No basta dar los resultados numéricos. Hay que justificarlos.

Ejercicio 1. **(2 puntos)**

Dados tres vectores linealmente independientes u_1, u_2, y u_3 en un espacio vectorial V, se consideran los subespacios $V_1 = \mathcal{L}(u_1 - u_2, u_2 - u_3)$ y $V_2 = \mathcal{L}(u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3)$.

a) ¿Cuál es la dimensión de $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$?

b) Encuentre una base de $V_1 \cap V_2$.

***

Ejercicio 2. **(2 puntos)**

Sea $P_{\leq 3}(x)$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable x de grado menor o igual que 3 con coeficientes en $\mathbb{R}$.

a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{1 + x^3, x(1 + x), x^2(1 + x), x^3\}$ es una base de $P_{\leq 3}(x)$.

b) Halle las coordenadas de los polinomios, $1, x, x^2, x^3$ respecto a esta base.

***

Ejercicio 3. (**3 puntos**)

Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definidas por:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y - z, 2x + 2y - 4z, x + y - 3z, 5x + 5y - 11z) \\ g(x, y, z, t) &= (x + 3y - 2z + t, 3x + z - 2t, x - y + 3t, 2z - t) \end{aligned}$$

a) Estudie si f es inyectiva y si g es sobreyectiva.

b) Halle las matrices asociadas a $g \circ f$ y g^2.

c) Dé unas bases para los subespacios núcleo e imagen de las aplicaciones lineales f y g.

***

Ejercicio 4. (**3 puntos**)

Sean los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 3, 0)$ y $C = (-2, 3, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Halle la ecuación del plano π que determinan estos puntos y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Halle las coordenadas del punto D para que se forme el paralelogramo $ABCD$.

c) Halle la ecuación de la recta r perpendicular a π que pasa por A y determine un punto P en r tal que $|AP| = 7$.

No basta dar resultados numéricos, hay que justificarlos.

Ejercicio 1. (**2 puntos**)

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z, t,) = (3x + z + t, 2x + y + z + 5t, x + 2y + z).$$

Calcule las dimensiones de los subespacios $\mathrm{Im} f$ y $\ker f$ y determine una base para cada uno.

Ejercicio 2. (**2 puntos**)

Calcule el determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3. (**3 puntos**)

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A = (-1, 1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (0, 1, 1)$.

a) Determine las coordenadas del vértice D y del centro M de paralelogramo.

b) Calcule la distancia de M al lado AB.

c) Calcule el coseno del ángulo en el vértice B entre los lados AB y BC.

Ejercicio 4. (**3 puntos**)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule los autovalores de A.

b) De una base para cada subespacio invariante asociado con cada autovalor.

c) Halle una matriz B tal que $B^{-1}AB$ sea una matriz diagonal.

No basta dar los resultados numéricos. Hay que justificarlos.

Ejercicio 1. **(2 puntos)**

En un espacio vectorial real de dimensión 4, y respecto a una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, se dan los subespacios: $U = \{(\alpha, -\beta, \alpha, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y

$$V_a \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + tx_3 &= 0 \end{cases}$$

a) Determine los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$ para los cuales $U \cap V_t \neq \{(0,0,0,0)\}$.

b) Para cada t del apartado anterior obtenga una base de los subespacios $U \cap V_t$ y $U + V_t$.

***

Ejercicio 2. (**3 puntos**)

Sea $\mathcal{P}_{\leq 2}(x)$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable x con coeficientes reales y grado menor o igual que 2. Consideremos el conjunto $\mathcal{B} = \{p_1 = 1+x+x^2, p_2 = 1+2x^2, p_3 = x+x^2\}$. Sea E un espacio vectorial real, y $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de E. Sea $f : \mathcal{P}_{\leq 2}(x) \to E$ la aplicación lineal definida por $f(p_1) = 2u_1 + u_3, \quad f(p_2) = 3u_1 + u_2, \quad f(p_3) = u_1 - 2u_2 + 3u_3$.

a) Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{P}_{\leq 2}(x)$.

b) Halle las coordenadas de los vectores de la base canónica de $\mathcal{P}_{\leq 2}(x)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

c) Determine si la aplicación f es un isomorfismo.

***

Ejercicio 3. **(2 puntos)**

Sea la forma cuadrática $q(x,y,z) = 2x^2 - 2xy + 4xz + 4yz + 3z^2$ sobre $\mathbb{R}^3$, donde consideramos la base canónica.

a) Demuestre que la forma cuadrática q es indefinida.

b) Sea A_f la matriz de la forma bilineal simétrica f cuya forma cuadrática asociada es q. Sean $v = (2, -1, 0)$ y $w = (-3, 0, 2)$, dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Halle $f(v, w)$ y $f(w, w)$.

***

Ejercicio 4. (**3 puntos**)

Sean los puntos en $\mathbb{R}^3$, $A = (0, 2, -1)$, $B = (3, 0, 2)$ y $C = (-2, 1, 4)$.

a) Halle la ecuación del plano π que contiene a esos tres puntos.

b) Determine las coordenadas del punto D tal que $ABCD$ es un paralelogramo.

c) Obtenga una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $v_1 = \overrightarrow{BC}$ y a otro vector del plano π con origen en el punto B.