Leilões de Compras Governamentais

Fundação Getúlio Vargas

Professor Marcelo Sant'Anna

Alunos: Breno Oliveira, Daniel Rocha, Emanuelle Peixoto e Kaio Torres.

O objetivo desse trabalho foi encontrar b_i ou $b(c_i)$, que é a função que nos fornece os lances que maximizam o lucro esperado da empresa no leilão a partir do custo de produção de cada bem (c_i). Assim, na primeira linha da figura 1, vemos que b_i pode ser encontrado pela seguinte equação:

$$b_i = \arg\max((b_i - c_i) * P(b_i < \min(B_i)))$$

Onde B_i é o conjunto dos lances de todas as outras empresas no bem i e $P(b_i < \min(B_i))$ é a probabilidade de ganharmos o leilão com o lance b_i. Além disso, utilizamos a hipótese de que a primeira derivada da função $b(c_i)$ é positiva ($b'(c_i)$>0) para todo c_i real positivo, o que é razoável, pois, a medida que o custo aumenta, o lucro para um mesmo lance, no caso de vitória no leilão, diminui. Ademais, essa hipótese nos permite utilizar a distribuição dos custos de produção das empresas ao invés da de seus lances para calcular a probabilidade de vitória, como veremos a seguir.

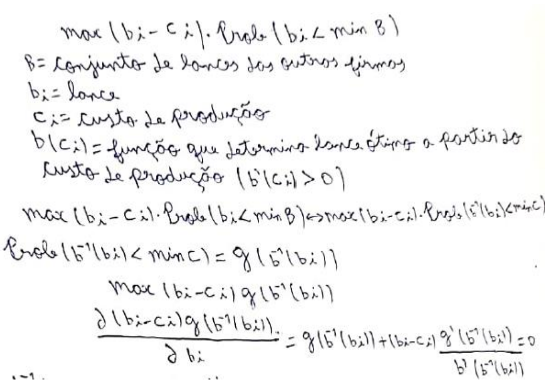

Figura 1 - Cálculo do lance do leilão (Parte 1)

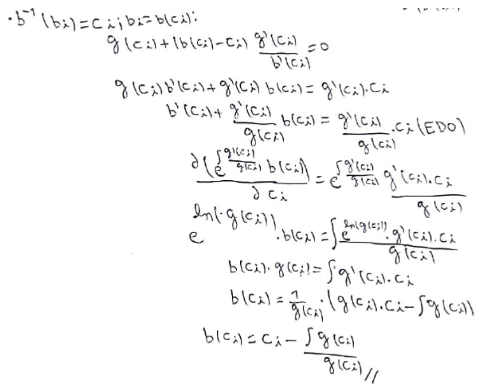

Figura 2 - Cálculo do lance do leilão (Parte 2)

Considerando a primeira derivada positiva para todo c_i e sabendo que, por definição, $b^{-1}(b(c_i)) = c_i$, podemos afirmar que a seguinte relação sempre é válida:

$$b_i < \min(B_i) \leftrightarrow b^{-1}(b_i) < \min(C_i)$$

Onde C_i é o conjunto de custos de produção das outras empresas para o bem i. Isso nos permite encontrar a função b a partir dos custos de produção dos bens (que nós já possuímos) e da distribuição de probabilidade dos custos de produção das demais empresas (que iremos estimar no Apêndice). Dessa forma, por meio dos cálculos ilustrados nas figuras 1 e 2 chegamos à conclusão de que a função b que retorna o lance ótimo para cada custo é dada pelas seguintes equações:

$$b(c_i) = c_i - \frac{\int g(c_i)}{g(c_i)}$$

$$g(c_i) = (1 - F(c_i))^7$$

Na qual, $g(c_i)$ é a probabilidade de o nosso custo de produção para o bem i o menor de todos, ou seja, a probabilidade de ganharmos o leilão, e F é a função de probabilidade acumulada da distribuição dos custos das demais empresas, que estimamos seguir a distribuição Weibull dupla (ver Apêndice). Nesse caso, a função g obteve esse formato, pois ela representa a probabilidade de o nosso custo ser inferior aos custos das 7 outras empresas presentes no leilão, que, por sua vez, tem distribuição de probabilidade acumulada F. Portanto, obtida a fórmula que relaciona o custo de produção do bem i (c_i) ao seu lance ótimo (b_i), utilizou-se um programa escrito em Python com a biblioteca scipy para calcular os lances ótimos de todos os custos fornecidos e, com esses, foi estabelecida a estratégia para o leilão.

Apêndice

Tendo em vista que os nossos custos seguem a mesma distribuição de probabilidade das outras firmas, utilizamos eles como uma amostra para estimar tal distribuição. Assim, a partir de um histograma feito com os valores dos custos disponibilizados versus a frequência de aparições desses valores, ficou perceptível que as funções de probabilidade mais usuais, como Normal e Uniforme, não se encaixam na distribuição da amostra. Dessa forma, usando um programa feito com a biblioteca scipy do Python, testamos dezenas de distribuições (entre elas Gamma, Weibull e Laplace) para escolher aquela que fosse mais condizente com o histograma da amostra disponível.

O programa retornou a função Double Weibull como a melhor escolha e nos forneceu os parâmetros utilizados nessa distribuição. Com esses dados, a função de distribuição de probabilidade foi traçada na forma de uma curva amarela junto ao histograma inicial (figura 3), o que nos permitiu obter uma evidência visual da coerência entre a amostra e a função escolhida.

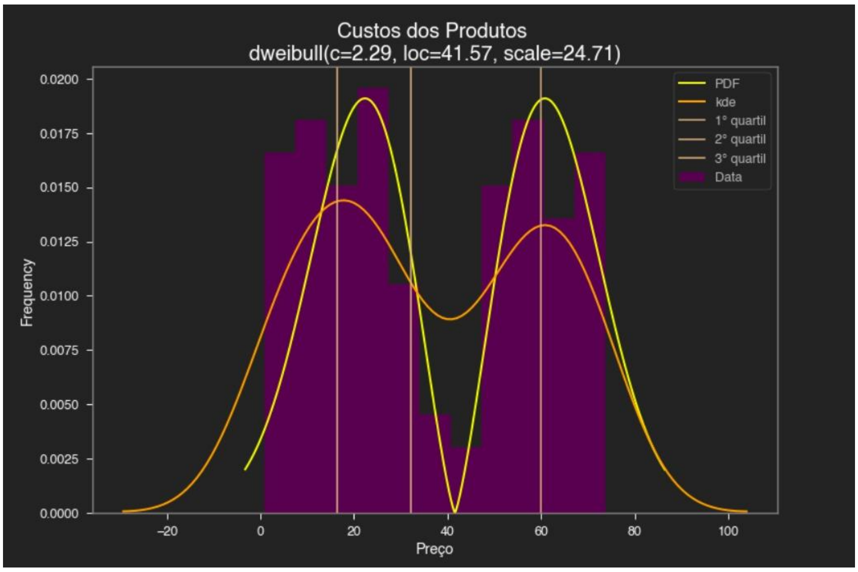

Figura 3- Histograma de custos e suas frequências.

Portanto, a função F utilizada no cálculo dos lances ótimos foi a função de probabilidade acumulada Double Weibull. Por meio dela, encontramos a função g e sua integral que foram necessárias para a obtenção da estratégia usada no leilão.

Obs.: os códigos utilizados estão localizados em um repositório do GitHub (https://github.com/blazekaio/Trabalho_Microeconomia). O código para a obtenção da melhor distribuição para a amostra de custos está sob o nome "Trabalho de Microeconomia.ipynb" e aquele para o cálculo dos lances ótimos a partir da fórmula encontrada está nomeado "Lance ótimo".