Importante: Recuerde justificar las respuestas.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el use de ningún tipo de material ni calculadora.

Parte A. Variable compleja.

1.- (1,5 puntos)
Determinar si existen los siguientes límites, y calcular en su caso.
a) $\lim_{z\to\infty} e^{z^8}$,
b) $\displaystyle\lim_{z\to 3} \frac{z^2-4z+3}{z^2-9}$,
c) $\lim_{z\to i} \mathrm{Log}(z^2)$.

2.- (2 puntos)
Dado el conjunto $B = \{z,\, 1 < |z| < 8\}$, determinar el conjunto $\{z,\, (ie^z)^3 \in B\}$.
Dado el conjunto $C = \{x + yi, x \in [0,2]$ e $y \in [-\pi/2, -\pi/3]\}$. Calcular la imagen de C bajo la aplicación $f(z) = (ie^z)^3$.

Parte B. Ecuaciones diferenciales.

3.- (2 puntos)
Encontrar la solución general explícita de la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2)\, dx + (x^2 + xy)\, dy = 0\,,$$

sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x) = x^a$, $a \in \mathbb{Z}$.

4.- (2 puntos)
¿Pueden formar las funciones $f_1(x) = 3\cos^2(x)$, $f_2(x) = 2 - 2\sin^2(x)$ y $f_3(x) = 1 + 5\sin^2(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden 3? ¿Por qué?

5.- (2,5 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

determinar su solución general usando las técnicas matriciales del curso.

Importante: Recuerde justificar las respuestas.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el use de ningún tipo de material ni calculadora.

Parte A. Variable compleja.

1.- (1,5 puntos)
Deducir las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas cartesianas.
¿Si se dan las de Cauchy-Riemann para una función compleja en un punto, es esto suficiente para garantizar la derivabilidad de la función en ese punto?

2.- (2 puntos)
Dada la función $f(z) = \mathrm{Log}(iz)$, siendo Log el argumento principal complejo,
a) determinar en qué puntos del plano complejo $f(z)$ no es continua,
b) determinar en qué puntos del plano complejo se da la igualdad

$$\mathrm{Log}(iz) = \mathrm{Log}(i) + \mathrm{Log}(z)\,,$$

y ajustar la expresión anterior para tener también una igualdad en los puntos en que no sea cierta.

Parte B. Ecuaciones diferenciales.

3.- (2 puntos)
Encontrar la solución general de la ecuación

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x\,.$$

4.- (2 puntos)
Encontrar, usando desarrollos en serie de potencias centrados en 0, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y'' - xy' - x^2 y = 0\,,$$

explicitando cada una de ellas hasta la potencia x^5.

5.- (2,5 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \end{cases},$$

determinar su solución general usando técnicas matriciales (autovalores y autovectores).
Representar el diagrama de fases del sistema, y clasificar la estabilidad de sus puntos críticos.

Importante: Recuerde justificar las respuestas.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el use de ningún tipo de material ni calculadora.

Parte A. Variable compleja.

1.- (1,75 puntos)
Dada una función de variable compleja $f(z)$, ¿cuál es la diferencia entre que sea derivable en 0 y que sea holomorfa en 0?
Determinar si las siguientes funciones son derivables y/o holomorfas en 0:
a) $f(x+iy) = x^2 + y^2 + 2ixy - i$,
b) $g(x+iy) = x^3 - 3xy^2 - y + 2 + i(3x^2y - y^3 + x)$.

2.- (1,75 puntos)
Dados la aplicación racional lineal o de Möbius

$$f(z) = \frac{z + iz + 3 + i}{z - iz + 1 - i}$$

y el semiplano

$$A = \{z, \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z)\},$$

determinar el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}, f(z) \in A\}.$$

Parte B. Ecuaciones diferenciales.

3.- (1,5 puntos)
Transformar, mediante adecuados cambios de variable, las siguientes ecuaciones en ecuaciones separables:
a) $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$,
b) $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x - y)$.

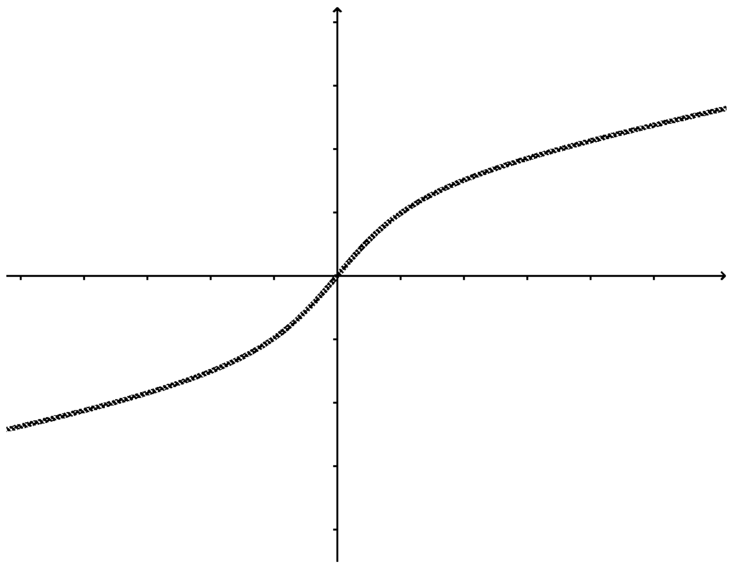
4.- (2,25 puntos)
Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$x^{(v)} + 2x''' + x' = \frac{\pi}{2}(1 + \cos(t)),$$

donde el exponente ${}^{(v)}$ denota la derivada quinta.

5.- (2,75 puntos)

a) Dada una función $f(x)$ diferenciable con gráfica



,

representar esquemáticamente las soluciones de la ecuación $x' = f(x)$ y describir sus propiedades de convervencia o divergencia, y dibujar la recta de fases del sistema.

b) Resolver la ecuación $x' = x^{1/3}$ y dibujar sus soluciones.

c) Discutir el resultado comparativo entre a) y b). Si las soluciones de b) concuerdan con lo obtenido en a) decir por qué. Si se encuentran diferencias comentar a qué puede ser debido.