Importante: Recuerde mencionar los resultados teóricos que usa para la resolución de los problemas, y justificar por qué se pueden usar verificando las condiciones de los resultados cuando sea necesario.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el uso de ningún tipo de material.
Los apartados de los distintos problemas no tienen necesariamente la misma puntuación. Dicha división obedece únicamente a motivos de organización de la prueba.

Problema 1. (2 puntos)
Denotemos por $f(z)$ la raíz cuarta principal en el plano complejo

$$f(re^{i\theta}) = \sqrt[4]{r}e^{i\theta/4}, \theta \in (-\pi, \pi] .$$

Describir las funciones $g(z) = f(z^2)$ y $h(z) = (f(z))^2$, con $z = re^{i\theta}, r \geq 0$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Problema 2. (1.5 puntos)
Determinar si existen o no

$$\lim_{z\to 0} e^{1/z^{6!}}, \lim_{z\to 0} e^{z^{6!}}$$

y en caso de que existe determinar su valor.
(El exponente al que está elevado z en ambos casos es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.)

Problema 3. (2 puntos)
Considere la ecuación diferencial

$$y^{(3)} - 4y' = x + 3 \cos x + e^{-2x}.$$

Se pide:

1. Encuentre la solución de la ecuación homogénea correspondiente.

2. Discuta razonadamente la forma de una solución particular.

3. Encuentre la solución general.

Problema 4. (2 puntos)
Considere la ecuación diferencial

$$\left(x^3 + \frac{y}{x}\right) dx + \left(y^2 + \ln x\right) dy = 0.$$

Se pide:

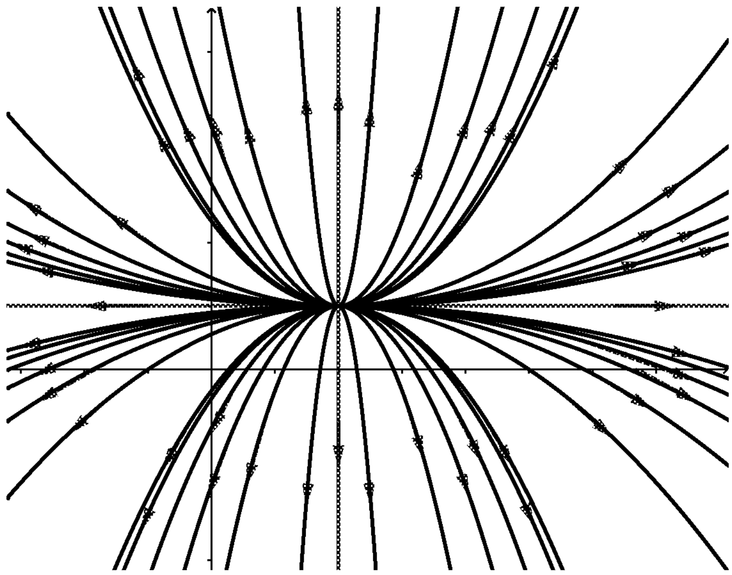
1. Demuestre que se trata de una ecuación diferencial exacta.

2. Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre la solución de la ecuación diferencial en su forma implícita $F(x, y) = C$.

Problema 5. (2,5 puntos)
Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

cuyo diagrama de fases es



donde las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son de la forma

$$f(x, y) = ax + by + c,\ g(x, y) = dx + fy + g \ \text{ con } a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}\,.$$

1. ¿Qué tipo de punto crítico tiene el sistema?

2. Construir un ejemplo de sistema que tenga este comportamiento.

(Obs: la situación concreta del punto crítico no es relevante, mientras sea en el primer cuadrante. Puede tomarse, por ejemplo, el punto (2,1) pero puede ser cualquier otro. El tipo de concavidad de las trayectorias tampoco es relevante para este problema.)

Importante: Recuerde mencionar los resultados teóricos que usa para la resolución de los problemas, y justificar por qué se pueden usar verificando las condiciones de los resultados cuando sea necesario.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el uso de ningún tipo de material.
Los apartados de los distintos problemas no tienen necesariamente la misma puntuación. Dicha división obedece únicamente a motivos de organización de la prueba.

Problema 1. (2 puntos)
Dada la raíz cuadrada principal $f(z)$, determinar dónde es continua y dónde no lo es la función

$$g(z) = f(e^{z^2} + 1)\,.$$

Problema 2. (1.5 puntos)
Demostrar que si una función $f(z)$ es holomorfa en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces f cumple necesariamente las condiciones de Cauchy-Riemann en ese punto.

Problema 3. (2 puntos)
Considere la ecuación diferencial

$$\left(\frac{2xy}{x^2+1}\right)dx + \left(\ln(x^2+1) - 2\right)dy = 0.$$

Se pide:

1. Demuestre que se trata de una ecuación diferencial exacta.

2. Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre la solución de la ecuación diferencial en su forma implícita $F(x,y) = C$.

Problema 4. (2 puntos)
Considere la ecuación diferencial

$$y'' + 3\,y' + 2\,y = \frac{1}{7+e^x}.$$

Se pide:

1. Encuentre la solución de la ecuación homogénea correspondiente.

2. Calcule el wornskiano $W = W(y_1, y_2)$, donde y_1 e y_2 son dos soluciones independientes de la ecuación homogénea.

3. Aplique el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular, y escriba la solución general.

Problema 5. (2,5 puntos)
Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= 7x + 8y \\ y' &= 4x + 11y \end{aligned}$$

1. Determinar la solución general del sistema

2. Representar el diagrama de fases del sistema

3. Clasificar el tipo de punto crítico y determinar su estabilidad o inestabilidad.

Importante: Recuerde mencionar los resultados teóricos que usa para la resolución de los problemas, y justificar por qué se pueden usar verificando las condiciones de los resultados cuando sea necesario.
Duración del examen: 2 horas. Recuerde distribuir su tiempo para contestar los problemas de cada parte de la asignatura. No se permite el uso de ningún tipo de material.
Los apartados de los distintos problemas no tienen necesariamente la misma puntuación. Dicha división obedece únicamente a motivos de organización de la prueba.

Problema 1. (2 puntos)
Denotemos por $f(z)$ la raíz cuadrada principal definida en todo el plano complejo:

$$f(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad r \geq 0, \theta \in (-\pi, \pi]\,.$$

Dada la función

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0 \\ \bar{z} & \text{si} \quad \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

a) determinar dónde es continua y dónde no lo es la función $h(z) = f \circ g(z) = f(g(z))$,
b) determinar dónde h es derivable y dónde no lo es.

Problema 2. (1.5 puntos)
a) Usando la desigualdad triangular ($|a + b| \leq |a| + |b|$), demostrar que se verifica la igualdad

$$|c - d| \geq \big||c| - |d|\big|, \; c, d \in \mathbb{C}\,.$$

b) Dar una descripción de $f(z) = \sin z$ en función de exponenciales complejas. ¿Es $f(z)$ una función acotada en el plano complejo?

Problema 3. (2 puntos)
Considere la ecuación diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + y^3e^{-2x} = 2xy.$$

Se pide:
a) Sabiendo que se trata de una ecuación de Bernoulli, encuentre el cambio de variables adecuado para transformarla en una ecuación diferencial lineal de primer orden.
b) Resuelva la ecuación lineal de primer orden obtenida en el apartado anterior y escriba la solución para $y(x)$.

Problema 4. (2 puntos)
Considere la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Se pide:
a) Encuentre la solución de la ecuación homogénea correspondiente.
b) Calcule el wornskiano $W = W(y_1, y_2)$, donde y_1 e y_2 son dos soluciones independientes de la ecuación homogénea, y encuentre la solución general de la ecuación dada en el enunciado. Puede serle de utilidad recordar que

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$$

c) A partir del resultado anterior, y sabiendo que

$$y_p = \frac{3}{2}x^2e^x$$

es una solución particular de

$$y'' - 2y' + y = 3e^x,$$

encuentre la solución general de

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2} + 3e^x.$$

Problema 5. (2,5 puntos)
Encontrar, usando métodos matriciales, la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 10x + 4y + 13z \\ y' & = & 5x + 3y + 7z \\ z' & = & -9x - 4y - 12z \end{array}\right.$$