FUNDAMENTOS DE FÍSICA I (Grado en FÍSICA)

Material auxiliar: Solo una calculadora **no programable**. **Tiempo:** 2 horas.

Deben realizarse todos los problemas aunque se haya seguido la evaluación continua.

CUESTIÓN.

Hasta 1 punto. La respuesta ha de ser razonada: no se puntuará si no se explica la contestación.

Un planeta esférico tiene una masa igual a 50 veces la masa de la Tierra y la velocidad de escape para objetos situados cerca de la superficie es cinco veces la velocidad de escape terrestre. ¿Cuál es la relación entre los radios del planeta y de la Tierra?

a) $R_p = R_T$

b) $R_p/R_T = 1/2$

c) $R_p/R_T = 2$

Solución: La solución correcta es la c). La velocidad de escape viene dada por $V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ de forma que $R = \frac{2GM}{V_e^2}$. Por tanto $\frac{R_P}{R_T} = \frac{M_P V_{eT}^2}{M_T V_{eP}^2} = \frac{50 M_T V_{eT}^2}{M_T 25 V_{eT}^2} = 2$.

PROBLEMAS. Puntuación hasta 3 puntos cada uno

No es suficiente con escribir ecuaciones; debe desarrollar las soluciones, justificar hipótesis y explicar en detalle los pasos. Cuide dimensiones y unidades, y los órdenes de magnitud de los resultados que obtenga.

• **1**.– En ausencia de gravedad, una partícula, de masa m_A choca a velocidad $\boldsymbol{v}_A$ con la partícula 1 de un cuerpo rígido compuesto por tres partículas en las posiciones $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ y $\boldsymbol{r}_3$. Las tres partículas pertenecientes al sólido rígido se encuentran inicialmente en reposo. Conociendo la velocidad $\boldsymbol{v}'_A$ de la partícula de masa m_A tras el choque, calcular:

(a) Las posiciones de las cuatro partículas respecto del centro de masas del sólido rígido en el momento del choque.

(b) El vector velocidad del centro de masas del sólido rígido tras el choque.

(c) La velocidad angular del cuerpo rígido tras el choque.

Datos:

$m_A = m_1 = m_2 = m_3 = 0{,}1$ kg

$\boldsymbol{v}_A = (0{,}7, 0, 0)$ m/s

$\boldsymbol{r}_1 = (0, 0, 0)$ m

$\boldsymbol{r}_2 = (2, 1, 0)$ m

$\boldsymbol{r}_3 = (1, -4, 0)$ m

$\boldsymbol{v}'_A = (0{,}1, 0, 0)$ m/s

Solución:

- **Apartado (a)**

La posición del centro de masas del sólido rígido viene dada por

$$\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que $m_1 = m_2 = m_3 = m$, esta ecuación queda

$$\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3}{3} = (1, -1, 0) \text{ m}. \quad (2)$$

Las posiciones $\boldsymbol{r}_{A,CM}$, $\boldsymbol{r}_{1,CM}$, $\boldsymbol{r}_{2,CM}$ y $\boldsymbol{r}_{3,CM}$ de las cuatro partículas respecto de la posición del centro de masas del sólido rígido vendrán dadas por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{A,CM} = \boldsymbol{r}_{1,CM} &= \boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{R}_{CM} = (-1,1,0)\ \mathrm{m}, \\ \boldsymbol{r}_{2,CM} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R}_{CM} = (1,2,0)\ \mathrm{m}, \\ \boldsymbol{r}_{3,CM} &= \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{R}_{CM} = (0,-3,0)\ \mathrm{m}. \end{aligned} \tag{3}$$

- **Apartado (b)**

El momento lineal debe conservarse antes y después del choque, por lo que

$$\begin{aligned} m_A\boldsymbol{v}_A + \sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{v}_i &= m_A\boldsymbol{v}'_A + \sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{v}'_i \quad \rightarrow \\ m_A\boldsymbol{v}_A + M\boldsymbol{V}_{CM} &= m_A\boldsymbol{v}'_A + M\boldsymbol{V}'_{CM}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dado que inicialmente, las tres partículas del sólido rígido se encuentran en reposo, esta ecuación se reduce a

$$m_A\boldsymbol{v}_A = m_A\boldsymbol{v}'_A + M\boldsymbol{V}'_{CM}. \tag{5}$$

Esta ecuación se simplifica un poco si tenemos en cuenta que las masas de todas las partículas son iguales, es decir, $m_A = m_1 = m_2 = m_3 = m$, por lo que $M = 3m$, obteniendo la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}'_A + 3\boldsymbol{V}'_{CM}. \tag{6}$$

Por la geometría del problema, se espera que las velocidades de las partículas del sólido rígido se mantengan en el plano X-Y. Por lo tanto, descomponiendo las ecuaciones anteriores en sus componentes vectoriales, tendremos

$$\begin{aligned} v_A^x &= v_A'^x + 3V_{CM}'^x, \\ v_A^y &= v_A'^y + 3V_{CM}'^y. \end{aligned} \tag{7}$$

De aquí se pueden extraer las componentes x e y de la velocidad del centro de masas:

$$\begin{aligned} V_{CM}'^x &= \frac{1}{3}\left(v_A^x - v_A'^x\right), \\ V_{CM}'^y &= \frac{1}{3}\left(v_A^y - v_A'^y\right), \end{aligned} \tag{8}$$

de donde se obtiene la velocidad del centro de masas del sólido rígido

$$\boldsymbol{V}_{CM} = (0{,}2, 0, 0)\ \mathrm{m/s}. \tag{9}$$

- **Apartado (c)**

La velocidad de las partículas del sólido rígido se puede descomponer en una velocidad de translación $\boldsymbol{V}_{CM}$ y otra de rotación $\boldsymbol{r}_{i,CM} \times \boldsymbol{\omega}'$, siendo $\boldsymbol{\omega}'$ la velocidad angular del sólido rígido tras el choque. Como el momento angular ha de conservarse y la velocidad angular es normal al plano formado por las partículas del sólido rígido, se debe cumplir la siguiente ecuación

$$m_A\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{v}_A = m_A\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{v}'_A + \sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{V}'_{CM} + \sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_{i,CM}^2\boldsymbol{\omega}', \tag{10}$$

que se puede escribir en términos del sólido rígido como

$$m_A\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{v}_A = m_A\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{v}'_A + M\boldsymbol{R}_{CM} \times \boldsymbol{V}'_{CM} + I\boldsymbol{\omega}', \tag{11}$$

siendo $I = \sum_{i=1}^{3} m_i\boldsymbol{r}_{i,CM}^2$ el momento de inercia del sólido rígido respecto del eje de giro de este, que pasa por su centro de masas. De esta ecuación, todos los datos son conocidos salvo $\boldsymbol{\omega}'$ por lo que, para calcularla, solo hay que despejarla

$$\boldsymbol{\omega}' = \frac{(m_A\boldsymbol{r}_A \times (\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}'_A) - M\boldsymbol{R}_{CM} \times \boldsymbol{V}'_{CM})}{I}. \tag{12}$$

Esta expresión se simplifica bastante si tenemos en cuenta que $\boldsymbol{\omega}'$ va en la dirección z, que $m_A = m_i = m$ y que $M = 3m_A$

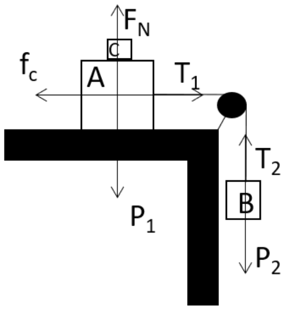
$$\omega'^z = \frac{\left(x_A\left(v_A^y - v_A'^y\right) - y_A\left(v_A^x - v_A'^x\right)\right) - 3\left(x_{CM}V_{CM}'^y - y_{CM}V_{CM}'^x\right)}{\sum_{i=1}^3 \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{CM}\right)^2} \tag{13}$$

o eliminando las componentes nulas para simplificarlo aún más:

$$\omega'^z = \frac{3y_{CM}V_{CM}'^x}{\sum_{i=1}^3 \left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{CM}\right)^2} = -0{,}0375 \text{ rad/s}. \tag{14}$$

• **2**.– Un bloque A de masa m_A situado sobre una mesa está conectado por una cuerda delgada que pasa por una polea sin rozamiento ni masa a un bloque B de masa 2,25 kg que cuelga lateralmente de la mesa a una distancia de 1,5 m sobre suelo. Cuando el sistema se deja libre desde el reposo el bloque B choca contra el suelo al cabo de 0,82 s. A continuación se lleva el sistema a su posición inicial y se coloca un bloque C de masa 1,2 kg sobre el bloque A. De nuevo el sistema se deja libre desde el reposo tardando, en este caso, el bloque B 1,3 s en chocar contra el suelo. Determinar la masa del bloque A, m_A, y el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque A y la mesa.

Solución:
En primer lugar escribimos el diagrama de fuerzas sobre cada bloque



En las condiciones del problema, es decir, despreciando la masa de la cuerda, la de la polea y el rozamiento entre la cuerda y la polea, tenemos que $T_1 = T_2 = T$.

En la primera situación tenemos que el bloque B recorre los 1,5 m que lo separan de los suelo en 0,82 s. De forma que podemos determinar la aceleración del sistema:

$$x = x_0 - v_0 t_1 + 1/2 a_1 t_1^2 \longrightarrow a_1 = \frac{2(x - x_0)}{t_1^2} = 4{,}46\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Aplicando ahora la segunda ley de Newton a cada uno de los bloques tenemos:
Bloque A:

$$\sum F_x = m_A a_1 \longrightarrow T_1 - f_c = m_A a_1 \longrightarrow T_1 - \mu_C m_A g = m_A a_1 \tag{15}$$

$$\sum F_y = m_A a_y \longrightarrow F_N - P_A = 0 \longrightarrow F_N = P_A = m_A g \tag{16}$$

Bloque B:

$$\sum F_x = m_B a_1 \longrightarrow P_B - T_1 = m_B a_1 \longrightarrow T_1 = m_B(g - a_1) \tag{17}$$

llevando esta ecuación a (15) tenemos que:

$$\mu_c = \frac{m_B(g - a_1) - m_A a_1}{m_A g}. \tag{18}$$

De forma equivalente, cuando añadimos la masa C sobre el bloque A tenemos que

$$a_2 = \frac{2(x - x_0)}{t_2^2} = 1{,}78\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

y aplicando la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que ahora la masa de los bloque encima de la mesa es $m = m_A + m_C$ obtenemos

$$m_B(g-a_2) - \mu_c(m_A+m_C)g = (m_A+m_C)a_2$$

$$m_B(g-a_2) - \frac{m_B(g-a_1)-m_A a_1}{m_A g}(m_A+m_C)g = (m_A+m_C)a_2$$

llegando a la siguiente ecuación de segundo grado

$$m_A^2(a_1-a_2) + (m_C+m_B)(a_1-a_2)m_A - m_B(g-a_1) = 0 \tag{19}$$

cuya solución con $m_A > 0$ es $m_A = 1{,}215\,\mathrm{kg}$ y, por tanto, a partir de (18) $\mu_C = 0{,}67$.

• **3**.– Un péndulo de longitud 80 cm del que cuelga una masa de 0,6 kg es liberado desde el reposo con la cuerda formando un ángulo de θ_0 con la dirección vertical. En el momento en que la cuerda se encuentra paralela a la vertical la velocidad del péndulo es de $0{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La masa de la cuerda se considera despreciable.

(a) ¿Cuál es el ángulo θ_0?

(b) ¿Cuál es el ángulo que forma la cuerda con la vertical cuando la velocidad de la masa es de $0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$? ¿Es $\theta_0/2$?

(c) ¿Se puede aproximar el movimiento de este péndulo por un oscilador armónico simple? Si es así justifíquelo y obtenga el valor del periodo.

Solución: Solución:

Utilizando la conservación de la energía, obtenemos que la energía potencial inicial es igual a la energía cinética en la posición vertical. Como la altura inicial es $h = L(1-\cos\theta_0)$,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgL(1-\cos\theta_0),$$
$$\theta_0 = \arccos(1-\frac{v_f^2}{2gL}),$$
$$\theta_0 = 0{,}14\,\mathrm{rad} = 8{,}2^\circ.$$

b) Si utilizamos la conservación de la energía, a esa altura la energía potencial será

$$U' = mgh' = mgL(1-\cos\theta_0')$$

$$mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv'^2 + mgL(1-\cos\theta'),$$
$$\theta' = \arccos\left(\cos\theta_0 + \frac{v'^2}{2gL}\right),$$
$$\theta' = 0{,}12\,\mathrm{rad} = 7{,}1^\circ.$$

c) Podemos aproximar el movimiento por un movimiento armónico simple ya que $\theta_0 = 0{,}14\,\mathrm{rad}$´1 entonces $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 1{,}8\,\mathrm{s}$.