

Homework #6

Due on 1/2 (Thurs) 17:00

第一部分請以紙本繳交, 由於1/1放假, 因此請於期限內自行繳交至 654 室的作業繳交箱。

第二部分請參考柏瑜助教另行寄送的email 要求, 並於期限內上傳 Ceiba。

請注意每位組員都要各自交一份紙本作業並各自上傳 R 作業。

1 紙本作業

1. It is not known what proportion p of NTU students have a significant other. In a random sample of 100 students, it was found that 72 had a significant other.

- Find the maximum likelihood estimator and its estimate of p .
- Find an approximate 95% interval estimator and its estimate for p .
- Test $H_0 : p = 0.65$ v.s. $H_1 : p > 0.65$ with significance level $\alpha = 0.05$
- Suppose that it is also known that $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{2}{3}$. Given this further information, what is the maximum likelihood estimate of p ?

2. $\{X_i\}_{i=1}^n \stackrel{i.i.d.}{\sim} Uniform(0, \theta), \theta > 0$

- (a) 請證明

$$\varphi = \frac{X_{(n)}}{\theta}, X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

為一樞紐量

- (b) 請證明 θ 的 $(1-\alpha)$ 區間估計式為

$$\left[\frac{X_{(n)}}{u}, \frac{X_{(n)}}{l} \right]$$

其中

$$u^n - l^n = 1 - \alpha, \quad 1 - u^n = \frac{\alpha}{2}, \quad \text{and} \quad l^n = \frac{\alpha}{2}$$

給定以下假設:

$$H_0 : \theta = 2$$

$$H_1 : \theta < 2$$

若檢定的拒絕域為

$$RR = \{\text{拒絕 } H_0 \text{ 當 } X_{(n)} \leq 1.4\}$$

- (i) 請找出型一誤差的機率 $P(\text{Type I Error})$
 - (ii) 請找出檢定力函數, $\pi(\theta)$
3. 假設箱子裡有四顆球, 其中有 θ 顆綠球, $4 - \theta$ 顆藍球。以抽出放回的方式抽出 100 顆球, 其中有 60 顆綠球, 40 顆藍球。
- (a) 在 5% 的顯著水準下檢定 $H_0 : \theta = 2$ v.s. $H_1 : \theta > 2$ (註: 由於樞紐量的建構方式不止一種, 這裡分母請直接用假設檢定下的 θ 帶入分母的變異數公式中, 不要用 \hat{p} 取代。)
 - (b) 計算 p-值
 - (c) 若 $\theta = 1$, 請計算檢定力
 - (d) 建構 θ 的 95% 近似區間估計式。
 - (e) 此 95% 儘速區間估計是是否包含 θ ? 請以此結果, 說明區間估計是與假設檢定之間的關係。

2 R practice

作業六一樣包含 R 作業, 請參照另行寄送的 R 作業指示, 於期限內完成並繳交。