

Péndulos locos

Proyecto péndulos locos

DIRECTOR:

Luis Alberto Nuñez

Licenciado en Física, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2024

1. Introducción

Los péndulos han sido una pieza fundamental para el avance de la humanidad, tanto en la ciencia como en la tecnología. Un ejemplo destacado es el péndulo de Kater, utilizado durante más de un siglo para medir la intensidad del campo gravitatorio en prospecciones geodésicas. Este instrumento no solo permitió avances en cartografía y topografía, sino que también se convirtió en una herramienta didáctica clave para demostrar principios fundamentales del movimiento oscilatorio. Su capacidad para realizar mediciones precisas sin conocer previamente el centro de masa lo hizo invaluable en su época. Hoy en día, los péndulos siguen siendo esenciales en la enseñanza de fenómenos oscilatorios, abarcando desde sistemas simples hasta complejos.

Cuando se introduce un péndulo doble matemático, el sistema adquiere una complejidad que lo convierte en un excelente modelo para estudiar la dinámica de sistemas caóticos, sin embargo esto es una abstracción, puesto que un sistema de estas características no existe, sin embargo podemos estudiar el comportamiento de este, de manera que podamos comparar el comportamiento dinámico del péndulo matemático con el comportamiento dinámico del péndulo doble físico. Este tipo de péndulos, ofrecen una ventana única para analizar comportamientos no lineales bajo diferentes condiciones iniciales. El presente estudio se centra en comparar la dinámica de estos dos sistemas, empleando herramientas como planos de fase y diagramas de bifurcación; y contrastando los modelos teóricos con datos experimentales obtenidos mediante simulaciones y mediciones prácticas. De este modo, se busca responder a la pregunta: **¿Cuál de los dos sistemas, el péndulo físico doble o el péndulo doble matemático, muestra mayor comportamiento caótico? ¿Y cómo se contrastan estos resultados con los datos experimentales?**

2. Marco teórico

2.1. Péndulo físico doble

En primera instancia debemos analizar partiendo de un punto de referencia para nuestro sistema del péndulo físico doble, el cual se puede plantear de la siguiente manera:

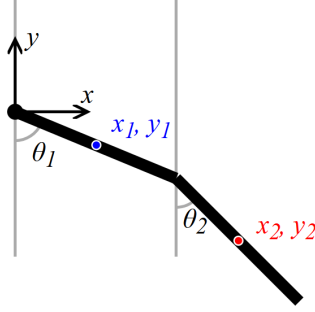


Figura 1: Péndulo físico doble, ángulos de referencia θ_1 y θ_2 con punto cero en el vértice del ángulo θ_1 (puntos (x_i, y_j) en coordenadas cartesianas). Fuente: [SciPython](#).

Debemos tener en cuenta que en este caso no es como en el péndulo simple tradicional debido a que las varillas en la figura (1) que están conectadas están compuestas de una masa (m) la cual será la misma para las dos y una longitud (l) la cual también será la misma para estas.

2.1.1. Análisis del movimiento para el péndulo físico doble

Como se observa en la figura (1) en términos de (θ_1) y (θ_2) las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se pueden describir de la siguiente forma utilizando técnicas trigonométricas:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}l \sin(\theta_1), -\frac{1}{2}l \cos(\theta_1) \right)$$

$$(x_2, y_2) = \left(l \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}l \sin(\theta_2), -l \cos(\theta_2) - \frac{1}{2}l \cos(\theta_2) \right)$$

Por lo tanto, la primera derivada con respecto al tiempo sería:

$$(\dot{x}_1, \dot{y}_1) = \left(\frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1), \frac{1}{2}l\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \right)$$

$$(\dot{x}_2, \dot{y}_2) = \left(l\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \frac{1}{2}l\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2), l\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}l\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \right)$$

Entonces la energía cinética estaría dada por:

$$T = \frac{1}{6}m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)$$

La energía potencial V del sistema de péndulo físico doble se debe a las posiciones de las dos varillas en el campo gravitacional. Se puede escribir de la siguiente manera:

$$V = -gL_1 \left(\left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) \cos(\theta_1) - \frac{1}{2}m_2gL_2 \cos(\theta_2) \right)$$

Por lo tanto, obtenemos la lagrangiana del sistema:

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{6}m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) + \dots \\ & \dots + gL_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) \cos(\theta_1) + \frac{1}{2}m_2gL_2 \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

Podemos encontrar las ecuaciones que rigen el movimiento del péndulo físico doble (1), cabe resaltar que estas ecuaciones no tienen solución analítica y deben ser resueltas en base a alguno de los métodos numéricos existentes (se considera usar el método de RK4).

Ecuaciones de movimiento:

Para θ_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}m_1L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2L_1^2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_2L_1L_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dots \\ & \dots - \frac{1}{2}m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + gL_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) \sin(\theta_1) = 0 \end{aligned}$$

Para θ_2 :

$$\frac{1}{3}m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2L_1L_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}m_2gL_2 \sin(\theta_2) = 0$$

2.1.2. Estabilidad y comportamiento caótico

Uno de los aspectos más interesantes del péndulo físico doble es su naturaleza caótica. Debido a la no linealidad de sus ecuaciones de movimiento, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden resultar en trayectorias completamente diferentes, lo que caracteriza un comportamiento caótico. Esto lo convierte en un ejemplo clásico de sistemas dinámicos no lineales.

En este tipo de sistemas, es posible observar que aunque la energía total se conserva, el comportamiento a largo plazo del sistema puede ser impredecible, lo que representa una característica típica del caos. Este fenómeno puede analizarse numéricamente mediante la integración de las ecuaciones de movimiento, como se describirá a continuación.

2.1.3. Soluciones numéricas y visualización del movimiento

Para obtener soluciones numéricas del sistema de ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se puede utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Este método proporciona una forma eficiente y precisa de resolver sistemas no lineales acoplados.

Una vez resueltas, las trayectorias del sistema se pueden visualizar, permitiendo observar tanto su comportamiento regular como su comportamiento caótico bajo diferentes condiciones iniciales. Esta visualización es útil para estudiar la evolución del sistema y para entender cómo las oscilaciones cambian con el tiempo.

2.1.4. Conservación del momento angular y la energía

Aunque las ecuaciones de movimiento son altamente no lineales, una característica clave del sistema es la conservación de la energía total (cinética y potencial), dado que no hay fuerzas disipativas.

Además, el momento angular del sistema se conserva en ausencia de torques externos, lo que impone restricciones adicionales al comportamiento del sistema. Esta conservación es una herramienta útil para verificar la validez de las soluciones numéricas obtenidas, ya que cualquier discrepancia indicaría posibles errores en la integración numérica.

2.1.5. Análisis de frecuencias para oscilaciones pequeñas

En el caso de pequeñas oscilaciones, es posible linealizar las ecuaciones del movimiento, lo que permite obtener soluciones aproximadas. En este régimen, el comportamiento del sistema se asemeja al de dos osciladores acoplados, lo que facilita su estudio y proporciona una visión más clara de las frecuencias naturales del sistema.

Las frecuencias de oscilación pequeñas se pueden calcular analíticamente al considerar que θ_1 y θ_2 son muy pequeñas, lo que convierte las ecuaciones originales en un sistema lineal más manejable. Este análisis puede proporcionar intuiciones valiosas sobre el comportamiento del sistema cuando las desviaciones angulares no son muy grandes.

2.2. Péndulo doble

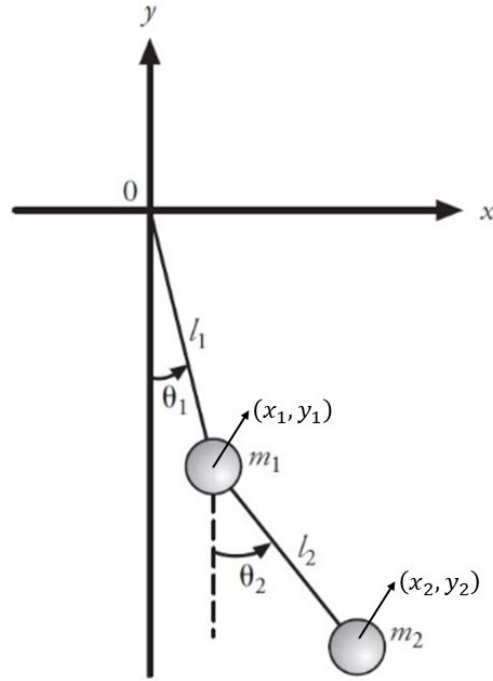


Figura 2: Péndulo doble, compuesto por dos masas m_1 y m_2 unidas mediante varillas rígidas de longitudes l_1 y l_2 , que están articuladas en sus extremos. Las varillas están suspendidas desde un punto fijo en el origen del sistema de coordenadas (x, y) y se tiene como puntos de referencia de movimiento para cada masa (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

2.2.1. Análisis del movimiento para el péndulo doble

Los dos grados de libertad para la figura (2) son los ángulos θ_1 y θ_2 estos ángulos son tomados con respecto a la vertical de cada una de las varillas rígidas sin masa.

Las componentes de la posición son:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & y_1 &= -l_1 \cos \theta_1, \\x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, & y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2.\end{aligned}$$

Las velocidades están dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2, & \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2.\end{aligned}$$

La energía potencial y cinética del sistema son:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 - m_2 l_2 g \cos \theta_2,$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Sustituyendo las expresiones para las velocidades, la energía cinética se convierte en:

$$T = \frac{1}{2} m_1 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2] + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right].$$

El lagrangiano, $\mathcal{L} = T - V$, es entonces:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este sistema son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Después de realizar cálculos y álgebra sobre las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para las coordenadas del péndulo doble:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 &= 0, \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 &= 0.\end{aligned}$$

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Estudio de sistemas caóticos, esto nos dice que, este tipo de sistemas, son sensibles a cualquier mínimo cambio en las condiciones iniciales.

3.2. Objetivos específicos

1. Realizar un análisis exhaustivo del sistema mediante experimentación, utilizando los datos recopilados con la herramienta Tracker, para demostrar y describir de manera precisa la dinámica del sistema en estudio .
2. Emplear métodos numéricos avanzados, como el método de ODEs de primer y segundo orden en este caso específico, con el fin de obtener una solución numérica al problema planteado.
3. Realizar un análisis detallado de ambos sistemas en el régimen de pequeñas oscilaciones, evaluando su comportamiento dinámico bajo perturbaciones de baja amplitud y determinando las características fundamentales que definen sus respuestas dentro de este límite.
4. Establecer una comparación rigurosa entre los resultados obtenidos a través del análisis experimental y aquellos derivados de las predicciones teóricas, evaluando de forma precisa las concordancias y discrepancias entre ambos enfoques.

4. Metodología

Para llegar a un entendimiento de la dinámica de uno de los péndulos que estudiaremos es importante seguir pasos estructurados y detallados, de manera que seamos capaces de desarrollar conclusiones satisfactorias en el presente documento.

4.1. Paso 1: Construcción de los péndulos a estudiar

Péndulo doble físico: Este tipo de péndulo consiste en un sistema de dos varillas rígidas conectadas en serie. La primera de estas está fijada a un punto de anclaje. Mientras que la segunda, conectada por un pivote, puede moverse libremente, como podemos ver en la figura (3).



Figura 3: Péndulo doble físico.

El péndulo realizado en la imagen (3) es de madera, este péndulo consta de dos brazos, en realidad de 3 brazos, dos actuando como el primer brazo con el fin de que el segundo brazo pueda pasar por el espacio generado entre los dos primeros brazos, el brazo más exterior del primer brazo tiene una abertura de aproximadamente 3 cm de largo y 2 cm de ancho, esta abertura se realiza para que se nos facilite el seguimiento del centro de masa del segundo brazo. Cada anclaje o pivote de los péndulos tienen unos rodamientos que permiten que el péndulo pueda oscilar con el menor rozamiento posible.

Para asegurar la replicabilidad de nuestro montaje, necesitamos saber las medidas y el peso de nuestros péndulos con sus respectivos rodamientos, de manera que vamos a desglosar esta información; el primer brazo consta de dos brazos idénticos, estos tienen 21,3 cm de largo, el brazo exterior tiene una masa de 17 gramos, el interior tiene una masa de 16 gramos; el segundo brazo tiene 19 cm de largo y una masa de 29 gramos. Ambos brazos poseen un pivote de aproximadamente 2 cm de diámetro (donde se introducen los rodamientos) y estos pivotes se encuentran aproximadamente a 0,2 cm del borde del brazo.

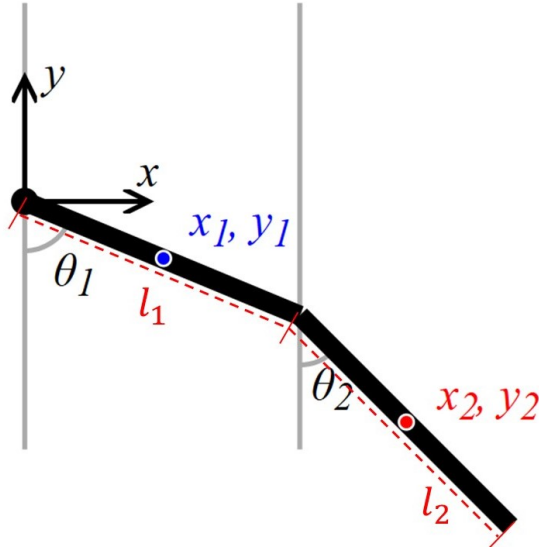


Figura 4: Diseño experimental, donde la figura (a) hace referencia al péndulo físico doble, donde l_1 y l_2 son las longitudes de los brazos y tienen igual longitud.

4.2. Paso 2: Toma de videos

En este paso, debemos tomar los respectivos vídeos de aproximadamente 30 segundos cada uno, de los cuales, se analizarán los 10 segundos iniciales del movimiento en la aplicación de tracker, estos serán nuestros datos experimentales, de manera que, con los mismo, vamos a exportarlos a tracker, con ayuda de esta herramienta vamos a tomar datos de los ángulos θ_1 y θ_2 como bien explicamos en la sección (2). Los ángulos que trabajamos en esta experiencia fueron los siguientes: $\theta_1 = 10$, $\theta_2 = 16$, $\theta_3 = 25$, $\theta_4 = 45$ y por último $\theta_5 = 91$.

Para la toma de videos usaremos un trípode genérico para mantener nuestra cámara fija en un punto, esto, evidentemente nos ayudará a la hora de grabar los videos y también nos proporcionará de estabilidad a la hora de analizar los mismos con la herramienta de tracker, la cámara utilizada será una cámara de un teléfono iPhone 14, el cual es capaz de grabar vídeos a 60 fps y a una calidad de 4k, nuestra cámara tendrá las siguientes especificaciones:

- Calidad de 48 Megapíxeles
- Apertura de f/1,9.
- Calidad de grabado de 4k.
- 60 Fps (Fotogramas por segundo).

4.3. Paso 3: Simulación

En este paso, haremos uso de herramientas computacionales, tales como pueden ser Python (mayoritariamente) para simular estos sistemas físicos, de manera que, usando métodos numéricos y algoritmos, tales como, por ejemplo, el método de Runge Kutta, para ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Utilizaremos este método puesto que, es una herramienta muy poderosa, con este maravilloso método el error será muy bajo; entonces, tomemos datos teóricos del sistema, esto con el fin de poder comparar los datos obtenidos con tracker.

4.4. Paso 4: Comparación de datos

En este paso, tomaremos los valores encontrados tanto experimentalmente como teóricamente, de manera que, podremos interpretar la exactitud de nuestro experimento, y comprender la dinámica de nuestros sistemas, teniendo en cuenta nuestros objetivos específicos; con esto, podremos escribir el informe final y sustentarlo.

4.4.1. Métodos de comparación

Es importante destacar que, para realizar comparaciones correctas entre el modelo teórico y el experimental, ambos deben estar bajo las mismas condiciones iniciales. Esto incluye factores como:

- El ángulo inicial de oscilación θ_0 .
- Las propiedades físicas del péndulo (como su longitud L , masa y distribución de masa).
- Las condiciones ambientales, como la aceleración gravitacional g .
- Las condiciones de fricción o resistencia al aire, si estas son considerables.

Sin garantizar que los datos teóricos y experimentales compartan las mismas condiciones iniciales y parámetros, cualquier diferencia observada entre ambos modelos podría deberse a inconsistencias en estos factores, en lugar de representar una discrepancia genuina entre el comportamiento teórico y experimental. Por lo tanto, antes de aplicar cualquier método de comparación, es crucial alinear ambos sistemas en términos de sus características físicas y condiciones de medición.

1. **Superposición de gráficos:** Graficar los datos experimentales y el modelo teórico en la misma gráfica para visualizar las diferencias. Se puede graficar $\theta(t)$ (ángulo en función del tiempo) para ambos casos y observar si coinciden.
2. **Error relativo:**

$$\text{Error relativo} = \frac{|\theta_{\text{teórico}}(t) - \theta_{\text{experimental}}(t)|}{\theta_{\text{teórico}}(t)} \times 100 \%$$

5. Solución numérica (para ambos péndulos)

Los sistemas analizados son un péndulo doble físico y un péndulo doble simple (1),(2), que consta de dos varillas con masa, y el simple que tiene dos varillas sin masa, y la masa es puntual en cada extremo. Estos sistemas son conocidos por su comportamiento no lineal y caótico bajo ciertas condiciones. A continuación, se describe el funcionamiento del código (SIMULACIONES) que simula el movimiento de cada sistema.

5.1. Definición del sistema

El modelo utiliza como coordenadas generalizadas los ángulos de las varillas θ_1 y θ_2 , y sus momentos conjugados p_{θ_1} y p_{θ_2} . Los parámetros del sistema incluyen las longitudes de las varillas (L_1 , L_2), las masas de las varillas (m_1 , m_2), y la aceleración gravitacional g . A partir de estos parámetros y condiciones iniciales, se establece el estado inicial del sistema (1),(2).

5.2. Resolución de las ecuaciones de movimiento

El código utiliza las ecuaciones de Hamilton para describir el sistema. Estas ecuaciones se derivan de la energía cinética y potencial de las varillas, y son resueltas numéricamente mediante el método **Radau**, disponible en la función `solve_ivp` de *SciPy*. Este método es adecuado para sistemas rígidos, como el péndulo doble, donde pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden generar comportamientos muy sensibles.

El método produce una solución densa que permite evaluar el estado del sistema en cualquier instante dentro del intervalo de integración.

5.3. Conservación de la energía

Para verificar la precisión de la simulación, el código calcula el Hamiltoniano del sistema en cada paso de tiempo. Este representa la energía total del sistema, que debe permanecer constante en ausencia de pérdidas. Si se detecta una deriva significativa en el Hamiltoniano, el código emite una advertencia indicando posibles problemas de precisión en los cálculos.

5.4. Conversión a coordenadas cartesianas y visualización

El movimiento de las varillas se traduce de coordenadas angulares a coordenadas cartesianas, lo que permite visualizar las posiciones de los extremos de las varillas en el espacio. Además, el código genera una animación del movimiento, que incluye una trayectoria reciente del extremo del segundo péndulo para ilustrar el comportamiento dinámico del sistema.

5.5. Visualización del movimiento mediante animación

El código genera una animación que ilustra el comportamiento dinámico del péndulo doble utilizando los resultados de la simulación numérica. Se utiliza la biblioteca `matplotlib` para representar visualmente las posiciones y trayectorias de las masas y varillas del sistema.

En primer lugar, se configura un lienzo para la animación con límites espaciales apropiados para contener el movimiento completo del sistema. Los elementos gráficos incluyen:

- **Las masas:** Representadas como puntos móviles conectados por líneas que simbolizan las varillas del péndulo.
- **Las trayectorias:** Curvas que muestran las posiciones recientes de las masas, simulando su estela.
- **El soporte fijo:** Un punto en el origen que representa el punto de suspensión de la primera varilla.
- **El tiempo transcurrido:** Un texto dinámico que indica el tiempo actual de la simulación.

El proceso de animación se divide en dos etapas principales:

1. **Inicialización:** Todos los elementos gráficos se inicializan en posiciones vacías o de reposo mediante una función dedicada, asegurando que la animación comience con un estado consistente.
2. **Actualización dinámica:** Para cada cuadro de la animación:
 - Se calculan y actualizan las posiciones de las masas y las conexiones entre ellas.
 - Se trazan las trayectorias recientes de las masas (estelas) para mejorar la visualización de su movimiento.
 - Se actualiza el texto que indica el tiempo transcurrido en la simulación.

El método `FuncAnimation` se utiliza para ensamblar los cuadros individuales en una animación fluida. Además, se genera un archivo GIF (`doublefis.gif`) que permite guardar y compartir los resultados. Durante la creación del GIF, una barra de progreso mantiene informado al usuario sobre el avance del proceso.

Esta animación proporciona una herramienta visual poderosa para entender el comportamiento caótico del péndulo doble, ilustrando cómo los ángulos y trayectorias evolucionan en el tiempo de forma no lineal y compleja.

Enlace a algunas animaciones: ([animaciones para algunos angulos](#)).

5.6. Diagramas de bifurcación del péndulo doble

Los diagramas de bifurcación son una herramienta fascinante que nos permite analizar cómo un sistema cambia en respuesta a diferentes condiciones iniciales y explorar su comportamiento caótico. En este estudio, hemos generado diagramas que muestran cómo varían las velocidades angulares ω_1 y ω_2 en función del ángulo inicial θ_1 .

Este es el procedimiento que seguimos:

1. **Definición del sistema:** Comenzamos modelando el péndulo doble usando un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) que describen la dinámica de ambos péndulos.
2. **Condiciones iniciales:** Luego, variamos el ángulo inicial θ_1 en un rango definido, mientras mantenemos θ_2 igual al valor inicial de θ_1 . Las variables conjugadas p_{θ_1} y p_{θ_2} se fijan en cero al inicio.
3. **Resolución numérica:** Utilizamos el método **Radau**, especialmente adecuado para sistemas rígidos, para resolver estas ecuaciones.
4. **Análisis de las soluciones:** Para cada valor inicial de θ_1 , extraemos los valores finales de las velocidades angulares ω_1 y ω_2 (p_{θ_1} y p_{θ_2}) para comprender el comportamiento asintótico del sistema.
5. **Representación gráfica:** Construimos los diagramas de bifurcación graficando ω_1 y ω_2 en función de θ_1 . Cada valor inicial de θ_1 se representa con una serie de puntos que corresponden a las velocidades angulares finales, revelando la complejidad del sistema.

El resultado es un conjunto de gráficos que revelan la estructura rica y caótica del movimiento del péndulo doble. Estos diagramas muestran cómo pequeñas variaciones en θ_1 inicial pueden llevar a comportamientos drásticamente diferentes en ambos péndulos. Este análisis subraya la sensibilidad a las condiciones iniciales, una característica clave de los sistemas dinámicos no lineales.

Nuestro enfoque no solo nos permite explorar el caos inherente al péndulo doble, sino que también proporciona un marco para estudiar fenómenos similares en otros sistemas físicos complejos. Es fascinante ver cómo, a través de estos gráficos, podemos visualizar el delicado equilibrio y la impresionante complejidad que surge de un sistema aparentemente sencillo como el péndulo doble.

6. Resultados

6.1. Comparación de las gráficas para el pendulo doble físico

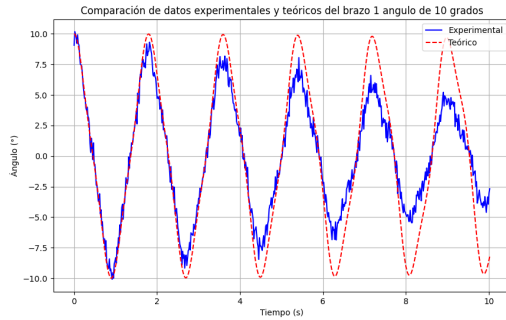


Figura 5: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 10^\circ$ (brazo 1)

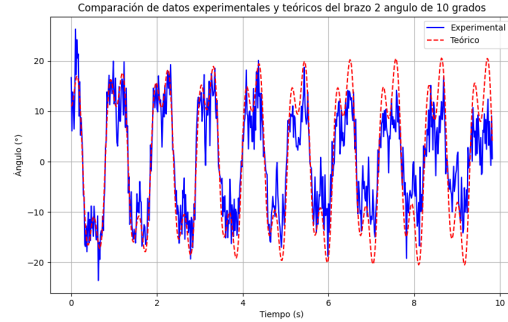


Figura 6: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 10^\circ$ (brazo 2)

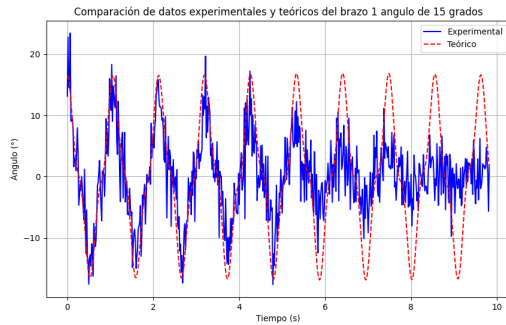


Figura 7: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 15^\circ$ (brazo 1)

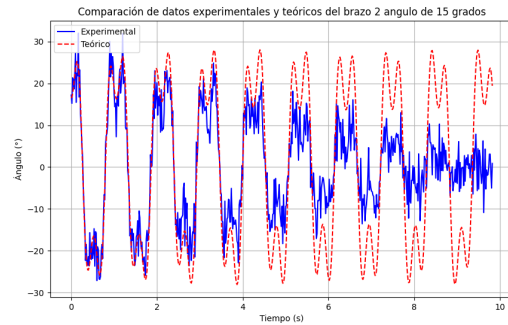


Figura 8: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 15^\circ$ (brazo 2)

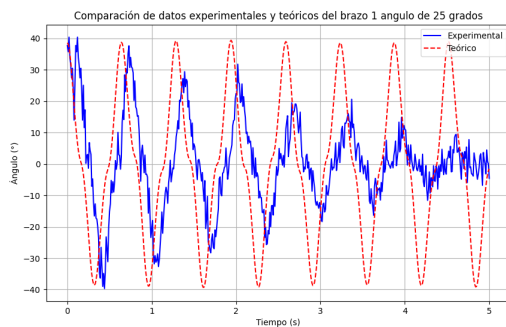


Figura 9: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 25^\circ$ (brazo 1).

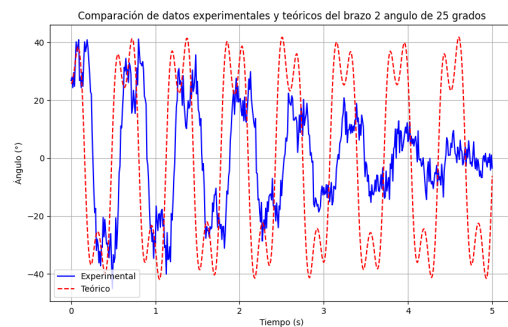


Figura 10: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 15^\circ$ (brazo 2)

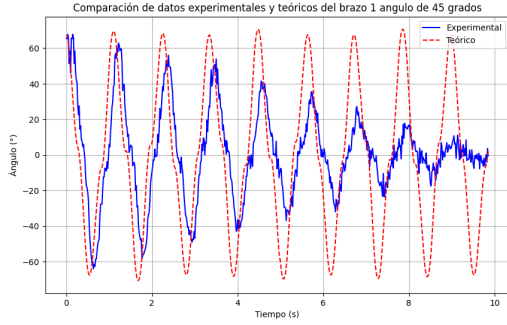


Figura 11: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 45^\circ$ (brazo 1)

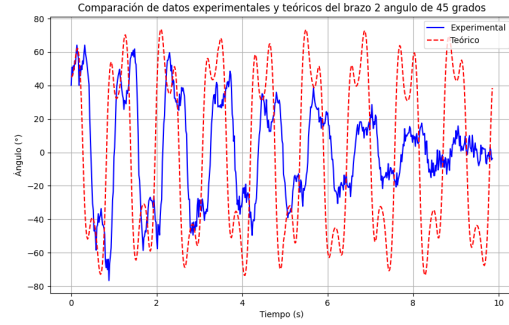


Figura 12: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 45^\circ$ (brazo 2)

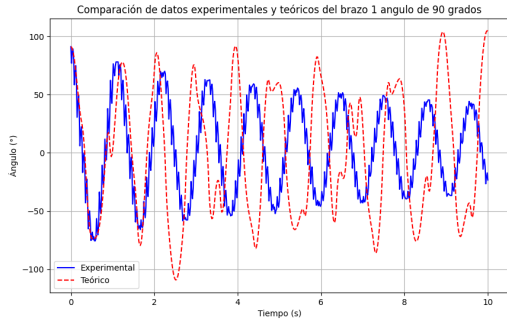


Figura 13: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 90^\circ$ (brazo 1)

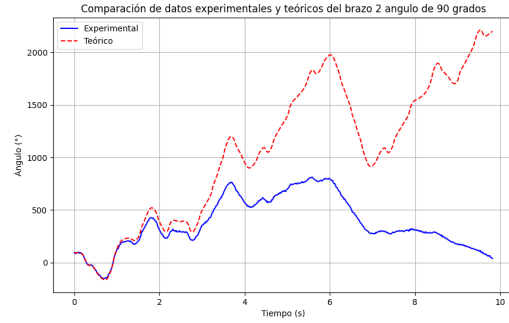


Figura 14: Comparación de datos experimentales y teóricos $\theta = 90^\circ$ (brazo 2)

Análisis de las gráficas experimentales y teóricas

Las gráficas obtenidas para los ángulos iniciales de 10° , 15° , 25° , 45° y 90° , las cuales muestran la comparación entre los resultados teóricos y experimentales del movimiento de un péndulo físico doble como se observan en las figuras (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) y (14). A continuación, se discuten las características principales observadas:

- **Similitud general entre datos teóricos y experimentales:** En todas las gráficas se observa una correspondencia clara entre las curvas teóricas (trazadas en líneas rojas) y los datos experimentales (en azul). Este comportamiento indica que el modelo teórico captura adecuadamente la dinámica del sistema, incluyendo la complejidad del movimiento caótico característico del péndulo doble, especialmente para ángulos iniciales mayores.
- **Disminución de la amplitud en los datos experimentales:** Una de las diferencias clave entre las curvas teóricas y experimentales es la disminución

gradual de la amplitud en los datos experimentales a medida que avanza el tiempo. Este fenómeno se puede atribuir a la pérdida de energía del sistema debido a factores externos, como fricción en las articulaciones, resistencia del aire o imperfecciones en la construcción del péndulo. Estos efectos no están modelados en el sistema teórico, el cual asume condiciones ideales.

- **Mayor divergencia para el brazo 2:** En las gráficas correspondientes al segundo brazo, se observa que las discrepancias entre los datos experimentales y teóricos son más pronunciadas en comparación con el primer brazo. Esto puede deberse a que el segundo brazo es más sensible a las perturbaciones y errores experimentales, ya que su movimiento depende directamente de las oscilaciones del primer brazo, amplificando cualquier efecto no modelado.
- **Efecto de los ángulos iniciales:** El análisis indica que el comportamiento general se mantiene consistente. A medida que aumenta el ángulo inicial, el sistema muestra una dinámica más compleja y no lineal. Sin embargo, las tendencias descritas, como la disminución de amplitud en los datos experimentales y la divergencia en el brazo 2, son características comunes en todos los casos.
- **Persistencia de patrones oscilatorios:** A pesar de las diferencias, las gráficas muestran que los patrones oscilatorios del sistema permanecen en ambas representaciones, lo que reafirma que la evolución temporal del péndulo doble está bien capturada por el modelo teórico para la mayoría de las condiciones iniciales analizadas.
- **Comportamiento para ángulos iniciales grandes** Para el caso del ángulo inicial de 90° , las gráficas experimentales y teóricas presentan una discrepancia significativa para ambos brazos del péndulo. Esto ocurre porque para ángulos iniciales grandes, el sistema entra en una dinámica altamente no lineal y caótica, donde pequeñas variaciones iniciales, pérdidas de energía y limitaciones experimentales tienen un impacto mucho mayor en la evolución temporal. Este comportamiento resalta la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales y pone de manifiesto la dificultad de predecir con precisión la dinámica del péndulo doble en estas circunstancias.

Las gráficas muestran un buen acuerdo cualitativo entre los datos experimentales y teóricos, con diferencias atribuibles a las pérdidas de energía no modeladas. Estas observaciones resaltan la utilidad del modelo teórico para describir el comportamiento del péndulo doble y subrayan la necesidad de incorporar términos de disipación para aproximar mejor las condiciones reales en futuros trabajos.

6.2. Diagramas de bifurcación

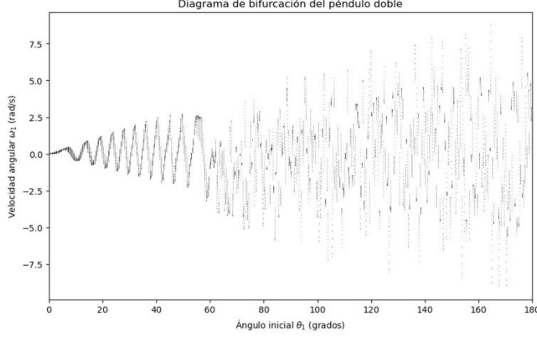


Figura 15

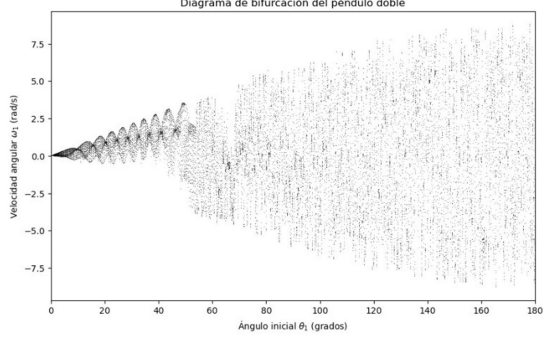


Figura 16

Los diagramas de bifurcación analizados presentan similitudes en cuanto a la representación general del sistema, pero difieren notablemente en la resolución y claridad con que reflejan la dinámica del péndulo doble. Ambos abarcan el mismo rango de ángulos iniciales, desde 0° a 180° , y de velocidades angulares ω_1 , entre -8 rad/s y 8 rad/s . Sin embargo, en el segundo diagrama se observa una mayor definición de las bifurcaciones y las trayectorias caóticas, particularmente en las regiones de transición entre comportamientos ordenados y caóticos. Este detalle sugiere un muestreo más preciso o parámetros iniciales mejor ajustados en la simulación que generó la segunda figura.

En el primer diagrama (15), los patrones de bifurcación comienzan a perder claridad en ángulos iniciales superiores a $\theta_1 \approx 60^\circ$, mientras que en el segundo diagrama (16) estas transiciones son evidentes a lo largo de todo el rango. Además, la figura (16) muestra una mayor concentración de puntos en las regiones cercanas a $\omega_1 = 0$, reflejando un nivel de detalle superior en la representación de la dinámica cerca del equilibrio. En conjunto, el segundo diagrama ofrece una descripción más precisa de las complejidades del sistema, destacando la importancia de utilizar resoluciones altas y un muestreo adecuado para estudiar sistemas no lineales como el péndulo doble.

7. Conclusiones

- El análisis comparativo entre los datos experimentales y teóricos permitió observar que, en el régimen de ángulos menores a 60 grados, ambos resultados muestran una buena concordancia. Sin embargo, a medida que las amplitudes iniciales aumentan, las discrepancias se vuelven más evidentes, especialmente para ángulos iniciales cercanos a 80 grados (en el péndulo doble físico). Estas diferencias pueden atribuirse a factores externos como pérdidas de energía por fricción.
- El estudio destacó el comportamiento caótico tanto del péndulo doble matemático como del físico, mostrando la extrema sensibilidad del sistema a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Se observó que el péndulo doble físico presenta un caos más pronunciado que el matemático, ya que el diagrama de bifurcaciones revela que el comportamiento caótico en el péndulo físico comienza a partir de 80 grados, mientras que en el matemático se inicia a partir de 60 grados.