No basta dar resultados numéricos, hay que justificarlos.

Ejercicio 1. (**2 puntos**)

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z, t,) = (3x + z + t, 2x + y + z + 5t, x + 2y + z).$$

Calcule las dimensiones de los subespacios $\mathrm{Im} f$ y $\ker f$ y determine una base para cada uno.

Ejercicio 2. (**2 puntos**)

Calcule el determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3. (**3 puntos**)

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (0, 1, 1)$.

a) Determine las coordenadas del vértice D y del centro M de paralelogramo.

b) Calcule la distancia de M al lado AB.

c) Calcule el coseno del ángulo en el vértice B entre los lados AB y BC.

Ejercicio 4. (**3 puntos**)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule los autovalores de A.

b) De una base para cada subespacio invariante asociado con cada autovalor.

c) Halle una matriz B tal que $B^{-1}AB$ sea una matriz diagonal.

No basta dar resultados numéricos, hay que justificarlos.

Ejercicio 1. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ se define la aplicación lineal $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (3x + 4y - \alpha z, 2x + 6y - 2\alpha z, x + 3y + (\alpha + 1)z)$$

a) Determine los valores de α para los cuales f es una aplicación biyectiva. (**1 punto**)

b) Para los valores de α distintos a los obtenidos en el apartado a) determine una base del subespacio imagen y una base del subespacio núcleo de f. (**2 puntos**)

Ejercicio 2. Sea el triángulo ABC de vértices $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (0, 1, 1)$. Halle las coordenadas del punto donde se cortan las tres alturas del triángulo. (**2 puntos**)

Ejercicio 3. Sea $B = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 2, 0\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. La aplicación lineal, f definida de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ con la base B tiene la matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine la matriz de la aplicación f, supuesto que en el espacio inicial y en el final se considera la base canónica $B_e = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. (**2 puntos**)

Ejercicio 4. Dada la matriz:

$$\text{A=}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los autovalores de la matriz A. (**1 punto**)

b) Estudie si A es diagonalizable y en caso afirmativo halle una matriz B, tal que el producto $B^{-1}AB$ es una matriz diagonal. (**2 puntos**)

No basta dar resultados numéricos, hay que justificarlos.

Ejercicio 1. (**3 puntos**)

Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z, t) = (x + y + t, x + z + t, y + z + 2t, 5x + 6y + 7z + 13t)$$

a) Demuestre que f una aplicación lineal.

b) Halle una base del subespacio imagen de f

c) Determine unas ecuaciones del subespacio $\ker f$.

Ejercicio 2. (**3 puntos**)

Dado el triángulo ABC tal que $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, 1, -1)$, $C = (0, 1, 2)$,

a) Halle la ecuación de la recta que pasa por A y B.

b) Calcule la longitud del lado BC.

c) Calcule el volumen del prisma que tiene por base el triángulo ABC y altura 5.

Solución

Ejercicio 3. (**2 puntos**)

Sea $\mathcal{B} = \{v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-1, 2, 0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. La aplicación lineal, f definida de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ con esa base tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Escriba la matriz de la aplicación f, supuesto que en el espacio inicial y en el final se considera la base canónica $\mathcal{B}_c = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Ejercicio 4. (**2 puntos**)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudie la existencia de una matriz B tal que $B^{-1}AB$ es una matriz diagonal. En caso afirmativo determínela.