INSTRUCCIONES. El ejercicio se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**; se valorará la correcta justificación de los pasos que conducen a la solución. El desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en la hoja que se aporta con este enunciado.
Dispone de un máximo de **2 horas** para realizar los ejercicios.

MATERIAL. Solo calculadora científica, no programable.

Duelo de corredoras en el Aconcagua

Reunidas en la localidad de Horcones, dos corredoras de montaña se disponen a batirse en un duelo de velocidad: subir a la cima del Aconcagua (6962 ± 2 m) en el menor tiempo posible. A lo largo del recorrido se han posicionado diferentes observadores para estimar la velocidad vertical (entendida como el número de metros de ascenso por unidad de tiempo) de cada una de las corredoras.
Los datos obtenidos están recogidos en la Tabla (1), en donde h es la altitud a la que las corredoras 1 y 2 pasan a velocidades v_1 y v_2, respectivamente. El error de la medición de las velocidades viene denotado por Δv, y es el mismo para las velocidades de ambas corredoras, mientras que el error de la altitud viene dado por Δh.

Observador	h (m)	Δh (m)	v_1 (m/h)	v_2 (m/h)	Δv (m/h)
Obs. 1	3042,6	1,4	1200,9	1300,3	1,2
Obs. 2	3507,2	1,5	1000,2	1100,1	1,5
Obs. 3	4135,4	1,3	950,1	925,2	1,7
Obs. 4	5101,0	1,4	625,2	500,1	1,3
Obs. 5	6220,5	1,2	450,3	350,2	1,5

Tabla 1: Datos tomados por los distintos observadores.

1. (2 puntos) A partir de los datos de la Tabla (1) obtenga la media aritmética de las velocidades de cada una de las corredoras con su correspondiente error. No olvide expresar los resultados con el número de cifras significativas correcto. Si tuviera que realizar una apuesta por ver quién de las dos llegaría a la cima del Aconcagua en primer lugar, ¿por cuál apostaría y por qué?

2. (2 puntos) A partir de las velocidades medias obtenidas en el apartado anterior, y suponiendo que fuera esa la velocidad de cada de las corredoras durante toda la prueba, estime el tiempo que empleó cada una de ellas en subir desde Horcones ((2950 ± 1) m) a la cima del Aconcagua ((6962 ± 2) m). Acompañe el resultado con su correspondiente error y el número de cifras significativas correcto.

3. (1 punto) A partir de los datos de la Tabla (1) represente en el papel milimetrado adjunto la velocidad de las corredoras, v_1 y v_2, frente a la altitud, h. No es necesario que incluya las barras de error para cada punto.

4. (2 puntos) Con ayuda de las expresiones del Material Complementario, obtenga las pendientes, m_1 y m_2, y las ordenadas en el origen, b_1 y b_2, de las rectas de mejor ajuste de la velocidad frente a la altitud. No es necesario calcular los errores de las pendientes y de las ordenadas en el origen. Tome para los dos casos $\varepsilon_m = 0{,}005$ h^{-1} y $\varepsilon_b = 1{,}2$ m/h, respectivamente.

5. (1 punto) Añada a la gráfica obtenida en el apartado 3 las dos rectas de mejor ajuste calculadas anteriormente. ¿Alguna de las dos corredoras no llegaría a la cima del Aconcagua si continuara reduciendo su velocidad vertical al ritmo observado en la gráfica? ¿Cuál de ellas? Discuta razonadamente la respuesta.

6. (2 puntos) Calcule la altitud a la que la dos corredoras van a la misma velocidad. Exprese el resultado con su correspondiente error y con el número de cifras significativas correcto. Finalmente calcule el error relativo.

Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, ε_m y ε_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2}$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}$$

Parámetros de la recta

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{s(X)}\sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - m x_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$b = Y_C - m X_C \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_m \sqrt{s^2(X) + X_C^2}$$

A continuación proporcionamos dos tablas que le permitirá hacer los cálculos de las regresiones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarla.

Regresión lineal						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r		

Regresión lineal						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r		

INSTRUCCIONES. El ejercicio se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**. Sea cuidadoso en la presentación de los resultados y tenga en cuenta el número de cifras significativas, unidades, etc. Salvo que se indique otra cosa el desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en las hojas que se aportan con este enunciado.

MATERIAL. Solo calculadora científica, no programable.

Brillo y color en las estrellas

Id.	Denom.	M	$I_{\mathrm{B-V}}$
* 1	Vega	0,58	0,00
2	Altair	2,22	0,22
3	Sol	4,83	0,65
4	61 Cygni A	7,51	1,14
5	Antares	−5,28	1,83
* 6	Aldebarán	−0,64	1,44
7	Arcturus	−0,30	1,23
8	Pollux	1,08	1,00
* 9	40 Eridani B	11,27	0,03
10	LP 145-141	12,77	0,19
11	Procyon B	13,20	0,40
* 12	Van Maanen 2	14,23	0,55

Tabla 1: Magnitud absoluta e índice B-V de algunas estrellas, agrupadas según su estado de evolución estelar. En ambas columnas el error es $\pm 0{,}01$. Las estrellas con un asterisco (*) en su identificador son las que se usan en la cuestión 1.

En este ejercicio vamos a estudiar la relación entre la luminosidad de las estrellas y su color. La luminosidad se suele expresar en términos de la *magnitud absoluta*, M, que se obtiene tomando el logaritmo de la luminosidad cambiado de signo; por ello, los mayores valores de magnitud corresponden a menores luminosidades y viceversa.
También se puede cuantificar el color de una estrella mediante la diferencia de sus magnitudes aparentes medidas con dos filtros de distintos colores. A esta cantidad se le llama *índice de color*. En este ejercicio vamos a usar el llamado *índice B-V*, $I_{\mathrm{B-V}}$; valores más pequeños —incluso negativos— de este índice corresponden a un matiz más azulado; recíprocamente, valores mayores indican un matiz de color más rojo.
En la Tabla 1 se dan los valores de magnitud absoluta e índice B-V de varias estrellas de la Vía Láctea distribuidas en tres grupos: [1-4], [5-8] y [9-12].
Las estrellas siguen con bastante fidelidad el modelo del cuerpo negro, que establece que éstos emiten luz que es tanto más azulada cuanta mayor es su temperatura (expresado de forma muy concisa). Por tanto, hay una correlación entre la temperatura de la estrella y su índice de color.

Cuestiones

1. (1,5 puntos) Calcule el coeficiente de correlación entre la magnitud absoluta y el índice B-V de las estrellas marcadas con un asterisco en la Tabla 1 (las estrellas 1, 6, 9 y 12).

2. (2 puntos) Calcule el coeficiente de correlación entre la magnitud absoluta y el índice B-V del grupo de estrellas que ud. elija entre los tres grupos [1-4], [5-8] o [9-12] de la Tabla 1; por supuesto, indique en la respuesta qué grupo ha elegido. Compare este resultado con el de la cuestión 1 y analice el porqué de ambos valores.

3. (1 punto) En la Tabla 2 se dan los datos de temperatura superficial, con su error explícito, de algunas de las estrellas de la Tabla 1. Calcule el logaritmo natural de la temperatura, $\ln T$, propagando correctamente el error. Escriba el resultado con el número de cifras adecuado y el error explícito. Puede usar la columna en blanco dedicada al efecto en la Tabla 2 para transcribir en limpio el resultado final (recuerde que entonces tiene que entregar la hoja donde se encuentra la tabla) pero realice el desarrollo en hoja aparte.

4. (1 punto) Represente $\ln T$ frente a $I_{\mathrm{B-V}}$ en la plantilla adjunta, incluyendo las barras de error.

5. (3,5 puntos) Calcule la recta de regresión de $\ln T$ en función de $I_{\mathrm{B-V}}$. Calcule el error de los parámetros y escriba éstos con el número de cifras significativas adecuado. Represente la recta de regresión en la gráfica realizada en la cuestión 4.

6. (1 punto) El astrónomo Fernando Ballesteros ha desarrollado una fórmula que relaciona la temperatura superficial de una estrella con su índice B-V. La linealización de esta fórmula, en la zona de $I_{\mathrm{B-V}}$ de las estrellas de la Tabla 2, es la siguiente:

$$\ln T = 8{,}862 - 0{,}414 I_{\mathrm{B-V}}$$

¿Podemos afirmar —en el sentido de precisión y exactitud— que el resultado que hemos obtenido en la cuestión 5 confirma el modelo del Prof. Ballesteros? Razone la respuesta.

Denom.	$I_{\mathrm{B-V}}$	T (K)	$\ln T$
Pollux	1,00	4700 ± 100	
61 Cygni A	1,14	4530 ± 70	
Aldebarán	1,44	3910 ± 30	
Antares	1,83	3400 ± 200	

Tabla 2: Índice de color $I_{\mathrm{B-V}}$ ($\pm 0{,}01$) y temperatura efectiva de algunas estrellas de la Tabla 1. Puede usar la columna en blanco para transcribir en limpio el resultado de la cuestión 3.

Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, ε_m y ε_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2}$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}$$

Parámetros de la recta

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{s(X)}\sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - mx_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$b = Y_C - mX_C \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_m \sqrt{s^2(X) + X_C^2}$$

A continuación proporcionamos una tablas que le permitirán hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarlas.

Regresión lineal y coef. de correlación						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r		

Regresión lineal y coef. de correlación						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r		

Regresión lineal y coef. de correlación						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r		

Plantillas de ejes lineales

INSTRUCCIONES : Las hojas que se le han entregado corresponden a dos grupos distintos:

- **Enunciado del examen de septiembre:** El examen se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**; se valorará la correcta justificación de los pasos que conducen a la solución. El desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en las cuadrículas que se proporcionan enel Material complementario.
- **Material complementario:** Contiene las fórmulas no memorizables que se consideran necesarias para la resolución del examen y las cuadrículas necesarias para las representaciones gráficas que se pidan. Las cuadrículas deben ser entregadas junto con el examen.

MATERIAL PERMITIDO: Solo calculadora no programable.

Introducción

Un capilar es un tubo de vidrio de paredes lisas y que tiene un diámetro interior igual o inferior a unos pocos milímetros. Si el extremo inferior de un capilar situado en posición vertical se pone en contacto con un líquido que moje idealmente bien al vidrio, el líquido ascenderá por dentro del capilar hasta que el borde del menisco que se forma dentro del capilar alcance una determinada altura h sobre el nivel libre del líquido en el recipiente. Esta altura viene determinada por el equilibrio entre la presión debida a la tensión superficial en la interfase líquido-aire y la presión hidrostática debida a la gravedad. La expresión que determina dicha altura se denomina ley de Jurin y es

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}$$

donde σ es la tensión superficial, ρ la densidad del líquido, g la aceleración de la gravedad y R el radio del capilar.

Datos obtenidos

En un laboratorio se dispone de un equipo de videomicroscopía, con el cual se han determinado, con un error de $0,1$ mm, los valores de las alturas h ascendidas por varios fluidos, que mojan idealmente bien al vidrio, en capilares de distintos diámetros y se pretende comprobar la validez de la ley de Jurin.

Para ello, en primer lugar se han realizado medidas utilizando solamente agua destilada ($\rho = 1000$ kg/m^3; $\sigma = 72{,}8$ mN/m) con capilares de distinto diámetro, obteniéndose los siguientes resultados:

Tabla I.- Radio del capilar y altura ascendida por el fluido						
R (mm)	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
h (mm)	30,5	13,3	10,3	7,1	5,4	5,2

En segundo lugar se han realizado medidas con un mismo capilar de radio $R = 1$ mm utilizando diferentes fluidos. En la siguiente tabla se indican los fluidos utilizados, los valores de su densidades y tensión superficial en las condiciones en que se hicieron los experimentos, y los valores obtenidos en cada caso para la altura ascendida por el capilar:

Tabla II.- Fluido, densidad, tensión superficial y altura ascendida por el capilar					
Fluido	Agua	Formamida	Nitrobenceno	Cloroformo	Aceite de silicona
ρ (kg/m^3)	1000	1130	1200	1490	800
σ (mN/m)	72,8	58,2	33,9	27,5	19,0
h (mm)	13,2	10,0	5,9	3,4	4,6

Análisis de los datos

Teniendo todos estos datos, tomando como valor de la aceleración de la gravedad $g = 9{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}$ y sabiendo que el error en la medida del radio de los capilares es de $0{,}02$ mm, y en los valores de la tensión superficial y la densidad es del $1\,\%$, responda razonadamente a las siguientes preguntas:

1. (3 puntos) La expresión de la ley de Jurin se puede escribir como $h = C/R$, siendo C la constante multiplicativa
$$C = \frac{2\sigma}{\rho g}$$
Añada a la Tabla I dos filas más que contengan, respectivamente, el valor de C que se obtiene para cada radio del capilar, C_i, $i = 1,\ldots,6$, y su incertidumbre obtenida por medio de propagación lineal de errores, escribiéndolos con el número correcto de cifras significativas. A partir de los valores C_i obtenidos para cada radio de capilar, calcule el valor medio de C y su desviación estándar ponderando cada valor C_i con su error ΔC_i.

2. (2 puntos) Represente adecuadamente los datos de h **como función de** $1/R$ en la cuadrícula doblemente lineal que se le proporciona.

3. (2 puntos) La expresión de la ley de Jurin también se puede expresar como $h = K\sigma/\rho$, siendo K la constante multiplicativa
$$K = \frac{2}{gR}$$
Añada a la tabla II cuatro filas más que contengan respectivamente el valor de la variable $x = \sigma/\rho$, su incertidumbre, Δx, obtenido por medio de propagación lineal de errores, el valor de K que se obtiene de cada par (x_i, h_i) y su error, ΔK, obtenido por medio de propagación lineal, escribiéndolos en todos los casos con el número correcto de cifras significativas. Calcule el valor medio de K, sin ponderación con el error, y el error estándar de la media (o desviación típica de la media).

4. (3 puntos) Represente adecuadamente los datos de h **como función de** x en la cuadrícula doblemente lineal que se le proporciona. Obtenga la recta de regresión y represéntela sobre la misma cuadrícula. Si dispone de una calculadora con funciones estadísticas obtenga el error en la pendiente (en caso contrario utilice como error aproximado en la pendiente $\varepsilon_m = \pm 2\ \mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^2$) y compare el valor obtenido para la pendiente de la recta con el valor de K obtenido en el apartado anterior.

MATERIAL COMPLEMENTARIO

Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, ε_m y ε_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2}$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}$$

Parámetros de la recta

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{s(X)}\sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - mx_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$b = Y_C - mX_C \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_m\sqrt{s^2(X) + X_C^2}$$

A continuación proporcionamos una tablas que le permitirán hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarlas.

Regresión lineal y coef. de correlación						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r