Universidad Nacional de Educación a Distancia

Grado en Física

Fundamentos de Física I

Autor:
Daniel Pérez

Índice general

Parte I

Mecánica

Capítulo 1

Leyes de Newton y aplicaciones

1.1. Leyes de Newton

La mecánica clásica tiene que ver con el movimiento de las partículas. Para ello, necesitamos unas cuantas definiciones.

Definición 1.1.1 (Partícula)**.** Una partícula es un objeto de tamaño insignificante. Esto significa que si quieres analizar una partícula en un momento determinado, la única información que necesitas especificar es su posición.

Definición 1.1.2 (Sistema de referencia)**.** Se conoce como sistema de referencia al grupo de convenciones que un observador emplea para la medición de las magnitudes físicas de un sistema determinado. Los sistemas de referencias suelen ser conjuntos de coordenadas que, por ahora, elegimos como cartesianos.

Con respecto a este marco, la posición de una partícula está especificada por un vector $\vec{x}$. Dado que la partícula se mueve, la posición depende del tiempo, lo que resulta en una trayectoria de la partícula describa por $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

Definición 1.1.3 (Velocidad)**.** La velocidad de una partícula viene definida por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{x}$$

Definición 1.1.4 (Aceleración)**.** La aceleración de una partícula viene definida por

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt} = \ddot{x}$$

La mecánica newtoniana es un marco que nos permite determinar la trayectoria $\vec{x}(t)$ de una partícula en cualquier situación dada. Este marco generalmente se presenta como tres axiomas conocidos como leyes de movimiento de Newton.

1. Si se deja sola, una partícula se mueve con velocidad constante
2. La aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza que actúa sobre ella.
3. Cada acción tiene una reacción igual y opuesta.

A primera vista, parece que la primera ley no es más que un caso especial de la segunda ley. Situado en el contexto histórico, es comprensible que Newton quisiera subrayar la primera ley. Es una refutación a la idea aristotélica de que, si se deja solo, un objeto se detendrá naturalmente. En cambio, como Galileo se había dado cuenta previamente, el estado natural de un objeto es viajar con velocidad constante. Esta es la esencia de la ley de la inercia. Pero, ¿realmente necesitamos esta ley?. La respuesta es sí, pero desde un punto de vista distinto.

Hay que tener en cuenta que para la mayoría de los sistemas de referencia, la primera ley de Newton es incorrecta. Por ejemplo, suponemos que el sistema de coordenadas desde el que estoy midiendo está girando. Entonces, todo parecerá estar girando a mi alrededor. Si mido la trayectoria de una partícula en mis coordenadas como $\vec{x}(t)$, entonces $d^2\vec{x}/dt = 0$ no es cierto, incluso cuando dejamos la partícula en paz. Entonces, para que la primera ley de Newton funcione, debemos tener en cuenta el sistema de referencia del que estamos hablando.

Definición 1.1.5 (Sistema de referencia inercial)**.** Un marco de referencia inercial es uno en el que las partículas viajan a velocidad constante cuando la fuerza que actúa sobre ellas se desvanece. En otras palabras, en un marco inercial

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

Entonces el verdadero contenido de la primera ley de Newton se puede expresar como

1. Existen sistemas de referencia inerciales.

La segunda ley es la más importante de la mecánica newtoniana. Nos dice cómo se ve afectado el movimiento de una partícula cuando se somete a una fuerza $\vec{F}$. La forma correcta de enunciar la segunda ley es

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{x})) \tag{1.1}$$

Esta generalmente se conoce como la ecuación de movimiento. La cantidad entre paréntesis se llama momento lineal o momentum,

$$\vec{p} = m\dot{x}$$

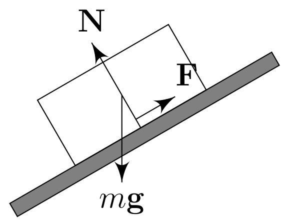
Aquí m es la masa de la partícula o, más precisamente, la masa inercial. Es una medida de la oposición de la partícula a cambiar su movimiento cuando se somete a una fuerza dada. En la mayoría de situaciones, la masa de la partícula no cambia con el tiempo, en este caso podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$\vec{F} = m\ddot{x} \tag{1.2}$$

Un hecho importante sobre esta ecuación es que es una ecuación diferencial de segundo orden. Esto significa que tendremos una solución única solo si especificamos dos condiciones iniciales. Estos se toman generalmente como la posición $\vec{x}(t_0)$ y la velocidad $\dot{x}(t_0)$ en algún momento inicial t_0. Todas las condiciones iniciales deben venir en pares, dos por cada grado de libertad en el problema.

1.2. Fuerzas de contacto: fuerza normal y fuerzas de rozamiento.

La fricción y las fuerzas de rozamiento es un asunto delicado. Si bien la energía siempre se conserva en un nivel fundamental, este no es el caso. Si te deslizas por el suelo en calcetines, no seguirás adelante para siempre. A nivel microscópico, su energía cinética se transfiere a los átomos en el piso donde se manifiesta como calor. Pero si solo queremos saber hasta dónde se deslizarán nuestros calcetines, los detalles de todos estos procesos atómicos son de poco interés. En cambio, tratamos de resumir todo en una sola fuerza macroscópica que llamamos fuerza de rozamiento.



La fuerza de rozamiento aparece cuando dos sólidos están en contacto. Experimentalmente, se tiene que la complicada dinámica involucrada en la fricción se resume generalmente en

$$F = \mu N$$

donde N es la fuerza de reacción, normal al suelo, y μ es una constante llamada coeficiente de fricción, el cual depende de los materiales que estén en contacto. Además el coeficiente suele ser, más o menos, independiente de la velocidad.

El rozamiento estático, $0 < F_r < \mu_e N$, aparece cuando un objeto está quieto sobre una superficie. El rozamiento estático impide que el objeto se mueva al recibir una fuerza proporcionando una fuerza de igual módulo y sentido contrario.

Cuando el objeto se pone en movimiento aparece el rozamiento dinámico, $F_r = \mu_d N$ ($\mu_d < \mu_e$). La superficie de apoyo no es lisa a nivel microscópico, sino irregular. Surge el concepto de superficie efectiva, que son los puntos de contacto del objeto con la superficie. El rozamiento estático es mayor que el dinámico porque a nivel microscópico la superficie de contacto aumenta.

1.3. Dinámica del movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre es hacia el centro del círculo (perpendicular a la velocidad instantánea). La magnitud de la aceleración para el movimiento circular esta dada por

$$a = \frac{v^2}{R} \tag{1.3}$$

1.4. Movimiento relativo: sistemas de referencia inerciales y no inerciales, fuerzas ficticias.

Proposición 1.4.1 (Principio de Relatividad de Galileo)**.** *Las leyes de la dinámica son ciertas en todos los sistemas inerciales. No se pueden distinguir dos sistemas inerciales mediante experimentos mecánicos porque las leyes de la mecánica son los mismos en ambos (no es posible distinguir entre reposo y velocidad constante).*

Definición 1.4.1 (Sistema de referencia no inercial)**.** Un sistema de referencia no inercial es uno que se mueve con movimiento acelerado. Para que las leyes de Newton sean válidas en sistemas no inerciales es necesario introducir fuerzas ficticias o inerciales.

Consideramos el movimiento en una sola dimensión a lo largo del eje x. Sean dos sistemas de referencia tales que el origen $\mathcal{O}$ del primero es distinto del origen $\mathcal{O}'$ del segundo. Así, si la coordenada de un punto P respecto a $\mathcal{O}$ es x y la coordenada del mismo punto respecto a $\mathcal{O}'$ es x', entre ambas existe la relación $x = x + \mathcal{O}\mathcal{O}$, siendo $\mathcal{O}\mathcal{O}$ la distancia entre $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$. ¿Qué pasa si el sistema $\mathcal{O}'$ está en movimiento respecto al sistema $\mathcal{O}$?

Supongamos en primer lugar que la velocidad de $\mathcal{O}'$ con respecto a $\mathcal{O}$ es constante v_0. Entonces la distancia $\mathcal{O}\mathcal{O}$ varía con el tiempo, y la relación general entre las coordenadas en ambos sistemas toma la forma concreta

$$x(t) = x'(t) + v_0 t \tag{1.4}$$

Supongamos, por el contrario, que $\mathcal{O}'$ se mueve con respecto a $\mathcal{O}$ con aceleración a_0 constante. En este caso,

$$x(t) = x'(t) + \frac{1}{2}a_0 t^2 \tag{1.5}$$

Entonces,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t)}{dt} + a_0 t \Rightarrow v(t) = v'(t) + a_0 t \tag{1.6}$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv'(t)}{dt} + a_0 t \Rightarrow a(t) = a'(t) + a_0 t \tag{1.7}$$
$$\tag{1.8}$$

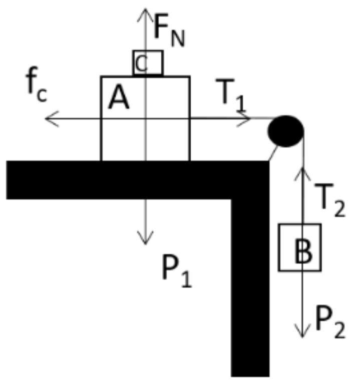
Para el sistema de referencia $\mathcal{O}'$, la ley de Newton será de la forma $F' = ma'$, y como $a' = a - a_0$,

$$F' = ma' = m(a - a_0) = F - ma_0 \tag{1.9}$$

Es decir, si el observador $\mathcal{O}'$ quiere seguir manteniendo la validez de la segunda ley de Newton en su sistema de referencia debe introducir una fuerza extra de valor $F_0 = -ma_0$.

Ejercicios

Ejercicio 1.4.1. *Un bloque A de masa m_A situado sobre una mesa está conectado por una cuerda delgada que pasa por una polea sin rozamiento ni masa a un bloque B de masa 2,25kg que cuelga lateralmente de la mesa a una distancia de 1,5m sobre el suelo. Cuando el sistema se deja libre desde el reposo el bloque B choca contra el suelo al cabo de 0,82s. A continuación se lleva el sistema a su posición inicial y se coloca un bloque C de masa 1,2kg sobre el bloque A. De nuevo el sistema se deja libre desde el reposo tardando, en este caso, el bloque B, 1,3s en chocar contra el suelo. Determinar la masa del bloque A, m_A, y el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque A y la mesa.*



En las condiciones del problema, despreciando la masa de la cuerda, de la polea, y el rozamiento entre la cuerda y la polea, tenemos que $T_1 = T_2 = T$. En la primera situación tenemos que el bloque B recorre los 1,5m que lo separan del suelo en 0,82s. De forma que podemos determinar la aceleración del sistema:

$$x = x_0 - v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow a_1 = \frac{2(x - x_0)}{t_1^2} = 4,46 m s^{-2}$$

Aplicamos la segunda ley de Newton al bloque A:

$$\sum F_x = m_A a_1 \Leftrightarrow T_1 - f_c = m_A a_1 \Leftrightarrow T_1 - \mu_C m_A g = m_A a_1 \tag{1.10}$$

$$\sum F_y = m_A a_y \Leftrightarrow F_N - P_A = 0 \Leftrightarrow F_N = P_A = m_A g \tag{1.11}$$

Aplicamos la segunda ley de Newton al bloque B:

$$\sum F_x = m_B a_1 \Leftrightarrow P_B - T_1 = m_B a_1 \Leftrightarrow T_1 = m_B (g - a_1) \tag{1.12}$$

$$\sum F_y = 0 \tag{1.13}$$

Sustituyendo la última ecuación en la primera, obtenemos el coeficiente de rozamiento cinético,

$$\mu_c = \frac{m_B(g - a_1) - m_A a_1}{m_A g}$$

Ahora tenemos la segunda situación, donde añadimos un bloque de masa C sobre el bloque A. Ahora,

$$a_2 = \frac{2(x - x_0)}{t_2^2} = 1,78 m s^{-2}$$

Aplicando la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que ahora la masa de los bloques encima de la mesa es $m = m_A + m_C$,

$$m_B(g - a_2) - \mu_c (m_A + m_C) g = (m_A + m_C) a_2 \tag{1.14}$$

$$m_B(g - a_2) - \frac{m_B(g - a_1) - m_A a_1}{m_A g} (m_A + m_C) g = (m_A + m_C) a_2 \tag{1.15}$$

llegando a la siguiente ecuación,

$$m_A^2 (a_1 - a_2) + (m_C + m_B)(a_1 - a_2) m_A - m_B (g - a_1) = 0 \tag{1.16}$$

cuya solución con $m_A > 0$ es $m_A = 1,215$kg y, por tanto, $\mu_C = 0,67$.

Capítulo 2

Trabajo y energía

2.1. Conservación de la energía.

Considera una partícula que se mueve en tres dimensiones. Aquí las cosas son más interesantes. En primer lugar, es posible tener conservación de energía incluso si la fuerza depende de la velocidad. Por el contrario, las fuerzas que solo dependen de la posición no conservan necesariamente la energía: necesitamos una condición extra. Por ahora, restringimos la atención a las fuerzas de la forma $F = F(x)$.

Proposición 2.1.1. *Existe una energía conservada si y solo si la fuerza se puede escribir de la forma*

$$\vec{F} = \nabla V \tag{2.1}$$

para toda función potencial $V(x)$. Esto significa que las componentes de fuerza deben ser de la forma $F_i = -\partial V/\partial x_i$. La energía conservada esta dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}\cdot\dot{x} + V(\vec{x} \tag{2.2}$$

2.2. Trabajo realizado por una fuerza

Definición 2.2.1. Si una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una partícula y logra moverla de $\vec{x}(t_1)$ a $\vec{x}(t_2)$ a lo largo de una trayectoria $\mathcal{C}$, entonces el trabajo realizado por la fuerza se define como

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{x}$$

El producto escalas significa que tomamos la componente de la fuerza a lo largo de la dirección de la trayectoria en cada punto. Podemos aclarar esto escribiendo

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}dt$$

El integrando, que es la tasa de trabajo, se llama potencia, $P = \vec{F}\cdot\dot{x}$. Usando la segunda ley de Newton, podemos reemplazar $\vec{F} = m\ddot{x}$ para obtener

$$W = m\int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}\cdot\dot{x}dt = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(\dot{x}\cdot\dot{x})dt = K(t_2) - K(t_1)$$

donde

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}\cdot\dot{x}$$

es la energía cinética.

Teorema 2.2.1 (Teorema trabajo-energía)**.** *El trabajo total realizado es proporcional al cambio en la energía cinética. Si queremos tener una energía conservada de la forma* (2.2)*, entonces el cambio de energía cinética debe ser igual al cambio de energía potencial. Esto significa que debemos ser capaces de escribir*

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = V(\vec{x}(t_1)) - V(\vec{x}(t_2)) \tag{2.3}$$

En particular, este resultado nos dice que el trabajo realizado debe ser independiente de la trayectoria $\mathcal{C}$, sólo puede depender de los puntos finales $x(t_1)$ y $x(t_2)$. Esto sólo se cumplirá para fuerzas de la forma $F = -\nabla V$.

2.3. Fuerzas conservativas y no conservativas

Consideramos una partícula que se mueve sobre una línea, por lo que su posición está determinada por una sola función $\vec{x}(t)$. Por ahora, suponga que la fuerza sobre la partícula depende solo de la posición, no de la velocidad. $F = F(x)$.

Definición 2.3.1 (Energía potencial)**.** Definimos el potencial $V(x)$ (también llamado energía potencial) como

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \tag{2.4}$$

El potencial solo se define hasta una constante aditiva. Siempre podemos invertir la ecuación (2.4) integrando ambos lados. La constante de integración ahora está determinada por la elección del límite inferior de la integral,

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} dsF(s)$$

en este caso s es solo una variable ficticia. Con esta definición, podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \tag{2.5}$$

2.4. Conservación de la energía mecánica

Para cualquier fuerza en una dimensión que dependa únicamente de la posición, existe una cantidad conservada llamada energía,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

El hecho de que está conservada quiere decir que $\dot{E} = 0$ para toda trayectoria de una partícula que obedece la ecuación de movimiento. Como ya hemos visto, $K = \frac{1}{2}m\dot{x}$ es la energía cinética. El movimiento que satisface la ecuación (2.5) es conservativo.

No es difícil comprobar que realmente E se conserva. Sólo necesitamos derivar para obtener

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\dot{x} = \dot{x}\Big(m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\Big) = 0$$

En cualquier sistema dinámico, las cantidades conservadas de este tipo son muy valiosas.

Capítulo 3

Sistemas de partículas

Hasta ahora hemos trabajado con las leyes de Newton, que se aplican a partículas puntuales (adimensionales). En la realidad, esto es una idealización. Todos los objetos están formados por partículas más pequeñas. Cuando trabajamos con un sistema de partículas, debemos elegir cuáles serán objeto de estudio y cuáles el exterior.

De forma general, consideramos un sistema de n partículas. Cada partícula cumple con las leyes de Newton, por lo que la fuerza sobre la partícula i es,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} F_{ij}$$

La novedad es que la fuerza $\vec{F}_i$ puede estar formada por una fuerza externa (por ejemplo, si todo el sistema está sobre un campo gravitatorio) y una fuerza debida a la presencia de las otras partículas del sistema. Aquí F_{ij} será la fuerza ejercida por la partícula j sobre la partícula i.

3.1. Centro de masa

Definición 3.1.1 (Centro de masas)**.** En un sistema de partículas, el centro de masas será,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

donde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

El momento lineal total del sistema es de la forma,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} p_i = M\dot{R}$$

Escribimos la ecuación de Newton de cada partícula,

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

con $i = 1, \ldots, N$. Entonces,

$$\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} F_{ij} = m_i \vec{a}_i$$

Si sumamos las N ecuaciones:

$$\sum_i^N \vec{F}_i^{ext} + \sum_i^N \sum_j^N F_{ij} = \sum_i^N m_i \vec{a}_i \Rightarrow \sum_i^N \vec{F}_i^{ext} = \sum_i^N m_i \vec{a}_i$$

Nótese que $\sum_i^N \sum_j^N F_{ij}$ es la tercera ley de Newton. Las fuerzas son iguales en módulo y dirección, pero de sentido contrario, por tanto se anulan.

Proposición 3.1.1 (Ecuación de movimiento del centro de masas)**.**

$$\sum_i^N \vec{F}_i^{ext} = \sum_i^N m_i \vec{a}_i \tag{3.1}$$

3.2. Conservación de la cantidad de movimiento

Teorema 3.2.1 (Conservación del momento lineal)**.** *El momento lineal es el mismo que si hubiera una única masa concentrada en el centro de masas con velocidad $\vec{v}_c$.*

$$\vec{p} = \sum_i^N m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C \tag{3.2}$$

Demostración. Por la ecuación de movimiento del centro de masas,

$$\vec{F}^{ext} = M \vec{a}_i \Leftrightarrow \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Así, si $\vec{F}^{ext} = \sum_i^N \vec{F}^{ext} = 0$,

$$\vec{P} = \sum_i^N m_i \vec{v}_i = h \Rightarrow \vec{v}_c = h$$

siendo h una constante. □

3.3. Colisiones

Capítulo 4

Rotación de un cuerpo rígido

4.1. Momento de una fuerza

4.2. Velocidad y aceleración angulares

4.3. Momento de inercia

4.4. Energía cinética rotacional

4.5. Momento angular de una partícula y de un sistema de partículas

4.6. Conservación del momento angular

Definición 4.6.1 (Momento angular)**.**

$$\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{x}$$

Observa que, en contraste con el momento lineal $\vec{p} = m\dot{x}$, el momento angular $\vec{L}$ depende de la elección del origen. Es una perpendicular tanto a la posición como al momento.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{x} \times \ddot{x} = \vec{x} \times \vec{F}$$

La cantidad $\tau = \vec{x} \times \vec{F}$ se llama torque. Esto nos da una ecuación para el cambio de cantidad de movimiento angular que es muy similar a la segunda ley de Newton para el cambio de cantidad de movimiento,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau$$

Entonces, cuando la fuerza $\vec{F}$ está en la misma dirección que la posición de la partícula, tenemos que $\vec{x} \times \vec{F} = 0$. Esto significa que el torque se desvanece y el momento angular se conserva

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

4.7. Traslación y rotación de un cuerpo rígido

Ejercicios

Ejercicio 4.7.1. *En ausencia de gravedad, una partícula, de masa m_A choca a velocidad $\vec{v}_A$ con la partícula 1 de un cuerpo rígido compuesto por tres partículas en las posiciones $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$. Las tres partículas pertenecientes al sólido rígido se encuentran inicialmente en reposo. Conociendo la velocidad $\vec{v}'_A$ de la partícula de masa m_A tras el choque, calcular:*

(a) Las posiciones de las cuatro partículas respecto del centro de masas del sólido rígido en el momento del choque.

(b) El vector velocidad del centro de masas del sólido rígido tras el choque.

(c) La velocidad angular del cuerpo rígido tras el choque.

Datos: $m_A = m_1 = m_2 = m_3 = 0,1kg$, $\vec{v}_A = (0{,}7, 0, 0)m/s$, $\vec{r_1} = (0, 0, 0)m$, $\vec{r_2} = (2, 1, 0)m$, $\vec{r_3} = (1, -4, 0)m$ *y* $\vec{v}'_A = (0{,}1, 0, 0)m/s$

(a) La posición del centro de masas del sólido rígido viene dada por

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{4.1}$$

Teniendo en cuenta que $m = m_1 = m_2 = m_3$, la ecuación queda

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3} = (1, -1, 0)m \tag{4.2}$$

Las posiciones $\vec{r}_{A,CM}$, $\vec{r}_{1,CM}$, $\vec{r}_{2,CM}$ y $\vec{r}_{3,CM}$ de las cuatro partículas respecto de la posición del centro de masas del sólido rígido vendrán dadas por

$$\vec{r}_{A,CM} = \vec{r}_{1,CM} = \vec{r}_A - \vec{R}_{CM} = (-1, 1, 0)m, \tag{4.3}$$
$$= \vec{r}_{2,CM} = \vec{r}_2 - \vec{R}_{CM} = (1, 2, 0)m, \tag{4.4}$$
$$= \vec{r}_{3,CM} = \vec{r}_3 - \vec{R}_{CM} = (0, -3, 0)m \tag{4.5}$$

(b) El momento lineal debe conservarse antes y después del choque, por lo que

$$g \tag{4.6}$$

Dado que inicialmente, las tres partículas del sólido rígido se encuentran en reposo, esta ecuación se reduce a

$$g \tag{4.7}$$

Capítulo 5

Interacción gravitatoria

5.1. Ley de la gravitación universal

5.2. Leyes de Kepler

5.3. El campo gravitatorio y el potencial gravitatorio

En un campo gravitatorio uniforme, una partícula está sujeta a una fuerza constante, $F = -mg$, donde $g \approx 9{,}8\text{ms}^{-2}$ es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de la Tierra. El signo menos surge porque la fuerza es hacia abajo mientras que hemos elegido medir la posición en una dirección hacia arriba que llamamos z. La energía potencial es

$$V = mgz$$

Observa que hemos elegido tener $V = 0$ en $z = 0$. No hay nada que nos obligue a hacer esto; fácilmente podemos agregar una constante adicional al potencial para cambiar el cero a alguna otra altura. La ecuación de movimiento para aceleración uniforme es

$$\ddot{z} = -g$$

Integrando un par de veces tenemos la velocidad en el punto t,

$$\dot{z} = u - gt \tag{5.1}$$

donde u es la velocidad inicial. (Ten en cuenta que la partícula se moverá hacia arriba si $\dot{z} > 0$ y hacia abajo si $\dot{z} < 0$). Integrando una vez más obtenemos la posición

$$z = z_0 + ut - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.2}$$

donde z_0 es la altura inicial en $t = 0$.

La gravedad es una fuerza conservativa. Considera una partícula de masa M fija en el origen. Otra partícula de masa m moviéndose en su presencia experimenta una energía potencial

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{5.3}$$

donde $G \approx 6{,}67 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{Kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ es la constante de gravitación universal. La fuerza sobre la partícula esta dada por

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \tag{5.4}$$

donde $\hat{r}$ es el vector unitario en la dirección de la partícula. La cantidad V en (5.4) es la energía potencial de una partícula de masa m en presencia de masa M.

Definición 5.3.1 (Campo gravitatorio)**.** Se define el campo gravitatorio de la masa M como

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

Entonces, la energía potencial de la masa m es de la forma $V = m\Phi$. El campo gravitacional debido a muchas partículas es simplemente la suma del campo debido a cada partícula individual.

$$\Phi(\vec{r}) = -G\sum_i \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

La fuerza gravitatoria que experiencia una partícula de masa m en movimiento en este campo es

$$\vec{F} = -Gm\sum_i \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Capítulo 6

Equilibrio estático y elasticidad

6.1. Condiciones de equilibrio

Una partícula colocada en un punto de equilibrio permanecerá allí para siempre. La ecuación de Newton (2.5), nos dice que podemos identificar los puntos de equilibrio con los puntos críticos del potencial,

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

¿Qué le sucede a una partícula que está cerca de un punto de equilibrio, x_0? En este caso, podemos hacer una expansión de Taylor en la energía potencial sobre el punto $x = x_0$. Como, por definición, la primera derivada se anula, tenemos,

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \tag{6.1}$$

Para continuar, necesitamos saber el signo de $V(x_0)$:

1. $V(x_0) > 0$: En este caso,el punto de equilibrio es un mínimo del potencial y la energía potencial es la de un oscilador armónico. La partícula oscila hacia adelante y hacia atrás alrededor de x_0 con frecuencia

   $$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$$

   Dicho punto de equilibrio se llama estable. Este análisis muestra que si la amplitud de las oscilaciones es lo suficientemente pequeña como para poder ignorar los términos $(x - x_0)^3$ de la expansión de Taylor, entonces todos los sistemas que oscilan alrededor de un punto fijo estable parecen un oscilador armónico.

2. $V(x_0) < 0$: En este caso,el punto de equilibrio es un máximo del potencial. La ecuación de movimiento nuevamente dice

   $$m\ddot{x} = -V''(x_0)(x - x_0)$$

   Ten en cuenta que en este caso $\ddot{x} > 0$ cuando $x - x_0 > 0$. Esto significa que si desplazamos el sistema un poco del punto de equilibrio, entonces la aceleración lo empuja más lejos. La solución general es de la forma,

   $$x - x_0 = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{-V(x_0)}{m}}$$

   Dicho punto de equilibrio se llama inestable.

3. Podemos tener también que $V(x_0) = 0$: En este caso, no hay nada que podamos decir sobre la dinámica del sistema sin expandir más la serie de Taylor.

6.2. Centro de gravedad

6.3. Par de fuerzas

6.4. Tensión y deformación

Capítulo 7

Fluidos

7.1. Presión en un fluido

7.2. Flotación y principio de Arquímedes

7.3. Fluidos en movimiento: ecuación de Bernoulli

7.4. Flujos viscosos

Parte II

Oscilaciones y Ondas

Capítulo 8

Oscilaciones

8.1. Movimiento armónico simple: cinemática y dinámica

8.2. Energía de un oscilador armónico simple

El oscilador armónico es, con diferencia, el sistema dinámico más importante de toda la física teórica. La buena noticia es que es muy fácil. (De hecho, la razón por la que es tan importante es precisamente porque es fácil). La energía potencial del oscilador armónico se define como

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

La fuerza resultante de la energía V está dada por $F = kx$ que, en el contexto de un muelle, se llama Ley de Hooke. La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = kx$$

cuya solución general es

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{8.1}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A y B son dos constantes de integración y se llama frecuencia angular. Vemos que todas las trayectorias son cualitativamente iguales: simplemente rebotan hacia adelante y hacia atrás alrededor del origen. Los coeficientes determinan la amplitud de las oscilaciones, junto con la fase en la que comienza el ciclo. El tiempo que se tarda en completar un ciclo completo se llama periodo

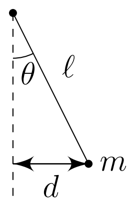
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{8.2}$$

El periodo es independiente de la amplitud. Para determinar las constantes de integración de una trayectoria dada, necesitamos algunas condiciones iniciales. Por ejemplo, si nos dan la posición y la velocidad en $t = 0$, entonces es simple comprobar que $A = x(0)$ y $B\omega = \dot{x}(0)$

8.3. Péndulo simple y péndulo físico

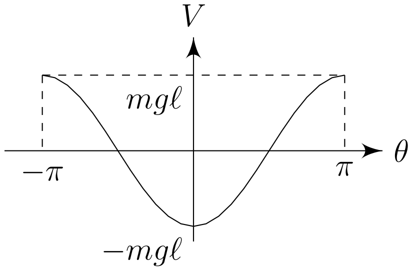
Considera una partícula de masa m unida al extremo de una barra ligera de longitud ℓ. Esto cuenta como un sistema unidimensional porque necesitamos especificar solo una coordenada para decir cómo se ve el sistema en un momento dado. La mejor coordenada a elegir es θ, el ángulo que forma la varilla con la vertical. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{8.3}$$



La energía es,

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta \tag{8.4}$$



Hay dos movimientos cualitativamente diferentes del péndulo. Si $E > mg\ell$, entonces la energía cinética nunca puede ser cero. Esto significa que el péndulo está dando vueltas completas. Si $E < mg\ell$, el péndulo completa sólo una parte del círculo antes de detenerse y girar hacia el otro lado. Para pequeñas oscilaciones, $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ el péndulo se convierte en un oscilador armónico con frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/\ell}$ y periodo $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

8.4. Movimiento armónico amortiguado

8.5. Oscilaciones forzadas y resonancia

Capítulo 9

Ondas

9.1. Movimiento ondulatorio simple

9.2. Ondas periódicas

9.3. Ondas en tres dimensiones

9.4. Concepto de reflexión, refracción y dispersión

9.5. Efecto Doppler

9.6. Superposición de ondas

9.7. Ondas estacionarias

Parte III

Termodinámica

Capítulo 10

Termodinámica

10.1. Temperatura y calor

10.2. El principio cero de la Termodinámica

10.3. Termómetros y escalas de temperatura

10.4. Ecuaciones de estado: gases ideales

10.5. Teoría cinética de los gases

10.6. Calor específico y trabajo

10.7. Primer Principio de la Termodinámica

10.8. Equipartición de la energía

10.9. Máquinas térmicas y segundo principio de la Termodinámica

10.10. Reversibilidad y el ciclo de Carnot

10.11. Temperaturas absolutas

10.12. La entropía y el segundo principio