

Examen Análisis Matemático I

Ciencias Físicas UNED

Hay 5 preguntas, cada una vale 2 puntos (sobre 10). Deben explicar claramente todos los cálculos que hagan: simplemente escribir cuentas sin aclarar los pasos que se siguen **NO** puntúa. El correcto planteamiento del problema forma parte de la solución, de modo que se sugiere leer detenidamente los enunciados y asegurarse de que el planteamiento que se hace tiene sentido.

1.

a) Describir la región definida por las inecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

b) Definir el dominio y el rango de la función

$$g(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-2}}.$$

2. Calcular la derivada (en todos los puntos) de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

¿Es $f'(x)$ continua en $x = 0$?

3. Un agricultor observa que plantando 200 naranjas por hectárea obtiene un rendimiento de 300 naranjas por árbol, y por cada árbol adicional que siembra por hectárea, obtiene 15 naranjas menos por árbol (al haber más árboles que compiten por el alimento, baja su rendimiento). ¿Cuántos árboles por hectárea proporcionan la mejor cosecha?

4. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 2x + 2)}.$$

5.

a) Determinar el centro, radio e intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}.$$

b) Calcular (si es posible) el límite de la sucesión con término general

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n^3 + 1}.$$

Examen Análisis Matemático I

Ciencias Físicas UNED

Hay 5 preguntas, cada una vale 2 puntos (sobre 10). Deben explicar claramente todos los cálculos que hagan: simplemente escribir cuentas sin aclarar los pasos que se siguen **NO** puntúa. El correcto planteamiento del problema forma parte de la solución, de modo que se sugiere leer detenidamente los enunciados y asegurarse de que el planteamiento que se hace tiene sentido.

1. Una partícula se mueve sobre la recta real de manera tal que su posición viene dada por la función del tiempo

$$x(t) = t^3 - 5t^2 + 2t + 8.$$

Determinar en qué intervalos de tiempo el movimiento se dirige hacia el origen $x = 0$.

2. En Electrodinámica Cuántica, la dispersión de fotones no polarizados por electrones, se describe mediante la sección eficaz de Klein-nishina, que puede escribirse (en unidades apropiadas) como

$$\sigma(k) = 2\pi r_0^2 \left(\frac{1+k}{k^2} \left[\frac{2(1+k)}{1+2k} - \frac{\log(1+2k)}{k} \right] + \frac{\log(1+2k)}{2k} - \frac{1+3k}{(1+2k)^2} \right).$$

En esta expresión, $k = h\nu/mc^2$, con m la masa del electrón, r_0 su radio clásico, h la constante de Planck, y ν la frecuencia de la radiación incidente. Calcular el límite de la sección eficaz para radiación de muy baja energía, es decir, determinar $\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k)$.

3. Dos postes, de 4 y 9 metros de altura, se encuentran separados uno de otro por una distancia de 10 metros. Se quieren asegurar con un cable que se fija a sus extremos superiores y se pasa por una argolla clavada en el suelo. ¿Dónde debe colocarse la argolla de modo que la longitud requerida de cable sea mínima?
4. Calcular el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y la curva

$$y = \left(2 + \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2 \cos \left(\frac{x}{2} \right)$$

5. Determinar el centro, radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2} \right)^n.$$

Examen Análisis Matemático I

Ciencias Físicas UNED

Hay 4 preguntas, cada una vale 2.5 puntos (sobre 10). Deben **explicar claramente todos los cálculos** que hagan: simplemente escribir cuentas sin aclarar los pasos que se siguen **NO** puntúa. El correcto planteamiento del problema forma parte de la solución, de modo que se sugiere leer detenidamente los enunciados y asegurarse de que el planteamiento que se hace tiene sentido.

1. Calcular los siguientes límites

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n} \right)^n.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x}.$$

2. Demostrar que la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ y la hipérbola $2x^2 - 2y^2 = 1$ se cortan formando ángulos rectos.

3. Calcular

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2} dx.$$

4. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}.$$