INSTRUCCIONES TEST: Puntuación máxima de **5 puntos**, responda sobre la misma hoja. Marque con un círculo la opción que estime correcta; si marca varias opciones, la pregunta será considerada errónea. Solo hay una opción válida. Cada pregunta vale un punto, las contestaciones equivocadas restan 0,33 puntos. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles

1. Utilizando un micrómetro de precisión $p = 0{,}01$ mm se ha medido la longitud de un objeto en el laboratorio, obteniendo un valor $x = 4{,}32$ mm. Si hubiéramos utilizado una regla graduada en milímetros, ¿cuál es el valor que esperaría obtenerse?
   (a) $x = 4$ mm, porque es la precisión máxima de la regla compatible con el valor real.
   (b) $x = 4{,}32$ mm, porque el valor de la medida no cambia, independientemente del instrumento utilizado.
   (c) $x = 5$ mm, porque es la precisión máxima de la regla y es la forma correcta de redondear el resultado original.
   (d) $x = 4{,}3$ mm, porque es la precisión máxima de la regla.

2. El trabajo necesario para desplazar un cuerpo, W, puede definirse como el producto de la fuerza aplicada, F, por el desplazamiento, x. ¿En qué unidades del SI se mide el trabajo?
   (a) M L^2 T^{-2}. (b) kg m^2 s^{-2}. (c) N/m. (d) kg s^{-2}.

3. Tras realizar en el laboratorio 100 medidas de los tiempos de caída de un cuerpo (realizadas con un cronómetro que marca los segundos) se obtiene la media aritmética $\bar{t} = 2{,}32$ s. La desviación típica resulta ser $s(t) = 0{,}3$ s. La forma correcta de expresar el resultado de la media es:
   (a) $t = (2{,}32 \pm 0{,}3)$ s, porque el error viene determinado por la desviación típica y el resultado debe tener todas las cifras significativas obtenidas.
   (b) $t = (2{,}32 \pm 0{,}03)$ s, porque el error viene determinado por la desviación típica de la media, $s/\sqrt{100}$.
   (c) $t = (2 \pm 1)$ s, porque el error lo determina la precisión del cronómetro.
   (d) $t = (2{,}3 \pm 0{,}1)$ s, porque el error por la precisión del aparato es mayor que la desviación típica, $p > s$, y en este caso el error de la media viene dado por ($p/\sqrt{100}$ s), redondeando la media al número de cifras significativas correctas.

4. En un laboratorio de electrónica se construye un circuito formado por una resistencia y una fuente de tensión. Con la ayuda de un voltímetro y un amperímetro se determina la resistencia eléctrica del resistor mediante la ley de Ohm, $V = RI$, para distintos voltajes introducidos. Del ajuste lineal de los pares (V, I) se obtiene una pendiente $R = 0{,}93$ kΩ, con un error $\Delta R = 0{,}09$ kΩ. El fabricante del resistor ha proporcionado un valor (que consideramos real) $R^{\text{fab}} = 1$ kΩ. En estas condiciones puede afirmarse:
   (a) Que el resultado del ajuste es exacto, porque el valor real está dentro del intervalo $(R - \Delta R, r + \Delta R)$.
   (b) Que, dado que el error relativo es del 10 %, el resultado no puede considerarse exacto.
   (c) Que no podemos decir nada acerca de la exactitud del resultado.
   (d) Que el resultado no puede considerarse exacto, porque el valor real está muy alejado de la cota inferior $R^{\text{inf}} = 0{,}84$ kΩ (que da un error del 16 %).

5. Una barra de aluminio puede dilatarse de forma lineal en función de la temperatura. Supongamos que disponemos de un dispositivo que nos proporciona el valor de la longitud de la barra de aluminio para una determinada temperatura con una precisión de 0,2 cm y obtenemos las siguientes mediciones: 80,1; 80,9; 81,0; 80,0; 80,5; 80,4 cm. ¿Cuál es la forma correcta de representar el valor esperado de la longitud de la barra y su error?
   (a) $(80{,}48 \pm 0{,}05)$ cm. (b) $(80{,}5 \pm 0{,}2)$ cm. (c) $(80{,}5 \pm 0{,}5)$ cm. (d) $(80{,}48 \pm 0{,}14)$ cm.

INSTRUCCIONES CASO PRÁCTICO: Puntuación máxima de **5 puntos**. Utilice la hoja de respuestas con el cuadro para la gráfica más adecuado entre las disponibles. Todos los resultados deben darse con el número de cifras significativas correcto, el error asociado y las unidades. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles

Ejercicio práctico: Ley de Rayleigh-Jeans.

Un «cuerpo negro» es aquel objeto que absorbe toda la luz y energía radiante que le llega, aunque, en realidad, estos objetos no son del todo «negros», ya que emiten energía de una determinada longitud de onda al ser calentados a una temperatura concreta. La «**ley de Rayleigh-Jeans**» describe la radiación emitida por un cuerpo negro a longitudes de onda elevadas:

$$E_\lambda(\lambda,T) = (C_1/C_2)\,T\,\lambda^{-4}, \tag{1}$$

donde E_λ es la irradiancia espectral (la magnitud que se mide), T es la temperatura absoluta, λ es la longitud de onda y C_1 y C_2 son dos constantes que vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$C_1 \equiv 8\pi c^2 h, \quad C_2 \equiv hc/k_B, \tag{2}$$

donde los símbolos que aparecen son: velocidad de la luz: $c = 2{,}9979\times10^{8}$ m/s, constante de Planck: $h = 6{,}6261\times10^{-34}$ J.s y constante de Boltzmann: $k_B = 1{,}3806\times10^{-23}$ J/K.

Las medidas extraídas a partir del experimento para la irradiancia espectral, a una temperatura de 1500 K, son las siguientes:

λ (m)	$148{,}7\times10^{-6}$	$188{,}7\times10^{-6}$	$239{,}5\times10^{-6}$	$303{,}9\times10^{-6}$	$385{,}7\times10^{-6}$	$489{,}4\times10^{-6}$
E_λ (J/s m^{-3})	$3{,}1\times10^{5}$	$1{,}2\times10^{5}$	$4{,}7\times10^{4}$	$1{,}8\times10^{4}$	$6{,}9\times10^{3}$	$2{,}7\times10^{3}$

Los errores asociados a las medidas de la irradiancia espectral son del 20% para cada valor medido. Los valores de λ tienen una incertidumbre del 5%. El error para la temperatura medida será $\Delta T = 10$ K. Las incertidumbres de las constantes podemos considerarlas despreciables. Con esta información, conteste a las siguientes preguntas usando la hoja de respuestas proporcionada.

1. (1 punto) Tome logaritmos (neperianos) en la expresión (1) para realizar una regresión lineal de $\ln E_\lambda$ frente a $\ln\lambda$. Desarrolle los errores correspondientes para $\ln E_\lambda$ y para $\ln\lambda$. Represente $\ln E_\lambda$ frente a $\ln\lambda$, junto con las correspondientes barras de error, en la gráfica que mejor se adecue a la representación de los datos de las disponibles en las hojas de respuestas.

2. (1,5 puntos) Vemos que $\ln E_\lambda$, como función de $\ln\lambda$, es una recta. Realice un ajuste de mínimos cuadrados a la recta $ax+b$ y obtenga los valores de a y b, con sus errores y unidades. Represente la recta en la gráfica. Obtenga también el valor del coeficiente de correlación.

3. (1,5 puntos) Magnitudes solicitadas: A partir del valor obtenido de la ordenada en el origen, obtenga el valor de la constante de Boltzmann, k_B, con su error asociado. Suponga conocido el valor de la velocidad de la luz, c, y que su error asociado es despreciable. Emplee propagación cuadrática en los errores.

4. (1 punto) En el espacio de desarrollo responda a las siguientes cuestiones:
   - Escriba en una tabla los valores obtenidos para $\ln E_\lambda$ y $\ln\lambda$ con sus errores.
   - ¿El valor obtenido para la constante de Boltzmann es compatible con el valor actual de la constante? Razone la respuesta. Discuta motivos que puedan explicar su conclusión.

Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, σ_m y σ_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j, \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j.$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2}, \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2},$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C, \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}.$$

Parámetros de la recta

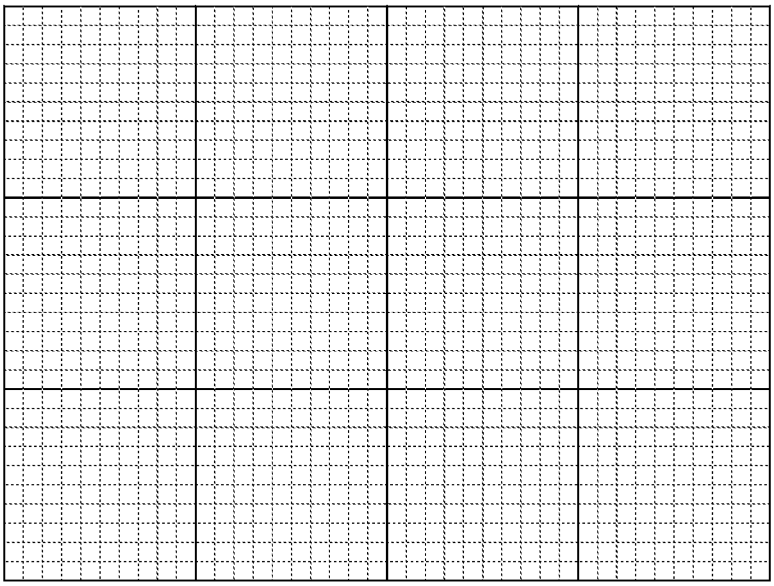
$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)}, \qquad \sigma_m = \frac{s(Y)}{s(X)}\sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}},$$

$$b = Y_C - mX_C, \qquad \sigma_b = \sigma_m \sqrt{s^2(X) + X_C^2}.$$

A continuación proporcionamos una tabla que le permitirá hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarla.

Regresión lineal y coef. de correlación				
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$
m	σ_m	b	σ_b	r

INSTRUCCIONES. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles. El valor de los pares (x, y) y la magnitud solicitada están dados en el caso práctico. Utilice el espacio disponible en la «Pregunta de desarrollo» para contestar lo que se indique el caso práctico.



$$y = ax + b \quad \begin{cases} a = \\ b = \\ r = \end{cases}$$

Magnitud(es) solicitada(s):

Pregunta de desarrollo:

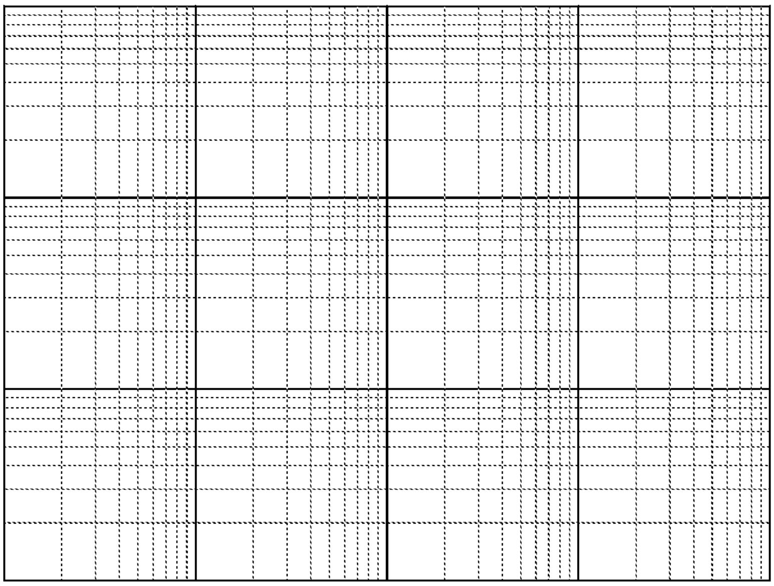
INSTRUCCIONES. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles. El valor de los pares (x, y) y la magnitud solicitada están dados en el caso práctico. Utilice el espacio disponible en la «Pregunta de desarrollo» para contestar lo que se indique el caso práctico.

$$y = ax + b \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \\ b = \\ r = \end{array} \right.$$

Magnitud(es) solicitada(s):

Pregunta de desarrollo:

INSTRUCCIONES. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles. El valor de los pares (x, y) y la magnitud solicitada están dados en el caso práctico. Utilice el espacio disponible en la «Pregunta de desarrollo» para contestar lo que se indique el caso práctico.



$$y = ax + b \quad \begin{cases} a = \\ b = \\ r = \end{cases}$$

Magnitud(es) solicitada(s):

Pregunta de desarrollo:

INSTRUCCIONES TEST: Puntuación máxima de **5 puntos**, responda sobre la misma hoja. Marque con un círculo la opción que estime correcta; si marca varias opciones, la pregunta será considerada errónea. Solo hay una opción válida. Cada pregunta vale un punto, las contestaciones equivocadas restan 0,33 puntos. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles

1. La forma más adecuada de expresar la cantidad $(5{,}0534 \pm 0{,}02789)$ m es:
   (a) $(5{,}1 \pm 0{,}04)$ m.
   (b) $(5{,}05 \pm 0{,}03)$ m.
   (c) $(5{,}053 \pm 0{,}028)$ m.
   (d) $(5{,}0534 \pm 0{,}0279)$ m.

2. Sea la expresión $L = m\omega^2 r$ donde m es masa, ω es velocidad angular y r radio de giro. Entonces, $[L]$ es igual a:
   (a) M/L.
   (b) M/T^2.
   (c) M L/T^2.
   (d) M L.

3. Obtenga la media y la desviación típica (con $N-1$ grados de libertad) de las cantidades: $x_i = 3{,}7; 3{,}3; 3{,}5; 3{,}6; 3{,}1$
   (a) $\bar{x} = 3{,}44$, $s(X) = 0{,}21$.
   (b) $\bar{x} = 3{,}3$, $s(X) = 0{,}2$.
   (c) $\bar{x} = 3{,}54$, $s(X) = 0{,}24$.
   (d) $\bar{x} = 3{,}44$, $s(X) = 0{,}24$.

4. Para calcular el valor de la aceleración de la gravedad se recurre a una clásica experiencia consistente en dejar caer objetos desde una altura determinada y medir el tiempo de caída. Modificando las alturas se obtendrán distintos tiempos y, a partir de un ajuste por mínimos cuadrados de la altura frente al cuadrado del tiempo podrá obtenerse el valor de la aceleración de la gravedad, g. Si usamos un cronómetro que tiene un error $\Delta t = 0{,}01$ s, ¿cuál será el error en las medidas del cuadrado del tiempo, $\Delta(t^2)$?
   (a) Si $\Delta t = 0{,}01$ s, $\Delta(t^2) = (0{,}01\,\mathrm{s})^2 = (0{,}0001)$ s.
   (b) Haciendo un análisis por propagación de errores, el error en t^2 será $\frac{1}{2}t\Delta t$, con t distinto para cada medida.
   (c) El error en t^2 será igual al error en t (pues viene determinado por la precisión del aparato).
   (d) Cada valor de t^2 tendrá un error distinto, dado por $\Delta(t^2) = 2t\Delta t$, con t la medida correspondiente.

5. Para determinar el radio de la Tierra se recurre a dos procedimientos distintos. El primero de ellos se basa en relaciones de semejanza entre triángulos y se obtiene desde un satélite artificial en el exterior de la Tierra. De su medida se obtiene un radio $R^{\mathrm{sat}} = 6100$ km, con un error $\varepsilon^{\mathrm{sat}} = 250$ km. El segundo método se obtuvo a partir del tiempo que tardó en llegar la información de un sismo a dos estaciones sismológicas distintas. En este caso se calculó un radio $R^{\mathrm{sis}} = 6980$ km, con un error $\varepsilon^{\mathrm{sis}} = 150$ km.

   Aceptando como válido un radio de la Tierra (supuesta esférica) de $R = 6370$ km, podemos afirmar que:
   (a) La medida obtenida por el satélite es la única exacta.
   (b) La medida de las estaciones sismológicas es más precisa que la obtenida por el satélite.
   (c) La medida del satélite es más precisa que la obtenida por las estaciones sismológicas.
   (d) La medida obtenida por las estaciones sismológicas es exacta.

INSTRUCCIONES CASO PRÁCTICO: Puntuación máxima de **5 puntos**. Utilice la hoja de respuestas con el cuadro para la gráfica más adecuado entre las disponibles. Todos los resultados deben darse con el número de cifras significativas correcto, el error asociado y las unidades. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles

Ejercicio práctico: Determinación de la constante de los gases.

La expresión matemática de la ley de los gases perfectos es:

$$PV = nRT, \tag{1}$$

donde P es la presión a que está sometido el gas, V el volumen ocupado por el gas, n el número de moles del gas que ocupan el volumen V, T la temperatura absoluta del gas y R la denominada *constante de los gases*.

En una práctica de laboratorio se pretende determinar el valor de R. Para ello se dispone de una cavidad cilíndrica larga de radio $r = (5{,}2 \pm 0{,}1)$ cm cerrada por uno de sus extremos por un pistón que se puede desplazar en la dirección del eje del cilindro. Se sabe que la cantidad de gas que hay dentro del cilindro es 2,5 moles, con una incertidumbre de 0,1 moles. Por medio de un manómetro se conoce la presión en el interior del cilindro con una incertidumbre del 5 % y un termómetro indica que la temperatura dentro del cilindro es constante durante todo el experimento y su valor es $T = 285$ K con un error de ± 1 K.

El experimento se realiza desplazando el pistón y tomando los valores de la distancia, d, del pistón a la pared opuesta del cilindro, que se conoce con una precisión de 1 cm, y la presión indicada por el manómetro. Utilizando este procedimiento se ha obtenido la siguiente tabla de datos (se recuerda que la unidad de presión -Fuerza/Superficie- en el Sistema Internacional es el Pascal, que se indica como Pa):

d (cm)	49	44	40	35	29	25
P (Pa)	$1{,}49 \times 10^6$	$1{,}59 \times 10^6$	$1{,}71 \times 10^6$	$1{,}95 \times 10^6$	$2{,}42 \times 10^6$	$2{,}79 \times 10^6$

Con esta información, y considerando despreciable el error en π, conteste a las siguientes preguntas usando la hoja de respuestas proporcionada.

1. (1 punto) Recordando que el volumen de un cilindro de rado r y altura h es $\pi r^2 h$, calcule los valores de V^{-1} en unidades de m^{-3} con el fin de realizar una regresión lineal de P frente a V^{-1}. Obtenga los errores correspondientes para V^{-1} utilizando propagación lineal de errores. Represente P frente a V^{-1}, junto con las correspondientes barras de error, en la cuadrícula de las disponibles en las hojas de respuestas que mejor se adecue a la representación que se le pide.

2. (1,5 puntos) Se espera que la gráfica de P como función de V^{-1} tenga el aspecto de una recta. Realice un ajuste de mínimos cuadrados a una recta de ecuación $y = ax + b$ y obtenga los valores de a y b, con sus errores y unidades. Represente la recta en la gráfica. Obtenga el valor del coeficiente de correlación.

3. (1,5 puntos) Magnitudes solicitadas: A partir del valor obtenido de la pendiente de la recta, obtenga el valor de la constante de los gases, R, con su error asociado. Emplee propagación cuadrática en los errores.

4. (1 punto) En el espacio de desarrollo responda a las siguientes cuestiones:
   - Escriba una tabla con los valores obtenidos para V^{-1} y P con sus errores.
   - El valor obtenido para R, ¿es compatible con el valor comúnmente aceptado, $R = 8{,}31446\ldots$ J/mol $\cdot$ K? Razone la respuesta, dando los argumentos sobre los que base su conclusión.

Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, σ_m y σ_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j, \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j.$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2}, \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2},$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C, \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}.$$

Parámetros de la recta

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)}, \qquad \sigma_m = \frac{s(Y)}{s(X)}\sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}},$$

$$b = Y_C - mX_C, \qquad \sigma_b = \sigma_m\sqrt{s^2(X) + X_C^2}.$$

A continuación proporcionamos una tabla que le permitirá hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarla.

Regresión lineal y coef. de correlación				
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$
m	σ_m	b	σ_b	r

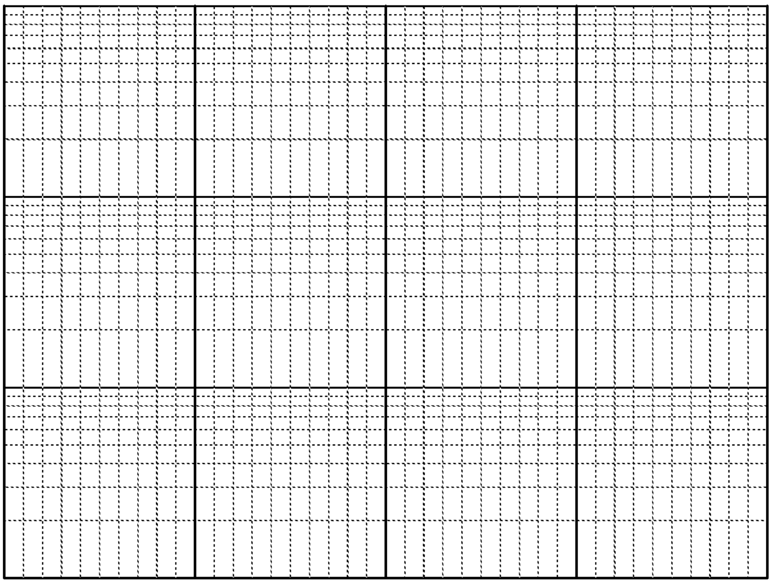
INSTRUCCIONES. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles. El valor de los pares (x, y) y la magnitud solicitada están dados en el caso práctico. Utilice el espacio disponible en la «Pregunta de desarrollo» para contestar lo que se indique el caso práctico.

$$y = ax + b \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \\ b = \\ r = \end{array} \right.$$

Magnitud(es) solicitada(s):

Pregunta de desarrollo:

INSTRUCCIONES. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles. El valor de los pares (x, y) y la magnitud solicitada están dados en el caso práctico. Utilice el espacio disponible en la «Pregunta de desarrollo» para contestar lo que se indique el caso práctico.

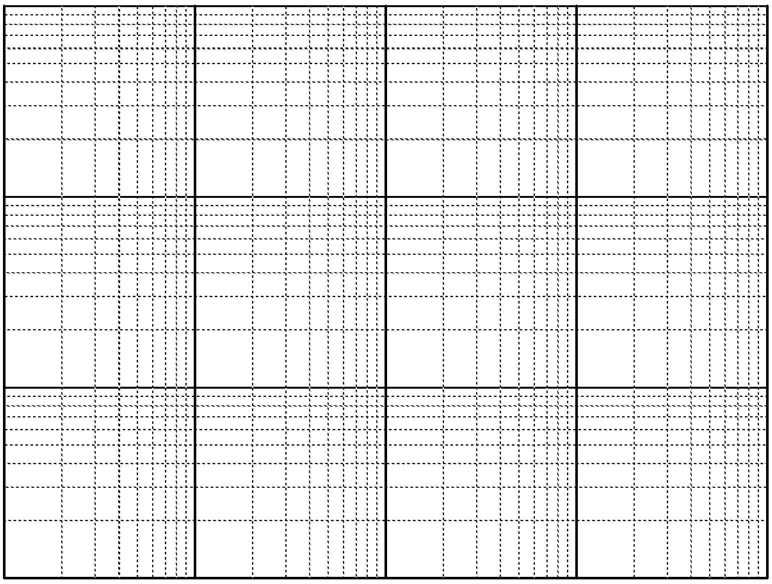


$$y = ax + b \quad \begin{cases} a = \\ b = \\ r = \end{cases}$$

Magnitud(es) solicitada(s):

Pregunta de desarrollo:

INSTRUCCIONES. **Entregue únicamente dos hojas**: la hoja de respuesta del test y la hoja de respuesta del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles. El valor de los pares (x, y) y la magnitud solicitada están dados en el caso práctico. Utilice el espacio disponible en la «Pregunta de desarrollo» para contestar lo que se indique el caso práctico.



$$y = ax + b \quad \begin{cases} a = \\ b = \\ r = \end{cases}$$

Magnitud(es) solicitada(s):

Pregunta de desarrollo:

INSTRUCCIONES GENERALES. Entregue únicamente dos hojas: la hoja del test y la hoja de respuestas del caso práctico que contenga la gráfica más adecuada de entre las disponibles.

INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS DEL TEST. Responda sobre la misma hoja. Marque con un círculo la opción que estime correcta; si marca varias opciones, la pregunta será considerada errónea. Solo hay una opción válida. Cada pregunta vale un punto, las contestaciones equivocadas restan 0,33 puntos.

1. Podemos suponer que la órbita de un pequeño cuerpo alrededor de la Tierra es aproximadamente circular y de radio a. Con una precisión de 0,1 km, se toman medidas de la distancia que separa el telescopio espacial Hubble de la superficie de la Tierra, obteniéndose estos valores: $d_1 = 537{,}0$ km, $d_2 = 540{,}9$ km y $d_3 = 538{,}9$ km. ¿Cuál es el error del valor esperado de a? Nota: el radio de la Tierra se considera conocido y exacto, de valor $R_T = 6370$ km.

   (a) 0,1 km. (b) 1,1 km. (c) 1,9 km. (d) 1,6 km.

2. Utilizando observaciones de la distancia entre un satélite y la Tierra y el tiempo que este tarda en recorrer una órbita completa, se estima la masa de la Tierra en $M_{\text{estimada}} = (5{,}88 \pm 0{,}02) \times 10^{24}$ kg. Se sabe que la Tierra tiene una masa $M_{\text{real}} = (5{,}97 \pm 0{,}05) \times 10^{24}$ kg. En el sentido de precisión y exactitud ¿podemos afirmar que nuestras observaciones son exactas?

   (a) No, ya que los intervalos de confianza no se solapan.
   (b) No, ya que el error de M_{real} es menor que el error en M_{estimada}.
   (c) Sí, ya que el error relativo de M_{estimada} es menor que el error relativo de M_{real}.
   (d) Sí, ya que el error es muy pequeño en comparación con la masa total de la Tierra.

3. Observaciones astronómicas nos han permitido obtener una relación entre el tiempo que tarda un satélite en orbitar alrededor de la Tierra, T, y su distancia al centro de la misma, a. La expresión que se ha obtenido es la siguiente: $T^2 = \alpha a^3$, con $\alpha = (9{,}92 \pm 0{,}05) \times 10^{-14}$ s^2 m^{-3}. El telescopio espacial Hubble orbita la Tierra a una distancia $d = (544 \pm 3)$ km de su superficie. ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta a la Tierra? Utilice propagación lineal de errores. Nota: el radio de la Tierra se considera conocido y exacto, de valor $R_T = 6370$ km.

   (a) $(95{,}4 \pm 0{,}3)$ min.
   (b) $(95{,}4 \pm 1{,}4)$ min.
   (c) (95 ± 2) min.
   (d) (95 ± 4) min.

4. Con ayuda de las leyes de Newton es posible obtener la constante de proporcionalidad de la ecuación $T^2 = \alpha a^3$. Puede probarse que $\alpha = \frac{\beta}{M}$. Si T es el periodo de revolución, a el radio de la órbita y M la masa de la Tierra ¿qué unidades tiene la constante β?

   (a) L^{-3} T^2 M^1
   (b) L^3 T^{-2} M^{-1}
   (c) kg^2 m^{-2} N^{-1}
   (d) m^3 s^{-2} kg^{-1}

5. Supongamos la expresión $T^2 = \gamma \pi^2 a^3$. La constante γ tiene un error relativo del 0,5 %, mientras que el error relativo de a es del 0,2 %. Queremos que el error de π no incremente sustancialmente el error de T. A la vista de los errores de γ y a ¿cuál es el número mínimo de decimales de π que debemos tomar para que el error asociado a él sea inferior del resto de errores? Utilice propagación lineal de errores.

   (a) $\pi = 3{,}1$ (b) $\pi = 3{,}14$ (c) $\pi = 3{,}142$ (d) $\pi = 3{,}1416$

INSTRUCCIONES ESPECÍFICAS DEL CASO PRÁCTICO. Puntuación máxima de 5 puntos. Utilice la hoja de respuestas del caso práctico con el cuadro para la gráfica más adecuado entre las disponibles. Todos los resultados deben darse con el número de cifras significativas correcto, el error asociado y las unidades.

Caso práctico: comprobación experimental de la tercera ley de Kepler

Como hemos visto en el test, el cuadrado del periodo de revolución de un satélite (u otro pequeño cuerpo en comparación con el planeta alrededor del cual orbita) es proporcional al cubo del radio de su órbita. Esta relación de proporcionalidad se conoce como tercera ley de Kepler. Igualando la fuerza de atracción gravitatoria que se ejerce sobre el cuerpo a la fuerza centrípeta que lo mantiene en una órbita (que consideraremos circular) se obtiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3, \tag{1}$$

donde T es el periodo de revolución (el tiempo necesario para recorrer una órbita completa), $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} es la constante de gravitación universal (supuesta exacta), M la masa del cuerpo sobre el que se orbita y a el radio de la órbita. En este caso práctico, haremos una comprobación experimental de esta ley para obtener, por métodos indirectos, la masa de la Tierra. La Tabla 1 muestra las distancias que se han obtenido para distintos satélites, medidas desde la superficie de la Tierra, y en distintos instantes de su trayectoria. En la última columna se muestra, también, información sobre el periodo de revolución que se ha medido.

Satélite	d_1 (km)	d_2 (km)	d_3 (km)	Periodo (min)
ISS	400	413	422	92,90
GPS	20180	19100	20080	701,8
METEOSAT	35778	35792	35784	1437,4
Vela-1A	101925	116528	109226	6507,2
Luna	362600	405400	384399	40417,3

Tabla 1: Distancias medidas desde la superficie de la Tierra y periodos de revolución para diversos cuerpos: Estación Espacial Internacional (ISS), satélite de posicionamiento GPS-III-SVN68, satélite meteorológico METEOSAT-11, satélite de detección de explosiones nucleares Vela-1A, la Luna.

1. (1 punto) Pregunta de desarrollo. Consideremos que el error asociado a cada medida de distancia es $\Delta d_i =$ 1 km. El radio de la Tierra se supone conocido y exacto, de valor $R_T = 6370$ km. El error relativo del periodo se estima en un 0,1 %. Con esta información, construya una tabla donde se muestre, para cada cuerpo y con el número correcto de cifras significativas, el valor medio de la distancia y su error, medido en metros y desde el centro de la Tierra. Añada también los datos del periodo de revolución, en segundos, con su error y el número correcto de cifras significativas.

2. (1 punto) Gráfica. Con la información recogida en la pregunta de desarrollo, y a la vista de la ecuación (1), utilice la gráfica que considere más adecuada para obtener una representación lineal del periodo de revolución (en s) frente a la distancia media de los distintos satélites respecto del centro de la Tierra (en m). No es necesario incluir las barras de error.

3. (1.5 puntos) Ajuste. Dado el orden de magnitud de las variables que intervienen, considere el logaritmo natural de T y el logaritmo natural de a. A partir de los datos de la pregunta de desarrollo, haga un ajuste por mínimos cuadrados para $\ln T = m \ln a + n$ y obtenga los valores de m y n con sus errores.

4. (1.5 puntos) Magnitud solicitada. Con los resultados del ajuste anterior, y utilizando la ecuación (1), indique cómo obtener y obtenga tanto el valor de la masa de la Tierra como su error. Utilice propagación lineal de errores y exprese ambos resultados con el número correcto de cifras significativas.

Material complementario (no entregar esta hoja)

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, σ_m y σ_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j, \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j.$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2}, \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2},$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C, \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}.$$

Parámetros de la recta

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)}, \qquad \sigma_m = \frac{s(Y)}{s(X)}\sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}},$$

$$b = Y_C - mX_C, \qquad \sigma_b = \sigma_m\sqrt{s^2(X) + X_C^2}.$$

A continuación proporcionamos una tabla que le permitirá hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarla.

Regresión lineal y coef. de correlación				
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$
m	σ_m	b	σ_b	r

Pregunta de desarrollo:

Gráfica:

Ajuste:

$$y = mx + n \quad \begin{cases} m = \boxed{} \\ n = \boxed{} \end{cases}$$

Magnitud solicitada:

Pregunta de desarrollo:

Gráfica:

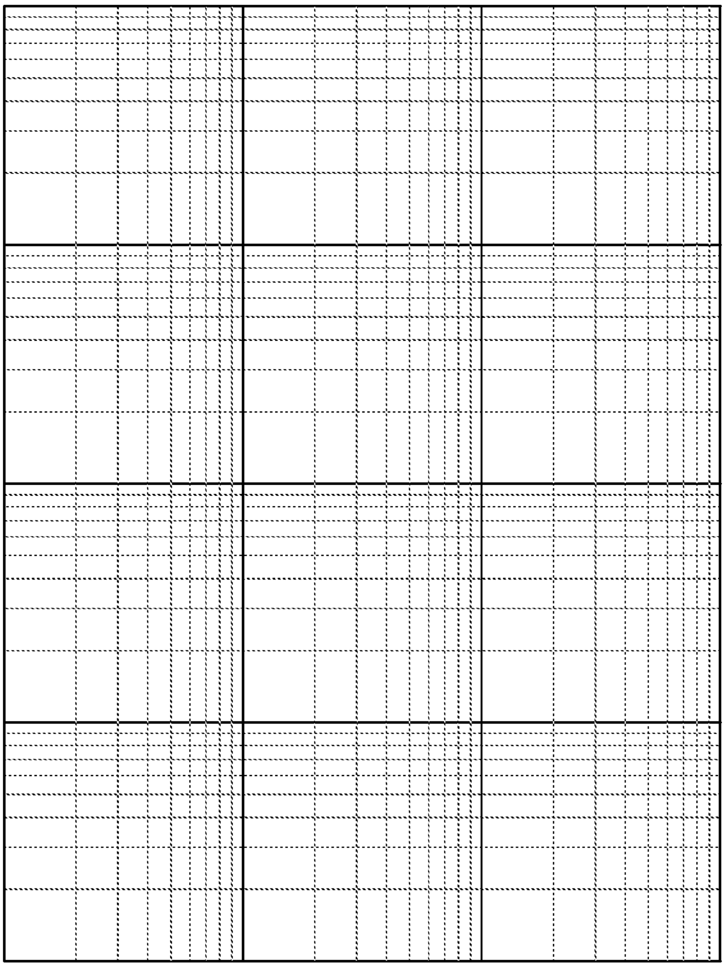
Ajuste:

$$y = mx + n \quad \begin{cases} m = \boxed{} \\ n = \boxed{} \end{cases}$$

Magnitud solicitada:

Pregunta de desarrollo:

Gráfica:



Ajuste:

$$y = mx + n \qquad \begin{cases} m = \boxed{} \\ n = \boxed{} \end{cases}$$

Magnitud solicitada: