int_t^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$$

En esta ocasión haremos el cambio de variable y el paso a paso. Haciendo $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$. Los nuevos limites serian:

$$u = 3 - 2 = 1$$

$$u = t - 2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{t\to 2^+} \int_t^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx &= \lim_{t\to 2^+} \int_{t-2}^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
&= \lim_{t\to 2^+} \left(2\sqrt{u}\right)\Big|_{t-2}^1 \\
&= \lim_{t\to 2^+} 2 - 2\sqrt{t-2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = 2$$

3. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}dx$, (I1 - 2021 - 2)

Notamos que tenemos dos casos, la integral va al $-\infty$ y la función a integrar tiene una asíntota en $x = 1$, por lo cual procedemos a separar la integral:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}dx + \lim_{t\to1^-} \int_{0}^{t} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}dx$$

Es claro que usando la sustitución $u = -\sqrt{1-x}$ se resuelven las integrales. Dado que los limites de las integrales son iguales (t y 0), los nuevos limites serian:

$$u = -\sqrt{1-x} = -\sqrt{1-0} = -1$$

$$u = -\sqrt{1-x} = -\sqrt{1-t} = -\sqrt{1-t}$$

Ahora derivando se tiene:

$$u = -\sqrt{1-x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}dx \Rightarrow 2du = \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$

Ahora tenemos:

$$\lim_{t\to-\infty} 2\int_{-\sqrt{1-t}}^{-1} e^u du + \lim_{t\to1^-} 2\int_{-1}^{-\sqrt{1-t}} e^u du$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{2}{e} - \underbrace{\frac{2}{e^{1-t}}}_{0} + \underbrace{\lim_{t\to1^-} \frac{2}{e^{1-t}}}_{2} - \frac{2}{e}$$

$$\frac{2}{e} + 2 - \frac{2}{e} = 2$$

Finalmente se tiene que $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}dx = 2$

4. Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{16+x^2} dx$

Notamos que se asemeja a una $arctan(x)$, tenemos que arreglarla un poco. Además de señalar que la integral solo va desde el - infinito al infinito, por lo cual solo debemos tomar limite al infinito.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{16+x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{16} \frac{1}{1+\frac{1}{16}x^2} dx = \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{x^2}{4^2}} dx = \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{4})^2} dx$$

Ahora ya podemos resolverla. Como la función es par, podemos calcular la mitad del área y multiplicarla por 2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{4})^2} dx &= \frac{2}{16\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x}{4})^2} dx \\ &= \frac{1}{8\pi} \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+(\frac{x}{4})^2} dx \end{aligned}$$

Para resolver la integral hacemos $u = \frac{x}{4} \Rightarrow 4du = dx$. Los limites de la nueva integral serian: $u = \frac{t}{4}$ y $u = \frac{0}{4} = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{4}{8\pi} \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{\frac{t}{4}} \frac{1}{1+u^2} du &= \frac{1}{2\pi} \lim_{t\to\infty} arctan(u)\Big|_{0}^{\frac{t}{4}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{t\to\infty} arctan\left(\frac{t}{4}\right) - arctan(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{t\to\infty} arctan\left(\frac{t}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{16+x^2} dx = \frac{1}{4}$$

5. Calcular $\int_1^3 \frac{1}{x-3}dx$

Nos percatamos de que solo tiene problema en $x = 3$, ya que la función a integrar tiene una asíntota. Como solo nos interesa el área de la izquierda de la asíntota, tomamos limite por la izquierda.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{x-3}dx &= \lim_{t\to 3^-} \int_1^t \frac{1}{x-3}dx \\
&= \lim_{t\to 3^-} ln(x-3)\Big|_1^t \\
&= \underbrace{\lim_{t\to 3^-} ln|t-3|}_{-\infty} - ln|-2|
\end{aligned}$$

Como el limite diverge, la integral es divergente.

6. Determinar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge.

Para esto solo debemos calcular la integral normalmente, y luego analizar en base al limite.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}dx$$

De inmediato podemos ver que pasan dos cosas con esta integral, pues si $\alpha = 1$ la integral resulta como el logaritmo natural, pero si $\alpha \neq 1$ entonces la integral resulta como $\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$. Analizamos por casos.

$\alpha = 1$

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^1} = \lim_{t\to\infty} ln|t| - ln|1| = \infty$$

Por lo cual para $\alpha = 1$ la integral diverge.

$\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^t &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Notamos que este limite existe solo si $1-\alpha < 0$, pues en cualquier otro caso el limite es infinito. Por lo cual el limite resulta 0 si $\alpha > 1$. El otro caso que no se señaló es $\alpha = 0$, pero es obvio que en este caso la integral resulta divergente. Por lo tanto, la integral converge para $\alpha > 1$

2 Convergencia de series e integrales

2.1 Recordatorios

En esta sección analizaremos la convergencia y de series e integrales. Cuando se realiza un análisis de convergencia, no se busca calcular el valor de la integral, solamente se busca determinar si es convergente o no, por lo cual no hay que perder tiempo intentando resolver integrales, ya que la mayoría de las veces resultan muy difíciles de calcular.

Si se tiene la integral $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$, donde $p \in \mathbb{R}$ y $a \geq 1$:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} Diverge & \text{Si } p \leq 1 \\ Converge & \text{Si } p > 1 \end{cases}$$

Si se tiene la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, donde $p \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} Diverge & \text{Si } p \geq 1 \\ Converge & \text{Si } p < 1 \end{cases}$$

Si se tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, donde $p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} Diverge & \text{Si } p \leq 1 \\ Converge & \text{Si } p > 1 \end{cases}$$

Si se tiene la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, donde $r \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \begin{cases} Diverge & \text{Si } r \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ Converge & \text{Si } r \in (-1, 1) \end{cases}$$

Si se tiene la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, iniciando desde 0 o 1 ($n = 0$ o $n = 1$), donde $r \in (-1, 1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$$

2.2 Convergencia de integrales impropias

2.2.1 Integrales de tipo I

Criterio de comparación:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en un intervalo $[a, \infty)$ y se cumple que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a, \infty)$, entonces se puede decir:

- Si $g(x)$ converge, entonces $f(x)$ también lo hace.
- Si $f(x)$ diverge, entonces $g(x)$ también lo hace.

Se sugiere realizar una desigualdad en base a $f(x)$, de modo que $g(x)$ sea fácil de analizar.

Criterio de comparación en el limite:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en un intervalo $[a, \infty)$, tales que $0 \leq f(x)$, $0 < g(x)$ y:

$$\lambda = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

entonces se puede decir:

- Si $\lambda = 0$ y $g(x)$ converge, entonces $f(x)$ también lo hace.
- Si $\lambda \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo comportamiento que $g(x)$.
- Si $\lambda = \infty$ y $f(x)$ diverge, se verifica que $g(x)$ también diverge.

En este criterio el objetivo es buscar una función $g(x)$ fácil de analizar y que al calcular lambda (el limite anterior), este sea un numero real distinto de 0, para poder concluir de forma rápida y sencilla. Se sugiere usar $g(x)$ como la división de los terminos de mayor grado entre el numerador y denominador.

Nota: Si $\lambda \neq 0$, entonces siempre será positivo, pues corresponde al limite de la división de dos funciones positivas.

2.2.2 Integrales de tipo II

Criterio de comparación:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en un intervalo $[a, b)$, y se cumple que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\ x \in [a, b)$, entonces se puede decir:

- Si $g(x)$ converge, entonces $f(x)$ también lo hace.
- Si $f(x)$ diverge, entonces $g(x)$ también lo hace.

Este criterio funciona de la misma forma que en integrales de tipo I.

Criterio de comparación en el limite:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en un intervalo $[a, b)$, tales que $0 \leq f(x)$, $0 < g(x)$ y: (x tendiendo a la singularidad)

$$\alpha = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$$

entonces se puede decir:

- Si $\alpha = 0$ y g(x) converge, entonces $f(x)$ también lo hace.
- Si $\alpha \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene el mismo comportamiento que $g(x)$.
- Si $\alpha = \infty$ y $f(x)$ diverge, se verifica que $g(x)$ también diverge.

En este criterio el objetivo es buscar una función $g(x)$ fácil de analizar y que al calcular alfa (el limite anterior), este sea un numero real distinto de 0, para poder concluir de forma rápida y sencilla, siempre recordando que $g(x)$ debe tener la misma singularidad que $f(x)$. Funciona de forma análoga para un intervalo $(a, b]$.

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1+sin(x)}{x^3} dx$, (I1 - 2022 - 1)

Notamos que va al infinito, por lo cual podemos construir una desigualdad en base a la función, notamos que al tener un $sin(x)$, es fácil construirla, pues se sabe que en el intervalo [2,∞) se cumple:

$$-1 \leq sin(x) \leq 1$$
$$0 \leq 1 + sin(x) \leq 2, \text{ sumando } 1$$
$$0 \leq \frac{1+sin(x)}{x^3} \leq \frac{2}{x^3} \text{ , multiplicando por } \frac{1}{x^3}$$
finalmente integrando se tiene que:
$$\int_2^{\infty} \frac{1+sin(x)}{x^3} dx \leq \int_2^{\infty} \frac{2}{x^3} dx$$

Pero sabemos que $g(x) = \int_2^{\infty} \frac{2}{x^3} \, dx$ converge, pues $p = 3$ y la función $f(x) = \dfrac{1+sin(x)}{x^3}$ es positiva en el intervalo a integrar, entonces por comparación se puede concluir que la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1+sin(x)}{x^3} dx$ es convergente.

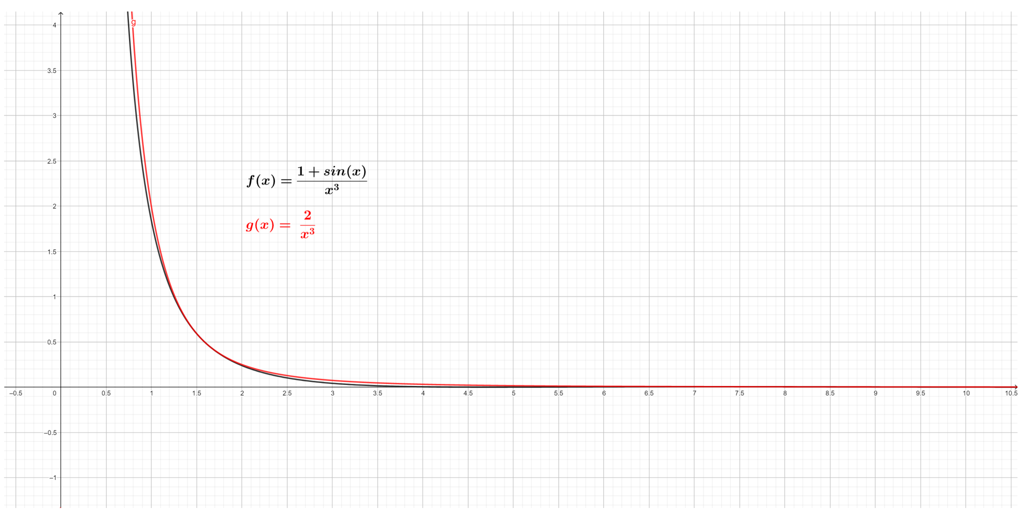


Figure 1: Funciones $f(x)$ y $g(x)$

2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}dx$

Notamos que el problema en la integral es el limite inferior, pues la función tiene una asíntota. Para este tipo de problemas podemos usar el criterio de comparación al limite, pues al tener una raíz en su denominador y un grado al cuadrado en el numerador es positiva, permitiéndonos así usar el criterio. Siempre es recomendable usar una función similar a la del denominador, para que el limite sea un numero real, para lograr esto es recomendable hacer la división entre los términos de mayor grado, acá se tendría que dividir x^2 y $x^{\frac{5}{2}}$, haciendo la división se tiene que $\dfrac{x^2}{x^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, como $g(x)$ debe tener la misma singularidad, es conveniente usar $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, ya que contiene la misma singularidad que la función original, para luego calcular el limite y usar L'hopital, y así se nos vallan los -1, entonces se tendría:

$$\lim_{x\to\ 1^+} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to\ 1^+} \frac{x^2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^5-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} x^2 \cdot \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x^5-1}}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to\ 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x^5-1}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^5-1}}$$

Aplicamos L'Hopital

$$= \sqrt{\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{5x^4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Como el limite es distinto de 0, ahora solo nos falta analizar $g(x)$ y concluir a partir de ella, pero notamos que $g(x)$ es sencillo de integrar, calculando se tiene:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto, como $\lim_{x\to\ 1^+} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, y $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ converge, la integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}dx$ también converge.

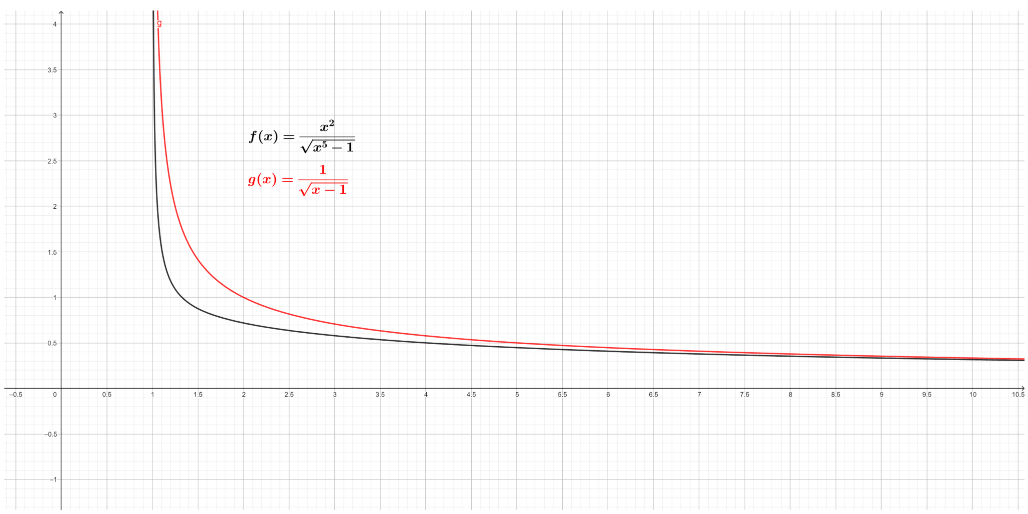


Figure 2: Funciones $f(x)$ y $g(x)$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx$

Notamos que tenemos una asíntota en $x = 0$, y que la integral va al infinito, por ende la separamos para analizar cada caso por separado.

$$\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx}_{I_2}$$

Iniciemos por I_1, notamos que podemos usar el criterio de comparación en el limite, pues podemos analizar ocupando $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$, y así se nos cancelaran las raíces y nos queda un limite conocido $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}$, el cual da 1, además de que $g(x)$ es sencillo de integrar, usando esto se tendría:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}}{\frac{1}{\sqrt{2x+3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)\sqrt{2x+3}}{x\sqrt{2x+3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

Como el limite es un numero real distinto de 0, solo analizamos $g(x)$, calculando nos queda $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, entonces como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$ converge, I_1 también converge.

Ahora analizando I_2, es mas sencillo, pues sabemos que en el intervalo $[1, \infty)$ se cumple:

$$-1 \leq sin(x) \leq 1$$

$$\frac{-1}{x\sqrt{2x+3}} \leq \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}} \leq \frac{1}{x\sqrt{2x+3}} \text{ , multiplicando por } \frac{1}{x\sqrt{2x+3}}$$

Ahora notamos que podemos hacer una desigualdad sencilla con $\frac{1}{x\sqrt{2x+3}}$, tiene que:

$$0 \leq \left|\frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{2x+3}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

esta ultima desigualdad es fácil de demostrar, luego por transitividad e integrando:

$$\int_1^\infty \left|\frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$

Ahora solo analizamos $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$, pero notamos que se tiene $p = \frac{3}{2}$, por lo tanto converge. Luego, como $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ converge, I_2 también converge.

Finalmente, como I_1 y I_2 convergen, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sin(x)}{x\sqrt{2x+3}}dx$ también converge.

4. Determine los valores de α para que la integral resulte convergente:

$$\int_1^\infty \frac{acrtan(x)}{(1+x^2)^\alpha}dx$$

Notamos que el único problema es que va al infinito, dado esto, podemos analizar a partir de una desigualdad, pues sabemos que en el intervalo $[1,\infty)$ se cumple:

$$0 < arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \frac{arctan(x)}{(1+x^2)^\alpha} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+x^2)^\alpha} \text{ , multiplicando por } \frac{1}{(1+x^2)^\alpha}$$

Ahora procedemos a analizar $\frac{1}{(1+x^2)^\alpha}$, para esto podemos usar el criterio de comparación en el limite o el de comparación, en este caso procederemos por comparación, sabemos que se tiene:

$$\frac{\pi/2}{(1+x^2)^\alpha} \leq \frac{\pi/2}{x^{2\alpha}}$$

Se puede demostrar fácilmente que se cumple en el intervalo $[1,\infty)$

Entonces por transitividad se tiene que:

$$\frac{arctan(x)}{(1+x^2)^\alpha} \leq \frac{\pi/2}{x^{2\alpha}}$$

$$\int_1^\infty \frac{arctan(x)}{(1+x^2)^\alpha}dx \leq \int_1^\infty \frac{\pi/2}{x^{2\alpha}}dx \text{ , integrando}$$

Pero $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2\alpha}}dx$ se parece a una integral que conocemos, usando que $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ converge para $p > 1$, podemos construir la desigualdad correspondiente, donde en este caso $p = 2\alpha$, entonces se tendría:

$$2\alpha > 1$$

$$\alpha > \tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto, por comparación se puede concluir que $\int_1^\infty \frac{arctan(x)}{(1+x^2)^\alpha}dx$ converge para $\alpha > \frac{1}{2}$.

Usando el criterio de comparación en el limite, se toma $g(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}}$, y como tal limite es un numero real distinto de 0, se puede analizar $g(x)$ y llegar a la misma conclusión.

5. Determine si la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$$

converge o diverge. Con $a > 0$. (Examen - 2023 - 1)

Analizaremos su convergencia de dos maneras distintas. La primera, sabemos que en $[1,\infty)$ se cumple

$$\begin{aligned}
a^2+\frac{1}{\sqrt{x}} &> a^2\\
\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}} &> a \text{ , raíz en ambos lados}\\
\frac{1}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}} &> \frac{a}{x} \text{ , multiplicamos por} 1/x\\
\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}dx &> \int_1^\infty \frac{a}{x}dx
\end{aligned}$$

Luego, como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{a}{x}dx$ diverge, la integral original también diverge.

Otra manera, es usando comparacion al limite, pues el intervalo $[1,\infty)$ la función a integrar es positiva. Usaremos $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}\\
&= \sqrt{a^2}\\
&= a
\end{aligned}$$

Luego, como $a > 0$, y $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{x}} \neq 0$, podemos analizar $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$, pero es fácil ver que diverge, pues $p=1$, por lo cual la integral original también diverge.

6. Determine convergencia o divergencia de $\displaystyle\int_0^1 \frac{sin(x)}{x^2 + xsin(x)}dx$

La función es positiva en el intervalo a integrar, pues $sin(x) > 0$ en $(0, 1)$. Podemos usar comparacion al limite. Para esto tomemos $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculamos el limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{sin(x)}{x^2+xsin(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x^2 + xsin(x)}x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x + sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(x)}{x + sin(x)} \frac{1/x}{1/x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{sin(x)}{x}}{1 + \frac{sin(x)}{x}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Como el limite es distinto de 0, podemos analizar $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, pero esta diverge, por lo cual la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{sin(x)}{x^2 + xsin(x)}dx$ también diverge.

7. Determine si la integral es convergente o divergente $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}}dx$, (Examen - TAV - 2023)

Sabemos que la tangente es creciente en el intervalo $(0, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
tan(x) &\geq tan(0) \qquad / + 1 \\
tan(x) + 1 &\geq tan(0) + 1 \qquad / \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \\
\frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}} &\geq \frac{tan(0) + 1}{\sqrt[5]{x^3}} \\
\Rightarrow \int_0^1 \frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}}dx &\geq \int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}}dx
\end{aligned}$$

Notamos que $\int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}}dx$ diverge, por lo cual $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + 3tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ diverge.

8. Analice la convergencia de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{sin(x)}{x(1+x)}dx$

Sabemos que

$$\begin{aligned} & 0 \leq \left|sin(x)\right| \leq 1 \\ & \text{ Recordamos que tenemos } x \in [1, \infty) \\ & 0 \leq \frac{\left|sin(x)\right|}{x(x+1)} \leq \frac{1}{x(x+1)} \\ & 0 \leq \left|\frac{sin(x)}{x(x+1)}\right| \leq \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow\ & 0 \leq \int_1^{\infty} \left|\frac{sin(x)}{x(x+1)}\right| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

Luego, como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, la integral $\int_1^{\infty}\left|\frac{sin(x)}{x(x+1)}\right|dx$ converge. Note que si una integral converge en valor absoluto, entonces es absolutamente convergente, lo cual implica que converge con, y sin valor absoluto, pudiendo concluir así que la integral original converge.

9. Determine para que valores de a la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{x^a+x^2+2}dx$ converge.

Note que si $a = 2$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+x^2+2} = \frac{1}{2}$, por lo cual se comporta como $1/2$ en el infinito, implicando que diverge.

Ahora, suponga $a > 2$.

Podemos usar comparacion al limite con $g(x) = \dfrac{x^2}{x^a} = \dfrac{1}{x^{a-2}}$. Calculamos el limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^a+x^2+2}}{\frac{1}{x^{a-2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^a - x^{a-2}}{x^a+x^2+2}$$

Este limite es igual a 1 ($\neq 0$) con $a > 2$, por lo cual podemos analizar $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{a-2}}dx$, pero esta converge si

$$\begin{aligned} p &> 1 \\ a-2 &> 1 \\ a &> 3 \end{aligned}$$

Luego, la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{x^a+x^2+2}dx$ converge si $a > 3$

2.3 Convergencia de series

Criterio de comparación:

Sean las series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, y se tiene que $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n$, entonces se cumple que:

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.

Este criterio funciona de la misma forma que en integrales.

Criterio de comparación en el limite:

Sean $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ tales que $0 \leq a_n$, $0 < b_n$ y:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

entonces se puede decir:

- Si $\alpha = 0$, y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también converge.
- Si $\alpha \neq 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tiene el mismo comportamiento que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- Si $\alpha = \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también diverge

Criterio de la divergencia:

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ojo: Si el limite da 0 no se puede concluir nada.

Criterio de la integral:

Si tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde $a_n = f(n) = f(x)$, si $f(x)$ es positiva, decreciente y continua, entonces podemos analizar el comportamiento de la serie mediante la integral:

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

Si la integral converge entonces la serie converge, en caso contrario la serie diverge. Esto no nos da el valor al cual converge la serie, solo nos indica su comportamiento. Para este criterio solo basta tomar $a_n = f(n) = f(x)$, si es positiva y la derivada de $f(x)$ es negativa (decreciente), podemos hacer uso del criterio. El limite inferior de la integral corresponde al termino con el que inicia la serie, o donde se cumplen las condiciones mencionadas.

Criterio de la raíz:

Si tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y se calcula el siguiente limite:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

se tiene que:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho = 1$, entonces no se puede concluir nada.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge

En caso de que $\rho = 1$, hay que usar otro método para analizar la serie. En caso de que $\rho < 1$, se puede concluir que la serie converge absolutamente, análogamente a $\rho > 1$, se puede decir que la serie diverge. Este criterio se recomienda usar cuando halla algún termino elevado a la n.

Criterio del cociente:

Si tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y se calcula el siguiente limite:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

se tiene que:

- Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.
- Si $\rho = 1$, entonces no se puede concluir nada.
- Si $\rho > 1$, entonces la serie diverge

En caso de que $\rho = 1$, hay que usar otro método para analizar la serie. En caso de que $\rho < 1$, se puede concluir que la serie converge absolutamente, análogamente a $\rho > 1$, se puede decir que la serie diverge. Recordar que este limite es con el valor absoluto.

Criterio de Leibniz para series alternantes:

Si se tiene una serie con términos alternantes de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, se debe cumplir lo siguiente para garantizar su convergencia:

- $a_n \geq 0$ (positiva)
- $a_n \geq a_{n+1}$ (decreciente)
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Se deben cumplir los tres requisitos para concluir su convergencia. Para demostrar que sea decreciente se puede usar que $a_n = f(n) = f(x)$, y calcular su derivada, de modo que esta sea negativa. Para aplicar el criterio en algunos casos cuando se tiene una modificación del termino alternante se puede hacer lo siguiente a modo de ejemplo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n 3^2}{n} = 3^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1\cdot 3)^n}{n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n}$$

Para así poder usar el criterio.

Notar que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, hay que recurrir a otro criterio, como el de la divergencia.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - n^2}{6^n + n}$

Para este ejercicio procederemos mediante comparación, entonces se tiene:

$$\frac{3^n - n^2}{6^n + n} \leq \frac{3^n}{6^n + n} \leq \frac{3^n}{6^n}$$

Ahora solo tenemos que analizar $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n$, pero sabemos que converge, pues $r = 3/6$, por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - n^2}{6^n + n}$ también converge por comparación. (La desigualdad se puede demostrar fácilmente)

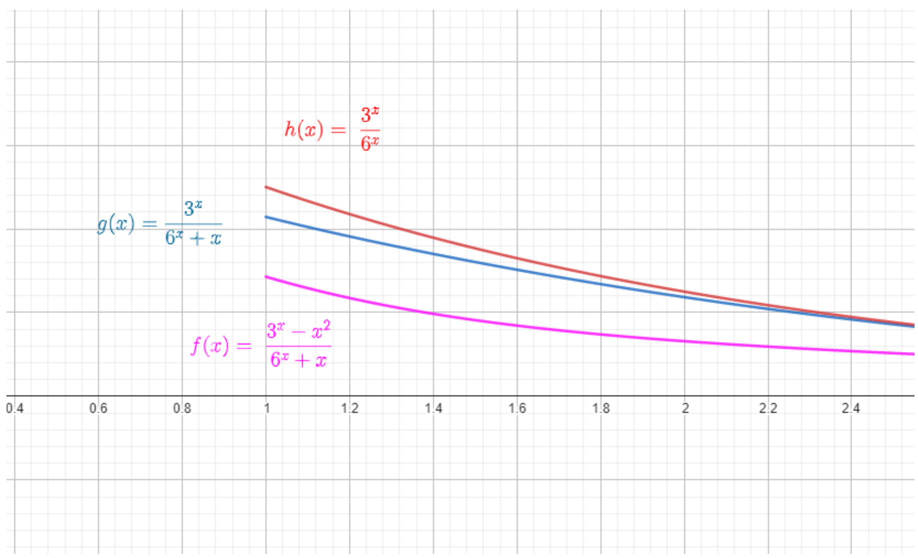


Figure 3: Funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ utilizadas (haciendo $a_n = f(n) = f(x)$)

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + ncos(n)}{\sqrt{n^8 - n + 1}}$, (I1 - 2022 - 1)

De inmediato notamos que tenemos un coseno, por lo cual podemos construir una desigualdad y elegir algún criterio. Sabemos que:

$$-1 \leq cos(n) \leq 1 \text{ , multiplicamos por } n$$
$$-n \leq ncos(n) \leq n \text{ , sumamos } n^2$$
$$n^2 - n \leq n^2 + ncos(n) \leq n^2 + n$$

Podemos ver que la serie es positiva, pues se sabe que $n^2 - n \geq 0$ para todo $n \geq 1$, por lo cual podemos usar el criterio de comparación. Para esto realizamos la división pertinente de los términos de mayor grado, los cuales son n^2 y $n^{\frac{8}{2}}$, se tendría que $\dfrac{n^2}{n^{\frac{8}{2}}} = \dfrac{1}{n^2}$, entonces usando $b_n = \frac{1}{n^2}$ y calculando el limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2 + ncos(n)}{\sqrt{n^8 - n + 1}}}{\frac{1}{n^2}} \text{ , reordenamos}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + n^3 cos(n)}{\sqrt{n^8 - n + 1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^4}{n^4} \frac{1 + \frac{cos(n)}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^8}}} = 1$$

Dado que $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\frac{n^2 + ncos(n)}{\sqrt{n^8 - n + 1}}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, y la serie $b_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + ncos(n)}{\sqrt{n^8 - n + 1}}$ también converge, por el criterio de comparación en el limite.

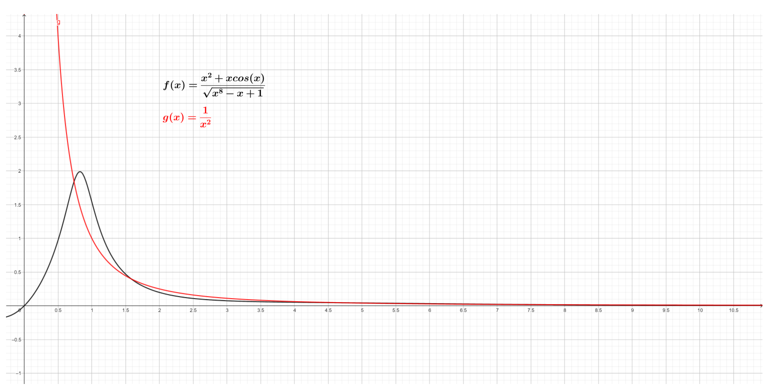


Figure 4: Funciones $f(x)$ y $g(x)$ (haciendo $a_n = f(n) = f(x)$)

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + e^{-n}}{3n^5 + n^2}$

Podemos notar de inmediato que tenemos dos términos de igual grado, y que en el denominador el termino mayor tiene un 3, por lo cual podemos intuir que el criterio apropiado es el de la divergencia, pues calcular el limite sera fácil, y este sera distinto de 0, haciendo que sea sencillo y rápido de concluir. Calculamos el limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + e^{-n}}{3n^5 + n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5} \frac{1 + \frac{1}{n^5 e^n}}{3 + \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{3}$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + e^{-n}}{3n^5 + n^2} = \frac{1}{3} \neq 0$, la serie diverge por el criterio de la divergencia, ya que el limite es distinto de 0.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$, (I1 - 2021 - 2)

Para esta serie podemos usar dos criterios para analizar su convergencia, puede ser el del cociente o el de la integral, en este caso usaremos el de la integral. Recordemos que para usar este criterio, primero debemos corroborar que la función sea decreciente, entonces:

$a_n = f(n) = f(x) = x^2 e^{-x^3} = \dfrac{x^2}{e^{x^3}}$, calculamos su derivada:

$f'(x) = \dfrac{2xe^{x^3} - 3x^4 e^{x^3}}{e^{2x^3}} = \dfrac{2x - 3x^4}{e^{x^3}}$, donde notamos que el numerador es negativo $\forall\ x \geq 1$, por lo cual podemos afirmar que la función es decreciente gracias a que su derivada es negativa. Y como $\frac{x^2}{e^{x^3}}$ es positiva, podemos usar el criterio. Ahora solo calculamos la integral, usando el método se sustitución:

haciendo $u = -x^3$, se tiene $\frac{du}{-3} = x^2 dx$, los nuevos limites de integración serian:

$$u = -x^3 = -\infty^3 = -\infty \text{ , } u = -x^3 = -1^3 = -1$$
$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{-3} \int_{-1}^{-\infty} e^u du = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{-1} e^u du = \frac{1}{3} \left(e^u \Big|_{-\infty}^{-1} \right) = \frac{1}{3e}$$

Finalmente como la integral converge, la serie también converge.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, (I1 - 2019 - TAV)

Podemos notar que se parece mucho a un limite conocido, por lo cual podemos usar el criterio de la raíz para bajar el grado del exponente y tener así un limite familiar. Usando el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Como $e>1$, la serie diverge.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{2n-1}}{n^{2022}+1}$

Para esta serie es factible usar el criterio del cociente, ya que al intuitivamente el limite sera fácil de calcular, ya que solo nos quedara un limite con mismos coeficientes en el numerador y denominador. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{6^{2(n+1)-1}}{(n+1)^{2022}+1}\right|\div\left|\frac{6^{2n-1}}{n^{2022}+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{6^{2(n+1)-1}}{6^{2n-1}}\right|\cdot\left|\frac{(n+1)^{2022}+1}{n^{2022}+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{6^{2n+1}}{6^{2n-1}}\right|\cdot\left|\frac{(n+1)^{2022}+1}{n^{2022}+1}\right|$$

$$6^2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2022}+1}{n^{2022}+1}$$

notamos que los términos de mayor exponente son iguales en el numerador y denominador, por lo tanto el limite es 1.

$$6^2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2022}+1}{n^{2022}+1}=6^2\cdot 1=36$$

Como se tiene que el limite es mayor a 1, la serie diverge por el criterio del cociente.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{ln(n)}{n+3}$, (I1 - 2019 - TAV)

Dado que la serie tiene un termino alternante podemos usar el criterio de Leibniz, donde $a_n = \dfrac{ln(n)}{n+3}$

- Tenemos que ver si es decreciente, para esto hacemos $a_n = f(n) = f(x)$ y calculamos su derivada.

  $$f'(x) = \frac{\frac{x+3}{x} - ln(x)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-xln(x)}{x(x+3)^2} = \frac{-(xln(x)-x-3)}{x(x+3)^2}$$
  Podemos notar que la derivada es negativa aproximadamente desde $x = 5$, por lo tanto es decreciente en tal intervalo. (igual nos sirve)

- Ahora tenemos que chequear que sea positiva, pero esto es claro, ya que $ln(x) \geq 0 \ \forall x \geq 1$, y $x + 3 > 0 \ \forall x \geq 1$, por lo tanto es positiva.

- Finalmente tenemos que corroborar que el limite sea 0, haciendo $a_n = f(n) = f(x)$ se tiene:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x+3} \text{ , aplicando L'Hôpital, } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dado que se cumplen las condiciones, la serie converge. En el ejercicio original se pedía analizar la convergencia absoluta o condicional, con el criterio de Leibniz ya tenemos una parte, nos falta ver si la serie converge absolutamente, para esto tenemos que analizar $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{ln(n)}{n+3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)}{n+3}$

Notamos que al tener un $ln(n)$ se hace un poco difícil de analizar, pero usando $b_n = \frac{ln(n)}{n}$ podemos usar el criterio de comparación en el limite, pues se nos anularían los ln(n), quedándonos un numero real como resultado del limite. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{ln(n)}{n+3}}{\frac{ln(n)}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = 1$$

Ahora solo bastaría analizar $b_n = \dfrac{ln(n)}{n}$, pero podemos aplicar el criterio de la integral, donde notamos que diverge, por lo cual $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)}{n+3}$ también diverge.

Finalmente, dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{ln(n)}{n+3}$ converge por el criterio de Leibniz y diverge al analizar su convergencia absoluta, se puede concluir que la serie converge condicionalmente.

8. Determine para que valores de a la serie converge condicionalmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^a + 4}$$

Sabiendo que $\dfrac{n^2}{n^a+4}$ decrece con el tiempo.

Para que converja condicionalmente, debe divergir con valor absoluto, pero converger sin valor absoluto. Primero veremos para que valor de a la serie converge sin valor absoluto. Para esto usemos Leibniz.

- $b_n = \dfrac{n^2}{n^a+4} > 0$ para todo a y $n > 1$
- $b_n > b_{n+1}$. En el enunciado se señala que decrece con el tiempo.
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^a+4} = 0$

  Para que este limite valga 0, se debe tener $a > 2$, pues en caso contrario si $a = 2$ el limite vale 1, y en otro caso vale infinito.

Por lo cual la serie converge, sin valor absoluto, con $a > 2$. Ahora debemos analizar la convergencia en valor absoluto.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n^2}{n^a+4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^a+4}$$

Para esto notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^a+4} &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^a} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2-a} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-2}} \end{aligned}$$

Para analizar esta ultima serie, usamos el criterio p, de modo que la serie converge si

$$\begin{aligned} p &>1 \\ a-2 &>1 \\ a &>3 \end{aligned}$$

Como nos interesa que la serie **no** converja en valor absoluto, se debe tener $a \leq 3$. Recordando que la serie converge sin valor absoluto para $a > 2$, se puede concluir que la serie es condicionalmente convergente si $a \in (2, 3]$

9. Determine para que valores de $k > 0$ la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

Usamos el criterio del cociente, y recordando que converge si $L < 1$, imponemos la condición

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2}{(k(n+1))!} \div \frac{(n!)^2}{(kn)!}\right| < 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(kn)!}{(k(n+1))!}\right| < 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(kn)!}{(k(n+1))!} < 1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n!)}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(kn)!}{(k(n+1))!} < 1\\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)^2 \cdot \frac{(kn)!}{(k(n+1))!} < 1\\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)^2 \cdot \frac{(kn)(kn-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}{(k(n+1))(k(n+1)-1)(k(n+1)-2)\cdots(k(n+1)-k)(kn-1)\cdots 2\cdot 1} < 1\\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)^2 \cdot \frac{(kn)(kn-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}{(k(n+1))(k(n+1)-1)(k(n+1)-2)\cdots(kn)(kn-1)\cdots 2\cdot 1} < 1\\
&= \lim_{n\to\infty}(n+1)^2 \cdot \frac{1}{(k(n+1))(k(n+1)-1)(k(n+1)-2)\cdots(kn+1)} < 1
\end{aligned}$$

Lo anterior se comporta como $(kn)^k$ para n grande

$$\approx \lim_{n\to\infty}(n+1)^2 \cdot \frac{1}{(kn)^k} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 \cdot \frac{1}{k^k n^k} < 1$$

$$\frac{1}{k^k}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^k} < 1$$

Si $n = 2$ el limite es $= \dfrac{1}{4}$, por lo cual converge

y para $n > 2$ el limite siempre es 0

Luego, la serie converge si $k \geq 2$, con $k \in \mathbb{N}$.

3 Radio e intervalo de convergencia de series de potencias

Para esta sección de ejercicios basta saber aplicar los criterios de convergencia de series. En todos los casos se procede de la siguiente manera: Se elige el criterio apropiado para analizar la convergencia de la serie (generalmente el del cociente), se calcula el limite según el criterio elegido, se resuelve la desigualdad resultante y finalmente se evalúan los extremos del intervalo.
El radio e intervalo de convergencia es de la siguiente forma:

El radio de convergencia corresponde a R:

$$|x-a| < R$$

El intervalo de convergencia corresponde a $I = (-R+a, R+a)$

$$|x-a| < R$$
$$-R < x-a < R$$
$$-R+a < x < R+a$$

Generalmente se le llama serie de potencias a la serie que tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

En estos casos diremos que la serie de potencias esta centrada en $x = a$

Un ejemplo de esto seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-9)^n}{(3n)!}$$

Donde:

$$c_n = \frac{2^n}{(3n)!}$$

y está centrada en $x = 9$

1. Encontrar el radio e intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$

Usando el criterio del cociente se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{(x+1)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n}\right| \cdot \left|\frac{n}{n+1}\right| = |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} < 1$$

Como queremos que la serie resulte convergente, se debe aplicar esta ultima restricción (<1) que es parte del criterio del cociente, pues en este criterio se debe tener que el limite sea menor a 1 para que la serie sea convergente. Además, sacamos el valor absoluto del limite donde hay n ya que solo son términos positivos. Como el limite vale 1, se tiene que:

$$|x+1| \cdot 1 < 1$$

$$|x+1| < 1 \text{ , radio} = 1$$

$$-1 < x+1 < 1 \text{ , restamos 1 para despejar } x$$

$$-1-1 < x+1-1 < 1-1$$

$$-2 < x < 0$$

El intervalo seria $I = (-2, 0)$, por lo cual debemos analizar los extremos, es decir, tenemos que ver que pasa con la serie cuando evaluamos con $x = -2$ y $x = 0$.

Primero evaluemos en $x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Notamos que la serie diverge, pues se tiene $p = 1$, por lo cual en $x = 0$ la serie es divergente, por lo cual este extremo del intervalo va abierto.

Ahora evaluamos en $x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Para analizar esta serie podemos usar el criterio de Leibniz, donde fácilmente se llega a que la serie resulta convergente. Por lo cual en este extremo del intervalo es cerrado.

Finalmente, como la serie es convergente en $x = -2$ y divergente en $x = 0$, el intervalo de convergencia es:

$$I = [-2, 0)$$

2. Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} x^{n-1}$

Nuevamente podemos aplicar el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(n+1)x^{(n+1)-1}}{2^{(n+1)-1}}\right|}{\left|\dfrac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(n+1)x^{n}}{2^{n}}\right|}{\left|\dfrac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{x^{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{2^{n-1}}{2^n}\right| \cdot \left|\frac{n+1}{n}\right|$$

Notamos que los últimos dos términos son positivos, por lo cual podemos sacar el valor absoluto, quedándonos:

$$\lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{|x|}{2} < 1$$

$$\frac{|x|}{2} < 1$$

$$|x| < 2 \text{ , radio} = 2$$

$$-2 < x < 2$$

Ahora solo tenemos que analizar que pasa en los extremos del intervalo, es decir, evaluando con $x = -2$ y $x = 2$ en la serie.

Primero evaluamos en $x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}(-2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}(2)^{n-1}(-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1}$$

Notamos que la serie es claramente divergente.

Ahora evaluamos en $x = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}(2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

Nuevamente es divergente.

Finalmente el intervalo de convergencia es:

$$I = (-2, 2)$$

3. Determinar radio e intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

Usando el criterio del cociente se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2(n+1)}(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\right|}{\left|\frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2n+2}(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^{n}(-1)^n}{(2n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\right| \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\right| \left|\frac{(2n)!}{(2n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\right| \left|(-1)\right| \frac{(2n)!}{(2n+1)!} < 1$$

$$= \left|x^2\right| \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!} < 1$$

$$= \left|x^2\right| \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)} < 1$$

$$= \left|x^2\right| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} < 1$$

$$= \left|x^2\right| \cdot 0 < 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1$$

Podemos notar que llegamos a algo verdadero, es decir, que para cualquier valor de x en los reales se cumple que el limite es 0. Por lo tanto, el intervalo de convergencia seria:

$$I = (-\infty, \infty)$$

4. Determine el radio e intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2^n ln(n)}$

Ocupamos criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+5)^{n+1}}{2^{n+1} ln(n+1)}}{\frac{(x+5)^n}{2^n ln(n)}} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+5)^{n+1}}{(x+5)^n} \cdot \frac{2^n ln(n)}{2^{n+1} ln(n+1)} \right| < 1$$

$$|x+5| \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{ln(n+1)} < 1$$

$$\frac{|x+5|}{2} < 1$$

$$|x+5| < 2$$

$$R = 2$$

$$-2 < x+5 < 2$$

$$-2-5 < x < 2-5$$

$$-7 < x < -3$$

Analizamos los extremos

- $x = -7$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-7+5)^n}{2^n ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ln(n)}$$

  Esta ultima converge por el criterio de Leibniz.

- $x = -3$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3+5)^n}{2^n ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln(n)}$$

  Esta ultima diverge, pues

$$n > ln(n)$$

$$\frac{1}{ln(n)} > \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln(n)} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = [-7, -3)$$

5. Determine el radio e intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(4x-8)^n}{n}$

Procedemos usando el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}(4x-8)^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n(4x-8)^n}{n}} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}(4x-8)^{n+1}}{2^n(4x-8)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \right| < 1$$

$$2 \cdot |4x-8| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} < 1$$

$$2 \cdot |4x-8| \cdot 1 < 1$$

$$2 \cdot 4|x-2| < 1$$

$$|x-2| < \frac{1}{8}$$

$$R = 1/8$$

$$-1/8 < x-2 < 1/8$$

$$-1/8+2 < x < 1/8+2$$

$$15/8 < x < 17/8$$

Ahora debemos evaluar en estos puntos.

- $x = \dfrac{15}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(4 \cdot \frac{15}{8} - 8)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(-1)^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

  Esta serie diverge, pues $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty$.

- $x = \dfrac{17}{8}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(4 \cdot \frac{17}{8} - 8)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  Esta ultima también diverge, pues $p = 1$.

Finalmente, el intervalo de convergencia es

$$I = \left(\tfrac{15}{8}, \tfrac{17}{8}\right)$$

4 Series de Taylor y representación de funciones mediante series

La serie de Taylor de una función $f(x)$, centrada en $x = a$ es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Cuando está centrada en $x = 0$ se le llama serie de MacLaurin.

Las series de Taylor mas comunes y utilizadas son las siguientes: (centradas en $x = 0$ junto a su intervalo de convergencia)

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$
- $ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1)$
- $sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$
- $cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$
- $arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, $x \in [-1,1]$

Queda como ejercicio para el lector corroborar estos resultados.

Teorema importante:

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, entonces podemos intercambiar de signos tal que:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} c_n(x-a)^n$$

$$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n dx$$

Ojo que al derivar series, esta puede iniciar un termino mas adelante.

1. Encontrar la serie de Taylor de $f(x) = ln(x)$ centrada en $x = 2$.

Para esto es útil proceder de la siguiente forma, hallamos las derivadas en el lado izquierdo, y en el lado derecho evaluamos en $x = 2$. Entonces haciendo lo sugerido se tendría:

$$f^{(0)} = ln(x) \qquad a_0 = ln(2)\frac{(x-2)^0}{0!}$$

$$f^{(1)} = \frac{1}{x} \qquad a_1 = \frac{1}{(2)}\frac{(x-2)^1}{1!}$$

$$f^{(2)} = \frac{1}{-x^2} \qquad a_2 = \frac{1}{-(2)^2}\frac{(x-2)^2}{2!}$$

$$f^{(3)} = \frac{1\cdot 2}{x^3} \qquad a_3 = \frac{1\cdot 2}{(2)^3}\frac{(x-2)^3}{3!}$$

$$f^{(4)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4} \qquad a_4 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{-(2)^4}\frac{(x-2)^4}{4!}$$

$$f^{(5)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5} \qquad a_5 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(2)^5}\frac{(x-2)^5}{5!}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Simplificando los términos de la derecha y juntando todo tendríamos que:

$$ln(x) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ...$$

$$ln(x) =$$
$$ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2^2}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{2}{2^3}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{6}{2^4}\frac{(x-2)^3}{4!} + \frac{24}{2^5}\frac{(x-2)^5}{5!} + ...$$

De acá podemos obtener una forma cerrada para la serie. De forma que la serie de Taylor de $ln(x)$ centrada en $x = 2$ es:

$$ln(x) = ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!(x-2)^n}{2^n n!}$$

Nota:

No siempre es posible encontrar una forma cerrada de expresar la serie de Taylor.

2. Sea $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+9t^2}dt$. (I1 - 2022 - 2)

a) Encuentre los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $\sqrt{1+s}$ en torno a $s=0$

b) Encuentre los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $\sqrt{1+9t^4}$ en torno a $t=0$

c) Encuentre los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $F(x)$ en torno a $x=0$

Solo tenemos que proceder igual que antes, por lo cual derivando a la izquierda y evaluando a la derecha se tiene que:

$$f^{(0)} = \sqrt{1+s} \qquad a_0 = \sqrt{1+0}\frac{(s-0)^0}{0!}$$

$$f^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{1+s}} \qquad a_1 = \frac{1}{2\sqrt{1+0}}\frac{(s-0)^1}{1!}$$

$$f^{(2)} = \frac{-1}{4(s+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad a_2 = \frac{-1}{4(0-1)^{\frac{3}{2}}}\frac{(s+0)^2}{2!}$$

Desarrollando los términos de la derecha, se tendría que:

$$\sqrt{1+s} \approx 1 + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{8}$$

Ahora vamos por la b). Notamos que se ve un poco difícil, pues al derivar tenemos un polinomio de grado 2 dentro, por lo cual no es buena idea empezar a derivar. Para esto, podemos hacer un cambio de variable, pues si hacemos $u = 9t^4$ tendríamos que buscar el desarrollo de Taylor de $\sqrt{1+u}$, pero este ya lo tenemos, ya que lo hicimos en a), por lo cual tendríamos:

$$\sqrt{1+u} \approx 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8}$$

$$\text{Pero } u = 9t^4$$

$$\sqrt{1+9t^4} \approx 1 + \frac{(9t^4)}{2} - \frac{(9t^4)^2}{8}$$

$$\sqrt{1+9t^4} \approx 1 + \frac{9t^4}{2} - \frac{81t^8}{8}$$

Finalmente, para la c), nos piden del desarrollo de la función que contiene la integral, pero notamos que lo de adentro ya lo tenemos, pues en b) realizamos una aproximación de la función, por lo cual se tendría:

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+9t^2}dt$$

$$F(x) \approx \int_0^x 1 + \frac{9t^4}{2} - \frac{81t^8}{8}dt, \text{ integramos}$$

$$F(x) \approx \left(t + \frac{9t^4}{10} - \frac{81t^9}{72}\right)\Big|_0^x$$

$$F(x) \approx x + \frac{9x^5}{10} - \frac{81x^9}{72}$$

3. Determinar una representación en series de potencias para la función:

$$f(x) = arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

indique donde es valida dicha representación. (I2 - 2019 - 2)

Como sabemos la serie de Taylor de la arctan es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, entonces podemos iniciar de aca, entonces:

$$arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Pero queremos un $\frac{x}{3}$, por lo cual hacemos $x = \frac{x}{3}$

$$arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$$

Ahora para calcular donde es valida la representación, recordamos que esta serie converge para $x \in [-1,1]$ o $|x| \leq 1$, pero ahora tenemos $\frac{x}{3}$, por lo cual se tiene:

$$\left|\frac{x}{3}\right| \leq 1$$

$$|x| \leq 3$$

Entonces la serie converge para $x \in [-3,3]$

4. Encontrar una representación en serie de potencias de la función

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Si bien parece un problema difícil, en este tipo de ejercicios siempre se inicia por una función que ya conozcamos, para luego intentar derivar o integrar en ambos lados para llegar a la expresión pedida, además de ir arreglándola. Entonces en nuestro caso iniciemos por la geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Pero nosotros tenemos $(1+x)$ en el denominador, por lo cual:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Ahora para poder tener el elevado a 2, podemos derivar.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right)$$

Recordando el teorema de la derivación de series se tendría:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

Multiplicamos por -1

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$$

Y ya tendríamos lo que buscábamos, por lo cual:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$$

5. Proceda de la misma forma que en la pregunta anterior para encontrar el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Como nos sugieren proceder igual que antes, haremos esto. Primero notar que en el ejercicio anterior nos quedo una serie alternada, pero en este caso no queremos esto, entonces debemos iniciar por la serie geométrica original, de forma que al derivar nos quede positivo.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Derivando en ambos lados se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Multiplicamos por x en ambos lados:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}x$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Ahora notamos que ya tenemos la forma similar, pues recordando que la serie converge para $x \in (-1, 1)$, podemos tomar $x = \frac{1}{3}$, de forma que tendríamos:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

Resolviendo el lado izquierdo se tendría que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

6. Aproxime el valor de la integral $\int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx$

Para esto, podemos usar la serie de Taylor de $sin(x)$. Sabemos que:

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Multiplicamos por $\frac{1}{x}$ en ambos lados:

$$\frac{sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{x}$$

$$\frac{sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Integramos en ambos lados:

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx$$

Aplicando el teorema de la integración de series:

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx$$

Como estamos integrando respecto a x se tiene:

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2x+1}}{(2n+1)[(2n+1)!]}\right)\Bigg|_0^1$$

En $x=0$ la serie vale 0, y en $x=1$, solo nos queda 1 en el numerador

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)[(2n+1)!]}$$

Ahora calculando los primeros tres términos de la serie se tiene: (con 3 se tiene una aproximación decente)

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{400}$$

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx \approx 0.946$$

Hay que tener cuidado al evaluar o dividir por 0 en este caso, ya que en $x=0$ la función no esta definida, pero recordar que $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$.

7. Determinar la representación de la siguiente función en serie de potencias:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 16}$$

Iniciamos ajustándola a una geométrica

$$\frac{1}{16\left(\left(\frac{x^4}{16}\right) + 1\right)}$$

$$\frac{1}{16\left(1 - \left(-\frac{x^4}{16}\right)\right)}$$

En este caso, nuestro $x = \frac{x^4}{-16}$, entonces:

$$\frac{1}{16\left(1 - \left(-\frac{x^4}{16}\right)\right)} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^4}{-16}\right)^n$$

$$\frac{1}{16\left(1 - \left(-\frac{x^4}{16}\right)\right)} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{16^n}$$

$$\frac{1}{16\left(1 - \left(-\frac{x^4}{16}\right)\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{16^{n+1}}$$

Multiplicamos por x^2 en ambos lados:

$$\frac{x^2}{16\left(1 - \left(-\frac{x^4}{16}\right)\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{16^{n+1}}x^2$$

$$\frac{x^2}{16\left(1 - \left(-\frac{x^4}{16}\right)\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{16^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 16} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{16^{n+1}}$$

8. Encuentre una representación en serie de $f(x) = ln(3-x)$

Para este ejercicio, procederemos de dos formas, la primera asumiendo que no sabemos la representación en serie de $ln(1-x)$, y la segunda asumiendo que si la conocemos. Para la primera iniciaremos por la serie geométrica, y en este caso vamos a integrar. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-x} &= \frac{1}{3(1-x/3)} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} \\
\frac{1}{3-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} \\
\int\frac{1}{3-x}dx &= \int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}dx \\
-ln(3-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{x^n}{3^{n+1}}dx \\
-ln(3-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} + C \\
&\text{Para encontrar } C \text{ evaluamos} \\
&\text{con } x = 0 \\
-ln(3-0) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} + C \\
-ln(3) &= 0 + C \\
C &= -ln(3) \\
-ln(3-x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} - ln(3) \\
ln(3-x) &= ln(3) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$ln(3-x) = ln(3) - \sum_{n-1=0}^{\infty} \frac{x^{n-1+1}}{(n-1+1)3^{n-1+1}}$$

$$\Rightarrow \; ln(3-x) = ln(3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

Ahora conociendo la serie de $f(x) = ln(1-x)$, esta es

$$ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \; , \, x \in [-1,1)$$

Entonces

$$\begin{aligned} ln(3-x) &= ln(3(1-x/3)) \\ &= ln(3) + ln(1-x/3) \\ &= ln(3) + -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x/3\right)^n}{n} \\ \Rightarrow \; ln(3-x) &= ln(3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n} \end{aligned}$$

9. Calcule $\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!}$

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 2sin(\pi/2) \\ &= 2 \cdot 1 \\ \Rightarrow \; \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!} &= 2 \end{aligned}$$

10. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Demuestre que $f''(x) + f(x) = 0$

Solo tenemos que derivar la serie dos veces y corroborar lo pedido.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} \\
\frac{d}{dx} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} \\
f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1) x^{2n-2}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)(2n-1) x^{2n-2}}{(2n)(2n-1)(2n-2)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!} \\
&\text{Hacemos partir la serie desde } n = 0 \\
&= \sum_{n+1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)-2}}{(2(n+1)-2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} \\
f''(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Reemplazamos todo

$$\begin{aligned}
f''(x) + f(x) = 0 \Rightarrow \; -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} (-1+1) &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Se verifica que $f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial.

Nota: al aplicar la segunda derivada la serie no inicia desde $n = 2$ ya que al evaluar $n = 1$ en $f'(x)$ nos queda el termino x, y su derivada es 1, no 0.

11. Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= arctan(1) - aarctan(0) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Notar que $\displaystyle\int_0^1 x^{2k} dx = \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2k+1}$

12. Calcular $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} px(1-p)^{x-1}$. Con $p \in (0,1]$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{\infty} px(1-p)^{x-1} = -p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^x &= -p\frac{d}{dp} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x \\
&= -p\frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{1-(1-p)} \right) \\
&= -p\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \\
&= -p \left(\frac{-1}{p^2} \right) \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{x=1}^{\infty} px(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p}$$

5 Propuestos

1. Analizar convergencia de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$

2. Analizar convergencia de $\int_1^\infty \frac{sin(x^{\frac{1}{3}})}{(|x|+1)x}dx$

3. Analizar convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} nln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

4. Determinar el valor de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

5. Demostrar que la serie de Ramanujan es convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{9801} \frac{(4n!)(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$

6. Determinar el valor de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{6^{2n}(2n)!}$.

7. Calcular el valor de $\int_0^1 \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

8. Hallar el valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

9. Encuentre los tres primeros términos del desarrollo de Taylor de la función $f(X)$ centrada en $x=\mu_x$

10. Calcular el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x|}}{2}dx$

11. Determinar convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{9}{n}\right)^{n^2}$

12. Determinar radio e intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}$

13. Estimar el valor de la integral $\int_0^1 cos(x^2)dx$

14. Determinar los valores de C para que la integral resulte convergente

$$\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+1} - \frac{C}{x+1} dx$$

15. Expresar la siguiente función como una serie de potencias

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x - 2}$$

16. Determine si la serie es absoluta o condicionalmente convergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{1}{(2n+1)4^n}$. ¿Seria capaz de calcular el valor de la serie?

17. Demostrar convergencia de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

18. Demostrar convergencia o divergencia de $\int_1^\infty \frac{x^2-1}{x^5+3x+17} dx$

19. Demostrar convergencia o divergencia de $\int_2^\infty \frac{1+cos^2(x)}{\sqrt{x}[2-sin^4(x)]} dx$

20. Calcular $\lim_{n\to\infty} exp[n(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - 1)]exp[-t\sqrt{n}]$

21. Calcular $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

22. Calcular $\int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$

23. Determinar convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

24. Sea f una función tal que $\frac{1}{x^3} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$ y $f(x) = g(x^2)$. Determine si la integral $\int_1^\infty \frac{g(x)}{x} dx$ es convergente o divergente.

25. Explicar porque $\int_1^\infty x^{\frac{1-x}{ln(x)}} dx$ es una integral impropia y calcular su valor.

26. Calcular los tres primeros términos de la serie de Taylor de

$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$. Notar que es una función de v.

27. Determinar para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ la siguiente integral resulta convergente.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} \sqrt{x^{\alpha ln(x)} \sqrt[3]{x^{\alpha ln^2(x)} \sqrt[4]{x^{\alpha ln^3(x)} \sqrt[5]{\cdots}}}} dx$$

28. Obtenga un desarrollo en serie de potencias para la función

$$f(x) = \frac{ln(1+x^2)}{x}$$

29. Calcular $\lim_{x\to\infty} x - x^2 ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ sin usar L'Hopital. Hint: Use serie de Taylor para alguna función dentro del limite.

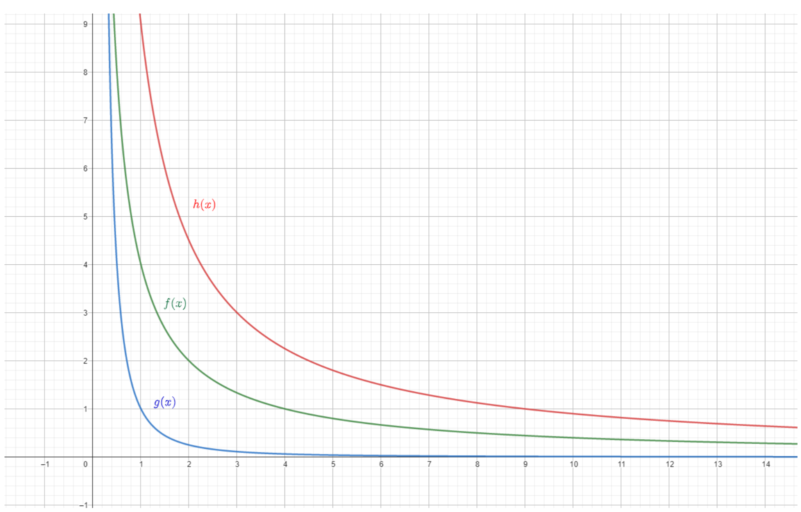
30. Determinar convergencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

31. Demostrar que para $|b| < 1$ se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{1-bsin^2(x)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{2n+1}$$

Y luego usando que $arctanh(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ calcule el valor de la serie.

32. Según la siguiente imagen



Y sabiendo que $f(x)$ converge en $(0,1]$, pero diverge en $[1,\infty)$. ¿Que puede afirmar sobre la convergencia de $h(x)$ y $g(x)$ en $(0,1]$ y $[1,\infty)$. Asuma que las funciones son continuas en $[1,\infty)$ y se cumple que $h(x) > f(x) > g(x) > 0$ $\forall x \in (0,\infty)$.

33. Suponga que $h(\omega)$ es una función creciente con $h(0) = 0$ y $\lim_{\omega\to\infty} h(\omega) = 5$. Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty (h(\omega))^5 h'(\omega)d\omega$

34. Sea f una función tal que $\dfrac{1}{x^3} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$ para $x \geq 1$ y $f(x) = g(x^2)$. Determine si la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{g(x)}{x}dx$ es convergente o divergente.

35. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}dx$

36. Analizar convergencia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}dx$

37. Analizar convergencia $\displaystyle\int_0^\pi \frac{sin^2(\omega)}{\sqrt{\omega}}d\omega$

38. Analizar convergencia $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}dx$

39. Para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{sin(x)}{x^\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$ resulta convergente.

40. Determine el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+c)^{-n} = 2$$

41. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 50nsin(2n)}{n^{7/2}}$ es condicionalmente convergente, absolutamente convergente o diverge.

42. Sea $f(x)$ una función continua y positiva para $x > 2$. Con $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $f(3) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Determinar si la siguiente integral es divergente o convergente. En caso de ser convergente calcule su valor.

$$\int_3^\infty \frac{f'(x)}{(f(x))^{2/3}}dx$$

43. Supongamos que queremos analizar la convergencia de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+\sqrt{x}}dx$, y decidimos usar comparación, de modo que se tiene $\dfrac{1}{x^3+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{x^3}$. ¿Por qué

no se puede concluir nada acerca de la integral que queremos analizar? ¿Con que función es mejor comparar? y por qué ?

44.

La siguiente tabla muestra algunos valores de una función $g(x)$ evaluada en $x = 2$. Use esta información para responder las siguientes preguntas.

$g(2)$	$g'(2)$	$g''(2)$	$g'''(2)$	$g^{(4)}(2)$
1	2	-4	0	4

a) Encuentre los primeros 4 términos no nulos de la serie de Taylor de la función $g(x)$ en torno a $x = 2$.

b) Usando series de Taylor conocidas, encuentre los primeros 3 términos no nulos de la función $f(x) = (x-2)ln\left(\frac{x}{2}\right)$ en torno a $x = 2$. Hint: Exprese $ln\left(\frac{x}{2}\right)$ de una forma conveniente, de modo que pueda usar la serie de Taylor de $ln(1+x)$.

c) Sea $H(x) = 1 + \int_2^x f(u) + g(u)du$. Encuentre los 4 primeros términos no nulos de la serie de Taylor de la función $H(x)$ en torno a $x = 2$. Hint: Según *a*) y *b*), ¿que es $f(u)$ y $g(u)$?

45. Sea $a_n = \int_0^n \frac{x}{e^x}dx$ una sucesión, determine si a_n es convergente.

46. Analizar convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+e^{-n})$

47. Analizar convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)cos^2(n)}{7n^6+2n^4+n}$

48. Estudiar convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n^2+1}}$

49. Determine el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(2n!)}{2^n(n!)^2}x^{2n}$

50. Use el criterio de la integral para analizar $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{nln(n)ln(ln(n))}$

51. La siguiente serie tiene un radio de convergencia $R = 4$. Encuentre el intervalo de convergencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n}{4^n(n^2+1)}(x+1)^n$$

52. Una función $\xi(\omega)$ tiene una serie de Taylor dada por

$$\xi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^n(n^2+1)}(\omega-1)^{4n+1}$$

Encuentre $\xi^{(2021)}(1)$

53. Demuestre $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{xb} = e^{ab}$ usando series de Taylor.

54. Demostrar que $\int_0^1 \frac{ln(x)}{x-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

55. Calcular $\int_{\sqrt[4]{2}}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx$

56. Calcular $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}n^k}{\pi^n k!}$

57. Intente calcular $\int_0^1 ln(1-x)ln^2(x)dx$.

Hints y procedimiento a seguir: Use el cambio de variable $u = -ln(x)$, luego use serie de Taylor para alguna función adecuada, aplique integración por partes, luego fracciones parciales, propiedad telescópica de sumas y finalmente use el que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

58. Encontrar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $g(t) = \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{5/2}$

59. Determine el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{5^n n!}x^n$

60. Calcular $\int xarctan(3x)dx$ usando series.

61. Demuestre que $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ converge si $a, b > 0$

62. Demostrar que la siguiente integral es convergente y usando series de Taylor calcule su valor.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1 - cos(x))}{x^2} dx$$

Hints: ¿Que tiene en el numerador?, Use el que $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ y que $\Gamma(2n - 1) = (2n - 2)!$

63. Sea $b > 0$. Exprese la función $ln(1 + bx^2)$ como una serie de potencias centrada en cero y encuentre su radio de convergencia.

64. Analizar convergencia $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

65. Determine convergencia o divergencia de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + 3sin^4(2x)}{\sqrt{x^3}} dx$

66. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \frac{sin(x)}{x} dx$

67. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si $x > 1$