



INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE
MONTERREY

Escuela de Ingeniería y Ciencias
Ingeniería en Ciencia de Datos y Matemáticas

Evidencia 3. Modelos de Markov

ANÁLISIS DE MÉTODOS DE RAZONAMIENTO E INCERTIDUMBRE

Cantú Rodríguez Pamela A01285128

Díaz Seguy Laura Cecilia A01620523

Núñez López Daniel I. A01654137

Reyes Mancheno Paola Sofía A00831314

Torres Alcubilla María Fernanda A01285041

Supervisado por
Dr. Marco Otilio Peña Díaz

Monterrey, Nuevo León. Fecha, 23 de febrero de 2023

1. Problemática

A los gimnasios les interesa conocer la frecuencia de uso y la probabilidad de que un equipo se use después de otro para que con esto puedan administrar los recursos necesarios para la reparación o reemplazo de estos, debido a que cada gimnasio cuenta con distintos aparatos y rutinas de usuarios, el desgaste se comporta de manera diferente en cada uno, en nuestro caso, nuestro gimnasio de análisis cuenta con 6 aparatos con distintos enfoques y las probabilidades de uso están calculadas en el periodo de una semana.

2. Propósito

Los modelos de Markov se implementan para conocer la probabilidad de un evento dependiendo del evento anterior, en nuestro caso aplicamos la cadena de Markov para conocer la probabilidad de que se haga uso de un aparato de ejercicio después de otro y con esto aconsejar al gimnasio sobre las tendencias y futuros desgastes de los equipos.

3. Información

En nuestro gimnasio se cuentan con 6 equipos diferentes y la cantidad a realizar, los cuales son los siguientes:

- Treadmill (5km)
- Stationary Bike (10km)
- Row Machine (20 rep)
- Pec Fly (20 rep)
- Leg Press (20 rep)
- Abdominal Crunch Machine (20 rep)

En la tabla 2, se muestra nuestra matriz de transición P en forma de tabla, la cual nos describe las probabilidades de que se cambie al aparato b después de que se usó el aparato a sin importar cómo llegó a este, por ejemplo, la probabilidad de que se use la Stationary Bike después de la Treadmill es de 0.05 y la Treadmill después de la Stationary Bike de 0.11.

	Cuadro 1: Matriz de transición					
	Treadmill	Stationary Bike	Row Machine	Pec Fly	Leg Press	Abdominal
Treadmill	0.04	0.05	0.19	0.27	0.20	0.25
Stationary Bike	0.11	0.20	0.15	0.24	0.15	0.15
Row Machine	0.28	0.20	0.03	0.19	0.14	0.16
Pec Fly	0.30	0.14	0.30	0.04	0.09	0.13
Leg Press	0.19	0.12	0.15	0.26	0.08	0.20
Abdominal	0.20	0.18	0.11	0.21	0.20	0.10

Esta matriz se puede convertir a un grafo dirigido mostrado en la figura 1, con los aparatos como nodos y estos estarían conectados entre ellos con la probabilidad entre ellos como etiqueta.

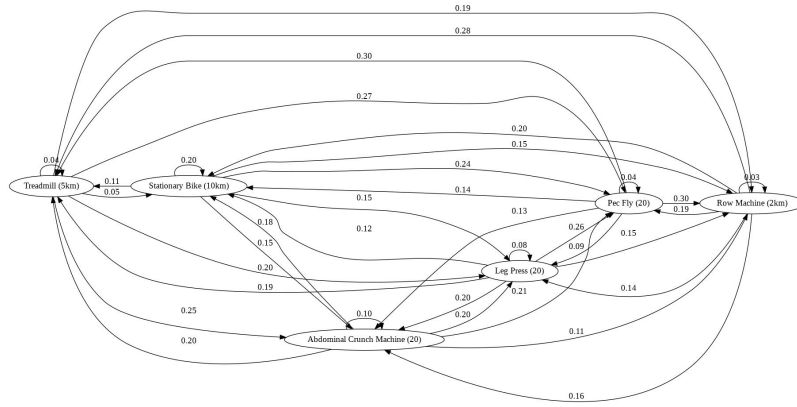


Figura 1: Grafo dirigido

4. Razonamiento

Para la resolución de este problema, después de contar con la matriz de transición P , se procede a utilizar una Cadena de Markov de primer orden y su teoría para así poder resolver la problemática. El principio inicial que se maneja es el siguiente: $s_{i+1} = s_i P$. Esta ecuación representa que un estado depende solamente del estado anterior por la probabilidad de que el siguiente estado ocurra. De igual manera, es importante señalar como dicha ecuación muestra que lo único que importa para definir un estado, es su estado anterior, y no cómo es que se llegó a este.

En este momento, se puede introducir el término de distribución límite o distribución estacionaria de una cadena de Markov. Esta se refiere a una distribución estable que, cuando el tiempo tiende a infinito, los valores de los estados se estabilizan y por ende dichos valores representan las fracciones de tiempo de cada máquina utilizadas después de un número muy grande de estados. La sumatoria de dichos valores da igual a uno al tratarse de una distribución de probabilidad. La distribución

estacionaria se observa matemáticamente de la siguiente manera:

$$s_1 = s_0 P s_2 = (s_0 P) P = s_0 P^2 s_n = s_0 P^n$$

$$\pi = s_0 P^n, n \rightarrow \infty$$

Tomando en cuenta la distribución estacionaria, se realizaron dos pruebas. La primera se tomó con un estado inicial donde $s_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ y se realizó un total de mil iteraciones. Los resultados fueron los siguientes en la última iteración:

Cuadro 2: s1000						
	Treadmill	Stationary Bike	Row Machine	Pec Fly	Leg Press	Abdominal
s_{1000}	0.1879	0.1452	0.161	0.1963	0.1442	0.1654

En la tabla 2, se puede observar las probabilidades estabilizadas de que las diferentes máquinas estén siendo utilizadas. Incluso, se puede ver como las 6 máquinas tienen una distribución parecida, pero que la Treadmill y la Pec Fly son las 2 máquinas más utilizadas. Por otro lado, es importante mostrar la gráfica State History, donde muestra la probabilidad del uso de cada máquina durante los diferentes estados. En la figura 2 se puede observar como solamente después de 5 iteraciones, las distribuciones ya se encuentran estabilizadas.

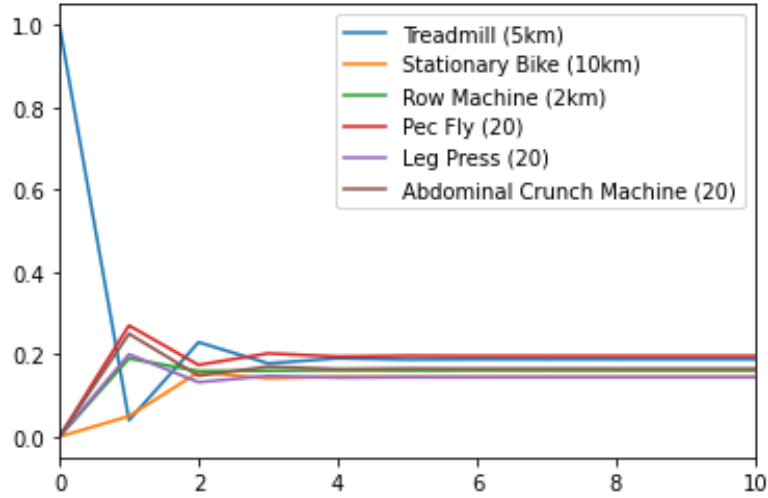


Figura 2: State History

Por otro lado, la segunda prueba de la distribución estacionaria, es calcular la probabilidad de que ocurra una secuencia en específico:

Treadmill → RowMachine → LegPress → StationaryBike → PecFly → AbdominalCrunchMachine.

Como se puede observar a continuación, la probabilidad de que dicha secuencia específica es casi nula, tomando en cuenta la matriz de transición.

$$x = P[0, 2] \times [2, 4] \times [4, 1] \times [1, 3] \times [3, 5]$$

$$x = 0.000095903 = 0.00959$$

5. Conclusiones

Después de haber aplicado la Cadena de Markov a la matriz de transición que describía la situación problema trabajada, se puede concluir que la probabilidad de uso semanal de las seis máquinas del gimnasio es muy parecida entre sí, resaltando el uso de la treadmill y la Pec Fly; por lo que la administración debería considerar el mantenimiento de la totalidad de sus máquinas en un mismo período de tiempo. Por otro lado, la segunda prueba basada en la probabilidad de las secuencias a realizar, puede ser de gran ayuda para definir la colocación física de las máquinas; con esto se pueden colocar las máquinas de una forma que revelen la secuencia que mayor probabilidad tenga de suceder y por ende facilitar la estancia de los usuarios en las instalaciones.

Como posible punto a mejorar, se podría tomar en cuenta no solamente el uso de las máquinas en el gimnasio, sino también el uso de los espacios de pesas o de colchonetas para así llegar a tener un análisis más completo de las instalaciones del gimnasio. Así también, es importante resaltar que las Cadenas de Markov de primer orden solamente toman en cuenta el uso de una máquina después de la otra, sin tomar en cuenta hechos pasados, por lo que otra mejoría podría basarse en utilizar otros tipos de cadenas de Markov para así tomar en cuenta las rutinas completas en el análisis.