Calculo en varias variables

Daniel Gálvez

July 26, 2023

Summary

1 Funciones de dos variables

1.1 Dominio y recorrido

Definimos una función de dos variables reales como:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to R \in \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$$

Donde:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } f \text{ este bien definida}\} \text{ (dominio de la función)}$$
$$R = \{z \in \mathbb{R} \text{ tales que } z = f(x, y)\} \text{ (recorrido de la función)}$$

Para determinar el dominio de una función, es necesario recordar las siguientes ecuaciones:

(i) Ecuación del circulo

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Donde (h, k) es el centro, y r el radio.

(ii) Ecuación de la elipse

Horizontal (si $a > b$)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Vertical (si $a > b$)

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

Donde (h, k) es el centro, a es el ancho y b el largo

(iii) Ecuación de la hipérbola:

Hipérbola horizontal:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Vértice en $(h+a, 0)$, $(h-a, 0)$

Hipérbola vertical:

$$\frac{(y - h)^2}{a^2} - \frac{(x - k)^2}{b^2} = 1$$

Vértice en $(0, h+a)$, $(0, h-a)$

Determinar y graficar el dominio de las siguientes funciones:

1. $z = \dfrac{\sqrt{1+x+y}}{x-1}$

   Para esto solo analizamos donde la función no este definida. Primero tenemos que $x \neq 1$, y segundo, al tener una raíz cuadrada, se debe tener $1 + x + y \geq 0$. Entonces:

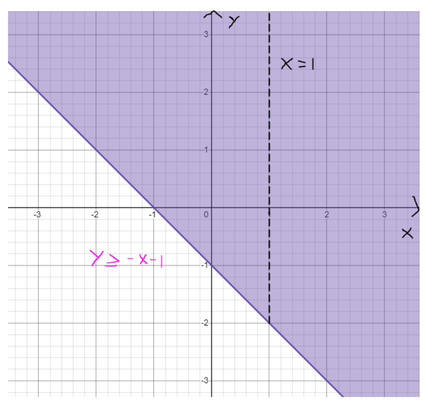
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y \geq 0 \ \& \ x \neq 1\}$$

Para graficar, podemos despejar y.

$$1 + x + y \geq 0$$

$$y \geq -x - 1$$

   Notamos que tiene que ser la parte superior de la función $y = -x - 1$. También recordar que no debe tocar $x = 1$. Entonces la gráfica es:



2. $z = xln(y^2 - x)$

   Notamos que solo tenemos restricciones con el logaritmo, por lo cual se debe tener $y^2 - x > 0$. Entonces:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x > 0\}$$

Para graficar, recordamos la ecuación de la parábola:

$$(y - h)^2 = 2p(x - k)$$

En nuestro caso:

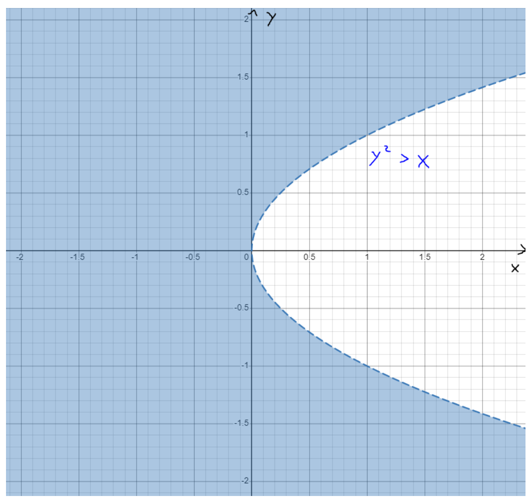
$$(y - 0)^2 = 2 \cdot 1 \cdot (x - 0)$$

Por lo cual tiene vértice en $(0,0)$. Como tenemos que $y^2 > x$, esto pertenece a la parte superior de la parábola. Otra forma de ver que parte corresponde, es tomar algún punto dentro y fuera de la parábola. Por ejemplo:

$$(4,1) \text{ , evaluamos, } 1^2 > 4. \text{ No es verdad.}$$

$$(2,2) \text{, evaluamos, } 2^2 > 2. \text{ Si es verdad}$$

Notar que el borde no se toca, por lo cual se gráfica punteado.



3. $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \sqrt{1-x^2}$, (I2 - 2 - 2022)

Al tener dos raíces diferentes, tendremos que intersectar donde las condiciones de ambas coincidan. Primero, analizemos $\sqrt{4-x^2-y^2}$. Al ser una raíz, se debe tener $4-x^2-y^2 \geq 0$. Arreglándola e identificando lo que es se tiene:

$$4-x^2-y^2 \geq 0$$
$$4 \geq x^2+y^2$$
$$2^2 \geq x^2+y^2$$
$$x^2+y^2 \leq 2^2$$

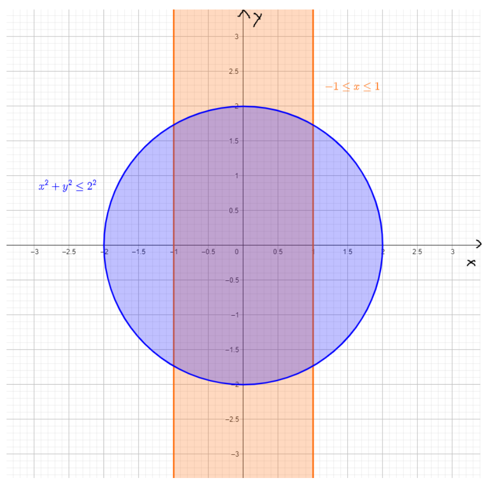
Podemos ver que es un circulo de radio 2, y como se tiene que es menor al radio, corresponde a la parte interior del circulo. Denotemos esta condición como $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2^2\}$. Ahora falta ver la otra raíz. En esta otra se debe tener $1-x^2 \geq 0$. Despejando se tiene:

$$1-x^2 \geq 0$$

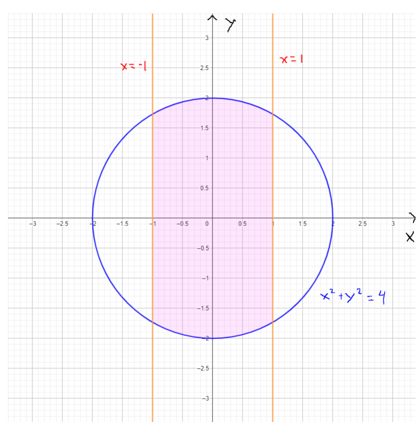
$$1 \geq x^2$$
$$x^2 \leq 1 \;/\sqrt{()}$$
$$|x| \leq 1$$
$$-1 \leq x \leq 1$$

Esto corresponde a la región acotada por $x = 1$ y $x = -1$, que es similar a una franja. Denotemos esta condición como
$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$.

Ahora necesitamos ver $C_1 \cap C_2$. Para esto podemos graficar ambas condiciones y ver donde se intersectan. Entonces la gráfica seria:



De la gráfica se aprecia que la intersección es dentro de la franja $-1 \leq x \leq 1$ y el circulo, por lo cual la gráfica del dominio es:



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \;\&\; -1 \leq x \leq 1\}$$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - 9y^2}}$

Como solo tenemos términos en el denominador, se debe tener que $9 - x^2 - 9y^2 > 0$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - 9y^2 > 0\}$$

Ahora podemos organizar para ver a que gráfica pertenece.

$$9 - x^2 - 9y^2 > 0$$

$$9 > x^2 + 9y^2$$

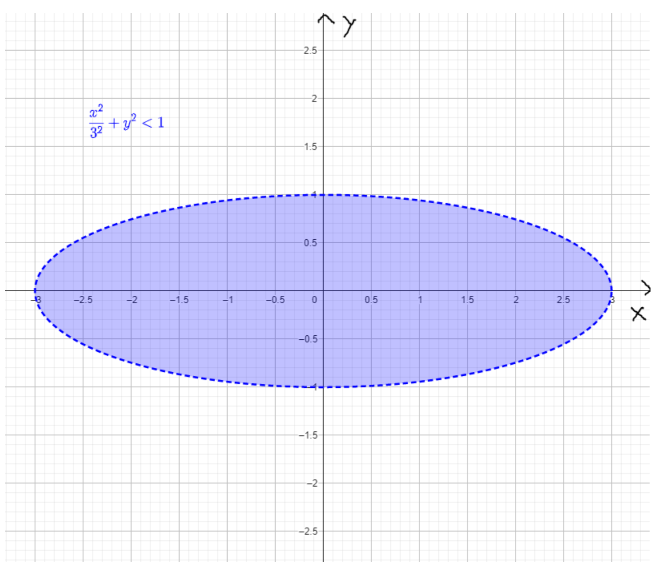
Ya podemos notar que se trata de una elipse, multiplicando por $\dfrac{1}{9}$ en ambos lados se tiene:

$$1 > \frac{x^2}{9} + y^2$$

$$\frac{x^2}{9} + y^2 < 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{1^2} < 1$$

Podemos ver que se trata de una elipse horizontal, ya que $\frac{1}{3} < 1$. Y como tenemos la condición de que sea menor a 1, es la parte interior de una elipse. En particular es una elipse horizontal centrada en el origen con ancho 1 y largo 3. El borde es punteado ya que no lo toca. La gráfica es:



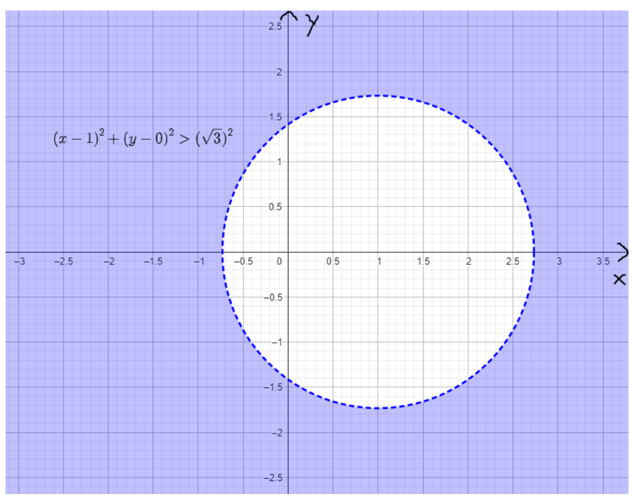
5. $ln(-2x + y^2 + x^2 - 2)$

Imponiendo la condición del logaritmo:

$$-2x + y^2 + x^2 - 2 > 0$$
$$x^2 - 2x + y^2 > 2 \quad / + 1$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 > 2 + 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 > 3$$
$$(x-1)^2 + (y-0)^2 > (\sqrt{3})^2$$

Corresponde a la parte exterior de un circulo centrado en $(1, 0)$ de radio $\sqrt{3}$.

La gráfica es:



1.2 Curvas de nivel

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Las curvas de nivel son aquellas definidas por:

$$f(x, y) = k \ , \ k \in \mathbb{R}$$

k debe estar en el recorrido de la función.

Graficar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$. Para $k = -6, 0, 6$

   Para evitarnos repetir el proceso de evaluar con cada k en particular, podemos hallar la forma de las curvas de nivel, para luego evaluar y ya tener una idea de que se tiene.

$$6 - 3x - 2y = k$$
$$-2y = 3x + k - 6$$
$$y = -\frac{3x}{2} - \frac{k-6}{2}$$

   Ahora evaluando en cada k se tiene:

   (i) $k = -6$

$$y = -\frac{3x}{2} + 6$$

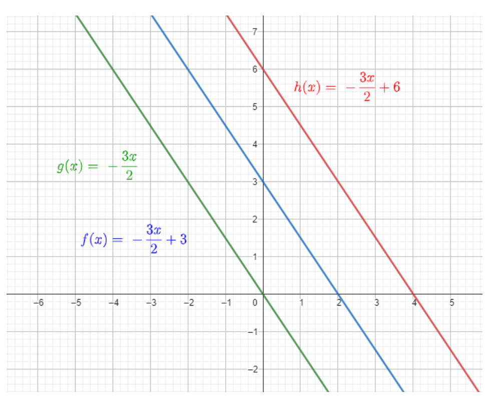
   (ii) $k = 0$

$$y = -\frac{3x}{2} + 3$$

   (iii) $k = 6$

$$y = -\frac{3x}{2}$$

   La gráfica es:



2. $f(x,y) = x^2 - 4y^2$, para $k = -1, 0, 1$. (I2 - 1 - 2022)

   En este caso evaluaremos cada k en particular, ya que generan diversas gráficas.

   (i) $k = -1$

$$x^2 - 4y^2 = -1$$

Se parece a una hipérbola, ya que tienen signos cambiados. La arreglamos un poco:

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 &= -1 \quad / \cdot -1 \\ -x^2 + 4y^2 &= 1 \\ 4y^2 - x^2 &= 1 \\ \frac{y^2}{\frac{1}{2^2}} - x^2 &= 1 \\ \frac{(y-0)^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{(x-0)^2}{1^2} &= 1 \end{aligned}$$

   Corresponde a una hipérbola vertical con vértice en $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, -\frac{1}{2})$.

   (ii) $k = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 &= 0 \\ (x-2y)(x+2y) &= 0 \\ x - 2y = 0 &\vee x + 2y = 0 \\ y = \frac{x}{2} &\vee y = \frac{-x}{2} \end{aligned}$$

   Corresponden a dos rectas que pasan por el origen.

   (iii) $k = 1$

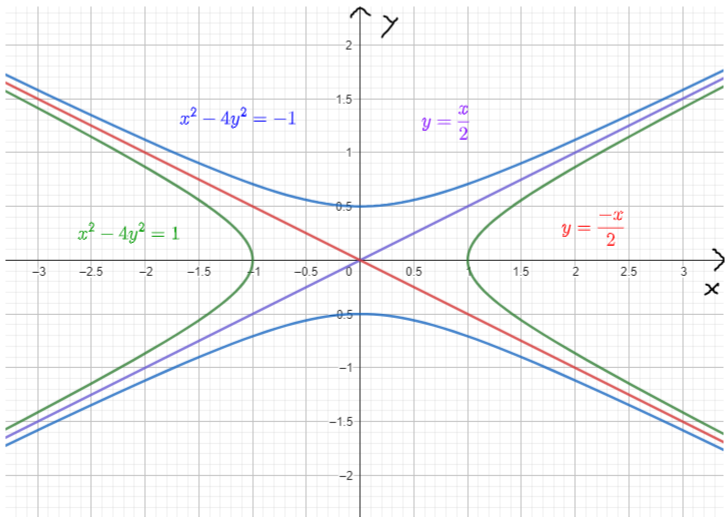
$$x^2 - 4y^2 = 1$$

Podemos ver que tiene la forma de una hipérbola. $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2^2}} = 1$

$$\frac{(x-0)^2}{1^2} - \frac{(y-0)^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$$

   Corresponde a una hipérbola horizontal con vértice en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

La gráfica es:



3. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, para $k = 0, 1, 2$.

   Intuitivamente se puede ver que es la ecuación de un circulo, por lo cual hallamos la forma general.

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \ \ /()^2$$
$$9 - x^2 - y^2 = k^2$$
$$x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

   (i) $k = 0$

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 = 3^2$$

   Circulo centrado en el origen de radio 3

   (ii) $k = 1$

$$x^2 + y^2 = 9 - 1^2$$
$$x^2 + y^2 = 8$$
$$x^2 + y^2 = (\sqrt{8})^2$$

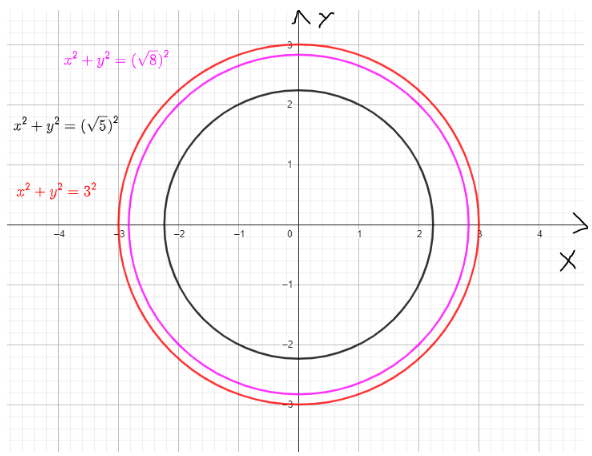
   Circulo centrado en el origen de radio $\sqrt{8}$

(iii) $k = 2$

$$x^2 + y^2 = 9 - 2^2$$
$$x^2 + y^2 = 5$$
$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$$

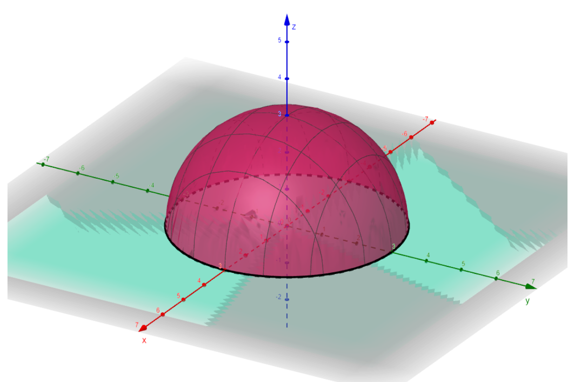
Lo mismo que antes pero de radio $\sqrt{5}$.

La gráfica es:

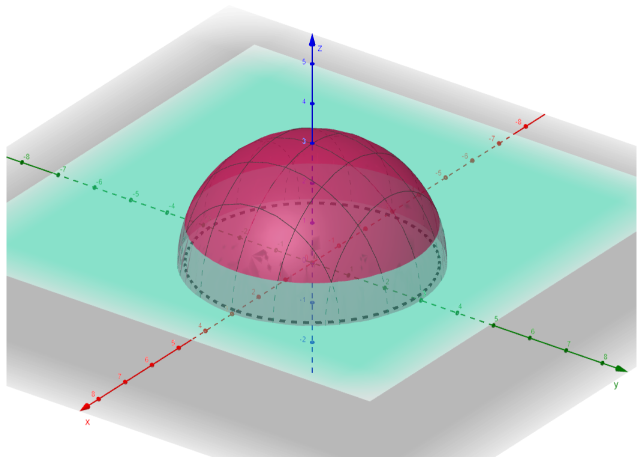


Las curvas de nivel corresponden a la representación de la función $f(x, y) = k$ en el plano xy en una altura k. En otras palabras mas sencillas, es ver la función $f(x, y)$ desde arriba en una altura determinada. En el caso anterior la función $f(x, y)$ corresponde a una semi esfera. En las siguientes imágenes se aprecia una interpretación de las curvas de nivel.

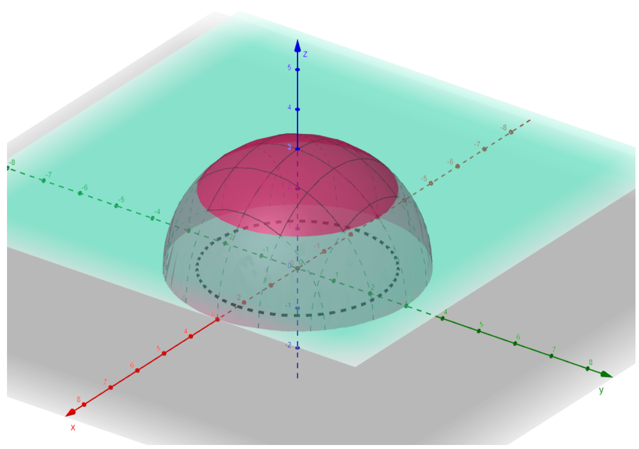
(i) $k = 0$



(ii) $k = 1$



(iii) $k = 2$



Si viéramos estas imágenes desde "arriba" se apreciarían las curvas de nivel graficadas anteriormente.

4. Determinar la forma de las curvas de nivel para la función $z = e^{1-x^2-y^2}$.

   Para esto igualamos a k y desarrollamos.

$$\begin{aligned} k &= e^{1-x^2-y^2} \quad /ln() \\ ln(k) &= 1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 - ln(k) \\ x^2 + y^2 &= (\sqrt{1 - ln(k)})^2 \end{aligned}$$

   Corresponde a un circulo de radio $\sqrt{1 - ln(k)}$. Notar que el recorrido de la función z es $(0, e]$, por lo cual no hay problema con que la raíz sea negativa.

5. Bosquejar las curvas de nivel de altura 0 y $\sqrt{2}$ de la función $f(x, y) = \sqrt{2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$. (I2 - 2 - 2021)

   Podemos hallar la forma general y luego evaluar.

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} &= k \quad /()^2 \\ 2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &= k^2 \\ \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &= 2 - k^2 \quad /\sqrt{()} \\ \left|\frac{x+y}{2}\right| &= \sqrt{2 - k^2} \\ |x + y| &= 2\sqrt{2 - k^2} \\ -x - y = 2\sqrt{2 - k^2} &\ \vee\ x + y = 2\sqrt{2 - k^2} \\ y = -x - 2\sqrt{2 - k^2} &\ \vee\ y = -x + 2\sqrt{2 - k^2} \end{aligned}$$

   Notamos que corresponden a rectas.

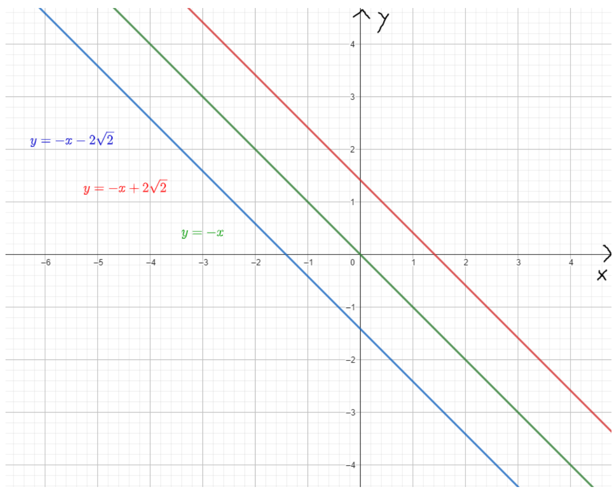
   (i) $k = 0$

$$\begin{aligned} y = -x - 2\sqrt{2 - 0^2} &\ \vee\ y = -x + 2\sqrt{2 - 0^2} \\ y = -x - 2\sqrt{2} &\ \vee\ y = -x + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(ii) $k = \sqrt{2}$

$$y = -x - 2\sqrt{2 - (\sqrt{2})^2} \ \vee \ y = -x + 2\sqrt{2 - (\sqrt{2})^2}$$
$$y = -x - 2\sqrt{2 - 2} \ \vee \ y = -x + 2\sqrt{2 - 2}$$
$$y = -x \ \vee \ y = -x$$
$$y = -x$$

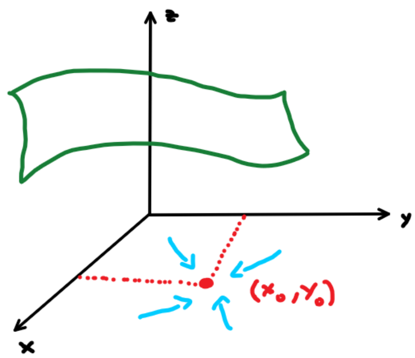
La gráfica es:



2 Limites y continuidad

2.1 Limites

En el caso de funciones de dos variables, podemos acercarnos a un punto (x_0, y_0) en el plano xy, de infinitas formas, como se ve en la siguiente imagen:



Por lo cual para demostrar que un limite no existe, se pueden tomar diferentes trayectorias, de forma que el limite depende de la trayectoria que seleccionemos.

La definición del limite es:

$$\text{Sea } f(x,y)\text{. Definimos:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$\text{si } \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que:}$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

$$\Rightarrow \left| f(x,y) - L \right| < \epsilon$$

La mayoría de limites se resuelven factorizando, usando cambio de variable, coordenadas polares, etc. Aplican técnicas similares a las de una variable. También aplican las mismas propiedades de limites en una variable.

Si se quiere evaluar un limite de la forma $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y contiene términos de la forma $x^2 + y^2$ o similares, podemos usar coordenadas polares, el cambio esta dado por:

$$\lim_{r\to 0} f(rcos(\theta), rsin(\theta))$$

Donde podemos usar L'Hôpital si es necesario. Si el limite no es de la forma mencionada, se debe proceder de una forma un tanto diferente, esto se verá en alguno de los ejercicios.

Para proceder ante un limite, se recomienda hacer los siguientes pasos:

- Evaluar directamente y ver que pasa
- Tratar de factorizar la función o arreglarla un poco
- Usar trayectorias diferentes para demostrar que no existe
- Usar polares

1. Calcular $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x}{x+y}$

Funciona igual que en una variable, por lo cual si evaluamos y no causa ningún problema, ya estamos listos.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

2. Analizar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+4y^2}$

Usemos lo recomendado. Si evaluamos nos quedara indeterminado $\dfrac{0}{0}$, por lo cual ya podemos intuir que pasa. Factorizarlo no parece buena idea, pues nos quedaran términos con variables, y nuevamente al evaluar nos quedara indeterminado. Entonces dado que nada funciono, procedemos a tomar trayectorias que pasen por $(0,0)$. En nuestro caso usaremos:

(i) $y = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+4y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^2}{x^2+4x^2} = \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

(ii) $y = 2x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+4y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(2x)^2}{x^2+4(2x)^2} = \frac{5x^2}{17x^2} = \frac{5}{17}$$

Como los limites son diferentes, se concluye que el limite no existe. De igual forma se pudo haber usado polares y haber llegado a que el limite depende de θ, lo cual igual demuestra que no existe.

3. Demostrar usando la definición de limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Sea $\epsilon > 0$. Buscamos determinar $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \;\Rightarrow\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

Desarrollando el limite se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \epsilon$$

Lo anterior ya que los demás términos son positivos, pues están al cuadrado, excepto y.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} &\leq \frac{3x^2|y|}{x^2} \\ &= 3|y| \\ &= 3\sqrt{y^2} \\ 3\sqrt{y^2} &\leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta \end{aligned}$$

Ahora tendríamos un δ tal que:

$$\begin{aligned} 3\delta &= \epsilon \\ \delta &= \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

De modo que, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, basta tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ para probar la desigualdad.

4. Analizar $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-y-2x+2}{x-1}$. (Ex - 1 - 2022)

Si evaluamos nos queda indeterminado, por lo cual ahora hay que tratar de factorizarlo, pues en el numerador es posible factorizar con x e y.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-2x-y+2}{x-1} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(y-2)-y+2}{x-1} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(y-2)-(y-2)}{x-1} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-2)(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} = -1$$

5. Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{(x^2+y^2)^2}-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Si evaluamos nos queda indeterminado. Al tener x^2+y^2 podemos usar polares. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x^2+y^2)^2}-1}{(x^2+y^2)^{3/2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{e^{[(rcos(\theta))^2+(rsin(\theta))^2]^2}-1}{[(rcos(\theta))^2+(rsin(\theta))^2]^{3/2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{e^{[r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))]^2}-1}{[r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))]^{3/2}}
\end{aligned}$$

Ahora recordamos que $cos^2(\theta)+sin^2(\theta)=1$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^4}-1}{r^3} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{r\to 0} \frac{4}{3}\frac{r^3 e^{r^4}}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x^2+y^2)^2}-1}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

6. Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y}$

Usamos polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2cos(\theta)}{rcos(\theta)+rsin(\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2cos(\theta)}{r(cos(\theta)+sin(\theta))} = 0$$

Esto ultimo ya que se nos queda r en el numerador, y el limite no depende de θ.

7. Calcular en caso que existe o demostrar que no existe $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$
(I2 - TAV - 2022)

Al evaluar nos da indeterminado. Tratar de factorizarlo o arreglarlo no nos lleva a ninguna parte. Podemos intuir que el limite no existe, por lo cual usemos trayectorias para ver que sucede. En este caso la trayectoria a usar debe pasar por el punto $(1,0)$

(i) $y = x - 1$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{2(x-1)^2}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(ii) $y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cdot 0-0}{(x-1)^2+0^2} = 0$$

Como el limite depende de la trayectoria, el limite no existe.

8. Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe.

Para esto podemos usar una trayectoria que pase por el $(0,0)$ y que tenga una forma generalizada. En este caso podemos tomar $y = ax$, con $a \in \mathbb{R}$, ya que esta recta siempre pasa por el $(0,0)$ independiente del valor de a. Entonces:

$y = ax$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xax}{x^2+(ax)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{x^2(1+a^2)} = \frac{a}{1+a^2}$$

Como el valor del limite depende de a, el limite no existe.

9. Analizar existencia de $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2}$. (I2 - 2 - 2021)

Iniciemos por reorganizar el denominador.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2(x-1)(y-1)}{x^2-2x+1+y^2-2y+1} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\end{aligned}$$

Dado que tenemos términos similares arriba y abajo podemos hacer un cambio de variable.

(i) $u = x - 1$. $\qquad u \xrightarrow{x\to 1} 0$

(ii) $v = y - 1$. $\qquad v \xrightarrow{y\to 1} 0$

Ahora tendríamos:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2uv}{u^2+v^2}$$

Pero ya demostramos en el ejercicio anterior que este limite no existe.

10. Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{e^{x^2+(y-1)^2}-1}{x^2+(y-1)^2}$.

En este caso procederemos por polares, pero notamos que el limite no es en el origen, por lo cual las polares estarán centradas en otro lugar. Si se quiere usar polares cuando el limite no va al origen, se usa lo siguiente:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + rcos(\theta) \\ y &= y_0 + rsin(\theta) \end{aligned}$$

Donde x_0 y y_0 corresponde al limite a evaluar. r de igual forma se va a 0. Entonces tendríamos que hacer:

$$x = rcos(\theta) \text{ y } y = 1 + rsin(\theta)$$

Ya que nos interesa el punto $(0, 1)$. El limite nos quedaría:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{x^2+(y-1)^2}-1}{x^2+(y-1)^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2cos^2(\theta)+(1+rsin(\theta)-1)^2}-1}{r^2cos^2(\theta)+(1+rsin(\theta)-1)^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2cos^2(\theta)+r^2sin^2(\theta)}-1}{r^2cos^2(\theta)+r^2sin^2(\theta)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} \\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

11. Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{cos(x)sin(y)}{y}$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos(x)sin(y)}{y} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} cos(x) \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(y)}{y} \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Recodar que las propiedades de limites son los mismos que en una variable.

2.1.1 ¿Por qué usar trayectorias antes de aplicar polares?

Si bien en los problemas anteriores llegamos y usamos polares, no siempre es recomendable usarlas, pues nos puede llevar a conclusiones erróneas. Veamos los siguientes ejemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} \text{ , (I2 - TAV - 2023)}$$

Veamos que pasa si usamos polares:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4cos^3(\theta)sin(\theta)}{r^6cos^6(\theta)+r^2sin^2(\theta)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2cos^3(\theta)sin(\theta)}{r^4cos^6(\theta)+sin^2(\theta)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora veamos que pasa si tomamos las siguientes trayectorias:

(i) $y = ax$, con $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3ax}{x^6+a^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^2(x^4+a^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{x^4+a} = 0$$

(ii) $y = x^3$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3x^3}{x^6+(x^3)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

Al tener dos limites diferentes, el limite no existe, lo que contradice a las polares, pues sugieren que tal limite vale 0. El truco era darse cuenta de cual trayectoria usar.

Analicemos uno mas.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Usemos polares.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2cos^2(\theta)rsin(\theta)}{r^4cos^4(\theta)+r^2sin(\theta)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{rcos^2(\theta)sin(\theta)}{r^2cos^4(\theta)+sin(\theta)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora solo usaremos una trayectoria.

(i) $y = ax^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2ax^2}{x^4+(ax^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4+a^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{a^4x^4}{x^4(1+a^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{a^2}{1+a^2}$$

Como el limite depende del valor de a, no existe. Lo cual nuevamente contradice a las polares.

En estos casos, cuando las polares sugieren que el limite es un valor determinado, pero usando trayectorias se logra obtener limites diferentes, se concluye que el limite no existe.

Pregunta para el lector:

¿Que sucede en los casos y ejercicios anteriores cuando $r \to 0$ y $\theta = 0$?

2.2 Continuidad

Una función $f(x,y)$ es continua en (a,b) si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Esto implica tres cosas:

- La función esta definida en (a,b)
- El limite en (a,b) existe
- El limite en (a,b) es lo mismo que $f(a,b)$

1. Determinar si la siguiente función es continua en el origen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Para esto solo necesitamos ver que el limite calze.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x-y = 0$$

$$0 = 0$$

   Por lo tanto, la función es continua en el origen.

2. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{cos(y)sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ cos(y) & x = 0 \end{cases}$ (I2 - 1 - 2022)

   a) ¿Es f continua en $(0,0)$?

   Para esto procedemos igual que antes:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos(y)sin(x)}{x} = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} cos(y) \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x)}{x} = cos(0)$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 = 1$$

Como se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$, la función es continua en $(0,0)$.

b) ¿Es f continua en todo $\mathbb{R}^2$?

Notamos que si $x \neq 0$, el limite se puede evaluar sin problemas en cualquier punto (x,y). Ahora, si $x = 0$ e $y = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se debe cumplir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,\alpha)} \frac{cos(y)sin(x)}{x} = f(0,\alpha)$$

Haciendo lo mismo que antes se tiene que:

$$cos(\alpha) = cos(\alpha)$$

Por lo cual la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$

3. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ A & si\ (x,y) = 0 \end{cases}$$

Calcule el valor de A para que la función f sea continua en $(0,0)$.

Se debe tener:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} arctan\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = A$$

Desarrollando el limite mediante polares:

$$\lim_{r\to 0} arctan\left(\frac{r^4(cos^4(\theta)+cos^4(\theta)}{r^2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))}\right) = A$$

$$\lim_{r\to 0} arctan\left(r^2cos^4(\theta)+sin^4(\theta)\right) = A$$

$$0 = A$$

La función es continua en $(0,0)$ si $A = 0$.

4. Determinar para que valor de $\gamma \in \mathbb{R}$ la función resulta continua en $(1,0)$. Considere $n \in \mathbb{N}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 ln^n(x)}{(x-1)^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (1,0) \\ \gamma & si\ (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Para esto procedemos igual que antes.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 ln^n(x)}{(x-1)^2 + y^2} = f(1,0)$$

Para desarrollar el limite hacemos un cambio de variable:

- $u = x - 1 \ \Rightarrow \ x = u + 1$ $\qquad u \xrightarrow{x\to 1} 0$
- $v = y$ $\qquad v \xrightarrow{y\to 0}$

Entonces tendríamos:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2 ln^n(u+1)}{u^2 + v^2} = f(1,0)$$

Usamos polares para calcular el limite:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2 cos^2(\theta) ln^n(rcos^2(\theta)) + 1)}{r^2(cos^2(\theta) + sin^2(\theta))} = f(1,0)$$

$$\lim_{r\to 0} cos^2(\theta) ln^n(rcos(\theta) + 1) = \gamma$$

$$0 = \gamma$$

Para que la función resulte continua en $(1,0)$ se debe tener que $\gamma = 0$.

5. Determine si la siguiente función es continua en $(-1,1)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+1)^2(y-1)^2 ln(x^2+y^2-2y+2+2x) & si\ (x,y) \neq (-1,1) \\ 0 & si\ (x,y) = (-1,1) \end{cases}$$

Como ya sabemos que se debe tener $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) = 0$, solo nos delimitaremos a calcular el limite.

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} (x+1)^2(y-1)^2 ln(x^2+y^2-2y+2+2x)$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} (x+1)^2(y-1)^2 ln(x^2+2x+1+y^2-2y+1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} (x+1)^2(y-1)^2 ln((x+1)^2+(y-1)^2)$$

Ahora hacemos un cambio de variable:

$$u = x+1\ ,\ u \xrightarrow{x\to -1} 0$$

$$v = y-1\ ,\ v \xrightarrow{y\to 1} 0$$

Ahora tendríamos:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} uv\ ln(u^2+v^2)$$

Usando polares

$$\lim_{r\to 0^+} cos(\theta)sin(\theta)r^2 ln(r^2)$$

Aplicando L'Hopital un par de veces se llega a que

$$\lim_{r\to 0^+} cos(\theta)sin(\theta)r^2 ln(r^2) = 0$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) = f(-1,1)$, la función es continua en $(-1,1)$.

En general ver la continuidad de una función de dos variables se reduce a calcular el limite en el punto dado y ver si calza. Recordar siempre que $cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$.

3 Derivadas Parciales

3.1 Definición

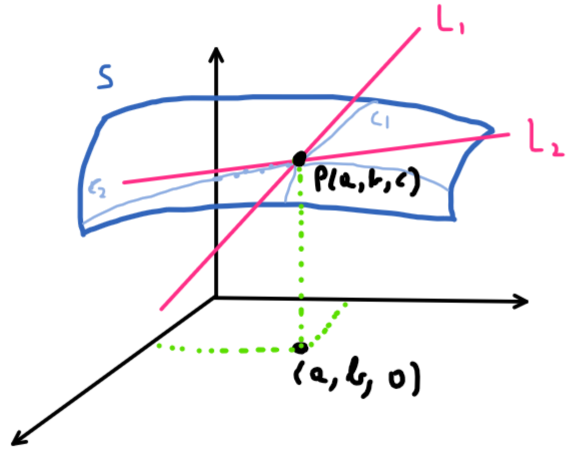
Sea $z = f(x, y)$. Se definen las derivadas parciales de $f(x, y)$ como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Las derivadas parciales en un punto (a, b) se definen como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 de S en los planos $y = b$ y $x = a$. Esto se ve en la siguiente imagen:



Donde L_1 y L_2 son las rectas tangentes a las trazas generadas.

Para el calculo de las derivadas parciales se deja una variable como una constante, y se deriva igual que en una variable.

Para calcular las segundas derivadas parciales se procede de forma análoga.

1. Sea $f(x,y) = e^{-x^2y} + cos(xy)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

   Para $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dejamos a y como una constante. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xye^{-x^2y} - ysin(xy)$$

   Para $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ podemos notar que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(-2xye^{-x^2y} - ysin(xy)\right)$$

Dejamos x como una constante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2xe^{-x^2y} + 2x^3ye^{-x^2y} - sin(xy) - xycos(xy)$$

2. Considere la función $f(x,y) = bx^\alpha y^\beta$, donde $b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcular el valor de:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - (\alpha+\beta)f(x,y)$$

   (I2 - 1 - 2017)

   Solo calculamos las parciales respectivas.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b\alpha x^{\alpha-1}y^\beta$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx^\alpha \beta y^{\beta-1}$$

   Ahora reemplazamos en lo pedido:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - (\alpha+\beta)f(x,y) &= x(b\alpha x^{\alpha-1}y^\beta) + y(bx^\alpha\beta y^{\beta-1}) - (\alpha+\beta)f(x,y) \\ &= b\alpha x^\alpha y^\beta + b\beta x^\alpha y^\beta - (\alpha+\beta)f(x,y) \\ &= bx^\alpha y^\beta(\alpha+\beta) - (\alpha+\beta)bx^\alpha y^\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Sea $z = x^2 - 3xy + y^2$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ usando la definición.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h)y + y^2 - x^2 - 3xy + y^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3xy - 3hy + y^2 - x^2 + 3xy - y^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh - 3yh}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} h + 2x - 3y$$
$$= 2x - 3y$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y$$

Se puede verificar fácilmente a mano que está correcto.

4. Calcular $f_{xy}(1,3)$. Donde $f(x,y) = \dfrac{1}{1-xy}$.

Para esto podemos derivar y luego evaluar.

$$f_x = \frac{y}{(1-xy)^2}$$
$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{(1-xy)^2 + 2xy(1-xy)}{(1-xy)^4} = \frac{1+xy}{(1-xy)^3}$$

Ahora evaluamos en $(1,0)$

$$f_{xy}(1,3) = \left.\frac{1+xy}{(1-xy)^3}\right|_{(1,3)} = \frac{1+3}{(1-3)^3} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Queda como sugerencia al lector calcular la derivada por definición. Para esto primero se calcula la parcial respecto a x, y luego la resultante con respecto a y evaluada en $(1,3)$.

5. Si $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$, e interprete geométricamente que sucede.

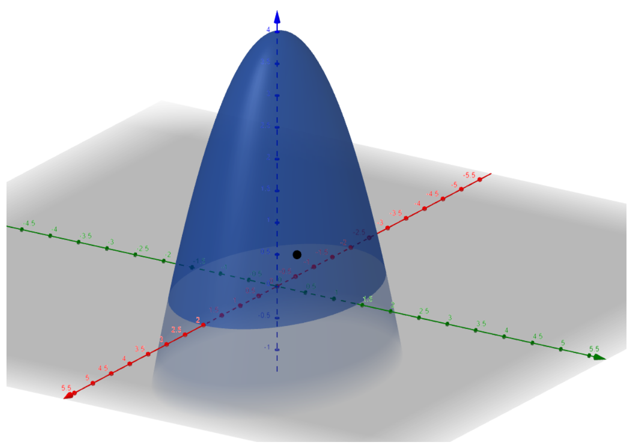
   Calculamos las derivadas y evaluamos.

$$f_x = -2x\Big|_{(1,1)} = -2$$

$$f_y = -4y\Big|_{(1,1)} = -4$$

   Si evaluamos en f en $(1, 1)$ se tiene que $f(1, 1) = 1$. Nuestro punto para analizar es $P(1, 1, 1)$.

   La superficie y el punto anterior que tenemos se aprecia en la siguiente imagen:



   Ahora vamos uno por uno. Primero interpretemos la parcial respecto a x. En este caso tenemos $y = 1$, pues x varia. Entonces la traza resulta de la intersección entre la función f y $y = 1$. Sabemos que para calcular la recta en $\mathbb{R}^3$ necesitamos un vector director, el cual se puede obtener al encontrar otro punto de la recta, este se puede calcular de la siguiente manera:

Tenemos $P(1, 1, 1)$

Para obtener el nuevo punto, dejamos la coordenada y de P fijo. Ahora podemos sumar 1 a la coordenada x para ver la variación. Y la coordenada z resulta mediante la suma entre el valor de $f_x(1, 1)$ y la coordenada z de P. Entonces tomamos el punto:

$$Q(1 + 1, 1, -2 + 1)$$

Tenemos $Q(2, 1, -1)$

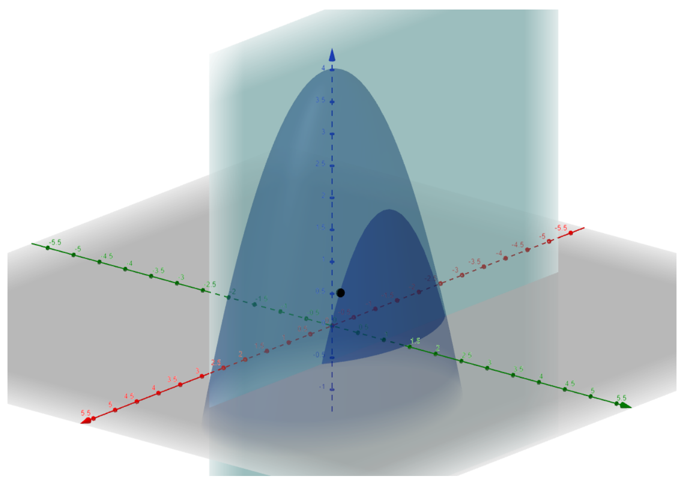
Ahora calculamos el vector $\overline{PQ}$.

$$\overline{PQ} = \langle 2-1, 1-1, -1-1 \rangle = \langle 1, 0, -2 \rangle$$

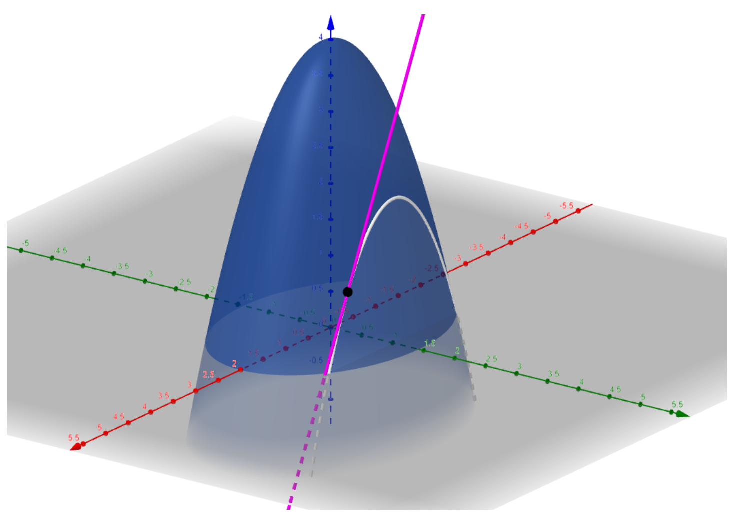
Queremos que la recta pase por P, por lo cual la recta tangente es :

$$\overrightarrow{r}(t) = \langle 1, 1, 1 \rangle + t\langle 1, 0, -2 \rangle$$

En la siguiente imagen se aprecia el plano $y = 1$ y la función f.



Y ahora se aprecia la recta tangente a la traza resultante de la intersección entre la función y el plano.



Ahora veamos la parcial respecto a y. En este caso tenemos $x = 1$, pues y varia. Entonces la traza resulta de la intersección entre la función f y $x = 1$. Haciendo lo mismo que antes:

$$\text{Tenemos } P(1,1,1)$$

Ahora, para obtener un punto, dejamos la coordenada x fija de P. Para la coordenada y podemos sumar 1. Y para la coordenada z sumamos $f_y(1,1)$ y la coordenada z de P. Entonces tomamos el punto:

$$R(1, 1+1, 1+-4)$$

$$\text{Tenemos } R(1,2,-3)$$

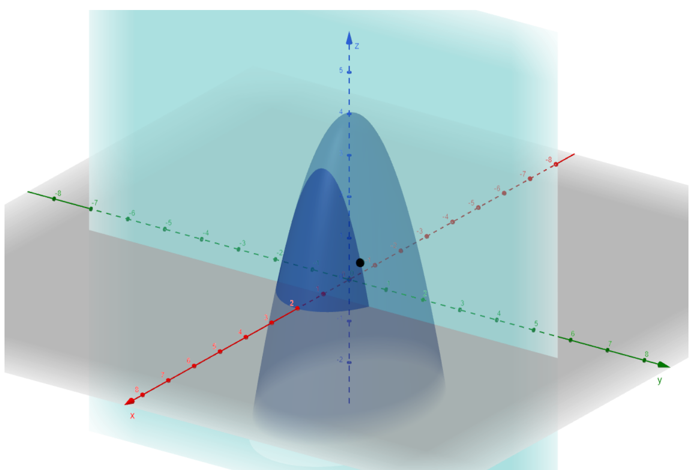
Ahora calculamos el vector $\overrightarrow{PR}$.

$$\overrightarrow{PR} = \langle 1-1, 2-1, -3-1\rangle = \langle 0,1,-4\rangle$$

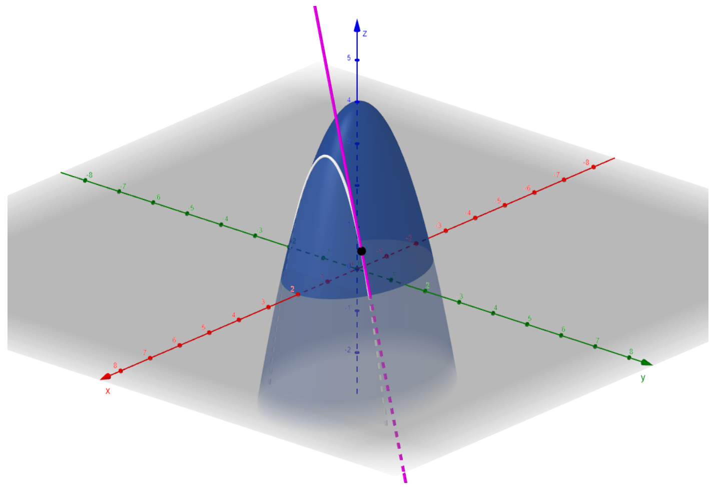
Al igual que antes queremos que pase por P. Entonces la recta tangente es:

$$\overrightarrow{r}(t) = \langle 1,1,1\rangle + t\langle 0,1,-4\rangle$$

En la siguiente imagen se aprecia el plano $x = 1$ y la función f.



Y ahora se aprecia la recta tangente a la traza resultante entre la función y el plano.



3.2 Teorema de Clairaut

Si $f(x,y)$ es continua con derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ambas continuas. Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

1. Compruebe el teorema para la función $f(x,y) = cos(2xy) - e^x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(-2xsin(2xy)\big) = -2sin(2xy) - 4xycos(2xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\big(-2ysin(2xy) - e^x\big) = -2sin(2xy) - 4xycos(2xy)$$
$$\text{Se corrobora que } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

2. Explique porque no es posible que exista una función f cuyas derivadas parciales de segundo orden sean continuas y tales que:

$$f_x(x,y) = x + y^2 \qquad\qquad f_y(x,y) = x - y^2$$

Si calculamos las segundas derivadas parciales se tiene que $f_{xy}(x,y) = 2y$ y $f_{yx}(x,y) = 1$. Pero notamos que $f_{xy} \neq f_{yx}$, lo que contradice el teorema de Clairaut.

3.3 Plano tangente y aproximaciones lineales

Recordando que en una variable se podían obtener aproximaciones de funciones en torno a un punto, tales como $sin(x) \approx x$ y $cos(x) \approx 1$ para x muy cercano a 0. Para funciones de dos variables se puede obtener algo análogo. Una aproximación lineal de $f(x, y)$ en torno a (a, b) esta dada por:

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

1. Calcule la aproximación lineal de $f(x, y) = xe^{-y} + ye^{-x}$ en torno a $(0, 0)$. Con esto estime el valor de $f(1/100, 1/100)$

   Buscamos lo necesario

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = e^{-y} - ye^{-x}\Big|_{(0,0)} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -xe^{-y} + e^{-x}\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$L(x, y) = f(0, 0) + 1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0)$$

$$\Rightarrow\ L(x, y) = x + y$$

   Ahora evaluamos en $(1/100, 1/100)$:

$$L(1/100, 1/100) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 0.02$$

   Entonces se tendría que

$$f(1/100, 1/100) \approx 0.02$$

2. Considere la función diferenciable $f(x, y) = 1 - xycos(\pi y)$. Utilice el plano tangente en un punto apropiado para aproximar $f(2.02, 0.97)$.
   (I2 - 2- 2021)

   Podemos elegir el punto $(2, 1)$. Entonces buscamos lo necesario.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = -ycos(\pi y)\Big|_{(2,1)} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -xcos(\pi y) + \pi xysin(\pi y)\Big|_{(2,1)} = 2$$
$$L(x, y) = f(2, 1) + 1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1)$$
$$\Rightarrow\ L(x, y) = x + 2y - 1$$

Ahora evaluamos en $(2.02, 0.97)$:

$$L(2.02, 0.97) = 2.02 + 2 \cdot 0.97 - 1 = 2.96$$

Entonces se tendría que:

$$f(2.02, 0.97) \approx 2.96$$

La aproximación que obtenemos es mediante el plano tangente, es decir, $L(x, y)$ corresponde al plano tangente a la función f en el punto (a, b). La ecuación de este, está dada por:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x - b)$$

En un punto (a, b, c) está dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - c) = 0$$

1. Determine la ecuación del plano tangente al elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^4 = 16$ en el punto $(1, 2, 2)$. (I2 - TAV - 2020)

   Tenemos $4x^2 + 2y^2 + z^4 - 16 = 0$. Para esto solo buscamos lo necesario.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, 2) = 8x\Big|_{(1,1,1)} = 8$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, 2) = 4y\Big|_{(1,1,1)} = 8$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, 2) = 4z^3\Big|_{(1,1,1)} = 32$$

   Juntamos todo:

$$8(x - 1) + 8(y - 2) + 32(z - 2) = 0$$

   Desarrollando lo anterior se llega a que la ecuación del plano pedida es:

$$x + y + 4z = 11$$

2. Encuentre el único punto de intersección con el eje z, del plano tangente a la superficie

$$xy^2 - xy + 3x^3y - z = 0$$

en $(1, 3, 15)$. (I3 - 1 - 2022)

Primero calculamos el plano tangente.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,15) = y^2 - y + 9x^2y\Big|_{(1,3,15)} = 33$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3,15) = 2yx - x + 3x^2\Big|_{(1,3,15)} = 8$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,3,15) = -1\Big|_{(1,3,15)} = -1$$

Reuniendo todo tenemos:

$$33(x-1) + 8(y-3) + -1(z-15) = 0$$

$$\Rightarrow\ 33x + 8y - z = 42$$

Ahora nos interesa la intersección con el eje z, por lo cual hacemos $x = y = 0$. Teniendo así:

$$z = -42$$

Por lo tanto el plano intersecta al eje z en $(0, 0, -42)$

3. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = ycos(x/2)$ en el punto $(\alpha, \beta, f(\alpha, \beta))$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta,0) = \frac{-ysin(x/2)}{2}\Big|_{(\alpha,\beta,f(\alpha,\beta))} = \frac{-\beta sin(\alpha/2)}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta,0) = cos(x/2)\Big|_{(\alpha,\beta,f(\alpha,\beta))} = cos(\alpha/2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta,0) = 1\Big|_{(\alpha,\beta,f(\alpha,\beta))} = -1$$

La ecuación del plano pedida es:

$$\frac{-\beta sin(\alpha/2)}{2}(x-\alpha) + cos(\alpha/2)(y-\beta) - (z - f(\alpha,\beta)) = 0$$

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $g(0) = -1$ y $g'(0) = 2$. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = xyg\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(2,2,f(2,2))$. (I3 - TAV - 2023)

Para esto solo buscamos lo necesario.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yg\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + xyg'\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\frac{-1}{x^2}\Big|_{(2,2)} = 2g(0) + 4g'(0)\frac{-1}{2^2} = -4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xg\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + xyg'\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2} = 2g(0) + 4g'(0)\frac{1}{2^2} = 0$$

Ahora sustituimos todo en la ecuación del plano.

$$z = -4(x-2) + 0(y-2) + f(2,2)$$
$$z = -4x + 8 + 4g(0)$$
$$\Rightarrow\ z = -4x + 4$$

3.4 Diferenciabilidad

Diremos que una función es diferenciable en (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\left|f(x,y) - L(x,y)\right|}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$$

Donde:

- $\|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$
- $L(x,y) = f(a,b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$

Algunos teoremas y consideraciones:

Sea $z = f(x,y)$

- Si $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) entonces f es continua en (a,b)
- En general el reciproco es falso. Continuidad no implica diferenciabilidad
- Si $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) entonces las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen en (a,b)
- Nuevamente el reciproco en general es falso. La existencia de las derivadas parciales no implica diferenciabilidad
- $L(x,y)$ se calcula con el punto en cuestión donde se quiere ver si es diferenciable

1. Demostrar que la función lineal $z = Ax + By + C$ es diferenciable en cualquier punto (α, β). Con $A, B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   Para esto buscamos lo necesario.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = A\Big|_{(a,b)} = A$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = B\Big|_{(a,b)} = B$$

   Ahora calculamos el respectivo limite:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\big|Ax + By + C - A\alpha - B\beta - C - A(x-\alpha) - B(y-\beta)\big|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|Ax + By + C - A\alpha - B\beta - C - Ax + A\alpha - By + B\beta|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|Ax - Ax + By - By + B\beta - B\beta + C - C - A\alpha + A\alpha|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{0}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

   Como se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\big|f(x,y) - L(x,y)\big|}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$ para cualquier punto (a, b), se concluye que la función z es diferenciable para cualquier punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Determine si $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ es diferenciable en $(0, 0)$.

   Para esto, recordamos que en la sección de limites se demostró que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

   no existe. Debido a esto, podemos recordar un teorema, el cual señala que si una función f es diferenciable en (a, b) entonces es continua en (a, b). Esto recae en calcular el limite en dicho punto, en nuestro caso no existe el limite en $(0, 0)$, por lo cual no es continua en $(0, 0)$, implicando que no sea diferenfiable en $(0, 0)$. Esto debido a que podemos negar el teorema de la siguiente forma:

   Si f no es continua en (a, b), entonces no es diferencible en (a, b)

   Por lo tanto, $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en $(0, 0)$. También se pudo calcular el limite señalado al principio de la sección, pero resulta muy complicado.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy + y^2 & si\ x \neq y \\ x + y & si\ x = y \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

b) ¿ Es f diferenciable en $(0,0)$? (I2 - TAV - 2020)

a)

Dado que está definida a trozos, ocupamos la definición de parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + h\cdot 0 + 0^2 - (0+0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h+0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0^2 + 0\cdot h + h^2 - (0+0)}{h} = 0$$

b)

Aprovechando lo del apartado *a*), podemos calcular el limite respectivo:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big|f(x,y) - L(x,y)\big|}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y-0|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Si tomamos $y = x$ se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x+x|}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Luego, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\big|f(x,y) - L(x,y)\big|}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}}$ no existe, f no es diferenciable en $(0,0)$.

4. Demostrar por definición que $f(x,y) = cos(x+y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

   Buscamos lo necesario:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -sin(x+y)\Big|_{(0,0)} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -sin(x+y)\Big|_{(0,0)} = 0$$
$$L(x,y) = cos(0+0) + 0(x-0) + 0(y-0) = cos(0) = 1$$

   Ahora calculamos el respectivo limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|cos(x+y)-1\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{\left|cos(rcos(\theta)+rsin(\theta)-1\right|}{\sqrt{r^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\left|cos(r(cos(\theta)+sin(\theta)))-1\right|}{r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

5. Demostrar por definición que $f(x,y) = e^{xy}$ es diferenciable en $(1,0)$.

   Buscamos lo necesario:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = ye^{xy}\Big|_{(1,0)} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = xe^{xy}\Big|_{(1,0)} = 1$$
$$L(x,y) = e^{0\cdot 0} + 0(x-1) + 1(y-0) = 1+y$$

   Ahora calculamos el limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{|e^{xy}-1-y|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{e^{(1+rcos(\theta))rsin(\theta)}-1-rsin(\theta)}{\sqrt{(1+rcos(\theta)-1)^2+r^2sin(\theta)}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{e^{rsin(\theta)+r^2cos(\theta)sin(\theta)}-1-rsin(\theta)}{\sqrt{r^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{e^{rsin(\theta)+r^2cos(\theta)sin(\theta)}-1-rsin(\theta)}{r} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{r\to 0} (sin(\theta)+2rsin(\theta)cos(\theta))e^{rsin(\theta)+r^2cos(\theta)sin(\theta)} - sin(\theta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

6. Considere la funcion $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, en caso que esta exista.

b) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$? (I2 - TAV - 2019)

a) Usando la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

b) Ya tenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, por lo cual buscamos $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ para calcular el limite correspondiente.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0h^2}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Ahora calculamos el limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Si tomamos $y = mx$, con $m > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2m|x|}{(x^2+m^2x^2)\sqrt{x^2+m^2x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2m|x|}{x^2(1+m^2)\sqrt{x^2+m^2x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m|x|}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m|x|}{|x|\sqrt{1+m^2}} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \end{aligned}$$

Luego, como el limite depende de m, el limite original no existe, por lo cual no es diferenciable en $(0,0)$. También se pudo haber usado polares y haber llegado a que el limite depende de θ.

7. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\alpha$$

Determine para que valores de α la función resulta diferenciable en $(0,0)$.

Hint: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tiene que $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$

Siguiendo el hint, en nuestro caso tendríamos $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$. Buscamos lo necesario:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \alpha x (x^2 + y^2)^{\alpha/2 - 1}\Big|_{(0,0)} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \alpha y (x^2 + y^2)^{\alpha/2 - 1}\Big|_{(0,0)} = 0$$

Ahora calculando el limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|(x^2+y^2)^{\alpha/2} - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|(x^2+y^2)^{\alpha/2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|(x^2+y^2)^{\alpha/2}\right|}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|(x^2+y^2)^{\alpha/2 - 1/2}\right|
\end{aligned}$$

Nos interesa que este limite sea igual a 0, ya que por definición es diferenciable si este limite vale 0. Esto pasa cuando $\alpha/2 - 1/2 > 0$, es decir, cuando $\alpha > 1$ la función es diferenciable en el $(0,0)$.

3.5 Regla de la cadena

Supongamos que tenemos $z = f(x(t,u), y(t,u))$. Las parciales respecto a t y u se calculan mediante:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Mas generalmente se tiene:

Sea $z = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, una función diferenciable de m variables independientes, y sea $x_i = x(t_1, t_2, ..., t_n)$, con $i \in 1, .., m$, una función diferenciable de n variables independientes. Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_j}$$

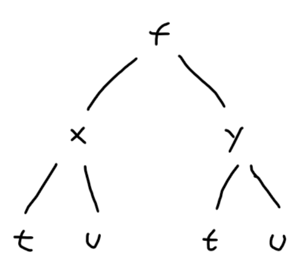
Para cualquier $j \in 1, 2, ..., n$

Si queremos $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$, o $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$, se procede mediante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

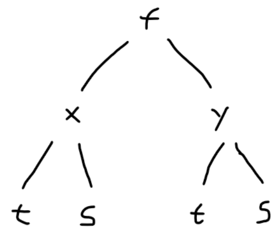
Y luego volver a aplicar la regla de la cadena.

En algunos casos se sugiere hacer un dibujo o diagrama de árbol para ver lo que sucede y no perderse, aunque no es tan necesario. A modo de ejemplo en la primera definición se tendría:



1. Encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$, si $z = f(x, y)$, $x = g(t, s)$, y $y = h(t, s)$.

   Aparenta ser un poco difícil, pero veremos que solo es aplicar la definición de la regla de la cadena. Podemos hacer un dibujo para tener una idea de lo que tenemos.



   Entonces:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$
$$= \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t}}_{D_1} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right] + \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}}_{D_2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]$$

   Calculamos D_1 usando la regla de la cadena, ya que depende de x e y.

$$D_1 = \frac{\partial x}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial t}\right] = \frac{\partial x}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]$$

   De forma análoga calculamos D_2:

$$D_2 = \frac{\partial y}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}\right] = \frac{\partial y}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right]$$

   Antes de seguir es bueno distinguir entre los paréntesis usados. El paréntesis $(\cdot)$ corresponde a la función que se tiene que derivar. Por ejemplo $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ se interpreta como la derivada de $\frac{\partial f}{\partial y}$ respecto a t. En cambio $[\cdot]$ corresponde a la multiplicación. Por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2$. También es multiplicación cuando no hay ningún paréntesis.

Reemplazando D_1 y D_2 se tiene:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial y}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right]+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]^2$$

Finalmente se tendría:

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]^2$$

Notar que si asumimos que f es una función continua, podemos recordar el teorema de Clairaut y usar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Ahora para encontrar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}$ se procede de forma similar.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

Se puede ver que es lo mismo que antes, solo que ahora es la parcial respecto a s, por lo cual podemos usar lo de antes pero con s, entonces se tendría:

$$\frac{\partial x}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right]+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)+\frac{\partial y}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right]+$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}$$

2. Sean

$$f(x, y) = x^2y + xy^2$$
$$g(s, t) = (x(s, t), y(s, t)) = (t - 2, st)$$

Usando la regla de la cadena calcule:

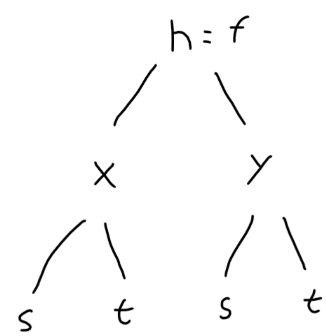
$$\frac{\partial h}{\partial s}(1, 2)$$

donde $h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$. (I3 - 2 - 2022)

Si bien parece que hay mucha información, podemos identificar algunas cosas mejor.

$$x(s, t) = t - 2$$
$$y(s, t) = st$$

En un dibujo se tendría:



Como nos piden la parcial de h, el punto $(1, 2)$ viene en variables de s y t, por lo cual cuando derivemos respecto a x e y debemos transformar este punto usando la función $g(s, t)$, de forma que:

$$x(s, t) = x(1, 2) = 2 - 2 = 0$$
$$y(s, t) = y(1, 2) = 1 \cdot 2 = 2$$

Por lo cual, cuando derivemos respecto a x e y debemos evaluar en $x = 0$ e $y = 2$.

Entonces aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial s}(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\frac{\partial x}{\partial s}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\frac{\partial y}{\partial s}(1,2) \\
&= (2xy + y^2)(0) + (x^2 + 2xy)(t) \\
&= (2 \cdot 0 \cdot 2 + 2^2)(0) + (0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 2)(1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3. Sean $w = x^2 + \dfrac{y}{x}$, $x = u - 2v + 1$, $y = 2u + v - 2$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ cuando $u = v = 0$. (I3 - 1 - 2022)

   En este caso tendríamos:

$$
\begin{aligned}
x(u,v) &= u - 2v + 1 \\
y(u,v) &= 2u + v - 2
\end{aligned}
$$

   Y como nos piden $u = v = 0$, evaluamos en lo anterior:

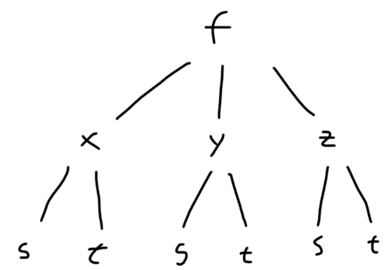
$$
\begin{aligned}
x(u,v) &= x(0,0) = 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\
y(u,v) &= y(0,0) = 2 \cdot 0 + 0 - 2 = -2
\end{aligned}
$$

   Entonces debemos evaluar con $x = 1$ e $y = -2$. Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= (2x - \frac{y}{x^2})(-2) + \left(\frac{1}{x}\right)(1) \\
&= (2 \cdot 1 - \frac{-2}{1^2})(-2) + \left(\frac{1}{1}\right)(1) \\
&= (2 + 2)(-2) + 1 \\
&= -7
\end{aligned}
$$

4. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$. Donde $f(x,y,z)=2xy+yz$, $x=s-t$, $y=st$ y $z=1-st^2$.

   Primero podemos hacer un dibujo:

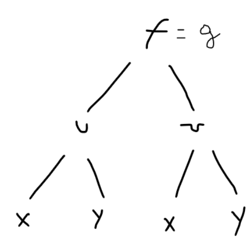
   Entonces aplicamos la regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\\
&=(2y)(-1)+(2x+z)(s)+(y)(-2st)\\
&=-2y+2xs+zs-2sty\\
&=-2(st)+2(s-t)s+(1-st^2)s-2st(st)\\
&=-2st+2s^2-2st+s-s^2t^2-2s^2t^2\\
&=-4st+2s^2+s-3s^2t^2
\end{aligned}
$$

   No es necesario dejarlo expresado de tal forma, basta con llegar a la segunda linea.

5. Sea g una función diferenciable con derivadas parciales constantes y $f(x,y)=g(xcos(y),xsin(y))$. Demuestre que $h(x,y)=\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ no depende de y. (I2 - 2 - 2021)

   Primero podemos hacer $g(u,v)$, donde $u=xcos(y)$ y $v=xsin(y)$. Y por enunciado nos dicen que las parciales de g son constantes, es decir, se tiene $\dfrac{\partial g}{\partial u}=\alpha$ y $\dfrac{\partial g}{\partial v}=\beta$, para algún $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Dibujando tendríamos:

Entonces aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \alpha cos(y) + \beta sin(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \alpha(-xsin(y)) + \beta(xcos(y)) \\ &= -\alpha xsin(y) + \beta xcos(y) \\ &= x(\beta cos(y) - \alpha sin(y))\end{aligned}$$

Ahora reemplazando en lo pedido se tiene:

$$h(x,y) = \big(x(\alpha cos(y) + \beta sin(y))\big)^2 + \big(x(\beta cos(y) - \alpha sin(y))\big)^2$$

$$= x^2\left(\alpha^2 cos^2(y) + 2\alpha\beta cos(y)sin(y) + \beta^2 sin(y)\right) + x^2\left(\beta^2 cos^2(y) - 2\alpha\beta cos(y)sin(y) + \alpha^2 sin^2(y)\right)$$

$$= x^2\left(\alpha^2 cos^2(y) + 2\alpha\beta cos(y)sin(y) + \beta^2 sin(y) + \beta^2 cos^2(y) - 2\alpha\beta cos(y)sin(y) + \alpha^2 sin^2(y)\right)$$

$$= x^2\left(\alpha^2 cos^2(y) + \alpha^2 sin^2(y) + \beta^2 sin(y) + \beta^2 cos(y) + 2\alpha\beta cos(y)sin(y) - 2\alpha\beta cos(y)sin(y)\right)$$

$$= x^2\left(\alpha^2(cos^2(y) + sin^2(y)) + \beta^2(cos^2(y) + sin^2(y))\right)$$

$$\Rightarrow\; h(x,y) = x^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

Donde claramente no depende de y, pues solo contiene la variable x.

6. Calcular eficientemente $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Donde $f(x,y) = e^{xy^2} sin(ln(y^x))arctan(y)$

Si bien podemos calcular esto a mano, nos resultará muy largo y complejo, por lo cual es mejor hacerlo de una manera eficiente. Para esto podemos hacer lo siguiente:

$$u = e^{xy^2} arctan(y)$$
$$v = sin(ln(y^x))$$

De forma que $f(x,y) = h(u(x,y), v(x,y)) = uv$. Para poder aplicar la regla de la cadena.

Entonces usamos la regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= v\left(2yxe^{xy^2}arctan(y) + \frac{e^{xy^2}}{1+y^2}\right) + u\left(\frac{xy^{x-1}cos(ln(y^x))}{y^x}\right) \\
&= sin(ln(y^x))\left(2yxe^{xy^2}arctan(y) + \frac{e^{xy^2}}{1+y^2}\right) + e^{xy^2}arctan(y)\left(\frac{xy^{x-1}cos(ln(y^x))}{y^x}\right)
\end{aligned}
$$

7. Si $z = f(u,v)$. Donde $u = ln(x+y)$, $v = ln(x-y)$ y f tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que:

$$
(x^2-y^2)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}
$$

(I2 - TAV - 2020). Para esto desarrollaremos el lado izquierdo.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{x-y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{x+y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{1}{x-y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{1}{x+y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{1}{x-y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{-1}{(x-y)^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{1}{x+y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{-1}{(x+y)^2}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{x-y}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{1}{x+y}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]
+ \frac{\partial f}{\partial v}\frac{-1}{(x-y)^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{-1}{(x+y)^2}
$$

$$
= \frac{1}{x-y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x+y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{1}{x-y}\right] + \frac{1}{x+y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{x+y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{1}{x-y}\right]
+ \frac{\partial f}{\partial v}\frac{-1}{(x-y)^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{-1}{(x+y)^2}
$$

$$
= \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{1}{x^2-y^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{(x-y)^2}
- \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{x+y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{-1}{x-y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{1}{x+y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{-1}{x-y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{x-y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{1}{x+y} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{-1}{x-y} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{(x-y)^2}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{x+y}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{-1}{x-y}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right]
$$
$$
-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{(x-y)^2}
$$

$$
= \frac{1}{x+y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{x+y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{-1}{x-y}\right] - \frac{1}{x-y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x+y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{-1}{x-y}\right]
$$
$$
-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{(x-y)^2}
$$

$$
= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{1}{x^2-y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2}
$$
$$
-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{(x-y)^2}
$$

Ahora solo reemplazamos:

$$
(x^2-y^2)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{1}{x^2-y^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2}\right.
$$
$$
\left. -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x^2-y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{(x-y)^2}\right]
$$

$$
= (x^2-y^2)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x^2-y^2}\right]
$$

Por enunciado nos dicen que f tiene segundas derivadas parciales continuas, por lo cual podemos aplicar Clairaut.

$$
(x^2-y^2)\left[4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{1}{x^2-y^2}\right] = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}
$$

3.6 Derivación Implícita

Si tenemos una función $F(x, y, z) = 0$, donde no podemos despejar z, y queremos calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ o $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, se definen las siguientes formulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z}$$

1. Sea $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$$
$$F(z, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$$

Ahora buscamos lo necesario.

$$F_x = 3x^2 + 6yz$$
$$F_y = 3y^2 + 6xz$$
$$F_z = 3z^2 + 6yx$$

Reemplazando todo se tiene que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(3x^2 + 6yz)}{3z^2 + 6yx}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(3y^2 + 6xz)}{3z^2 + 6yx}$$

2. Si $x - z = arctan(yz)$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. (I2 - 1 - 2017)

$$x - z = arctan(yz)$$
$$arctan(yz) + z - x = 0$$
$$F(x, y, z) = arctan(yz) + z - x$$

Ahora buscamos lo necesario.

$$F_x = -1$$
$$F_y = \frac{z}{1 + (yz)^2}$$
$$F_z = \frac{y}{1 + (yz)^2} + 1$$

Reemplazando todo se tiene que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(-1)}{\dfrac{y}{1+(yz)^2}+1} = \frac{1+(yz)^2}{1+y+(yz)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{z}{1+(zy)^2}}{\dfrac{y}{1+(yz)^2}+1} = \frac{-z}{1+z+(yz)^2}$$

3.7 Derivada direccional y su vector gradiente

Recordemos que las derivadas parciales son cuando dejamos una variable fija, por lo cual solo estaríamos calculando las parciales dejando fija una variable y en direcciones limitadas. Justamente por lo anterior, con la derivada direccional podemos elegir la dirección que queramos. Dado un vector unitario $u = \langle a, b\rangle$, la derivada direccional se obtiene mediante:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Siempre que f sea una función derivable de x e y. Para obtener la pendiente de la recta tangente en el punto de interés (x_0, y_0) solo se evalúa en este punto.

Se define el vector gradiente como

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle$$

Si evaluamos en (x_0, y_0), el gradiente nos entrega el vector que apunta en la dirección del ascenso mas pronunciado.

El valor máximo del la derivada direccional $D_u f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$. Notar que ahora podemos definir $D_u f(x, y) = \nabla f \cdot \langle a, b\rangle$

Ahora con el gradiente podemos definir la ecuación del plano en un punto (x_0, y_0) de la siguiente manera:

$$z = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0\rangle + f(x_0, y_0)$$
$$z = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0\rangle + f(x_0, y_0)$$

Y para un punto (x_0, y_0, z_0):

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$
$$\langle f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

Para calcular la ecuación del plano tangente a una superficie, el gradiente nos indica el vector normal del plano. Notar que si se desarrolla lo anterior se llega a la ecuación del plano conocida.

1. Encontrar la derivada direccional de la función $f(x, y) = xy$ en dirección del vector $\overrightarrow{v} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

   Buscamos lo necesario.

$$f_x = y$$
$$f_y = x$$
$$\Rightarrow \quad D_u f(x, y) = y\frac{1}{2} + x\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-1, 3)$ de la función $f(x, y) = x^2 y$, en dirección del vector $\overrightarrow{v} = \langle 3, 4 \rangle$. Interprete geométricamente que sucede.

   Para esto solo necesitamos la derivada direccional. Recordando que si queremos la pendiente, el vector debe ser unitario. Entonces lo normalizamos:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Nuestro nuevo vector normalizado es: } \overrightarrow{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

   Ahora si buscamos lo necesario.

$$f_x = 2xy$$
$$f_y = x^2$$
$$\Rightarrow \; D_u f(x, y) = 2xy\frac{3}{5} + x^2\frac{4}{5}$$

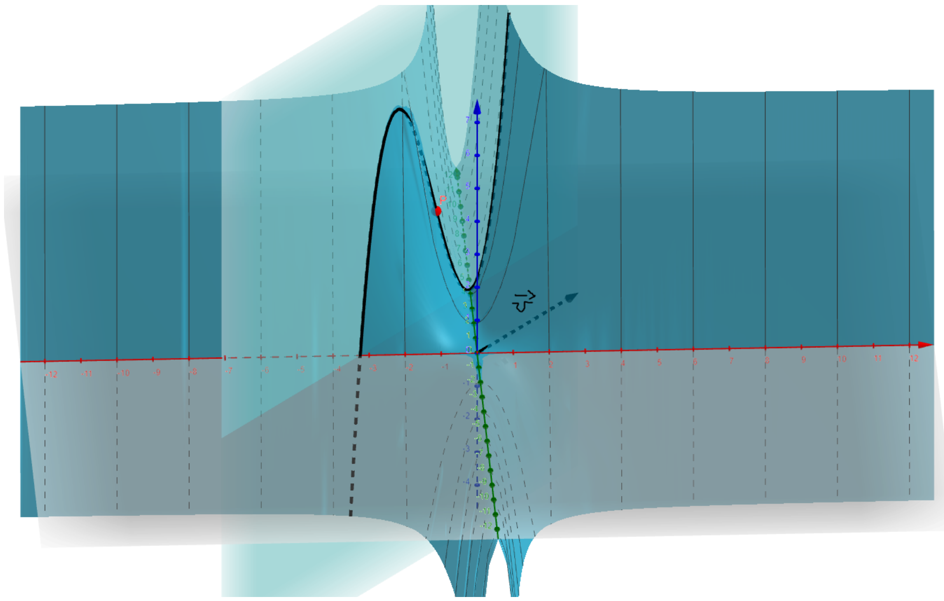
   Evaluamos en el punto P.

$$D_u(-1, 3) = 2 \cdot -1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{14}{5}$$

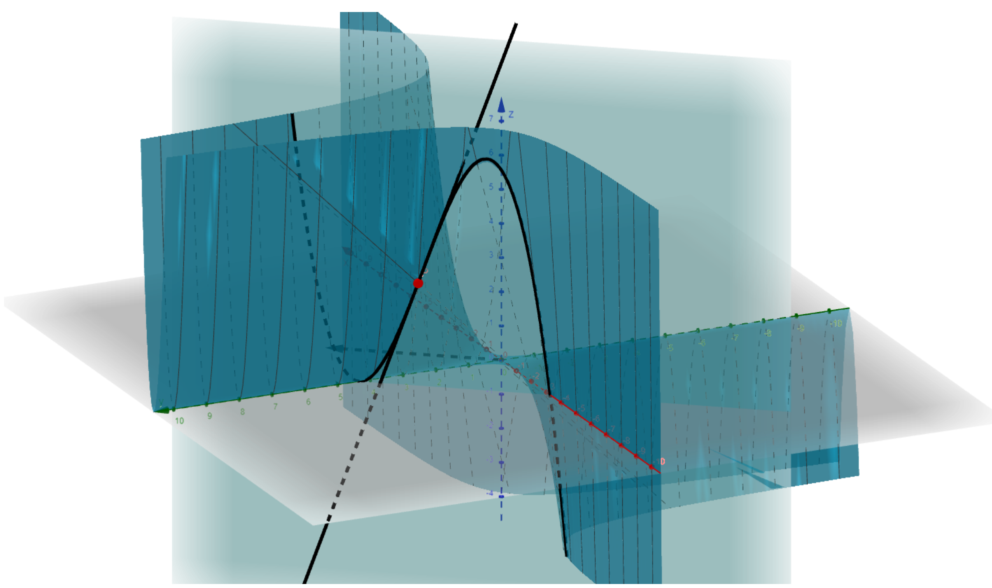
   Ahora, para interpretar que sucede podemos graficar la función, el punto y el vector.

   Como la derivada direccional es negativa, esto quiere decir que en dirección del vector $\overrightarrow{v}$ y en el punto P, la recta tangente es negativa, por lo cual decrece en esta dirección.

En la siguiente imagen se aprecia la dirección del vector y la traza resultante.



En la siguiente imagen se aprecia la recta tangente en el punto P. También se aprecia que la derivada direccional es negativa, pues en la dirección del vector y en P, la función decrece.



3. Suponga que la temperatura, en grados Celcius, el el punto (x, y) de una lamina de metal es:

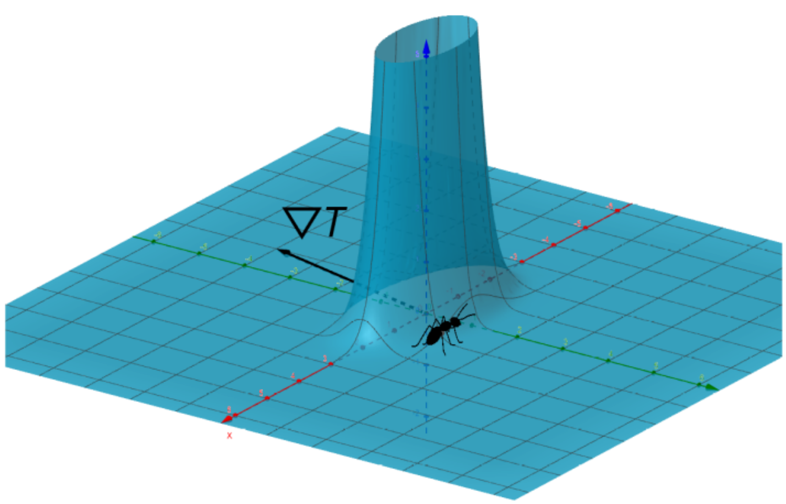
$$T(x, y) = 30e^{-(x^2+4y^2)}$$

Suponga que en el punto $(1, 1)$ hay una hormiga que esta apunto de moverse con velocidad unitaria. ¿En que dirección se debe mover la hormiga de manera tal que experimente el aumento mas rápido de temperatura? (I3 - 2 - 2022)

Para determinar donde hay un mayor aumento de la temperatura, usamos el gradiente. Por lo cual buscamos el gradiente y evaluamos en el punto $(1, 1)$.

$$\nabla T(x, y) = \langle -60xe^{-(x^2+4y^2)}, -240ye^{-(x^2+4y^2)} \rangle$$
$$\nabla T(1, 1) = \langle -60e^{-5}, -240e^{-5} \rangle$$
$$\text{Multiplicando por } \frac{1}{60e^{-5}} \text{ obtenemos:}$$
$$\langle -1, -4 \rangle$$

El vector anterior es mucho mas fácil de visualizar. En la siguiente imagen se aprecia lo anterior calculado.



4. Determine los puntos en los cuales la dirección máxima de la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es la del vector $(1, 1)$. (I2 - TAV - 2019)

   Por enunciado ya tenemos el vector resultante del gradiente, es decir, tenemos $\nabla f(a, b) = \langle 1, 1\rangle$, donde (x, y) corresponde al punto buscado. Entonces desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= \langle 2x - 2, 2y - 4\rangle \\
\langle 1, 1\rangle &= \langle 2x - 2, 2y - 4\rangle \\
\Rightarrow\ 1 = 2x - 2 \ \Rightarrow\ x &= \frac{3}{2} \\
\Rightarrow\ 1 = 2y - 4 \ \Rightarrow\ y &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, el punto buscado es $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

5. Sea f una función diferenciable tal que sus derivadas direccionales en el punto $(1, 2)$ en las direcciones de los vectores $(1, 1)$ y $(1, -3)$ son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$, respectivamente. Hallar el valor de las derivadas parciales $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$. (I2 - 2 - 2016)

   Por enunciado tenemos:

$$\begin{cases} D_u f(1, 2) = \sqrt{2} \\ D_u f(1, 2) = \sqrt{10} \end{cases}$$

   Como los vectores deben ser unitarios, se deben que normalizar. Luego de hacer lo mencionado usamos la definición de la derivada direccional:

$$\begin{cases} \nabla f(1, 2) \cdot \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle = \sqrt{2} \\ \nabla(1, 2) \cdot \langle 1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}\rangle = \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle f_x(1, 2), f_y(1, 2)\rangle \cdot \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle = \sqrt{2} & / \cdot \sqrt{2} \\ \langle f_x(1, 2), f_y(1, 2)\rangle \cdot \langle 1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}\rangle = \sqrt{10} & / \cdot \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(1, 2) + f_y(1, 2) = 2 \\ f_x(1, 2) - 3f_y(1, 2) = 10 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema se obtiene que $f_x(1, 2) = 4$ y $f_y(1, 2) = -2$

6. Calcular el plano tangente a la función $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en el punto $(2, 0, \sqrt{12})$.

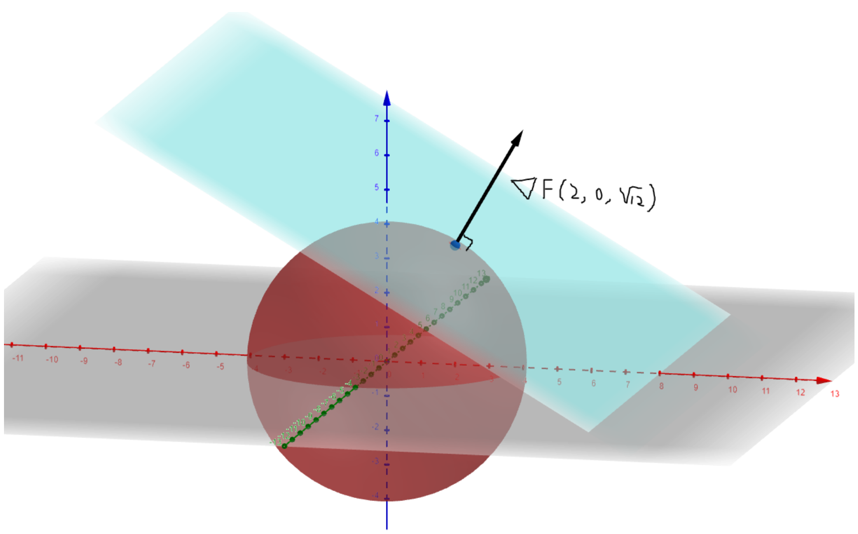
$$\nabla F(x, y, z) = \langle 2x, 2y, 2z \rangle$$

Evaluamos en el punto

$$\nabla F(2, 0, \sqrt{12}) = \langle 4, 0, 2\sqrt{12} \rangle$$

Recordando la ecuación del plano tangente sugerida al inicio se tiene:

$$\langle 4, 0, 2\sqrt{12} \rangle \cdot \langle x - 2, y - 0, z - \sqrt{12} \rangle = 0$$
$$4(x - 2) + 0(y - 0) + 2\sqrt{12}(z - \sqrt{12})$$
$$4x + 2\sqrt{12}z - 32 = 0$$



7. Suponga que una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está definido por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = i + j - k$

b) ¿En que dirección cambia V con mayor rapidez en P?

c) ¿Cual es la razón máxima de cambio en P? (I2 - 1 - 2017)

a)

Notar que $\overrightarrow{v}$ corresponde al vector $\langle 1, 1, -1\rangle$. Para calcular la razón de cambio usamos la derivada direccional. Pero primero normalicemos el vector.

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Ahora usamos el vector $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$ para calcular la derivada direccional.

$$\begin{aligned} D_uV(x, y, z) &= \nabla V(x, y, z) \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \\ &= \langle 10x - 3y + yz, -3x + xz, xy\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \end{aligned}$$

Evaluamos en $P(3, 4, 5)$

$$\begin{aligned} D_uV(3, 4, 5) &= \langle 38, 6, 12\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \\ &= \frac{32}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

La razón de cambio del potencial en P es $\frac{32}{\sqrt{3}}$.

b)

Para ver la dirección hay que evaluar en el gradiente.

$$\nabla V(x, y, z) = \langle 10x - 3y + yz, -3x + xz, xy\rangle$$
$$\nabla V(3, 4, 5) = \langle 38, 6, 12\rangle$$

La dirección en que V cambia con mayor rapidez en P es la del vector $\langle 38, 6, 12\rangle$.

c) La razón máxima de cambio es la norma del vector obtenido anteriormente. Recordar que la máxima razón de cambio esta dada por $\|\nabla f\|$.

$$\|V(3, 4, 5)\| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624}$$

8. Encuentre el plano tangente a la función $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y e^{-t^2}\,dt$ en el punto $(0, 0)$. Usando esto, estime el valor de la integral $\displaystyle\int_{-0.1}^{0.1} e^{-t^2}\,dt$.

   Buscamos lo necesario y recordamos el teorema fundamental del calculo.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x^2}\Big|_{(0,0)} = -1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-y^2}\Big|_{(0,0)} = 1$$

   Evaluamos todo en la ecuación del plano.

$$z = -1(x - 0) + 1(y - 0) + f(0, 0)$$
$$z = -x + y + \int_0^0 e^{-t^2}\,dt$$
$$\Rightarrow\ z = -x + y$$

   Ahora recordamos que la aproximación lineal de $f(x, y)$ es el plano tangente al punto de interés, por lo cual solo basta evaluar el punto en particular que queremos. En nuestro caso es $(0.1, -0.1)$.

$$f(x, y) \approx -x + y$$
$$\int_x^y e^{-t^2}\,dt \approx -x + y$$

$$\text{Entonces se tendría que } \int_{-0.1}^{0.1} e^{-t^2}\,dt \approx 0.2$$

4 Aplicaciones de las derivadas parciales

4.1 Máximos y mínimos

En esta sección solo necesitamos saber derivar y resolver sistemas de ecuaciones, además de recordar graficar funciones como en calculo I. Para obtener los puntos críticos se resuelve $F_x = 0$ y $F_y = 0$. La mayoría de veces recae en resolver un sistema de ecuaciones. Para determinar a que tipo de punto critico corresponde, se define

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = F_{xx}F_{yy} - [F_{xy}]^2$$

Evaluamos en el punto en D, obteniendo lo siguiente:

- Si $D(a,b) > 0$ y $F_{xx}(a,b) > 0$, entonces $f(a,b)$ es un mínimo local.
- Si $D(a,b) > 0$ y $F_{xx}(a,b) < 0$, entonces $f(a,b)$ es un máximo local.
- Si $D < 0$ entonces $f(a,b)$ es un punto silla.
- Si $D = 0$ la prueba no entrega información. Se sugiere analizar mediante una gráfica.

1. Encuentre los puntos críticos de

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$$

y clasifíquelos como mínimo, máximo o punto silla. (Examen - 1 - 2022)

Para esto calculamos las parciales necesarias.

$$F_x = 2x - y + 2 \qquad F_{xx} = 2$$
$$F_y = -x + 2y + 2 \qquad F_{yy} = 2$$
$$F_{xy} = -1$$

Ahora buscamos los puntos críticos. Obtenemos el siguiente sistema:

$$F_x = 0$$
$$F_y = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

De donde se obtiene el único punto critico $P = (-2, -2)$.

Ahora buscamos D.

$$D = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3$$

Notamos que $D > 0$. Ahora evaluamos en F_{xx}, pero $F_{xx} = 2 > 0$, por lo cual el único punto critico corresponde a un mínimo local, cuyo valor es $f(-2, -2) = -8$.

2. Clasifique los puntos críticos de la función:

$$f(x, y) = 7x - 8y + 2xy - x^2 + y^3$$

(I3 - TAV - 2023)

Buscamos las parciales necesarias.

$$F_x = 7 + 2y - 2x \qquad F_{xx} = -2$$
$$F_y = -8 + 2x + 3y^2 \qquad F_{yy} = 6y$$
$$F_{xy} = 2$$

Ahora buscamos los puntos críticos.

$$\begin{cases} 7 + 2y - 2x = 0 \\ -8 + 2x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones para que se nos cancele el termino $2x$.

$$-1 + 2y + 3y^2 = 0$$
$$3y^2 + 2y - 1 = 0$$
$$(3y - 1)(y + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \; y = -1 \wedge y = \frac{1}{3}$$

Ahora reemplazamos en la primera ecuación.

$$y = -1$$
$$7 + 2(-1) - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{5}{2}$$

De aca obtenemos $P_1 = (5/2, -1)$

$$y = \frac{1}{3}$$
$$7 + 2(1/3) - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{23}{6}$$

De aca obtenemos $P_2 = (23/6, 1/3)$

Ahora buscamos D.

$$D = (-2)(6y) - 2^2 = -12y - 4$$

Ahora evaluamos P_1 y P_2.

$P_1 = (5/2, -1)$

$$D = -12(-1) - 4 = 8$$

Tenemos $D > 0$. Ahora evaluamos en F_{xx}, pero $F_{xx} = -2 < 0$, por lo que P_1 corresponde a un máximo.

$P_2 = (23/6, 1/3)$

$$D = -12(1/3) - 4 = -8$$

Tenemos $D < 0$, por lo cual P_2 corresponde a un punto silla.

Finalmente se concluye que P_1 es un máximo local y P_2 un punto silla.

3. Sea $f(x,y) = xy(2x+4y+1)$. Encuentre y clasifique los puntos críticos de f como máximo relativo, mínimo relativa o silla. (Examen - TAV - 2022)

Lo mismo que antes.

$$F_x = y(4x + 4y + 1) \qquad F_{xx} = 4y$$
$$F_{yy} = x(8y + 2x + 1) \qquad F_{yy} = 8x$$
$$F_{xy} = 8y + 4x + 1$$

Se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} y(4x + 4y + 1) = 0 \\ x(8y + 2x + 1) = 0 \end{cases}$$

Ahora parece que no es tan simple como las veces anteriores. Para estos casos es mejor abarcar todos los casos posibles. Es decir, resolver los sistemas resultantes.

Estos se obtienen mediante todas las combinaciones posibles. En nuestro caso se obtendrían los siguientes:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ 8y + 2x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 4x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 4y + 1 = 0 \\ 8y + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo cada sistema particular se obtienen los siguientes puntos:

- $P_1 = (0, 0)$
- $P_2 = (-1/2, 0)$
- $P_3 = (0, -1/4)$
- $P_4 = (-1/6, -1/12)$

Calculamos D.

$$D = (4y)(8x) - (8x + 4y + 1)^2 = 32yx - (8y + 4x + 1)^2$$

Ahora analizamos cada uno.

$P_1 = (0, 0)$

$$D = 0 - (1)^2 = -1$$

Como $D < 0$, es un punto silla

$P_2 = (-1/2, 0)$

$$D = 0 - (-1)^2 = -1$$

Como $D < 0$, es un punto silla

$P_3 = (0, -1/4)$

$$D = 0 - (-1)^2 = 1$$

Como $D < 0$, es un punto silla

$P_4 = (-1/6, -1/12)$

$$D = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$F_{xx} = 4(-1/12) = \frac{-1}{3}$$

Como $D > 0$ y $F_{xx} < 0$, es un máximo local.

4. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2y - x^2 - 2y^2$ y para cada punto determine si es un máximo/mínimo local o punto de silla. (I3 - 2 - 2021)

   Lo mismo que antes.

$$F_x = 2xy - 2x \qquad F_{xx} = 2y - 2$$
$$F_y = x^2 - 4y \qquad F_{yy} = -4$$
$$F_{xy} = 2x$$

   El sistema nos queda como

$$\begin{cases} 2xy - 2x = 0 \\ x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

   Para resolverlo podemos hacerlo de diversas maneras. En este caso se despejara la ecuación de abajo para reemplazar en la primera.

$$x^2 - 4y = 0$$
$$y = \frac{x^2}{4}$$
$$\Rightarrow\ 2x(x^2/4) - 2x = 0$$
$$\frac{x^3}{2} - 2x = 0$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x = 0 \wedge x = \pm 2$$

   Reemplazando en la primera o segunda ecuación cada valor.

$$x = 0$$
$$(0)^2 - 4y = 0$$
$$y = 0$$
$$\text{De acá obtenemos } P_1 = (0,0)$$
$$x = \pm 2$$
$$(\pm 2)^2 - 4y = 0$$
$$4 - 4y = 0$$
$$y = 1$$
$$\text{De acá obtenemos } P_2 = (2,1) \text{ y } P_3 = (-2,1)$$

Buscamos D.

$$D = (2y - 2)(-4) - (2x)^2 = -4x^2 - 8y + 8$$

Ahora analizamos cada punto.

$P_1 = (0, 0)$

$$D = -4(0)^2 - 8(0) + 8 = 8$$
$$F_{xx} = 2(0) - 2 = -2$$

Como $D > 0$ y $F_{xx} < 0$, corresponde a un máximo local.

$P_2 = (-2, 1)$

$$D = -4(-2)^2 - 8(1) + 8 = -16$$

Como $D < 0$, corresponde a un punto silla.

$P_3 = (2, 1)$

Por simetría con el anterior, se tiene $D < 0$, correspondiente a un punto silla.

Los sistemas resultantes no tienen única forma de resolver, por lo cual cada uno puede proceder de la forma que mas le acomode. Siempre recordar confirmar las soluciones, ya que si en una ecuación no se cumple la solución encontrada, entonces no es valida.

5. Calcule la distancia mas corta desde el punto $(1,0,-2)$ al plano $x+3y+z=4$.

Recordamos que la distancia entre dos puntos (x,y,z) y (a,b,c) esta dada por:

$$d=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

Entonces, la distancia entre un punto (x,y,z) y $(1,0,-2)$ esta dado por:

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2}$$

Pero recordamos que si el punto (x,y,z) se encuentre en el plano, se tiene $z=4-3y-x$, por lo cual podemos reemplazar en d.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ d&=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(4-3y-x+2)^2}\\ d&=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(6-3y-x)^2}\end{aligned}$$

Ahora podemos minimizar la siguiente función:

$$d^2=f(x,y)=(x-1)^2+y^2+(6-3y-x)^2$$

Calculamos las derivadas.

$$\begin{aligned}F_x&=4x+6y-14 & F_{xx}&=4\\ F_y&=6x+20y-36 & F_{yy}&=20\end{aligned}$$
$$F_{xy}=6$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases}4x+6y-14=0\\ 6x+20y-36=0\end{cases}$$
$$x=\frac{23}{8}\qquad y=\frac{5}{12}$$

Notamos que $D=80-6>0$ y $F_{xx}>0$, por lo cual el único punto critico es un mínimo local. Ahora reemplazamos $x=\frac{23}{8}$ y $y=\frac{5}{12}$ en d.

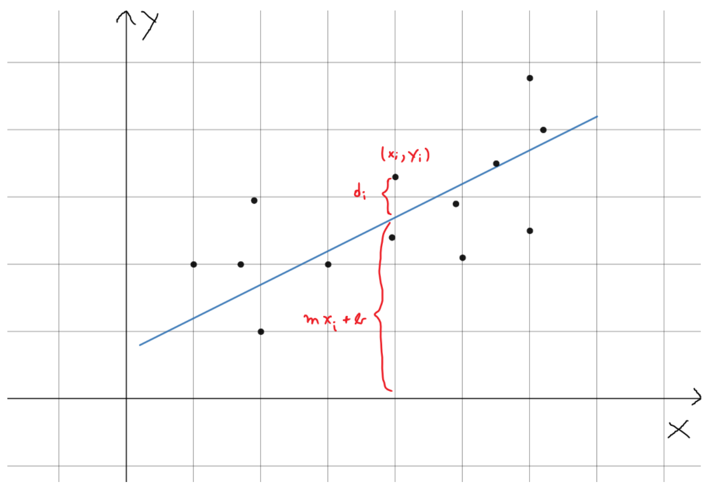
$$d=\sqrt{(23/8-1)^2+(5/12)^2+(6-3(5/12)-23/8)^2}=\frac{5}{24}\sqrt{166}$$

Por lo tanto, la distancia mar corta desde el punto $(1,0,-2)$ al plano $x+3y+z=4$ es de $\frac{5}{24}\sqrt{166}$

6. El método de mínimos cuadrados se aplica para ajustar rectas a una serie de datos presentados como punto en el plano. Supongamos que se tienen los siguientes datos para las variables x,y

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y_1	y_2	y_2	$\cdots$	y_n

Los puntos no quedan exactamente sobre una recta, por lo cual hay que buscar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ se ajuste a los puntos tanto como sea posible. Esta situación se puede presentar en estudios experimentales, donde se estudia la variación de cierta magnitud x en función de otra magnitud y. Juega un rol fundamental en estadística.



Sea $d_i = y_i - (mx_i + b)$ la desviación vertical del punto (x_i, y_i) a partir de la recta, es decir, se requiere que $S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (mx_i + b))^2$ sea lo mas pequeño posible.

Encuentre la recta que mejor se adapta a los datos según lo anterior expuesto.

Como los datos/valores x_i e y_i son valores fijos, se tiene una función de b y m tal que

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (mx_i + b))^2$$

Buscamos lo necesario. Recordar que $\frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{n} f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$

$$F_m = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (mx_i + b))(-x_i) \qquad F_{mm} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i^2$$

$$F_b = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (mx_i + b))(-1) \qquad F_{bb} = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n$$

$$F_{mb} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i$$

El sistema nos queda como:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (mx_i + b))(-x_i) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (mx_i + b))(-1) = 0 \end{cases}$$

Para lo anterior podemos reordenar algunas cosas. Iniciemos por la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (mx_i + b)) = 0 \; &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} mx_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} b \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i = nb \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} - m\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = b \end{aligned}$$

Sea $\overline{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ y $\overline{y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}$. Se tendría que:

$$b = \overline{y} - m\overline{x}$$

Ahora podemos reemplazar esto en la primera ecuación.

Ordenamos primero.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (mx_i + b))(-x_i) = 0 &\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\
&\Rightarrow m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\
\textit{Recordamos que } \ b = \overline{y} - m\overline{x} & \\
&\Rightarrow m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\overline{y} - m\overline{x})\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\
&\Rightarrow m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{y} x_i - m\sum_{i=1}^{n} \overline{x} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\
&\Rightarrow m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{x} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{y} x_i \\
&\Rightarrow m\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y} x_i \\
&\Rightarrow m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x} x_i}
\end{aligned}$$

Ya que tenemos todo despejado, la función tendría un punto critico para:

$$\begin{aligned}
b &= \overline{y} - m\overline{x} \\
m &= \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x} x_i}
\end{aligned}$$

Ahora corroboremos que es un mínimo local. Calculamos D.

$$D = \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)(2n) - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Como tiene que ser un mínimo local se debe tener que:

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)(2n) - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$$

$$4n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$$

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Esto ultimo se corrobora, ya que corresponde a la desigualdad de Cauchy–Schwarz.

Por lo tanto, la recta $y = mx + b$ que mejor se adapta a un conjunto de datos (x_i, y_i) esta dada por:

$$b = \overline{y} - m\overline{x}$$

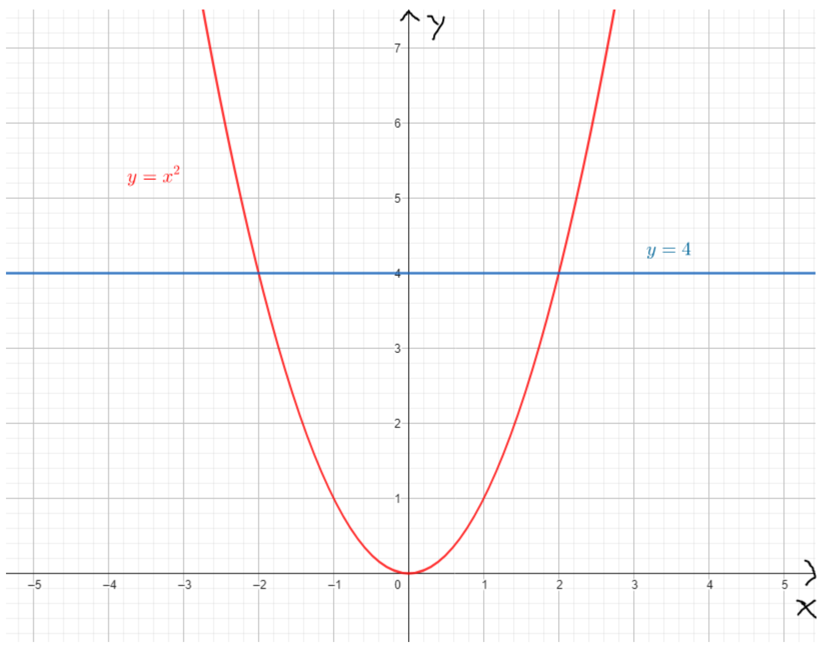
$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x} x_i}$$

4.2 Máximos y mínimos absolutos

Para esta sección necesitamos saber graficar funciones de una variable, recordando lo esencial de Calculo I.
Esto consiste en encontrar los máximos y mínimos dentro de una región acotada.

1. Encuentre el valor máximo y mínimo absoluto de $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$ sobre la región del plano xy acotada por $y = x^2$ y $y = 4$. (I3 - 1 - 2022)

   Para esto primero graficamos la región.

   Primero vemos si hay algún punto critico de la función dentro de la región, es decir, buscando mínimos y máximos normalmente.

   $$F_x = 6x$$
   $$F_y = 4y - 4$$

   Mediante el sistema

   $$\begin{cases} 6x = 0 \\ 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

   se obtiene el punto $P_1 = (0, 1)$, el cual esta dentro de la región.

Ahora empezamos a analizar la región. Tenemos las dos funciones.

- $y = x^2$
  Evaluamos en la función original.
  $$f(x, x^2) = 3x^2 + 2(x^2)^2 - 4(x^2)$$
  $$\Rightarrow\ f(x, x^2) = 2x^4 - x^2$$
  En la región tenemos que $-2 \leq x \leq 2$, por lo cual debemos encontrar los puntos críticos de la función anterior en este intervalo. Para esto derivamos.
  $$f'(x, x^2) = 8x^3 - 2x = 0$$
  $$\Rightarrow\ 2x(4x^2 - 1) = 0$$
  De acá se obtiene $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{1}{-2}$. Todos se encuentran en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.

  Ahora evaluamos cada punto en $y = x^2$ para obtener los puntos críticos.

  $x = 0$
  $$y = (0)^2 = 0$$
  Se obtiene el punto $P_2 = (0, 0)$.

  $x = \dfrac{1}{2}$
  $$y = (1/2)^2 = \frac{1}{4}$$
  Se obtiene el punto $P_3 = (1/2, 1/4)$

  $x = \dfrac{1}{-2}$
  $$y = (-1/2)^2 = \frac{1}{4}$$
  Se obtiene el punto $P_4 = (-1/2, 1/4)$
- $y = 4$
  Evaluamos en la función original.
  $$f(x, 4) = 3x^2 + 2(4)^2 - 4(4)$$
  $$f(x, 4) = 3x^2 + 16$$
  Buscamos sus puntos críticos.

$$f'(x,4) = 9x = 0$$
$$\Rightarrow\ x = 0$$

De acá solo se obtiene $x = 0$. Ahora evaluamos en la función $y = 4$, pero notamos que siempre vale 4, por lo cual se obtiene el punto $P_5 = (0, 4)$.

- Ahora los puntos extremos del borde de la región, es decir, $P_6 = (-2, 4)$, $P_7 = (2, 4)$

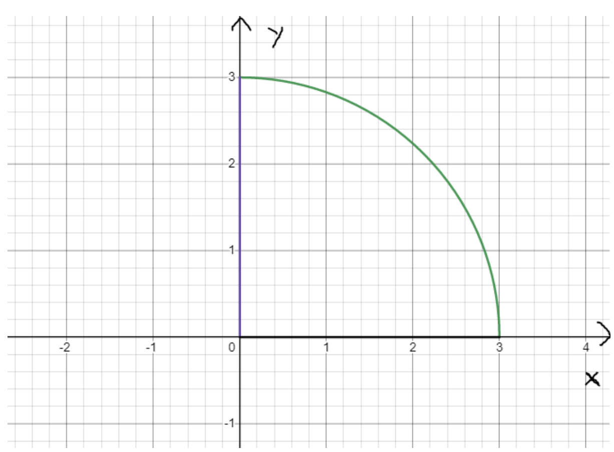
Ahora solo evaluamos cada punto en la función y determinamos cual es el mínimo y máximo respectivo.

- $P_1 = (0,1)\ ,\ f(0,1) = -2$
- $P_2 = (0,0)\ ,\ f(0,0) = 0$
- $P_3 = (1/2,1/4)\ ,\ f(1/2,1/4) = \dfrac{-1}{8}$
- $P_4 = (-1/2,1/4)\ ,\ f(1/2,-1/4) = \dfrac{-1}{8}$
- $P_5 = (0,4)\ ,\ f(0,4) = 16$
- $P_6 = (-2,4)\ ,\ f(-2,4) = 28$
- $P_7 = (2,4)\ ,\ f(2,4) = 28$

Se obtiene que el valor máximo absoluto es 28 y el valor mínimo -2, correspondiente a los puntos $(\pm 2, 4)$ y $(0, 1)$ respectivamente.

2. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = \dfrac{x^4}{4} - x^2y^2 + y^2$ en la región $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x^2 + y^2 \leq 9$. En caso de puntos críticos interiores decida si corresponden a máximo, mínimo o puntos silla. Además determine el máximo y mínimo absoluto. (Examen - 2 - 2016)

Graficamos la región.



Vemos si hay puntos críticos dentro de la región.

$$F_x = x^3 - 2xy^2 \qquad F_{xx} = 3x^2 - 2y^2$$
$$F_y = -2x^2y + 2y \qquad F_{yy} = -2x^2 + 2$$
$$F_{xy} = -4xy$$

El sistema

$$\begin{cases} x^3 - 2xy^2 = 0 \\ -2x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

tiene como solución $(0,0)$ y $(\pm 1, \pm 1/\sqrt{2})$. Pero recordemos que $x \geq 0$ y $y \geq 0$, por lo cual tenemos los puntos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (1, 1/\sqrt{2})$. Por enunciado solo nos piden clasificar a los puntos internos de la región. Entonces buscamos D y evaluamos P_2, ya que solo este punto se ubica dentro de la región.

$$D = (3x^2 - 2y^2)(-2x^2 + 2) - (-4xy) \;\Rightarrow\; D(1, 1/\sqrt{2}) = -8$$

Como $D < 0$, P_2 es un punto silla.

Ahora analizamos los bordes según las funciones. En este caso se tendrían las funciones $y = \sqrt{9 - x^2}$ ya que es la semicircunferencia superior, $x = 0$ y $y = 0$.

- $y = \sqrt{9 - x^2}$

  $$f(x, \sqrt{9 - x^2}) = \frac{x^4}{4} - x^2(\sqrt{9 - x^2})^2 + (\sqrt{9 - x^2})^2$$
  $$\Rightarrow f(x, \sqrt{9 - x^2}) = \frac{5x^4}{4} - 10x^2 + 9$$

  Derivamos para encontrar los puntos críticos.

  $$f'(x, \sqrt{9 - x^2}) = 5x^3 - 20x = 0$$
  $$5x(x^2 - 4) = 0$$

  De acá se obtiene $x = 0$, $x = \pm 2$. Recordemos que en la región se tiene $0 \leq x \leq 3$, por lo cual $x = -2$ no sirve. Entonces ahora evaluamos.

  $x = 0$

  $$y = \sqrt{9 - (0)^2} = 3$$

  De acá se obtiene $P_3 = (0, 3)$

$x = 2$

$$y = \sqrt{9-(2)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

De acá se obtiene $P_4 = (2, \sqrt{5})$.

- $y = 0$

$$f(x,0) = \frac{x^4}{4} - x^2(0)^2 + (0)^2$$
$$\Rightarrow f(x,0) = \frac{x^4}{4}$$

No hace falta derivar para obtener el punto critico, es claro que se tiene $x = 0$. Luego, como $y = 0$, se obtiene el punto $(0,0)$. Pero este ya lo tenemos. Además de corroborarse que $x = 0 \in [0,1]$.

- $x = 0$

$$f(0,y) = \frac{(0)^2}{4} - (0)^2y^2 + y^2$$
$$\Rightarrow \ f(0,y) = y^2$$

Ahora tenemos una función de y, según la región y se ubica entre $0 \leq y \leq 3$. Análogo a lo anterior, ahora se tiene $y = 0$. Tenemos $x = 0$, por lo cual se obtiene $(0,0)$, pero este ya lo tenemos.

Finalmente solo nos faltan los puntos extremos de la región, pero ya tenemos $(0,0)$ y $(0,3)$, por lo cual solo nos falta $P_5 = (3,0)$.

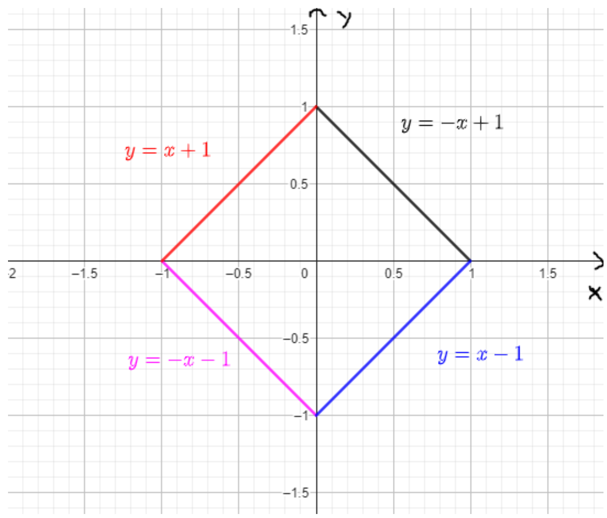
Ahora solo evaluamos cada punto en la función.

- $P_1 = (0,0)$, $f(0,0) = 0$
- $P_2 = (1, 1/\sqrt{2})$, $f(1, 1/\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$
- $P_3 = (0,3)$, $f(0,3) = 9$
- $P_4 = (2, \sqrt{5})$, $f(2, \sqrt{5}) = -11$
- $P_5 = (3,0)$, $f(3,0) = \dfrac{81}{4}$

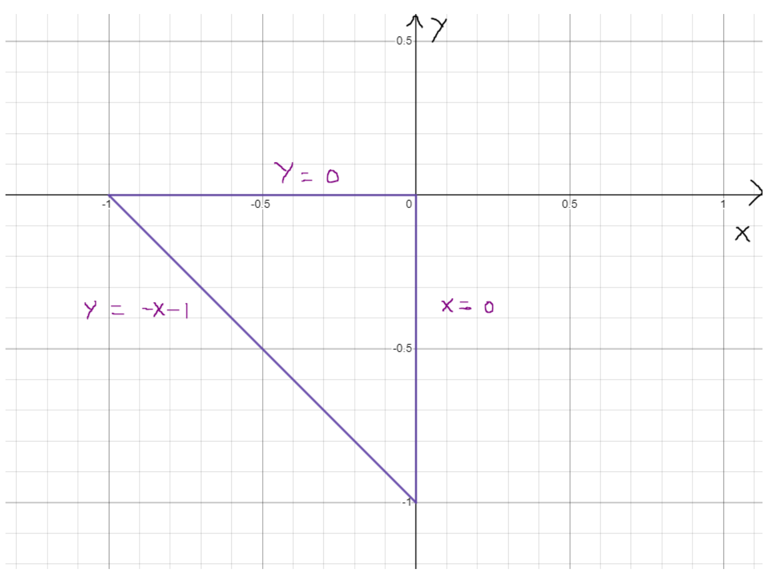
Por lo tanto, los valores máximos y mínimos de f en la región son $f(2, \sqrt{5}) = -11$ y $f(3,0) = \dfrac{81}{4}$, correspondiendo al mínimo y máximo absoluto respectivamente.

3. Encuentre el máximo y mínimo absoluto de $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ sobre la región acotada por el rombo $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ en el tercer cuadrante. (I3 - TAV - 2022)

La región $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ corresponde a



Pero nos señalan que es en el tercer cuadrante, por lo que la región a analizar es



Veamos si hay puntos dentro de la región.

$$F_x = 2x - y$$
$$F_y = -x + 2y$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Se obtiene el punto $P_1 = (0, 0)$. Ahora veamos los bordes.

- $y = -x - 1$, con $-1 \leq x \leq 0$

  $$f(x, -x-1) = x^2 - x(-x-1) + (-x-1)^2$$
  $$\Rightarrow\ f(x, -x-1) = 3x^2 + 3x + 1$$

  Derivamos para encontrar los puntos críticos.

  $$f'(x, -x-1) = 6x + 3 = 0$$
  $$6x + 3 = 0$$

  Se obtiene $x = \dfrac{-1}{2}$. El cual es valido, ya que se encuentre en el intervalo $-1 \leq x \leq 0$ de la región. Ahora evaluamos.

  $$y = -\left(\frac{-1}{2}\right) - 1 = \frac{-1}{2}$$

  De acá tenemos $P_2 = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$
- $x = 0$, con $-1 \leq y \leq 0$

  $$f(0, y) = (0)^2 - 0y + y^2$$
  $$f(0, y) = y^2$$

  Es claro que el punto critico es $y = 0$, el cual se encuentra en el intervalo necesario. Notar que tenemos $x = 0$, por lo cual se obtiene el punto $(0, 0)$, pero este ya lo tenemos.
- $y = 0$, con $-1 \leq x \leq 0$

  $$f(x, 0) = x^2 - x(0) + (0)^2$$
  $$f(x, 0) = x^2$$

  Resulta análogo al anterior.

Ahora nos quedan los puntos extremos de la región, los cuales son $(0, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$, pero ya tenemos el primero, por lo cual se tiene
$P_3 = (-1, 0)$ y $P_4 = (0, -1)$.

Ahora evaluamos cada punto.

- $P_1 = (0,0)$, $f(0,0) = 0$
- $P_2 = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$
- $P_3 = (-1,0)$, $f(-1,0) = 1$
- $P_4 = (0,-1)$, $f(0,-1) = 1$

Por lo tanto f alcanza su mínimo absoluto en el punto $(0,0)$ y su valor mínimo absoluto es $f(0,0) = 0$. Por otra parte, f alcanza su máximo absoluto en los puntos $(-1,0)$ y $(0,-1)$ y su valor máximo absoluto es $f(-1,0) = f(0,-1) = 1$.

4.3 Multiplicadores de Lagrange

Si queremos maximizar o minimizar una función $F(x,y)$ sujeto a la restricción $G(x,y)=K$, se debe resolver

$$\nabla F(x,y)=\lambda\nabla G(x,y)$$

Lo cual recae en resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} F_x=\lambda G_x \\ F_y=\lambda G_y \\ G(x,y)=K \end{cases}$$

Para funciones de tres variables se tiene:

$$\begin{cases} F_x=\lambda G_x \\ F_y=\lambda G_y \\ F_z=\lambda G_z \\ G(x,y,z)=K \end{cases}$$

1. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y)=y^2-x^2$ sujeto a $x^2+4y^2=4$

   En nuestro caso tenemos $F(x,y)=y^2-x^2$ y $G(x,y)=x^2+4y^2=4$. Ahora planteamos el respectivo sistema.

$$\begin{cases} -2x=\lambda 2x \\ 2y=\lambda 8y \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$$

   De la primera ecuación se desprende que $-2x-2\lambda x=0 \Rightarrow x(1+\lambda)=0$. Si $x=0$, reemplazamos en la ultima ecuación.

$$(0)^2+4y^2=4$$
$$\Rightarrow\ y=\pm 1$$

   De acá se obtienen los puntos $P_1=(0,-1)$ y $P_2=(0,1)$.

   De la segunda ecuación se desprende que $2y-8\lambda y=0 \Rightarrow y(1-4\lambda)=0$. Si $y=0$, reemplazamos en la ultima ecuación.

$$x^2+4(0)^2=4$$

   De acá se obtiene los puntos $P_3=(2,0)$ y $P_4=(-2,0)$.

   Evaluando los puntos en la función, se llega a que $(0,\pm 1)$ es un máximo absoluto y que $(0,\pm 2)$ es un mínimo absoluto. Notar que si $\lambda=-1$ y $\lambda=1/4$ no satisfacen la ultima ecuación.

2. Encontrar el área máxima de un rectángulo con lados x e y si su perímetro es 14. ¿Hay un valor mínimo para el área?

   Recordamos que el área está dada por $A(x, y) = xy$ y el perímetro está dado por $P(x, y) = 2x + 2y$. Dado lo anterior notamos que queremos optimizar A sujeto a $P = 14$, ya que el perímetro lo dan en el enunciado. Entonces armamos el sistema.

$$\begin{cases} y = \lambda 2 \\ x = \lambda 2 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

   Reemplazando las dos primeras ecuaciones en la ultima, se tiene que $\lambda = \dfrac{7}{3}$. Y reemplazando este valor en las dos primeras ecuaciones se llega a que $x = \dfrac{7}{2}$ y $y = \dfrac{7}{2}$.

   Para determinar el área solo evaluamos en los puntos encontrados.

$$A\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$$

   Luego, el área máxima del rectángulo es de $\dfrac{49}{4}$. Si tomamos cualquier otro punto que satisfaga la ultima ecuación, cualquiera es menor al área encontrada, por lo cual no hay mínimo de área.

3. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

   Si la temperatura en un punto (x, y, z) de S es $T(x, y, z) = 40xy^2z$, use el método de multiplicadores de Lagrange y determine la temperatura máxima y mínima sobre S. (Examen - 2 - 2022)

   Notamos que necesitamos optimizar la temperatura T sujeto a la región S. Entonces armamos el sistema respectivo.

$$\begin{cases} 40y^2z = \lambda 2x \\ 80yxz = \lambda 2y \\ 40xy^2 = 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Para resolver este tipo de sistemas podemos hacer multiplicaciones convenientes. Notar que en el lado izquierdo de las tres primeras ecuaciones se parecen bastantes. Si llegamos a que son iguales, solo basta igualar cosas simples, por lo cual en la primera ecuación multiplicamos por x, la segunda por y y la tercera por z.

$$\begin{cases} 40y^2z = \lambda 2x \ \ / \cdot x \\ 80yxz = \lambda 2y \ \ / \cdot y \\ 40xy^2 = \lambda 2z \ \ / \cdot z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40xy^2z = 2x^2\lambda \\ 80xy^2z = 2y^2\lambda \ \ / \cdot 1/2 \\ 40xy^2z = 2z^2\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40xy^2z = 2x^2\lambda \\ 40xy^2z = y^2\lambda \\ 40xy^2z = 2z^2\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Como las tres primeras ecuaciones deben ser iguales debido al lado izquierdo, se tiene:

$$2x^2\lambda = y^2\lambda = 2z^2\lambda$$

Si $\lambda \neq 0$ se tiene:

$$2x^2 = y^2 = 2z^2$$

$$x^2 = \frac{y^2}{2} = z^2$$

Ahora reemplazamos $x^2 = \dfrac{y^2}{2}$ y $z^2 = \dfrac{y^2}{2}$ en la ultima ecuación.

$$\frac{y^2}{2} + y^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Reemplazamos en las ecuaciones correspondientes.

$$x^2 = \frac{(\pm 1/\sqrt{2})^2}{2}$$
$$\Rightarrow\ x = \pm\frac{1}{2}$$
$$z^2 = \frac{(\pm 1/\sqrt{2})^2}{2}$$
$$\Rightarrow\ z = \pm\frac{1}{2}$$

Ahora reemplazamos en T.

$$T\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \pm 5$$

Por lo tanto, la temperatura máxima es de 5 y la mínima es -5.

4. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular con tapa de modo que tenga volumen máximo y cuya área superficial sea $64cm^2$.
(I3 - TAV - 2023)

Recordemos que el área de una caja está dada por $A(x, y, z) = xyz$ y el perímetro está dado por $P(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$. Dado lo anterior se desprende que tenemos que maximizar A sujeto a $P = 64$. Entonces armamos el sistema respectivo.

$$\begin{cases} yz = \lambda(2y + 2z) \\ xz = \lambda(2x + 2z) \\ xy = \lambda(2x + 2y) \\ 2xy + 2xz + 2yz = 64 \end{cases}$$

Procedemos de forma similar al anterior.

$$\begin{cases} yz = \lambda(2y + 2z)\ \ / \cdot x \\ xz = \lambda(2x + 2z)\ \ / \cdot y \\ xy = \lambda(2x + 2y)\ \ / \cdot z \\ 2xy + 2xz + 2yz = 64\ \ / \cdot 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyz = \lambda x(2y + 2z) \\ yxz = \lambda y(2x + 2z) \\ xyz = \lambda z(2x + 2y) \\ xy + xz + yz = 32 \end{cases}$$

Igualamos el lado derecho de las dos primeras ecuaciones.

$$\lambda x(2y + 2z) = \lambda y(2x + 2z)$$
$$\lambda(2xy + 2xz - 2xy - 2zy) = 0$$
$$\lambda(xz - yz) = 0$$

Como $\lambda, z \neq 0$, se tiene $xz = yz \Rightarrow x = y$.

Ahora igualamos la segunda y tercera ecuación.

$$\lambda y(2x + 2z) = \lambda z(2x + 2y)$$
$$\lambda(2xy + 2yz - 2xz - 2yz) = 0$$
$$\lambda(xy - xz) = 0$$

Como $\lambda, x \neq 0$, se tiene $xy = xz \Rightarrow y = z$.

Juntando todo se tiene que

$$x = y = z$$

Ahora reemplazamos $y = x$ y $z = x$ en la ultima ecuación.

$$x(x) + x(x) + (x)(x) = 32$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$$

Pero tenemos dimensiones de una caja, las cuales son positivas, por lo cual $x = \sqrt{\frac{32}{2}}$. Ahora reemplazamos.

$$x = y = z$$
$$\sqrt{\frac{32}{2}} = y = z$$

Por lo tanto, las dimensiones de la caja deben ser de $\left(\sqrt{\frac{32}{2}}, \sqrt{\frac{32}{2}}, \sqrt{\frac{32}{2}}\right)$