No basta dar resultados numéricos, hay que justificarlos.

Ejercicio 1.

Dado el triángulo ABC de vértices $A = (1, 1, 4)$, $B = (2, -2, -1)$, $C = (0, 1, 0)$, determine la ecuación de la recta que contiene al lado AB, la distancia entre B y la recta que pasa por A y C y las ecuaciones de los planos que contienen a la recta que pasa por los puntos B y C. **(3 puntos)**

Ejercicio 2.

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ determine las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} ax + bt = 0 \\ ax + by = 0 \\ ay + bz = 0 \\ az + bt = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

Ejercicio 3.

Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (x + y + 2t, x + z + t, y + z - 2t),$$

determine una base de $\ker f$ y las coordenadas de los elementos de $\ker f$ para esa base. Dé una base del subespacio $\operatorname{Im} f$. **(3 puntos)**

Ejercicio 4.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices cuadradas de orden n. Demuestre que si A es antisimétrica y B es simétrica entonces: AB es antisimétrica si y sólo si A y B conmutan. **(1 punto)**

No basta dar resultados numéricos, hay que justificarlos.

Ejercicio 1.

Conocemos tres vértices de una pirámide triangular: $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, -1, 0)$ y $C = (1, 2, 3)$. Del vértice D sabemos que es el punto de corte de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ con el plano XY. Halle las coordenadas de D y el área de las caras del tetraedro que contienen a la arista $\overline{AD}$. **(2 puntos)**

Ejercicio 2.

Dado el sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y + z + t = 3\alpha + 8 \\ x + \alpha y + z + t = 6\alpha - 2 \\ x + y + \alpha z + t = 5\alpha \\ x + y + z + \alpha t = \alpha^2 + 5 \end{cases}$$

a) Halle los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el sistema no tiene solución. **(2 puntos)**

b) Resuelva el sistema para $\alpha = 2$. **(1 punto)**

Ejercicio 3.

Estudie si la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4/3 & 2 & 1 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentre una matriz B tal que $B^{-1}AB$ sea una matriz diagonal. **(2 puntos)**

Ejercicio 4.

Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 3y - z - t = 0,\ x - y + z - t = 0\}, \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ &\quad (x, y, z, t) = \alpha(0, 2, -1, 0) + \beta(0, 3, 0, -1) + \gamma(0, 1, 1, -1)\} \end{aligned}$$

En los casos afirmativos, calcule la dimensión del subespacio y dé una base del mismo. **(3 puntos)**