**INSTRUCCIONES**. El ejercicio se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**. Sea cuidadoso en la presentación de los resultados y tenga en cuenta el número de cifras significativas, unidades, etc. Salvo que se indique otra cosa el desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en las hojas que se aportan con este enunciado.

**MATERIAL**. Solo calculadora científica, no programable.

# Descarga de un condensador

Si cerramos los bornes de un condensador cargado a través de un resistor aquel se descarga siguiendo una ley exponencial. Podemos monitorizar el proceso de descarga midiendo el voltaje entre los bornes del condensador, el cual es proporcional a la carga:

$$V(t) = V_o \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{1}$$

que es lo que muestra la Figura 1. $\tau$ es el llamado *tiempo característico* del circuito, el cual viene dado por la resistencia, $R$, del resistor y por la capacidad, $C$, del condensador, $\tau = RC$. La descarga se puede caracterizar también por otro parámetro llamado *constante de relajación* del circuito, $\lambda$, inversa del tiempo característico:

$$\lambda = 1/\tau = (RC)^{-1} \tag{2}$$

(la unidad de capacidad en el Sistema Internacional es el *faradio*).

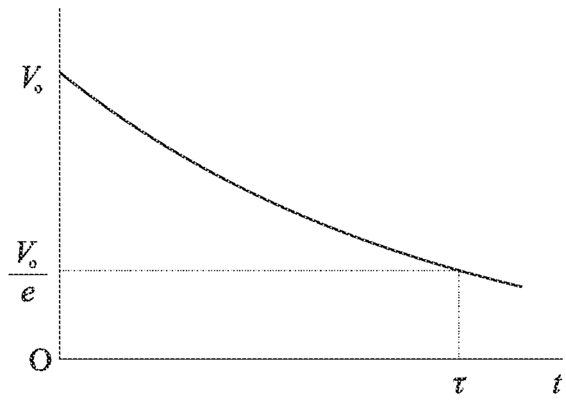


Figura 1: Evolución del voltaje del condensador (o de su carga) con el tiempo.

Por otro lado, el resistor tiene otra propiedad que es la *conductancia*, $G$, la cual es la inversa de la resistencia, $G = 1/R$, y su unidad en el Sistema Internacional es el *siemens*, S (un conductor de 1 Ω de resistencia presenta una conductancia de 1 S). En términos de $\lambda$ y $G$ la expresión (2) se transforma en

$$G = \lambda C \tag{3}$$

## Procedimiento experimental

Disponemos de un condensador de capacidad desconocida que cargamos con un voltaje $V_o$ mediante el circuito que se ve en la Figura 2, poniendo el interruptor S en la posición de conexión de la batería. El voltaje que suministra la batería es $V_o = 10\,\mathrm{V}$ el cual consideramos exacto. Tenemos también cuatro resistores cuyas resistencias tienen los siguienes valores nominales: $R_1 = 40\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 60\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 160\,\mathrm{k\Omega}$ con un $\pm 5\,\%$ de tolerancia todos casos. Inicialmente conectamos $R_1$ como resistor de descarga.

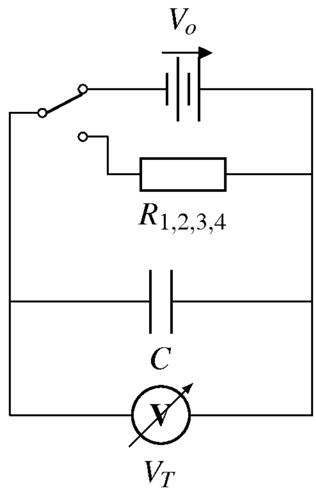


Figura 2: Circuito para medir la descarga de un condensador.

A continuación activamos la posición de descarga del interruptor y el condensador se descarga a través de $R_1$; mediante un cronómetro esperamos a que pase un intervalo, $T$, de 5 segundos y entonces congelamos la lectura del voltímetro V y tomamos nota del voltaje, $V_T = V(T)$, el cual está dado con una precisión de $\pm 0{,}1\,\mathrm{V}$. Volvemos a la posición 1, esperamos a que se cargue de nuevo el condensador y repetimos el proceso hasta 5 veces. Debido a la falibilidad de nuestros reflejos con el cronómetro, estimamos que el intervalo $T$ tiene una incertidumbre de $\pm 0{,}1\,\mathrm{s}$, esto es $T = (5{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{s}$.

| Resistor | $V_T$ (V) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 0,7 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,7 |
| $R_2$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,8 | 1,7 |
| $R_3$ | 3,0 | 3,2 | 2,8 | 2,9 | 2,9 |
| $R_4$ | 4,5 | 4,3 | 4,7 | 4,4 | 4,6 |

Tabla 1: Medidas del voltaje del condensador, $V_T$, al cabo de un tiempo de descarga $T = (5{,}0 \pm 0{,}1)$ s, partiendo de $V_o = 10$ V.

Pasamos a usar el resistor $R_2$ y repetimos las 5 medidas tal y como se describe en el párrafo anterior; procedemos de igual forma con los resistores $R_3$ y $R_4$. Los resultados se ofrecen en la Tabla 1.

Una vez medido $V_T$, la constante de relajación se obtiene a partir de las expresiones (1) y (2):

$$\lambda = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{V_T}{V_o}\right) \tag{4}$$

Ayuda: $(\ln x)' = 1/x$.

## Cuestiones

1. (1 punto) Calcule los valores de $\Delta R$ para los distintos resistores así como las conductancias correspondientes calculando y propagando correctamente el error ($G \pm \Delta G$). Considere el valor de tolerancia dado como el error relativo de los valores nominales. Use la Tabla 2 para presentar los resultados y emplee los múltiplos y submúltiplos de las unidades funtamentales que considerere más apropiados; no obstante para hacer cálculos se recomienda usar las unidades nativas.

2. (1,5 puntos) Como valor más apropiado para $V_T$ en cada experimento —que identificaremos como $\overline{V}_T$— use la **mediana** del correspondiente conjunto de datos. Como error de $\overline{V}_T$ decida el más apropiado entre 1) la dispersión del correspondiente conjunto de datos o 2) la precisión del voltímetro, y calcúlelo justificando la respuesta. Presente los resultados en la columna correspondiente de la Tabla 2.

3. (1,5 puntos) Calcule los valores de $\lambda$ correspondientes a cada resistor usando la fórmula (4) y propagando correctamente el error de $T$ y $V_T$. Presente los resultados en la Tabla 2.

4. (1,5 puntos) Usando la fórmula (3) calcule los valores de $C$ de cada experimento propagando el error y presente los resultados en la Tabla 2. Calcule el valor medio de $C$ con estos datos y tome la desviación típica de la media como su error.

Una posible fuente de error sistemático es el propio voltímetro. Idealmente el voltímetro no tiene conductancia pero en la práctica siempre tiene una cierta conductancia no nula, $G_V$, que se añade a la conductancia del resistor externo, $G$, contribuyendo a la descarga del condensador (nota: la conductancia total de dos resistores en paralelo es la suma de sus conductancias). Para tener esto en cuenta sustituimos $G \to G + G_V$ en la fórmula (3) de forma que ésta se transforma en $G = -G_V + \lambda C$.

5. (3,5 puntos) Represente $G$ frente a $\lambda$ con las barras de error correspondientes en la plantilla de ejes lineales que se adjunta.

   Realice un ajuste por mínimos cuadrados: calcule la pendiente, $m$, y ordenada en el origen, $b$, con sus errores y el coeficiente de correlación de Pearson. Represente la recta de regresión en la gráfica. Dada la expresión $G = -G_V + \lambda C$ calcule $G_V$ y $C$, con sus errores, a partir de los resultados del ajuste. **Ayuda**: en este apartado es conveniente usar los múltiplos/submúltiplos de las unidades que proporcionen números más manejables.

6. (1 punto) Compare los resultados obtenidos para la capacidad del condensador de los apartados 4 y 5. ¿Cuál es más preciso? En virtud de los resultados que se han obtenido ¿cuál de ambos considera que es más fiable? Razone la respuesta y haga un análisis crítico de los resultados.

## Hoja de resultados

Entregue esta hoja una vez completada la tabla y realizada la gráfica. Sea cuidadoso y evite tachones y enmiendas. **Tenga en cuenta que tendrá que entregar en hojas aparte los desarrollos y los resultados que no se presenten tabulados o en forma gráfica**.

| Res. | $R$ ( ) | $G$ ( ) | $V_T$ ( ) | $\lambda$ ( ) | $C$ ( ) |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | | | | | |
| $R_2$ | | | | | |
| $R_3$ | | | | | |
| $R_4$ | | | | | |

Tabla 2: Tabla de resultados. Complete los valores que le piden en las cuestiones en esta tabla. Use los paréntesis de los encabezados para indicar las unidades.

# Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente $m$ y la ordenada en el origen $b$ de una recta que ajusta $N$ pares de valores $(x_j, y_j)$, incluyendo las incertidumbres respectivas, $\varepsilon_m$ y $\varepsilon_b$. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, $r$.

## Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

## Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2}$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}$$

## Parámetros de la recta

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{s(X)}\sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - m x_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$b = Y_C - m X_C \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_m \sqrt{s^2(X) + X_C^2}$$

A continuación proporcionamos una tabla que le permitirá hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarla.

| Regresión lineal y coef. de correlación | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | $y_j$ | $x_j^2$ | $y_j^2$ | $x_j y_j$ | $y_j - m x_j - b$ | $(y_j - m x_j - b)^2$ |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| $\sum_j x_j$ | $\sum_j y_j$ | $\sum_j x_j^2$ | $\sum_j y_j^2$ | $\sum_j x_j y_j$ | | $\sum_j (y_j - m x_j - b)^2$ |
| | | | | | | |
| $X_C$ | $Y_C$ | $s(X)$ | $s(Y)$ | $s(X,Y)$ | | |
| | | | | | | |
| $m$ | $\varepsilon_m$ | $b$ | $\varepsilon_b$ | $r$ | | |
| | | | | | | |

**INSTRUCCIONES**. El ejercicio se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**; se valorará la correcta justificación de los pasos que conducen a la solución. El desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en la hoja que se aporta con este enunciado. **MATERIAL**. Solo calculadora no programable.

# Experimentos para determinar la densidad de la Tierra

En 1798, Henry Cavendish publicó el resultado de sus trabajos experimentales para obtener la medida de la densidad de la Tierra[1] Su objetivo, contrariamente a lo que suele mencionarse, no era obtener la constante de gravitación universal sino «pesar el mundo», lo que consiguió con notable precisión para la época.

El dispositivo experimental se puede ver en la Fig. 1. Una balanza de torsión con un brazo de madera de longitud total $L = 6$ pies[2] (con un error de un 0,1 %), sujeto por un hilo de 40 pulgadas de largo[3] y en cuyos extremos hay suspendidas dos esferas de plomo de dos pulgadas de diámetro (con un error de 0,05 pulgadas) y de masa $m$ (densidad del plomo $\rho_{\mathrm{Pb}} = 11340\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, con una precisión dada por la última cifra significativa). Todo el conjunto se encuentra encerrado en un armazón de madera protegido de la intemperie. Dos esferas de plomo, de masa $M = 175$ kg cada una (con un error de un 0,1 %), ejercen una fuerza de atracción gravitatoria significativa sobre las esferas de masa $m$. El conjunto es simétrico respecto al eje de la balanza de torsión, y $r$ es la distancia, en equilibrio, entre el centro de masas de una esfera de masa $M$ y la esfera de masa $m$ más cercana.

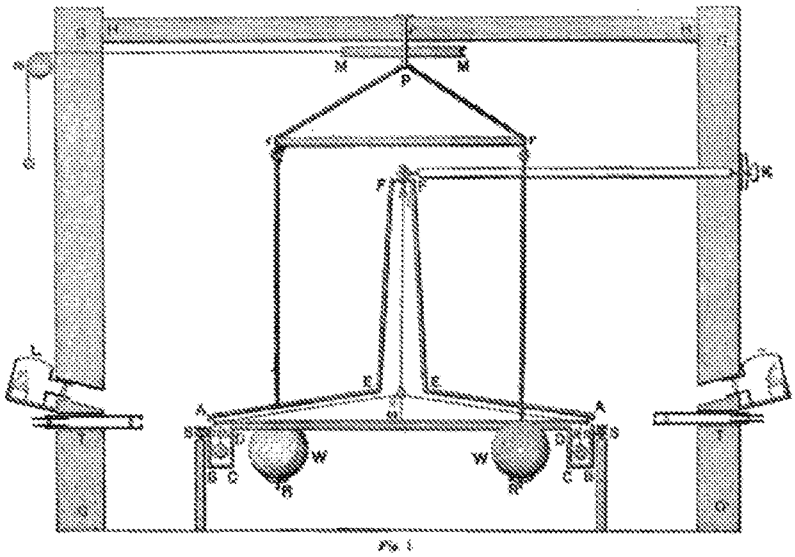

**Figura 1:** Experimento original de Cavendish, según esquema original del autor. Las esferas de masa $m$ es encuentran en los cubículos $ABCD$. Las esferas de masa $M$, no alineadas con respecto a las de masa $m$, están indicadas con $W$.

Una revisión actual del experimento permite el cálculo de la constante de gravitación universal mediante un equilibrio de momentos. En sus experimentos, Cavendish giraba el brazo un cierto ángulo $\theta$. Este giro produce una torsión en el hilo, lo que induce un momento de fuerza en el eje dado por $\tau_\theta = \kappa\theta$, con $\kappa$ el módulo de torsión del muelle. Por efecto de las esferas de masa $M$, la atracción gravitatoria induce a su vez un movimiento en el brazo. El momento de gravitación viene dado, en este caso, por

$$\tau_g = LG\frac{mM}{r^2}\,, \tag{1}$$

con $r$ la distancia entre los centros de masas descrita anteriormente.

[1] H. Cavendish. Experiments to Determine the Density of the Earth. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **1** 1798, 88:469-526.

[2] 1 pie = 0,3048 m, supuesto exacto.

[3] 1 pulgada = 2,54 cm, supuesto exacto.

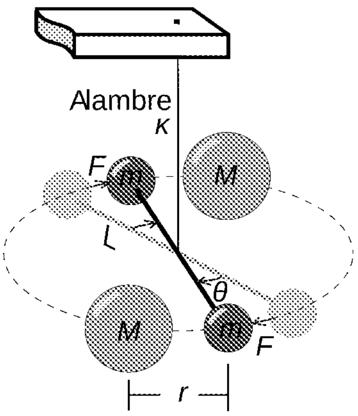


**Figura 2:** Diagrama de la balanza de torsión utilizada por Cavendish (Wikimedia commons).

En el equilibrio, ambos momentos se igualarán, permitiendo el cálculo de la constante de gravitación universal. Una forma de soslayar el cálculo del módulo de torsión del muelle (tal y como hizo Cavendish) es a partir del periodo de oscilación del movimiento detectado ($T$) y de la amplitud de oscilación de dicho movimiento ($y$, o el equivalente ángulo girado, $\theta$). En efecto, a partir del periodo de las oscilaciones del brazo es posible obtener el valor del módulo de torsión del hilo, sabiendo que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{2\kappa}}, \tag{2}$$

donde $I = mL^2/2$ es el momento de inercia debido a las esferas de masa $m$. De este modo, la constante de gravitación universal puede escribirse como

$$G = \frac{2\pi^2 L r^2 \theta}{MT^2}. \tag{3}$$

1. (1 punto) Determine, en unidades S.I., los valores de la longitud del brazo y la masa $m$ de cada esfera.

2. (2 puntos) La Fig. 3 reproduce uno de los experimentos que llevó a cabo Cavendish, donde se muestra la posición de las esferas de masa $m$ en una escala graduada en función del tiempo. A partir de ella, realice una tabla con los tiempos en los que la amplitud la oscilación es máxima y calcule (con su error) el periodo de cada oscilación.

3. (2 puntos) A partir de la posición $y$ medida en una escala (según recoge la Fig. 3) puede determinarse el ángulo $\theta$ girado aproximando $\theta \simeq \tan\theta = y/(L/2)$. Para las tres primeras oscilaciones, determine la amplitud media de oscilación y obtenga el ángulo girado correspondiente (con su error).

4. (3 puntos) Cavendish realizó, con su ayudante, hasta 17 experimentos con distintas condiciones iniciales, temperaturas y configuraciones. En la Tab. 1 se muestran algunos de los resultados obtenidos, indicando la amplitud media, el periodo medido, y la densidad de la Tierra obtenida.

| Experimento | Amplitud media (mm) | Periodo (minutos y segundos) | Densidad (g/cm$^3$) |
|---|---|---|---|
| 4 | 34,35 | 7’3” | 5,58 |
| 6 | 37,46 | 7’4” | 5,62 |
| 7 | 38,73 | 7’4” | 5,44 |
| 9 | 40,13 | 6’58” | 5,1 |

**Tabla 1:** Datos de algunos de los experimentos realizados por Cavendish y Gilpin. La precisión de los resultados vienen dados por la última cifra significativa.

Suponiendo que la distancia $r$ de equilibrio entre las esferas de masa $m$ y las de masa $M$ se mantuviera constante durante todos los experimentos, y estuviera dada a partir de los datos de la Fig. 3, obtener el valor de la constante de gravitación universal para cada uno de los experimentos mostrados.

5. (1 punto) Con los datos obtenidos, obtener (con su error) la media **ponderada** de la constante de gravitación universal. (Nota. Si no ha obtenido los datos del apartado anterior, puede utilizar el cálculo original de densidad de Cavendish y hacer uso de la expresión $\rho = 3g/(4\pi R_T G)$, con $R_T = (6371 \pm 1)$ km).

6. (1 punto) El valor reconocido de la constante de gravitación universal es $G = 6{,}67408 \cdot 10^{-11}$ m$^3$ kg$^{-1}$ s$^{-2}$. A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿puede concluirse que el resultado es exacto en el sentido de precisión y exactitud? Razone la respuesta.

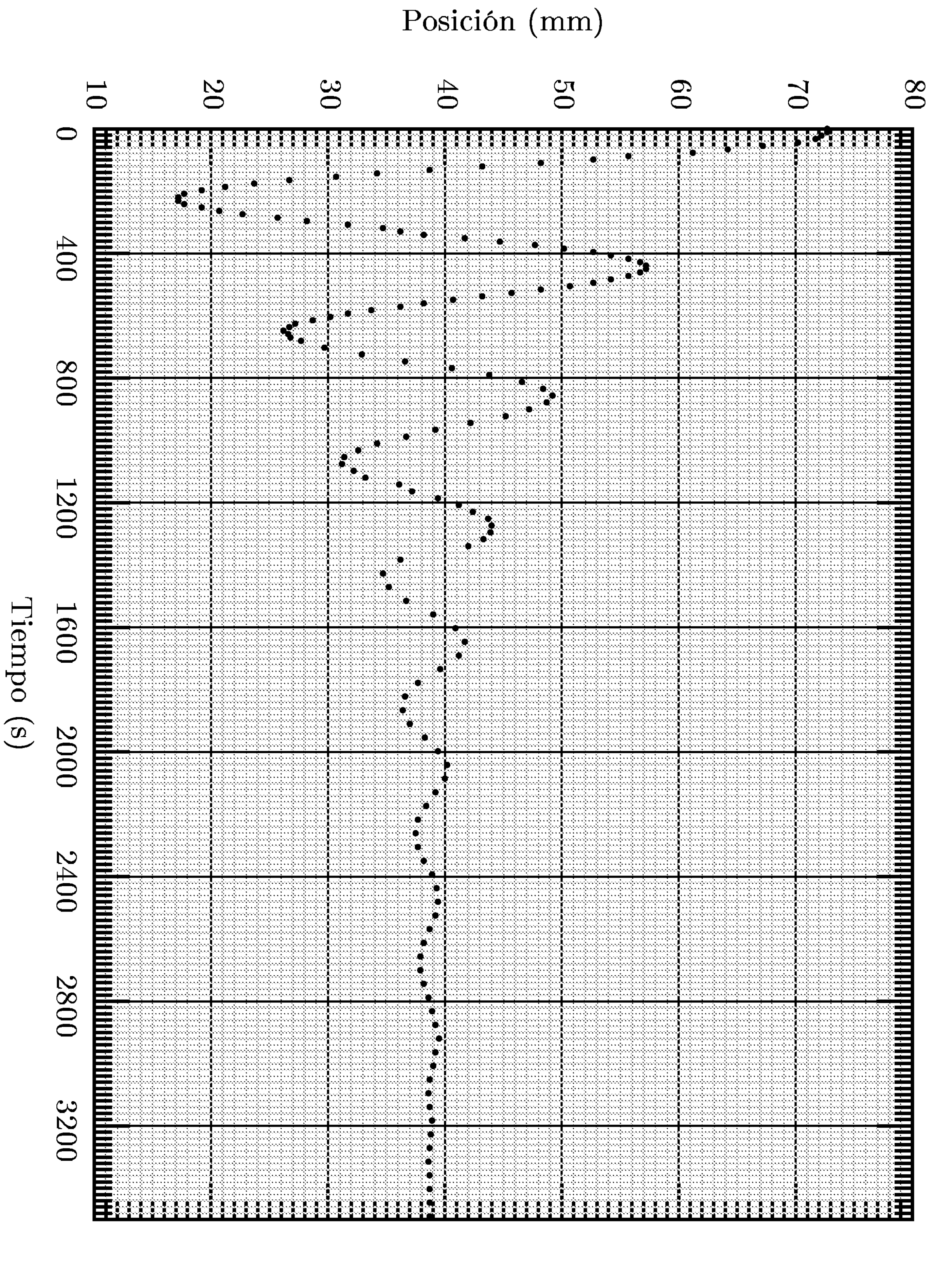


**Figura 3:** Recreación de uno de los experimentos de Cavendish con la evolución temporal de la posición del brazo torsionado.

**INSTRUCCIONES :** Las hojas que se le han entregado corresponden a dos grupos distintos:

- **Enunciado del examen de septiembre:** El examen se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**; se valorará la correcta justificación de los pasos que conducen a la solución. El desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en las cuadrículas que se proporcionan enel Material complementario.
- **Material complementario:** Contiene las fórmulas no memorizables que se consideran necesarias para la resolución del examen y las cuadrículas necesarias para las representaciones gráficas que se pidan. Las cuadrículas deben ser entregadas junto con el examen.

**MATERIAL PERMITIDO:** Solo calculadora no programable.

## Introducción

A una empresa que se dedica al reciclado de desechos de laboratorios de química le llega para reciclar un bidón grande lleno de un líquido transparente e inodoro que, de acuerdo con la documentación del laboratorio puede ser agua con una ligera contaminación que no cambia sus propiedades físicas, un aceite de silicona de baja densidad o una disolución de glicerol en agua. Se sabe que a temperatura ambiente las densidades de estos tres líquidos son $\rho_a = (1000 \pm 10)$ kg/m$^3$, para el agua, $\rho_s = (750 \pm 10)$ kg/m$^3$, para el aceite de silicona y $\rho_d = (1170 \pm 10)$ kg/m$^3$, para la disolución de glicerol en agua.

Los técnicos de la empresa necesitan identificar el fluido para poderlo reciclar de la manera más adecuada y para ello han decidido utilizar un contenedor alto y cilíndrico de vidrio, de diámetro $d = 20$ cm. El contenedor tiene paredes lisas, está abierto a la atmósfera en su parte superior y en la parte inferior tiene una tapa en la que hay un sensor de presión hidrostática, cuya precisión es del 5 %, y un orificio con una válvula de salida. Por un lado pretenden utilizar la relación entre la presión hidrostática medida por el sensor, $P$, y la altura, $h$, de la capa de fluido que está situada por encima del sensor. Estas dos magnitudes están relacionadas por la expresión:

$$P = \rho g h$$

donde $\rho$ es la densidad del fluido y $g$ es la aceleración de la gravedad (tómese $g = 9{,}8$ ms$^{-2}$).

## Datos obtenidos

Inicialmente se llena el depósito hasta que la altura de líquido es $h = 500$ mm y se toma la medida de la presión hidrostática. Seguidamente se abre la válvula y se deja salir el líquido durante un tiempo, se cierra la válvula y se toman las lecturas de la altura de la capa fluida y de la presión hidrostática. En las medidas de la altura de la capa fluida la incertidumbre es de 1 mm. Los datos obtenidos son los siguientes (Se recuerda que 1 Pa = 1N/m$^2$):

| Tabla I.- Altura de la capa de fluido y presión hidrostática | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ (mm) | 502 | 453 | 398 | 347 | 302 | 248 |
| $P$ (Pa) | 4950 | 4410 | 4050 | 3340 | 2850 | 2380 |

## Análisis de los datos

Teniendo todos estos datos, responda razonadamente a las siguientes preguntas:

1. (4 puntos) Añada a la Tabla I tres filas más que contengan, respectivamente, el valor del error en cada medida de la presión, $\Delta P$, el valor de $\rho$ que se obtiene para cada par de valores de la altura $h$ y la presión $P$, así como su incertidumbre obtenida por medio de propagación lineal de errores, escribiéndolos con el número correcto de cifras significativas. A partir de los valores $\rho_i$ obtenidos para cada par de valores $(h_i, P_i)$, calcule el valor medio de $\rho$ y su desviación estándar ponderando cada valor $\rho_i$ con su error $\Delta\rho_i$.

2. (2 puntos) Represente adecuadamente los datos de $P$ **como función de** $h$ en la cuadrícula doblemente lineal que se le proporciona.

3. (4 puntos) Obtenga la recta de regresión correspondiente al gráfico de la pregunta anterior y represéntela sobre la misma cuadrícula. ¿Cuáles son los valores de la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión? ¿Cuál es el valor del coeficiente de correlación? ¿Cuál es el error en el valor de la pendiente (dispone de todas las fórmulas necesarias en la sección *Material complementario* de este examen)? A partir del valor de la pendiente y su error obtenga otro valor para la densidad del líquido problema y su incertidumbre. A partir de los valores de la densidad obtenidos en la primera pregunta y en ésta, ¿se puede identificar cuál es el líquido que había en el bidón?

# MATERIAL COMPLEMENTARIO

## Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente $m$ y la ordenada en el origen $b$ de una recta que ajusta $N$ pares de valores $(x_j, y_j)$, incluyendo las incertidumbres respectivas, $\varepsilon_m$ y $\varepsilon_b$. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, $r$.

**Valores medios**

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

**Coeficiente de correlación**

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2}$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}$$

**Parámetros de la recta**

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{s(X)}\sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - m x_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$b = Y_C - mX_C \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_m\sqrt{s^2(X) + X_C^2}$$

A continuación proporcionamos una tablas que le permitirán hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarlas.

| Regresión lineal y coef. de correlación | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | $y_j$ | $x_j^2$ | $y_j^2$ | $x_j y_j$ | $y_j - mx_j - b$ | $(y_j - mx_j - b)^2$ |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| $\sum_j x_j$ | $\sum_j y_j$ | $\sum_j x_j^2$ | $\sum_j y_j^2$ | $\sum_j x_j y_j$ | | $\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$ |
| | | | | | | |
| $X_C$ | $Y_C$ | $s(X)$ | $s(Y)$ | $s(X,Y)$ | | |
| | | | | | | |
| $m$ | $\varepsilon_m$ | $b$ | $\varepsilon_b$ | $r$ | | |
| | | | | | | |