- **Cuestión:** Hasta 1 punto. Incluya una **breve, pero clara, explicación** de la respuesta.
- **Problemas:** Hasta 3 puntos cada uno. No es suficiente con escribir ecuaciones; debe desarrollar las soluciones, justificar hipótesis y explicar en detalle los pasos. Cuide dimensiones, unidades y los órdenes de magnitud de sus resultados.
- **Material auxiliar: Solo una calculadora no programable.** **Tiempo:** 2 horas.

CUESTIÓN

- Una patinadora, que gira con los brazos extendidos, tiene un momento de inercia I referido a su eje de rotación y una velocidad angular de 4 rad/s. Cuando junta sus brazos al cuerpo, su momento de inercia es $2I/5$ ¿Cuál es ahora su velocidad angular?

(a) 1.6 rad/s. (b) 10 rad/s. (c) 16 rad/s.

PROBLEMAS. Si ha seguido la evaluación continua solo debe resolver dos de los problemas.

- **1**.– Una balanza de torsión es un dispositivo experimental usado para determinar masas de objetos. En ella, un cuerpo que rota respecto a un eje de simetría está sujeto, en dicho eje, a un muelle helicoidal de constante de torsión k. Al rotar el cuerpo un pequeño ángulo ϕ, se genera un momento dado por $\tau = -k\phi$.

(a) Utilizando las ecuaciones de la dinámica de rotación, demuestre que una vez girado un pequeño ángulo ϕ_0 la balanza de torsión describe idealmente un movimiento armónico simple de expresión $\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$, donde ω es la frecuencia angular del movimiento oscilatorio. Obtenga el valor de ω en función de la constante de torsión k y el momento de inercia I del cuerpo.

(b) Obtenga la masa m_1 de un cilindro macizo de radio R que colocamos con su eje de simetría sobre el muelle helicoidal y que oscila con un periodo de oscilación T. Recuerde que el momento de inercia respecto a su eje de un cilindro macizo de masa m y radio R es $I = mR^2/2$. Si cambiamos el cilindro original por otro cilindro del mismo radio y masa desconocida m_2 tal que el periodo de oscilación aumenta al doble, ¿cuál es el valor de m_2 respecto de m_1?

(c) Suponga que la balanza de torsión presenta un amortiguamiento débil, de forma que se puede considerar que la frecuencia angular permanece constante, con un tiempo de extinción $\tau = 3T$, siendo T el periodo de oscilación. ¿Cuántos periodos han de transcurrir para que la amplitud de oscilación decaiga al 10 % de su valor inicial?

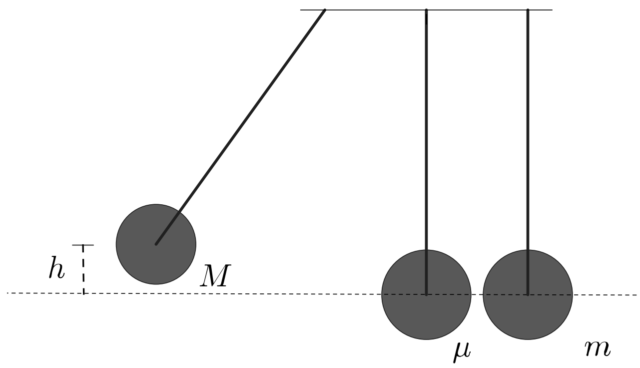
Sigue en la siguiente página ⟼

• **2**.– Un juguete consiste en tres bolas de acero de masas M, μ y m que están colgadas a través de tres hilos paralelos de una barra horizontal de manera que los tres centros de gravedad se encuentran alineados horizontalmente, paralelos a la barra superior. La masa de la izquierda, M, se pone a una altura h sobre la linea horizontal del centro de masas según se muestra en la figura, y se suelta. Colisiona con la masa μ, que está en el centro, y después la masa μ colisiona con la masa m que es la de la derecha. Si todas las colisiones son elásticas y $\mu = M/3$ y $m = M/4$:

(a) Calcule el cociente entre la energía transferida a la bola μ después del primer choque y la energía inicial de la bola M.

(b) Calcule la energía transferida a la bola m después del segundo choque.

(c) ¿Cuál es el valor h' de la altura a la que subirá la masa m? Calcule el valor numérico de h'/h.



• **3**.– Un joven de masa $m = 70\,\text{kg}$ se encuentra en el borde de un tiovivo de masa $M = 100\,\text{kg}$ y radio $R = 200\,\text{cm}$, que está girando a velocidad $\omega = 60\,\text{rpm}$. Si el joven se desplaza desde el borde hasta la mitad del radio de la plataforma giratoria, determinar:

(a) La velocidad angular del tiovivo cuando el joven llega a este punto intermedio.

(b) La variación de la energía cinética del sistema joven-tiovivo.

Nota. Considere al joven como una partícula puntual. El momento de inercia del tiovivo, respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro, es $I = MR^2/2$.

FUNDAMENTOS DE FÍSICA I   1$^{\text{er}}$ curso Grado en Física
Prueba Presencial–Febrero 2017–2^a semana

CUESTIÓN

La solución correcta es la (b). Por la conservación del momento angular tenemos que $I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = I_i\omega_i/I_f = 5\omega_i/2 = 10$ rad/s.

PROBLEMAS

Problema 1
(a) La segunda ley de Newton para la rotación establece que la suma de todos los momentos de las fuerzas externas que se ejercen sobre un cuerpo es igual al producto de su momento de inercia por la aceleración angular

$$\sum_i \tau_i = I\alpha = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

lo que, en nuestro caso, se traduce en

$$-k\phi = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

que es una ecuación con la misma forma que la del movimiento armónico simple. Para comprobar que la expresión $\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$ es solución de esta ecuación, basta obtener su segunda derivada

$$\dot{\phi}(t) = -\phi_0\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$
$$\ddot{\phi}(t) = -\phi_0\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2\phi(t)$$

Así

$$-k\phi = -I\omega^2\phi$$

por lo que la expresión dada para $\phi(t)$ es solución de la ecuación si identificamos la frecuencia angular ω como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

(b) El periodo de rotación es, simplemente,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

Para el cilindro dado de masa m_1 con momento de inercia respecto a su eje $I = m_1R^2/2$, tenemos que

$$T = 2\pi R\sqrt{\frac{m_1}{2k}}$$

por lo que la masa del cilindro será

$$m_1 = 2k\left(\frac{T}{2\pi R}\right)^2$$

Si ahora colocamos otro cilindro de masa m_2 y se ve que se duplica el periodo de oscilación, la masa del nuevo cilindro será

$$m_2 = 2k\left(\frac{2T}{2\pi R}\right)^2 = 4m_1$$

(c) En un régimen de oscilaciones amortiguadas la amplitud de oscilación viene dada por

$$A = A_0e^{-t/2\tau}$$

Cuando la amplitud sea un 10 % de su valor inicial tendremos

$$0,1 = e^{-t/2\tau}$$

o sea

$$t = -2\tau\ln(0,1) = -6T\ln(0,1) \simeq 13,8T$$

Problema 2

(a) La masa M tiene una energía potencial inicial Mgh, de forma que, por la conservación de la energía, la velocidad con la que chocará con la masa μ será $\sqrt{2gh}$. En la primera colisión de M con μ la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, dan lugar a las ecuaciones:

$$M\sqrt{2gh} = MV + \mu v$$
$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

donde V y v son las velocidades de las masas M y μ, respectivamente. Operando en las ecuaciones anteriores para eliminar V tenemos:

$$M^22gh = M^22gh + \mu^2v^2 - 2M\mu\sqrt{2gh} + \mu Mv^2 \Rightarrow \mu(M+\mu)v^2 - 2M\mu\sqrt{2gh} = 0$$

y de aquí se deduce que

$$v = \frac{2M\sqrt{2gh}}{M+\mu} = \frac{3}{2}\sqrt{2gh}$$

donde hemos usado que $\mu = M/3$.

Por lo tanto, la energía cinética transferida a la bola central es

$$K_\mu = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{3}{4}Mgh$$

de manera que, como la energía inicial de la bola M es Mgh, la fracción de energía que se transfiere es:

$$\frac{K_\mu}{Mgh} = \frac{3}{4}$$

(b) Para el segundo choque (de la bola μ con la bola m) repetimos el cálculo del apartado (a), con v como la velocidad antes del choque de la bola μ (calculada en el apartado anterior), v_μ la velocidad después del choque de la bola μ y v_m la velocidad después del choque de la bola m:

$$\mu v = \mu v_\mu + m v_m$$
$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu v_\mu^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

Eliminando v_μ de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$m\, v_m - 2\mu v + \mu v_m = 0 \Rightarrow v_m = \frac{2\mu}{m+\mu} v = \frac{8}{7} v$$

donde, en el último paso, hemos usado que $\mu = M/3$ y $m = M/4$.

Por lo tanto, la energía cinética transferida en el choque a la bola m es

$$K_m = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{8}{7}\right)^2 v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{8}{7}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\sqrt{2gh}\right)^2 = \frac{36}{49} Mgh$$

(c) La altura máxima, h', a la que subirá la bola m después del choque se obtiene utilizando de nuevo la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = mgh' \Rightarrow \frac{36}{49} Mgh = mgh' = \frac{M}{4} gh'$$

de donde se obtiene

$$h' = \left(4 \times \frac{36}{49}\right) h \Rightarrow \frac{h'}{h} = 2,94$$

que es el resultado pedido.

Problema 3

(a) En el instante inicial, cuando el joven se halla en el borde, el momento de inercia del sistema tiovivo-joven es

$$I_i = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2 = 480 \text{ kg m}^2$$

Cuando el joven llega al punto, que se encuentra en la mitad del radio, el momento de inercia se reduce a

$$I_f = \frac{1}{2} M R^2 + m \frac{R^2}{4} = 270 \text{ kg m}^2$$

y de la conservación del momento angular se tiene

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \Longrightarrow \omega_f = I_i \frac{\omega_i}{I_f} = 107 \text{ rpm} = 11,21 \text{ rad/s}$$

(b) El cambio en la energía cinética es

$$\Delta K = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \left[\frac{I_i}{I_f} - 1 \right]$$

que, como 60 rpm son 2π rad/s, conduce al valor $\Delta K = 7369\,\mathrm{J}$.

- **Cuestión:** Hasta 1 punto. Incluya una **breve, pero clara, explicación** de la respuesta.
- **Problemas:** Hasta 3 puntos cada uno. No es suficiente con escribir ecuaciones; debe desarrollar las soluciones, justificar hipótesis y explicar en detalle los pasos. Cuide dimensiones, unidades y los órdenes de magnitud de sus resultados.
- **Material auxiliar: Solo una calculadora no programable.** **Tiempo:** 2 horas.

CUESTIÓN

- Un resorte fijado al techo tiene una longitud de equilibrio de 15 cm. Cuando de él se cuelga una masa de 50 g queda en reposo con una longitud de 17 cm. La frecuencia de las oscilaciones verticales que realiza cuando se le cuelga una masa de 90 g es:

(a) 2.62 Hz (b) 16.46 Hz (c) 0.26 Hz

PROBLEMAS. Si ha seguido la evaluación continua solo debe resolver dos de los problemas.

- **1**.– Un tenista golpea la bola a una altura de 1 m de modo que su velocidad inicial es $v =$ 14 m/s con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. El tenista golpea la bola con un efecto tal que, cuando la bola golpea el suelo al otro lado de la pista, la componente vertical de su velocidad se invierte mientras que la componente horizontal aumenta en un 30 %. ¿A qué distancia debería estar situado el tenista rival para golpear la bola, después de rebotar en el suelo, a una altura de 1,2 m mientras está ascendiendo?

- **2**.– Un satélite de masa m se mueve en una órbita circular de radio R alrededor de la Tierra. El satélite se mueve en el sentido de las agujas del reloj. De repente colisiona con un objeto de poca masa δm, de origen basura espacial, que se movía en la misma órbita que el satélite, pero girando en el sentido contrario a las agujas del reloj. Después de la colisión la basura espacial se queda incrustada en el satélite.

(a) Calcular el cambio en la energía total del satélite debido al choque.

(b) Suponiendo que después de la colisión el satélite se estabiliza en otra órbita circular alrededor de la Tierra, calcular el radio de la nueva órbita.

Nota. Los resultados pedidos deben expresarse en función de las magnitudes conocidas: masa del satélite (m), radio de la órbita (R), masa de la basura (δm), constante de gravitación (G), masa de la Tierra (M_T).

Sigue en la siguiente página ⟼

• **3**.– En un recipiente bien aislado térmicamente hay 10 kg de hielo a una temperatura de -10 °C y una presión de 1 atm. Se inyectan en el recipiente 2500 g de vapor de agua a 100 °C. Suponiendo que en todo el proceso no hay pérdidas de energía a través de las paredes del recipiente y que la presión se mantiene en 1 atm, se pide:

(a) Calcular la energía máxima que es posible obtener del vapor de agua para derretir el hielo y demostrar que es suficiente para derretir todo el hielo que había inicialmente.

(b) Sabiendo que, cuando se alcanza el equilibrio térmico, la mezcla final es agua líquida, calcular la temperatura final de equilibrio del sistema.

Nota. Calor específico del hielo: 2090 J/kg·K. Calor específico del agua: 4180 J/kg·K. Calor latente de fusión del hielo: 334,4 kJ/kg. Calor latente de vaporización del agua: 2257,2 kJ/kg

FUNDAMENTOS DE FÍSICA I **1$^{\text{er}}$ curso Grado en Física**
Prueba Presencial–Febrero 2017–1^{a} semana

CUESTIÓN

La solución correcta es la (a). Si $l_0 = 15$ cm es la longitud del resorte libre en equilibrio y $l = 17$ cm la longitud en equilibrio cuando se cuelga una masa $m = 50$ g, la fuerza de recuperación del muelle es $F_r = -k\Delta l = -k(l - l_0)$. Cuando el sistema muelle-masa está en equilibrio (en reposo) se cumplirá que $\Sigma F = -k(l - l_0) + mg = 0$. Por lo tanto

$$k = \frac{mg}{l - l_0} = 24{,}5 \text{ N/m}$$

Cuando se cuelga una masa $M = 90$ g y el sistema se hace oscilar, la frecuencia del movimiento oscilatorio es

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = 2{,}62 \text{ Hz}$$

PROBLEMAS

Problema 1

Abordaremos este problema dividiéndolo en dos partes: el tiro parabólico inicial hasta que la bola toca el suelo, y el tiro parabólico iniciado en el rebote de la bola en el suelo. Resolvamos la primera parte calculando el tiempo que tarda la bola en tocar el suelo desde que es golpeda por el tenista, su velocidad al impactar el suelo, y su alcance.

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \quad\Rightarrow\quad 0 = 1 + \frac{14}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{2}9,8t^2$$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones:

$$t_1 = 2,12 \text{ s}$$
$$t_2 = -0,096 \text{ s}$$

y la solución que buscamos es la que tiene valor positivo, t_1.

Después de transcurrido ese tiempo, la velocidad vertical de la bola al impactar en el suelo será:

$$v_y(t_1) = v_{0y} + at_1 = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt_1 \quad\Rightarrow\quad v_y = \frac{14}{\sqrt{2}} - 9,8 \times 2,12 \simeq -10{,}88 \text{ m/s}$$

mientras que el alcance (distancia horizontal recorrida) es:

$$x = x_0 + v_{0x}t_1 = x_0 + (v_0\cos\theta_0)\,t_1 \quad\Rightarrow\quad x = 0 + \frac{14}{\sqrt{2}} \times 2,12 \simeq 20{,}99 \text{ m}$$

Una vez que hemos resuelto la primera parte del problema, podemos pasar a resolver el segundo tiro parabólico, cuyas condiciones iniciales son ahora (la componente vertical de la velocidad se invierte y la componente horizontal de la velocidad aumenta un 30 %):

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ x_0 &= 20,99 \text{ m} \\ v_{0y} &= 10,88 \text{ m/s} \\ v_{0x} &= \frac{14}{\sqrt{2}} \times 1,3 = 12,87 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Buscamos el tiempo que tarda la bola en llegar a una altura $y = 1,2$ m

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad 1,2 = 10,88t - \frac{1}{2}9,8t^2$$

Las soluciones de esta ecuación para t son:

$$\begin{aligned} t_1 &\simeq 0,12 \text{ s} \\ t_2 &\simeq 2,1 \text{ s} \end{aligned}$$

La condición que hemos impuesto en las ecuaciones es que la altura de la bola sea 1,2 metros, lo que ocurre en dos instantes de tiempo, mientras la bola está ascendiendo y cuando desciende tras superar su altura máxima. Nos dice el enunciado que el tenista rival golpea la bola mientras sube, por lo que la solución buscada será la menor de ellas, es decir, $t_1 = 0{,}12$ s.

Por último, sabiendo el tiempo que tarda la bola en alcanzar la altura deseada desde que golpea el suelo, la coordenada x en ese instante será:

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad x = 20,99 + 12,87 \times 0,12 = 22{,}48 \text{ m}$$

que es la distancia, respecto al tenista que golpeó la pelota en primer lugar, pedida.

Problema 2
(a) Antes de la colisión el satélite se mueve en una órbita circular con una velocidad que satisface la ecuación (segunda Ley de Newton)

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GM_Tm}{R^2}$$

donde M_T es la masa de la Tierra. Por tanto $Rv^2 = GM_T$, y $v = \sqrt{GM_T/R}$. Como esta velocidad es independiente de la masa del cuerpo que está orbitando a una distancia R de la Tierra, la velocidad inicial de la basura espacial tendrá el mismo módulo, pero con dirección opuesta.

La energía total inicial del satélite es

$$E_i = K + U_R = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{R} = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} - \frac{GM_Tm}{R} = -\frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} = \frac{1}{2}U_R$$

En la colisión satélite–basura se conserva el momento lineal (no la energía, ya que es una colisión perfectamente inelástica), de manera que

$$p_i = p_f \Rightarrow mv - (\delta m)\, v = (m + \delta m)\, v' \Rightarrow v' = \left(\frac{m - \delta m}{m + \delta m}\right) v$$

que es la velocidad del satélite (más la basura espacial) después del choque.

La energía final total del sistema satélite + basura, justo después del choque, es:

$$E_f = \frac{1}{2}(m+\delta m)v'^2 - G\frac{M_T\,(m+\delta m)}{R} = \frac{1}{2}(m+\delta m)\left(\frac{m-\delta m}{m+\delta m}\right)^2 \frac{GM_T}{R} - G\frac{M_T\,(m+\delta m)}{R}$$

Por lo tanto, el cambio en la energía total del satélite es:

$$\begin{aligned}
\Delta E = E_f - E_i &= \frac{1}{2}(m+\delta m)\left(\frac{m-\delta m}{m+\delta m}\right)^2 \frac{GM_T}{R} - G\frac{M_T\,(m+\delta m)}{R} + \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} \\
&= \frac{GM_T m}{2R}\frac{(1-\delta m/m)^2}{(1+\delta m/m)} - \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} - \frac{GM_T\delta m}{R}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que δm es una cantidad muy pequeña, de forma que $\delta m \ll m$, la expresión anterior se puede simplificar (despreciando los términos de orden $(\delta m)^2$ y superiores)

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{GM_T m}{2R}\left(1-\frac{\delta m}{m}\right)^2\left(1+\frac{\delta m}{m}\right)^{-1} - \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} - \frac{GM_T\delta m}{R} \\
&\approx \frac{GM_T m}{2R}\left(1+\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 - 2\frac{\delta m}{m}\right)\left(1-\frac{\delta m}{m}\right) - \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{R} - \frac{GM_T\delta m}{R} \\
&\approx -2\frac{GM_T}{R}\delta m
\end{aligned}$$

de manera que el sistema pierde energía (se hace más negativa), en una cantidad que es directamente proporcional a la masa de la basura espacial. Por lo tanto, si la nueva órbita en la que se estabiliza el sistema es circular, el radio de esa nueva órbita será más pequeño que la órbita circular inicial (el sistema se acerca hacia la Tierra).

(b) Después del choque nos dicen que el satélite se estabiliza en una nueva órbita circular. Suponiendo que r es el radio de esa nueva órbita circular, la energía total del sistema en esa nueva órbita será

$$E_r = \frac{1}{2}U_r = -\frac{1}{2}G\frac{M_T\,(m+\delta m)}{r}$$

Por la conservación de la energía, esta energía E_r será igual a la energía del sistema justo después de la colisión (que se denominó E_f en el apartado anterior). Por lo tanto

$$E_r = E_f \Rightarrow -\frac{1}{2}G\frac{M_T\,(m+\delta m)}{r} = \frac{1}{2}(m+\delta m)\left(\frac{m-\delta m}{m+\delta m}\right)^2\frac{GM_T}{R} - G\frac{M_T\,(m+\delta m)}{R}$$

Operando en la expresión anterior se llega a

$$r = \frac{R}{2 - \left(\frac{m-\delta m}{m+\delta m}\right)^2}$$

que, como $\delta m \ll m$, se puede aproximar como

$$r \approx R\left(1 - 4\frac{\delta m}{m}\right)$$

en donde hemos utilizado la misma aproximación que en el apartado anterior, es decir, despreciar los términos de orden $(\delta m)^2$ y superiores. De esta forma se ve que el radio de la nueva órbita circular es menor que el de la órbita original.

Problema 3

(a) La energía máxima que es posible obtener del vapor de agua es la suma del calor desprendido en la condensación del vapor de agua y la energía que se obtiene del enfriamiento de la misma de 100 °C a 0 °C:

$$Q_{\text{máx}} = m_{\text{agua}}\, L_{\text{v}} + m_{\text{agua}}\, c_{\text{agua}}\, \Delta T_{\text{agua}} = 6688 \text{ kJ}$$

Por otra parte, la cantidad de calor que sería necesaria para derretir todo el hielo sería la suma de la necesaria para, primero, calentar el hielo hasta $T = 0$°C y, después, fundir ese hielo, es decir:

$$Q_{\text{fundir}} = m_{\text{hielo}}\, c_{\text{hielo}}\, \Delta T_{\text{hielo}} + m_{\text{hielo}}\, L_{\text{f}} = 3553 \text{ kJ}$$

Al ser $Q_{\text{máx}} > Q_{\text{fundir}}$ se funde todo el hielo.

(b) Para determinar la temperatura de equilibrio se sabe que (conservación de la energía):

$$Q_{\text{cedido}} = Q_{\text{ganado}}$$

por lo que tenemos (las diferencias de temperatura se escogen para que las cantidades de calor sean positivas en los dos casos)

$$m_{\text{agua}}\, L_{\text{v}} + m_{\text{agua}}\, c_{\text{agua}}\, (T_{\text{agua}} - T_{\text{eq}}) = m_{\text{hielo}}\, c_{\text{hielo}}\, \Delta T_{\text{hielo}} + m_{\text{hielo}}\, L_{\text{f}} + m_{\text{hielo}}\, c_{\text{agua}}\, (T_{\text{eq}} - T_{\text{hielo}})$$

de donde, teniendo en cuenta que en esta ecuación $T_{\text{agua}} = 100$ °C, $\Delta T_{\text{hielo}} = 10$ °C y $T_{\text{hielo}} = 0$ °C, se deduce que

$$T_{\text{eq}} = 60\,^\circ\text{C}$$

Por lo tanto, el sistema final estará formado por 12,5 kg de agua líquida a 60 °C.

- **Cuestión:** Hasta 1 punto. Incluya una **breve, pero clara, explicación** de la respuesta.
- **Problemas:** Hasta 3 puntos cada uno. No es suficiente con escribir ecuaciones; debe desarrollar las soluciones, justificar hipótesis y explicar en detalle los pasos. Cuide dimensiones, unidades y los órdenes de magnitud de sus resultados.
- **Material auxiliar: Solo una calculadora no programable.** **Tiempo:** 2 horas.

CUESTIÓN

- Una nave espacial describe una órbita circular de radio r, y con una velocidad de traslación v, alrededor de la Tierra. ¿En cuánto ha de incrementar su velocidad, Δv, para conseguir escapar de la gravedad de la Tierra?

(a) $\Delta v = 2{,}41v$ (b) $\Delta v = v$ (c) $\Delta v = 0{,}41v$

PROBLEMAS. Si ha seguido la evaluación continua solo debe resolver dos de los problemas.

- **1**.– Se lanza un cilindro hueco de masa M, radio interior R_1 y radio exterior R_2, sobre una superficie horizontal de forma que desliza con velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ sin rodar. El coeficiente de rozamiento cinético entre el cilindro y el suelo se supone conocido y de valor μ_c. Debido a la fricción, transcurrido un cierto intervalo de tiempo Δt el cilindro comienza a rodar sin deslizar, siendo en ese instante la velocidad del centro de masas $\mathbf{v}$.

(a) Obtener la velocidad del centro de masas, $\mathbf{v}$, en el momento en el que el cilindro comienza a rodar sin deslizar, en función de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y de los radios R_1 y R_2.

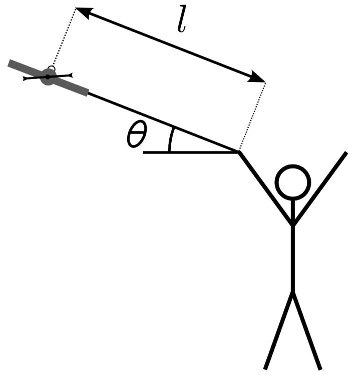
(b) Calcular la distancia recorrida por el cilindro en su deslizamiento, antes de que ruede sin deslizar.

Nota. El momento de inercia de un cilindro hueco de masa M, radio interior R_1 y radio exterior R_2, respecto a su eje de simetría es $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$.

Sigue en la siguiente página ⟶

• **2**.– Considere un avión de juguete de masa m atado en el extremo de una cuerda sin masa de longitud l, cuyo otro extremo está sujeto por un niño en reposo como indica la figura. El avión tiene una hélice movida por un pequeño motor, por lo que se desplaza a una velocidad de módulo constante $\mathbf{v}$, describiendo un movimiento circular uniforme alrededor del niño. Como consecuencia del principio de sustentación, por el que vuelan todos los aviones, el aire ejerce una fuerza **perpendicular** al plano de las alas. Se pide:

(a) Calcule la tensión que la cuerda ejerce sobre el avión, T, en función de los datos del enunciado y sabiendo que el avión vuela de tal modo que la cuerda forma un ángulo θ con respecto a la horizontal.



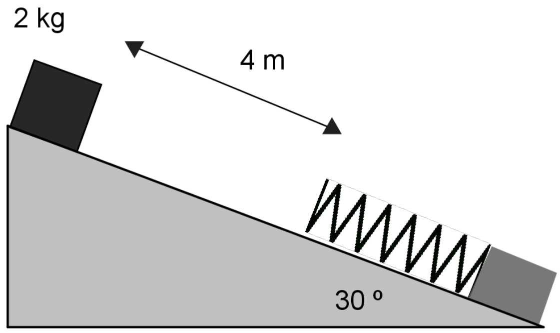
(b) ¿Existe algún ángulo a partir del cual el niño perderá el control del avión y se estrellará? (**Ayuda:** Tenga en cuenta que una cuerda solo soporta tensiones de tracción, por lo que el avión dejará de girar con estabilidad cuando se dé la circunstacia de que el sentido de la tensión se invierta, sometiendo a la cuerda a una tensión de compresión en lugar de tracción).

(c) ¿Podría dar una expresión para una velocidad crítica, v_c, a partir de la cual el avión pueda volar con seguridad a cualquier ángulo θ?

• **3**.– Un bloque de masa 2 kg se deja deslizar desde el reposo por un plano inclinado, a una distancia de 4 m de un muelle sin masa cuya constante de fuerza es $k = 100\,\mathrm{N/m}$. El muelle está alineado con el plano inclinado 30° como se muestra en la figura.

(a) Si no hay fricción entre el plano y el bloque encuentre cuál es la máxima compresión del muelle.

(b) Si ahora se supone que hay fricción entre el bloque y el plano y el coeficiente de rozamiento cinético vale 0.2, encuentre la máxima compresión del muelle.



Soluciones

Cuestión

La solución correcta es la (c). La velocidad del satélite en su orbita viene dada por:

$$G\frac{mM_T}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Para conseguir la velocidad de escape tiene que alcanzar una energía total nula:

$$E = U + T = 0 \Rightarrow -G\frac{mM_T}{r} + \frac{1}{2}m(v+\Delta v)^2 = 0$$

donde Δv es el incremento en la velocidad de la nave para que pueda escapar. Finalmente:

$$v + \Delta v = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}} \Rightarrow \Delta v = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}} - v = \sqrt{2}v - v = (\sqrt{2}-1)v = 0,41v$$

Problema 1

(a) Cuando el cilindro comienza a deslizar actúa sobre él una fuerza de fricción F_r que se opone al movimiento y tiende a frenarlo. La desaceleración que produce viene dada por $a = -\frac{F_r}{M} = -\mu_c g$. Si la velocidad inicial del cilindro es v_0, la velocidad de su centro de masas en el instante t viene dada por $v = v_0 + at = v_0 - \frac{F_r}{M}t$. Sin embargo, la fuerza de fricción también produce un momento con respecto a un eje que pasa por el centro de masas del cilindro, que terminará por dar lugar a la rotación de este con una velocidad angular ω. Suponiendo que el tiempo transcurrido hasta que el cilindro comienza a rodar sin deslizar es Δt, cuando esto ocurre el momento satisface la ecuación

$$\tau = R_2 F_r = I\alpha = \frac{I\omega}{\Delta t} = \frac{Iv}{R_2\Delta t} \Rightarrow v = \frac{R_2^2 F_r}{I}\Delta t$$

en donde hemos tenido en cuenta que $\omega = \alpha\Delta t$ y hemos utilizado la expresión $v = \omega R_2$ que representa la condición de rodadura sin deslizamiento.

Por lo tanto, transcurrido un tiempo Δt se satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} v &= v_0 - \frac{F_r}{M}\Delta t \\ v &= \frac{2R_2^2}{R_2^2 + R_1^2}\frac{F_r}{M}\Delta t \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$v = \frac{2}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + 3} v_0$$

(b) La distancia recorrida por el cilindro en su deslizamiento, antes de que ruede sin deslizar es:

$$\Delta x = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\left(\Delta t\right)^2 = v_0\Delta t - \frac{1}{2}\mu_c g\left(\Delta t\right)^2$$

El tiempo de recorrido se calcula igualando las dos ecuaciones para la velocidad v obtenidas en el apartado anterior, sustituyendo $F_r/M = \mu_c g$, de forma que

$$v_0 - \mu_c g \Delta t = \frac{2R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \mu_c g \Delta t$$

de donde se obtiene para Δt la siguiente expresion:

$$\Delta t = \frac{v_0}{\mu_c g} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}$$

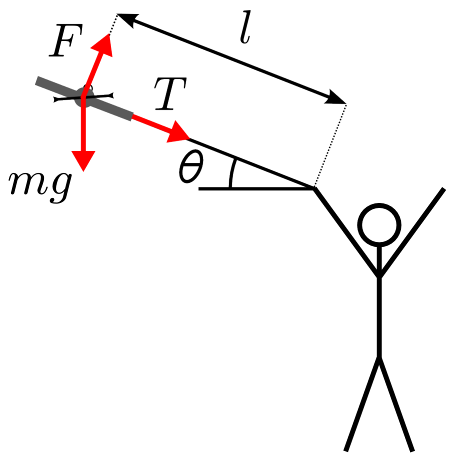
y, por lo tanto,

$$\Delta x = v_0 \Delta t - \frac{1}{2} \mu_c g \left(\Delta t\right)^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \frac{\left(R_1^2 + R_2^2\right)\left(R_1^2 + 5R_2^2\right)}{\left(R_1^2 + 3R_2^2\right)^2}$$

(obsérvese que si $R_1 = 0$ o si $R_1 = R_2$ la expresión anterior es independiente del radio del objeto, de forma que $\Delta x = C v_0^2/\mu_c g$, donde C es un número)

Problema 2

(a) El diagrama de fuerzas sobre el avión es el que se representa en la figura:



Para simplificar los cálculos, tomaremos un sistema de referencia centrado en el avión, con el eje x horizontal con sentido positivo hacia el centro y el eje y vertical con sentido positivo hacia arriba. Aplicando la segunda Ley de Newton a los dos ejes, tenemos:

$$\sum F_x = F \operatorname{sen}\theta + T\cos\theta = m\frac{v^2}{l\cos\theta}$$
$$\sum F_y = F\cos\theta - T\operatorname{sen}\theta - mg = 0$$

Para calcular T podemos eliminar F combinando las dos ecuaciones del sistema anterior. Despejando de la segunda ecuación:

$$F = \frac{mg + T\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Y sustituyendo en la primera y multiplicando por $\cos\theta$:

$$mg \operatorname{sen}\theta + T = m\frac{v^2}{l} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mv^2}{l} - mg\operatorname{sen}\theta$$

(b) La condición para que el vuelo del avión sea estable es que la tensión sea de tracción, es decir, tenga el sentido que hemos supuesto para escribir las ecuaciones anteriores. Por lo tanto, el niño perderá el control del avión cuando se cumpla $T < 0$ en la última ecuación:

$$\operatorname{sen}\theta > \frac{v^2}{lg} \quad \Rightarrow \quad \theta > \operatorname{arcsen}\left(\frac{v^2}{lg}\right)$$

Cuando el ángulo θ supere el valor anterior, la tensión dejará de ser de tracción y el niño perderá el control del avión.
(c) A partir del resultado anterior podemos reescribir la condición para que el vuelo sea estable como

$$\text{vuelo estable si} \quad \operatorname{sen}\theta < \frac{v^2}{lg}$$

Como el mayor valor que puede tomar $\operatorname{sen}\theta$ es 1, el avión podrá volar a cualquier ángulo siempre que se cumpla:

$$\frac{v^2}{lg} > 1$$

Es decir, el avión podrá volar a cualquier ángulo para cualquier velocidad que verifique:

$$v > \sqrt{lg}$$

Problema 3
(a) Supondremos que el sistema completo incluye la Tierra, el bloque y el muelle, por lo que no hay fuerzas externas que realicen trabajo, de manera que $W_{\text{ext}} = 0$. Al no haber tampoco fuerzas internas no conservativas, la conservación de la energía mecánica implica la conservación de la energía cinética y de las energías potenciales relativas al muelle y al bloque, cuando el sistema pasa de la posición inicial a la final, es decir,

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U_b + \Delta U_m = (K_f - K_i) + (U_{b,f} - U_{b,i}) + (U_{m,f} - U_{m,i}) = 0$$

En la posición inicial del sistema, el bloque está situado en lo alto del plano inclinado y el muelle está sin comprimir; en la posición final el bloque ha comprimido el muelle al máximo. Si llamamos x a la cantidad que se ha comprimido el muelle en la posición final, el bloque, desde la posición inicial a la final, recorre una distancia $L + x$ a lo largo del plano inclinado, por lo que, en vertical, se desplaza (disminuye su altura) una cantidad $\Delta h = (L + x)\operatorname{sen}\theta$.

Si consideramos que la energía potencial del bloque es 0 cuando está en lo alto del plano inclinado, tenemos que $K_f = K_i = 0$ y $U_{b,i} = U_{m,i} = 0$. Además $U_{b,f} = -mg\Delta h = -mg(L + x)\operatorname{sen}\theta$ y $U_{m,f} = kx^2/2$. Por lo tanto

$$-mg(L + x)\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}kx^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - (mg\operatorname{sen}\theta)x - mgL\operatorname{sen}\theta = 0$$

Sustituyendo los datos del enunciado para m, g, θ, L y k, y resolviendo la ecuación de segundo grado anterior y quedándonos con la raíz positiva (que es la única que tiene sentido físico), se obtiene un valor de $x = 0{,}989\,\mathrm{m}$, que es el valor de la compresión máxima del muelle.
(b) En este caso hay que considerar la energía disipada por la fricción, que hace cambiar la energía térmica, de manera que el teorema trabajo-energía nos dice que

$$\Delta E_{\mathrm{mec}} + \Delta E_{\mathrm{term}} = W_{\mathrm{ext}} = 0$$

El cambio en la energía mecánica es el mismo que en el apartado anterior, mientras que para la energía térmica debida a la fricción tenemos

$$\Delta E_{\mathrm{term}} = f_r \Delta s = \mu_c N(L+x) = \mu_c mg\cos\theta(L+x)$$

Por lo tanto

$$-mg(L+x)\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}kx^2 + \mu_c mg\cos\theta(L+x) = 0$$

expresión que conduce a la ecuación de segundo grado

$$\frac{1}{2}kx^2 - mg\left(\operatorname{sen}\theta - \mu_c\cos\theta\right)x - mgL\left(\operatorname{sen}\theta - \mu_c\cos\theta\right) = 0$$

cuya solución positiva es $x = 0{,}783\,\mathrm{m}$, que, obviamente, es un valor de compresión menor que el del apartado anterior sin fricción.