

Homework #3

Due on 11/13 13:10

第一部分請以紙本繳交; 第二部分請參考後述繳交格式要求上傳 Ceiba。
請注意每位組員都要各自交一份紙本作業並各自上傳 R 作業。

1 紙本作業

1. Let $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, and $U \sim U(0, 1)$ such that U and (X, Y) are independent. For a given constant $\alpha \in (0, 1)$, define the new random variable

$$Z = \begin{cases} X & , U \leq \alpha \\ Y & , \text{otherwise.} \end{cases}$$

Recall that $\Phi(\cdot)$ conventionally denotes the distribution function of a standard normal random variable.

- (a) Find the distribution function of Z .

Now let $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 9$, and $\alpha = 0.5$

- (b) Find $E(Z|U)$

- (c) Evaluate $E(Z)$

2. 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。令 $Y = e^X$, 請回答以下問題:

- (a) 利用轉換法, 求出 Y 之 pdf

- (b) 請利用 $M_X(t)$ 求算 $E(Y)$

- (c) 請利用 $M_X(t)$ 求算 $Var(Y)$

3. Suppose scores on a test are normally distributed with a mean of 70 and a standard deviation of 10. Below what score should 69.1% of all score lie? (Hint : 請查表)

4. Given $\{Y_i\}_{i=1}^6 \sim \text{i.i.d. } N(0, 1)$. Now let

$$V = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5}{5}$$

(a) Suppose $W = \sum_{i=1}^5 (Y_i - V)^2$. What distribution does W follow?

(b) Evaluate $E(W)$

(c) Let $U = \sum_{i=1}^5 (Y_i - V)^2 + Y_6^2$. What distribution does U follow?

(d) What distribution does $\frac{2Y_6}{\sqrt{W}}$ follow?

(e) Given that $B = 5V^2$, find the distribution of $X = \frac{Y_1}{\sqrt{B}}$

2 R 程式作業

2.1 Simulation

假設台大學生共 n 人。台大學生的身高服從常態, 且 $\text{mean} = 153$, $\text{sd} = 11$ 。請回答以下問題:

1. 今隨機從台大學生中抽出 1 人, 其身高超過 168 公分的機率為何?

hint: 以 `1 - pnorm()` 來計算理論機率值

2. 請以 Monte Carlo Simulation 來計算(1.) 的機率, 其中 n 分為 1000, 10000, 100000; 請使用 `set.seed(1234)` 來產生亂數。

請寫下你如何以 `rnorm()` 產生的亂數來定義相對頻率以作為(1.) 的機率

hint: 利用邏輯判斷回傳布林值, 再計算 True 的個數所佔的比例即可作為相對頻率

hint2: Check L1 In Class Practice 4

2.2 Efficient Frontier

請蒐集兩支股票的價格, 並繪製以此兩支股票所組成的 Portfolio 的 Efficient Frontier。

關於 Efficient Frontier 背後的數學請參考課本 p.138-141。你可以使用 TEJ 資料庫、Bloomberg 或 Yahoo Finance 等網站來取得股價資料來回答以下問題:

1. 你挑選哪兩支股票? 從何處取得? 資料的期間為何? 是日資料還是月資料?

2. 你可以使用定義計算rate of return 或者使用log return。請繪製兩支股票rate of return 的histogram, 並從histogram 的形狀是否像鐘型來回答rate of return 是否與常態分配相去甚遠?
3. 請計算兩支股票的年化期望報酬以及標準差(即風險) 風險較高的那一支股票是否有較高的期望報酬?
4. 請繪製Portfolio P 的Efficient Frontier。其中P 是由你所選定的兩支股票依據 ω 的比重所組合出來的portfolio, 且 $\omega \in (0, 1)$
5. 試著找出當 ω 為何時, 你所組合出的P 有最小的風險?
hint: `which.min()` 函式可以幫你找到極小化目標函數的 ω 的Index

2.3 繳交格式

- 上傳的檔案須包含:
 - 程式碼(副檔名為.r)
 - pdf 文件, 包含以上問題的文字回答與圖形
- 建議使用RMarkdown 的knit 功能(非必要):
 1. 直接輸出pdf 文件
 1. 或輸出word 文件後轉檔為pdf 檔 如此便不需將程式碼複製到word 再貼上 亦可直接將圖嵌在文件裡
 1. 輸出html 檔, 再使用網頁瀏覽器開啟後列印為pdf 檔