INSTRUCCIONES : Las hojas que se le han entregado corresponden a dos grupos distintos:

- **Enunciado del examen:** El examen se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**; se valorará la correcta justificación de los pasos que conducen a la solución. El desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en las cuadrículas que se proporcionan enel Material complementario.
- **Material complementario:** Contiene las fórmulas no memorizables que se consideran necesarias para la resolución del examen y las cuadrículas necesarias para las representaciones gráficas que se pidan. Las cuadrículas deben ser entregadas junto con el examen.

MATERIAL PERMITIDO: Solo calculadora no programable.

EXAMEN

Introducción

Se desea saber el momento de inercia de una pieza cilíndrica de una determinado material metálico que se utiliza como rotor en un determinado equipo de laboratorio. Para ello se monta el cilindro como rotor y se le aplica un par de rotación oscilante, de amplitud τ y que oscila con frecuencia angular ω. Sometido a dicho par, el rotor realiza un desplazamiento angular oscilante, cuya amplitud, θ, está relacionada con el momento de inercia del rotor por medio de la expresión:

$$I = \frac{\tau}{\theta\omega^2}$$

Datos obtenidos

Se ha preparado el sistema de forma que el par oscilante tiene una amplitud de oscilación $\tau = 2,00 \pm 0,05$ Nm y se varía el periodo de oscilación, que se conoce con un error relativo del 3 %, mientras se mide la amplitud de oscilación, θ, con una resolución de ± 1 mrad. De esta forma se han obtenido los siguientes resultados:

Tabla.- Amplitud del par oscilatorio de giro y amplitud del desplazamiento angular oscilatorio resultante

T (s)	10	20	30	40	50	60
θ (rad)	0,028	0,115	0,225	0,418	0,695	0,905

Análisis de los datos

Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

1. (2 puntos) Añada a la Tabla de datos dos filas más que contengan, respectivamente, el valor de la velocidad angular al cuadrado, ω^{-2}, y su incertidumbre, $\Delta(\omega^{-2})$, escribiendo los valores de ω^{-2} y $\Delta(\omega^{-2})$ con el número correcto de cifras significativas.
2. (2 puntos) Añada a la Tabla de datos dos filas más que contengan, respectivamente, el valor del momento de inercia I que se obtiene para cada terna de valores de τ, θ y ω^{-2} y su correspondiente error, ΔI, utilizando propagación lineal de errores.
3. (2 puntos) A partir de los valores obtenidos para el momento de inercia y sus correspondientes errores, obtenga el valor medio del momento de inercia $\overline{I}$ y su desviación estándar, $\Delta\overline{I}$, ponderando cada valor de I con su error ΔI.
4. (2 puntos) Represente adecuadamente θ **como función de** ω^{-2} en la cuadrícula doblemente lineal que se le proporciona.

5. (2 puntos) Obtenga la recta de regresión correspondiente a los puntos representados en la gráfica anterior y dibújela sobre la misma cuadrícula. Obtenga los valores de la pendiente, m, y la ordenada en el origen, b que se obtienen a partir de la regresión lineal. Obtenga los valores de los errores en la pendiente y la ordenada en el origen y escriba m y b con sus errores respectivos con las cifras significativas correctas. Obtenga el valor del coeficiente de correlación y discuta la calidad del ajuste a la luz del valor del coeficiente de correlación obtenido.

MATERIAL COMPLEMENTARIO

Regresión lineal: Fórmulas para el cálculo de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j). Se dan también las incertidumbres respectivas, ε_m y ε_b.

$$m = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j y_j - N X_C Y_C}{\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - N X_C^2}$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - m x_j - b\right)^2}{(N-2)\sum_j (x_j - X_C)^2}}$$

$$b = \frac{Y_C \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - X_C \sum_{j=1}^{N} x_j y_j}{\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - N X_C^2}$$

$$\varepsilon_b = \sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - m x_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

Coeficiente de correlación: Fórmulas para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson para un conjunto de N pares (x_j, y_j) cuyos valores medios son $\overline{x}$ y $\overline{y}$, siendo $X = \{x_j\}_{j=1}^{N}$ e $Y = \{y_j\}_{j=1}^{N}$.

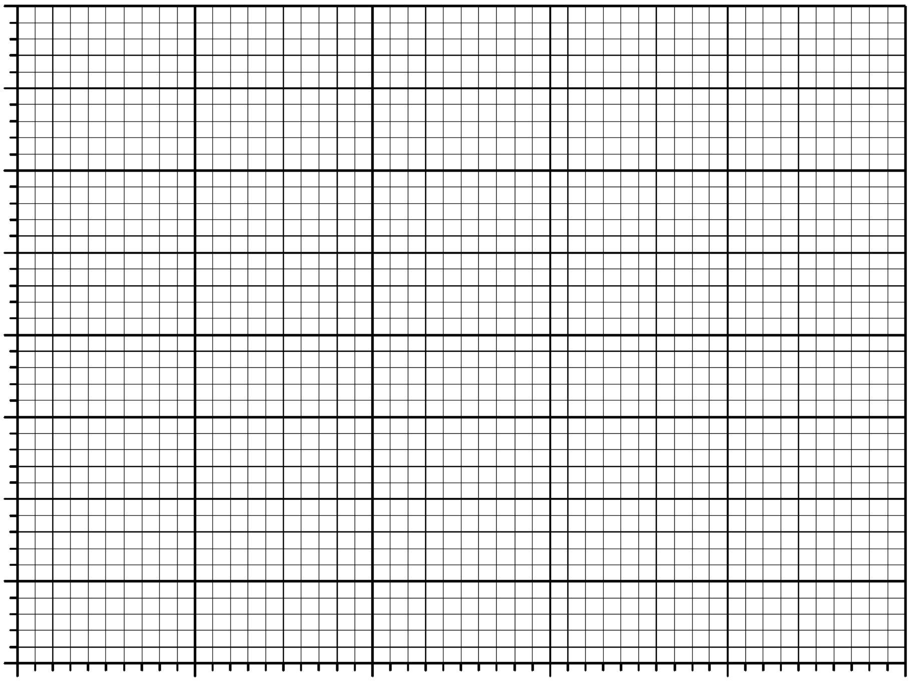
$$r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)} \qquad s(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

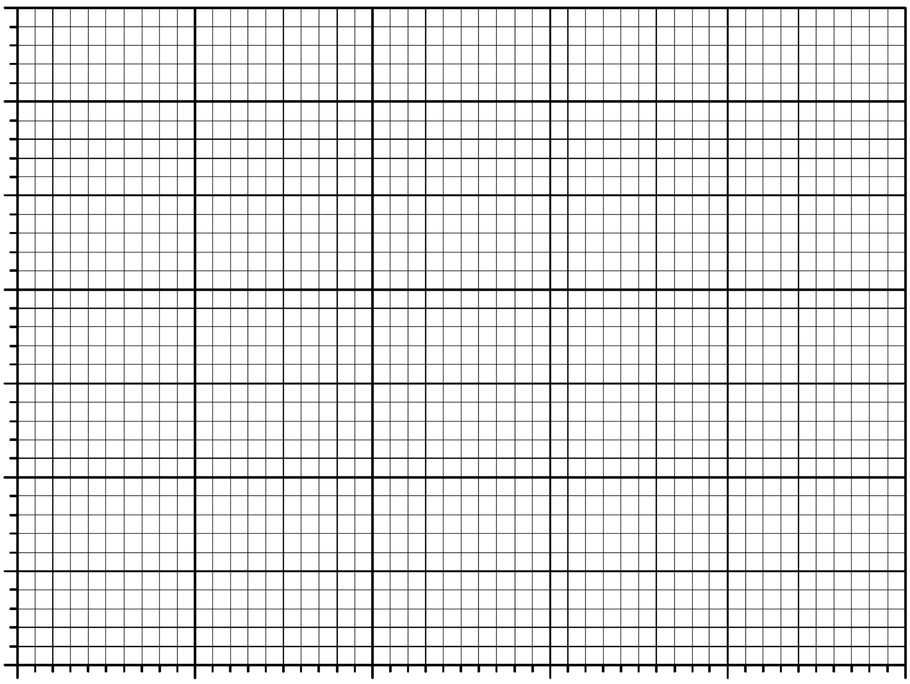
$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \overline{x})^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(y_j - \overline{y})^2}$$

La pendiente de la recta de regresión también se puede expresar como $m = \frac{s(X,Y)}{s(X)^2}$.

A continuación proporcionamos una tabla que le permitirá hacer los cálculos de la regresión de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarla.

Regresión lineal								
x_j	y_j	$x_j y_j$	$x_j x_j$	$x_j - \overline{x}$	$(x_j - \overline{x})^2$	$y_j - \overline{y}$	$(y_j - \overline{y})^2$	$(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j y_j$	$\sum_j x_j x_j$	$\sum_j (x_j - \overline{x})$	$\sum_j (x_j - \overline{x})^2$	$\sum_j (y_j - \overline{y})$	$\sum_j (y_j - \overline{y})^2$	$\sum_j (x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$
$X_C = \overline{x}$	$Y_C = \overline{y}$				$s(X)$		$s(Y)$	$S(x,y)$
$m =$			$b =$				$r =$	





INSTRUCCIONES. El ejercicio se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**. Sea cuidadoso en la presentación de los resultados y tenga en cuenta el número de cifras significativas, unidades, etc.

Salvo que se indique otra cosa el desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en las hojas que se aportan con este enunciado.

Algunas tablas de datos contienen columnas en blanco donde puede, si lo desea, pasar a limpio el resultado de las cuestiones correspondientes. En ese caso no se olvide de entregar la hoja donde se encuentre la hoja y, en cualquier caso, realice los desarrollos en hojas aparte.

MATERIAL. Solo calculadora científica, no programable.

Detección de exoplanetas por el método del tránsito

En los últimos tiempos se están detectando sistemas planetarios en estrellas de la Vía Láctea. Uno de los métodos de detección es por el tránsito de los planetas delante de la estrella, lo que ocasiona una ligera disminución del brillo de ésta. Lógicamente, este método sólo se aplica en los casos en que el tránsito interseca la línea de visión desde la Tierra.

Entre los sistemas detectados por este método destaca TRAPPIST-1, que consta de una estrella del tipo enana roja (TRAPPIST-1a) y siete planetas que la orbitan, que se nombran con las letras {b, c, d, e, f, g, h} (véase figura adjunta).

Midiendo suficientes tránsitos podemos tener el periodo orbital de cada planeta, T. Además, éstos siguen la 3ª Ley de Kepler de acuerdo al radio medio de cada órbita, R,

$$R^3 = C(M)T^2$$

donde $C(M)$ es constante para todo el sistema y depende linealmente de la masa, M, del astro central,

$$C(M) = kM$$

donde k ya es una constante universal.

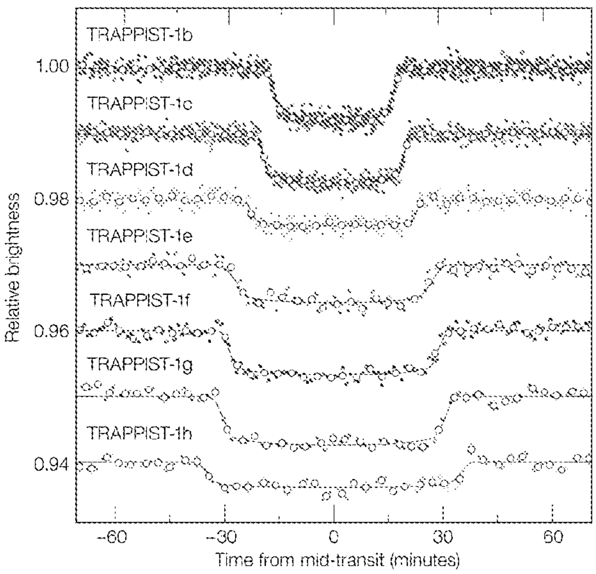


Figura 1: Curvas de luz producidas por el tránsito de planetas del sistema TRAPPIST-1 tomadas por el telescopio espacial Spitzer, de la NASA. Fuente: `http://www.eso.org/public/chile/images/eso1706h/`.

En este ejercicio usaremos un sistema de unidades heterodoxo para tener números más manejables, donde el tiempo se mide en días [d], las distancias en millones de kilómetros o gigametros [Gm] y la masa en masas solares [$M_\odot$] o [M_s]. En este sistema de unidades la constante de Kepler toma el valor

$$k = 25{,}095\ \mathrm{Gm^3 d^{-2} M_\odot^{-1}}$$

que consideraremos exacto.

Cuestiones

1. (1 punto) La masa de TRAPPIST-1a, M_T, se ha estimado por tres métodos distintos, cada uno con su incertidumbre:

$$(M_T)_1 = (0{,}079 \pm 0{,}013)\ \mathrm{M}_\odot, \quad (M_T)_2 = (0{,}085 \pm 0{,}010)\ \mathrm{M}_\odot, \quad (M_T)_3 = (0{,}095 \pm 0{,}008)\ \mathrm{M}_\odot$$

   Calcule la masa del astro como la **media ponderada** de estas tres medidas. Dé el valor de la constante del sistema, $C(M_T)$, con el error correspondiente.

2. (1,5 puntos) Vamos a calcular el periodo orbital de los 5 planetas más internos del sistema TRAPPIST-1. En la Tabla 1 se muestran datos de los tránsitos observados durante un periodo de un mes. Calcule el periodo orbital de cada planeta, T, con su error correspondiente.

3. (1,5 puntos) A partir de los periodos y de la constante C del sistema calcule el radio de las órbitas de cada planeta mediante la 3ª Ley de Kepler, propagando correctamente el error.

En Astrofísica ha quedado bien establecido un modelo que relaciona la luminosidad, L, que emiten ciertos tipos de estrellas y su masa. En concreto, esta relación sigue una ley de este tipo: $(M/M_\odot) \propto (L/L_\odot)^\gamma$, donde $L_\odot$ es la luminosidad del Sol (que se usa como referencia) y γ un parámetro que depende del tipo de estrella. También se puede expresar de forma logarítmica:

$$\ln M = B + \gamma \ln L$$

es decir, que los logaritmos de la masa y la luminosidad siguen una relación lineal.

4. (1 punto) En la Tabla 2 se dan los datos de masa y luminosidad de varias estrellas del mismo tipo que TRAPPIST-1a. Calcule el logaritmo natural de la masa y propague el error correspondiente. Haga lo mismo con la luminosidad, pero, en lugar de propagar el error, dé el resultado con 3 cifras significativas.

5. (1,5 puntos) Represente $\ln M$ frente a $\ln L$ en la plantilla adjunta, incluyendo las barras de error para $\ln M$.

6. (2,5 puntos) Calcule la recta de regresión de $\ln M$ en función de $\ln L$ y obtenga los parámetros γ y B a partir de $\ln M = B + \gamma \ln L$. Calcule el error de los parámetros y escriba éstos con el número de cifras significativas adecuado. Represente la recta de regresión en la gráfica realizada en la cuestión 5. (Ayuda: γ y B son adimensionales).

7. (1 punto) Vamos a comprobar si TRAPPIST-1a sigue el modelo masa-luminosidad que hemos visto hasta ahora. Para ello tomamos su luminosidad medida, que tiene el valor, $L_T = (5{,}22 \pm 0{,}19) \times 10^{-4}\ \mathrm{L}_\odot$. Calcule $\ln L_T$ con su error y use este resultado para calcular $(\ln M_T)_{\mathrm{mod}}$ a partir del modelo masa-luminosidad (recuerde propagar todas las fuentes de error). Compare este resultado con el valor experimental, $(\ln M_T)_{\mathrm{exp}}$, a partir del valor de M_T que ha obtenido en la cuestión 1, y decida si TRAPPIST-1a sigue el modelo masa-luminosidad descrito.

Tablas

Planeta	t_1(d)	t_N(d)	Δt(d)	N	T(d)	R(Gm)
b	1,910	30,612	0,008	20		
c	1,445	30,503	0,011	13		
d	3,942	28,249	0,014	7		
e	4,240	28,628	0,016	5		
f	2,985	30,611	0,018	4		

Tabla 1: Tránsitos de los 5 planetas más internos de TRAPPIST-1 a lo largo de un mes. Se recogen los siguientes datos: el instante en que ocurren el primer y último tránsitos, (resp. t_1 y t_N) a partir de una fecha arbitraria; la incertidumbre en la determinación de los tránsitos, Δt; el número total de tránsitos registrado, N, incluidos el primero y último. Puede usar las columnas en blanco para transcribir en limpio el resultado de las cuestiones 2 y 3.

Estrella	$L(\mathrm{L}_\odot)$	$\ln L$	$M(\mathrm{M}_\odot)$	$\ln M$
VB 10	$(4{,}00 \pm 0{,}01) \times 10^{-4}$		$0{,}072 \pm 0{,}008$	
Wolf 359	$(1{,}40 \pm 0{,}01) \times 10^{-3}$		$0{,}095 \pm 0{,}018$	
α-Centauri C	$(1{,}70 \pm 0{,}01) \times 10^{-3}$		$0{,}12 \pm 0{,}01$	
Gliese 581	$(1{,}30 \pm 0{,}01) \times 10^{-2}$		$0{,}31 \pm 0{,}05$	

Tabla 2: Luminosidad y masa de varias estrellas del tipo enana roja. Puede usar las columnas en blanco para transcribir en limpio los resultados de la cuestión 4.

Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, ε_m y ε_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2}$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}$$

Parámetros de la recta

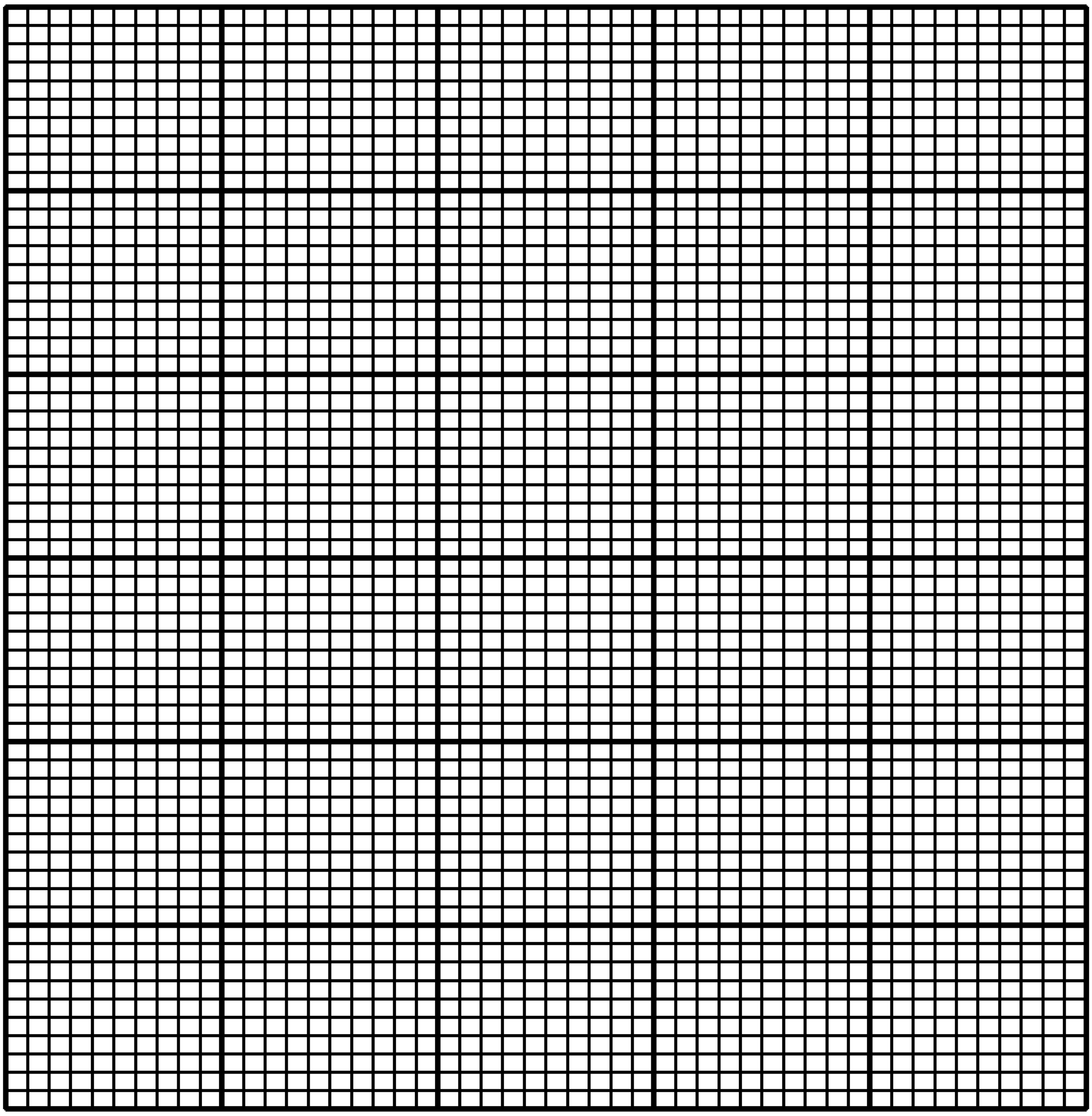
$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{s(X)}\sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - mx_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$b = Y_C - mX_C \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_m\sqrt{s^2(X) + X_C^2}$$

A continuación proporcionamos una tablas que le permitirán hacer los cálculos de regresión y correlaciones de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarlas.

Regresión lineal y coef. de correlación						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r		

Plantillas de ejes lineales



INSTRUCCIONES. El ejercicio se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**. Sea cuidadoso en la presentación de los resultados y tenga en cuenta el número de cifras significativas, unidades, etc. Salvo que se indique otra cosa el desarrollo de los apartados debe realizarse en hojas aparte, con la excepción de las gráficas (si las hubiera) que se han de hacer en las hojas que se aportan con este enunciado. **MATERIAL**. Solo calculadora científica, no programable.

Difusión anómala en un fluido.

Suponga un experimento en el cual se observa, mediante una determinada técnica óptica, como unas nanoesferas coloidales difunden libremente dentro de una serie de fluidos. Estas esferas describen un movimiento errático, aleatorio, que se conoce como «movimiento browniano» Teóricamente, los desplazamientos o saltos espaciales, r, de estas esferas en un determinado lapso de tiempo, τ, siguen una distribución gaussiana de la siguiente forma:

$$G_D(r) \propto \exp\left(-\frac{r^2}{4D\tau}\right) \tag{1}$$

donde D es el coeficiente de difusión o de Stokes-Einstein que viene dado por:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a} \tag{2}$$

donde $k_B = 1{,}38 \times 10^{23}$ J/K es la constante de Boltzmann, T es la temperatura absoluta de la muestra, a es el radio de las nanoesferas y η es la viscosidad del fluido. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, puede darse «difusión anómala». En tal caso, para valores que no estén en la posición central de la gaussiana (es decir, cuando $r \neq 0{,}0$ μm), la distribución de los saltos r seguirá un decrecimiento en forma de exponencial (λ es una constante que se expresa en μm^{-1}):

$$G_\lambda(r) \propto \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) \tag{3}$$

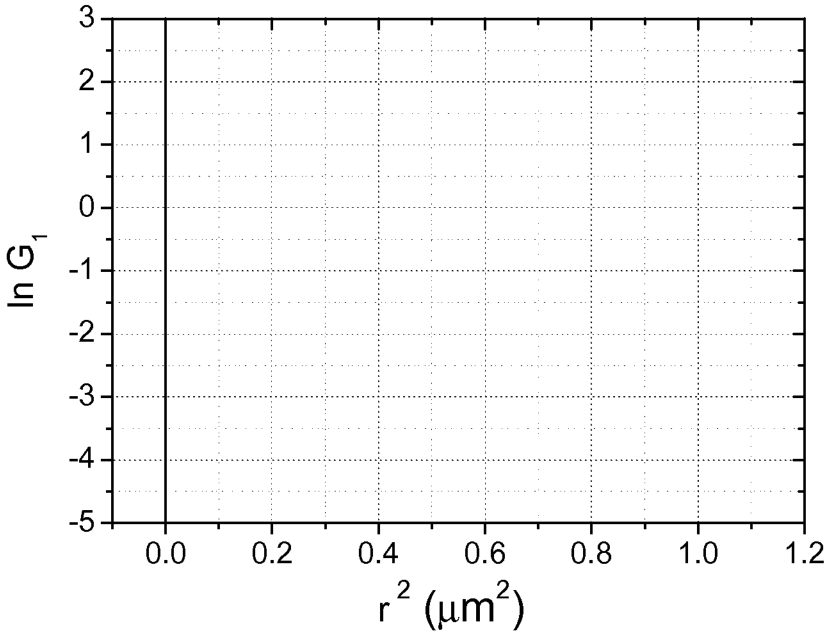
Mediante la técnica óptica mencionada se miden las posiciones de las nanoesferas de radio $a = 50 \pm 5$ nm, a una temperatura $T = 20 \pm 1$ °C en dos fluidos diferentes. Los saltos de las partículas se dan en intervalos de tiempo $\tau = 0{,}100 \pm 0{,}001$ s. Las medidas conducen a unos histogramas que nos permiten obtener las distribuciones en situaciones experimentales tipo difusivo o anómalo. Llamaremos a cada una de las colecciones de datos $G_1(r)$ y $G_2(r)$, respectivamente. La siguiente tabla resume estas mediciones para cada una de las dos distribuciones junto con los respectivos desplazamientos r (cuyo error supondremos despreciable). Las medidas de las distribuciones tendrán unas incertidumbres asociadas del 15 % para el caso de $G_1(r)$ y del 10 % para los datos correspondientes a $G_2(r)$.

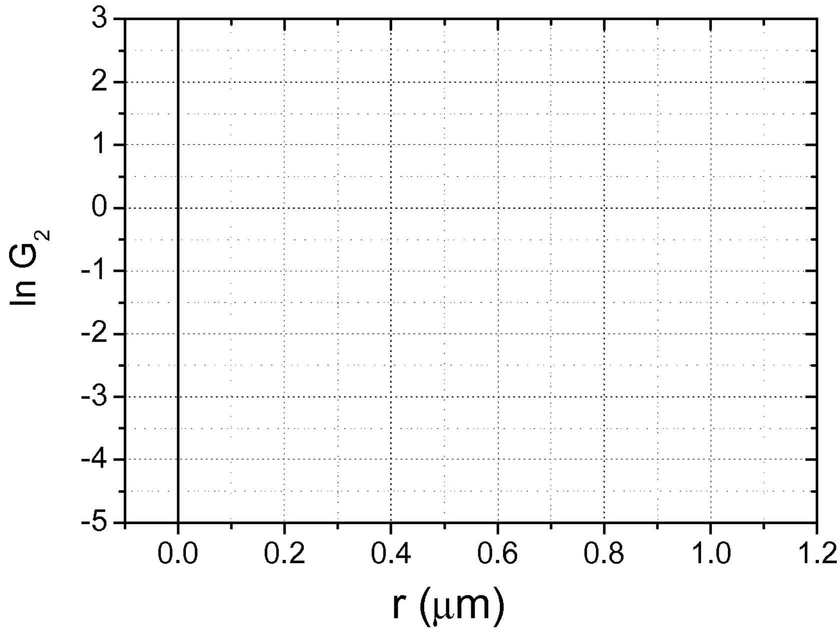
Distribuciones experimentales $G_1(r)$ y $G_2(r)$.						
G_1	5,62	3,16	1,78	1,00	0,18	0,03
r (μm)	0,00	0,25	0,38	0,50	0,75	0,88
G_2	10,00	1,78	1,00	0,40	0,18	0,07
r (μm)	0,00	0,15	0,25	0,50	0,75	1,00

Con todos los datos y explicaciones proporcionadas en el enunciado, conteste de forma razonada a las siguientes cuestiones:

1. (2 puntos) Al tomar logaritmos neperianos a ambos lados de las expresiones (1) y (3), los datos que sigan estas funciones se comportarán según una recta decreciente al representar frente a r^2 o frente a r, respectivamente. Exprese los datos experimentales de la forma adecuada en dos tablas, una para los datos de G_1 y otra para los datos de G_2, haciendo explícitos los valores de los errores y cómo los ha obtenido, para poder dibujar estos comportamientos en la figura del siguiente apartado.

2. (4 puntos) Realice una regresión lineal para cada pareja de datos. Obtenga los coeficientes de correlación r para cada caso. Represente esos datos, con sus incertidumbres y de la forma adecuada, en las siguientes figuras. Dibuje también las rectas de regresión junto con los datos experimentales. Comente los resultados obtenidos.





3. (4 puntos) Obtenga un valor para el coeficiente de difusión D (en μm^2/s) al comparar con la distribución (1) a través de una de las regresiones lineales anteriormente calculadas. Mediante la ecuación (2), obtenga un valor para η (en mPa.s) del fluido. Exprese de forma adecuada ambas cantidades con su error. Obtenga también el valor de λ (con su error y expresado correctamente) a partir de los datos correspondientes.

Material complementario

Fórmulas simplificadas para el cálculo metódico de la pendiente m y la ordenada en el origen b de una recta que ajusta N pares de valores (x_j, y_j), incluyendo las incertidumbres respectivas, ε_m y ε_b. Se da también la fórmula para el cálculo del coeficiente de correlación de Pearson, r.

Valores medios

$$X_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \qquad Y_C = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$$

Coeficiente de correlación

$$s(X) = \sqrt{\frac{\sum_j x_j^2}{N} - X_C^2} \qquad s(Y) = \sqrt{\frac{\sum_j y_j^2}{N} - Y_C^2}$$

$$s(X,Y) = \frac{\sum_j x_j y_j}{N} - X_C Y_C \qquad r = \frac{s(X,Y)}{s(X)s(Y)}$$

Parámetros de la recta

$$m = \frac{s(X,Y)}{s^2(X)} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{s(X)}\sqrt{\frac{\sum_j \left(y_j - mx_j - b\right)^2}{N(N-2)}}$$

$$b = Y_C - mX_C \qquad \varepsilon_b = \varepsilon_m\sqrt{s^2(X) + X_C^2}$$

A continuación proporcionamos una tabla que le permitirá hacer los cálculos de la regresión de una forma ordenada si usted lo estima conveniente. NO es obligatorio utilizarla.

Regresión lineal						
x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$	$y_j - mx_j - b$	$(y_j - mx_j - b)^2$
$\sum_j x_j$	$\sum_j y_j$	$\sum_j x_j^2$	$\sum_j y_j^2$	$\sum_j x_j y_j$		$\sum_j (y_j - mx_j - b)^2$
X_C	Y_C	$s(X)$	$s(Y)$	$s(X,Y)$		
m	ε_m	b	ε_b	r		