Universidad Nacional de Educación a Distancia

Grado en Física

Fundamentos de Física I

Autor:

Daniel Pérez

Resumen

Estos apuntes corresponden al contenido de la asignatura *Fundamentos de Física I: Mecánica, Oscilaciones y Ondas, Termodinámica*. Por favor, tenga en cuenta que estos apuntes no han sido respaldados por los profesores. No deben considerarse como representaciones precisas del contenido real de los contenidos y es muy probable que cualquier error presente sea exclusivamente mi responsabilidad.

Parte I

Mecánica

CAPÍTULO 1

Cinemática

1.1. Movimiento rectilíneo

Definición 1.1.1 (Velocidad)**.** *La velocidad promedio entre dos puntos está definida por* $\boldsymbol{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$*. La velocidad instantánea en un punto está definida por*

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Se mide en $[v] = ms^{-1}$*.*

Si conocemos $\mathbf{v}(t)$, entonces podemos conocer x:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v} dt \Rightarrow x - x_0 = \int_{x_0}^{x} \mathbf{v} dt$$

Se mide en $[x] = m$. Si la velocidad es constante, $\mathbf{v}$ =cte., entonces la ecuación del movimiento es $x - x_0 = \mathbf{v}(t - t_0)$, movimiento rectilíneo uniforme.

Definición 1.1.2 (Aceleración)**.** *La aceleración promedio entre dos puntos está definida por* $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\Delta t}$*, mientras que la aceleración instantánea en un punto es*

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Por tanto, $\mathbf{v}dv = \mathbf{a}dt\frac{dx}{dt} = \mathbf{a}dx$. Se mide en $[a] = ms^{-2}$. Conociendo $\mathbf{a}(t)$, podemos saber

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}dt \Rightarrow \mathbf{v} - v_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}dt$$

también,

$$\int_{v_0}^{v} \mathbf{v}dv = \int_{x_0}^{x} \mathbf{a}dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} \mathbf{a}dx$$

Ejercicio 1.1.1. *Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta y su posición viene dada por* $x = 5t - 2t^2$ *donde* x *viene expresada en metros y* t *en segundos. Determinar*

(I) *El desplazamiento, la velocidad media y la aceleración media en el intervalo* $1s < t < 3s$.

(II) *La velocidad y la aceleración instantánea.*

Tenemos que $v = 5 - 4t\ m/s$ y que $a = -4m/s^2$. Tenemos que calcular el desplazamiento desde el segundo 1 hasta el 3:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x\hat{i} = (x_2 - x_1)\hat{i} = -6\hat{i}$$

Por tanto,

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = -3m/s$$

y,

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = -4m/s^2$$

Ejercicio 1.1.2. *La aceleración de una partícula viene dada por la relación* $a = 2t - t^2$*, donde* a *se expresa en* m/s^2 *y* t *en segundos. Determinar la velocidad de la partícula y la posición en función del tiempo si cuando* $t = 2s$, $v = 2m/s$ *y* $x = 8m$.

Tenemos que

$$v(t) = \int 2t - t^2 dt = t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C$$

Como $v(2) = \frac{4}{3} + C = 2m/s \Rightarrow C = \frac{2}{3}$. Por tanto, $v(t) = t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}$.

$$x(t) = \int t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t + C$$

Como $x(2) = \frac{8}{3} + C = 8m \Rightarrow C = \frac{16}{3}$. Por tanto, $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t + \frac{16}{3}$

Ejercicio 1.1.3. *La aceleración de una partícula oscilante está definida por la relación $\boldsymbol{a} = -k\boldsymbol{x}$. Encuentre el valor de k tal que $v = 15cm/s$ cuando $x = 0cm$ y $x = 3cm$ cuando $v = 0m/s$.*

Tenemos que,

$$a = \frac{dv}{dt} = -kx \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -kx$$

Por tanto, $vdv = -kxdx$,

$$\int_{15}^{0} vdv = -k\int_{0}^{3} xdx \Rightarrow k = 25s^{-1}$$

Ejercicio 1.1.4. *Un automóvil que se desplaza a $50km/h$ frena cuando ve un semáforo en rojo. El tiempo de reacción del conductor es de $0,7s$ y la desaceleración de frenado $2m/s^2$. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el conductor ve ponerse en rojo el semáforo hasta que se para? ¿Qué distancia ha recorrido?*

Primero pasamos los km/h a m/s,

$$50km/h = 50 \cdot \frac{10^3 m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = \frac{125}{9}m/s$$

Tenemos que el desplazamiento en el tiempo de reacción del conductor es $\Delta x = \frac{125}{9} \cdot 0,7s = 9,722m$. Vamos a calcular el segundo en el que se para el coche,

$$v_1 = v_0 + at_1 \Rightarrow 0 = \frac{125}{9} - 2t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{125}{18}$$

Entonces,

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{125}{9} \cdot \frac{125}{18} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{125}{18}\right)^2 = 48,22m$$

El desplazamiento total será $D = \Delta x + x_1 = 57,95m$ y el tiempo total $t = 0,7 + t_1 = 7,64s$.

Movimiento curvilíneo

La trayectoria está definida por Δs. El desplazamiento es $\Delta \mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$. Por tanto, sabemos que la velocidad paralela al desplazamiento y tangente a la trayectoria serán $\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ y $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, respectivamente.

Un cambio en la magnitud de la velocidad está relacionado con la aceleración tangencial, y un cambio en la dirección de la velocidad con la aceleración normal. La aceleración promedio $\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ es paralela a $\Delta \mathbf{v}$ y $\Delta \mathbf{r}$. La aceleración instantánea $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ apunta hacia la concavidad de la curva.

Movimiento bajo aceleración constante

$$dv = \mathbf{a}dt \Rightarrow \int_{v}^{v_0} dv = \int_{t}^{t_0} \mathbf{a}dt \Rightarrow \mathbf{v} - v_0 = \mathbf{a}(t - t_0)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow \int_{r_0}^{r} dr = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt \Rightarrow \mathbf{r} = r_0 - v_0\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(\Delta t)^2$$

Por lo tanto, es una trayectoria parabólica, a no ser que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ sean paralelas. En movimientos parabólicos la altura máxima se alcanza cuando $\mathbf{v} = 0$. La situación ideal sería si fuese una parábola simétrica, sin resistencia de otros factores.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\mathbf{u}_t\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{u}_t + \frac{d\mathbf{u}_t}{dt}\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{u}_t = \cos\phi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_n = \cos(\phi + \frac{\pi}{2})\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\phi + \frac{\pi}{2})\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_n = -\operatorname{sen}\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j} \end{cases}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = -\operatorname{sen}\phi\frac{d\phi}{dt}\mathbf{i} + \cos\phi\frac{d\phi}{dt}\mathbf{j} = \mathbf{u}_n\frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{v}\frac{1}{R}$$

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{u}_t \qquad \mathbf{a}_n = \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{\mathbf{v}^2}{R}\mathbf{u}_n$$

Ejercicio 1.1.5. *Un cohete acelera verticalmente hacia arriba desde el suelo a* $12,6m/s^2$ *durante 11s. Entonces se apaga el motor y entra en caída libre.*

(1) *¿Qué altura final alcanza el cohete?*

(II) ¿Cuál será la velocidad con la que choca con el suelo? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde el lanzamiento hasta que choca con el suelo?

(I) La altura final que alcanza el cohete se calcula teniendo en cuenta que en el punto más alto la velocidad será nula: $v_2 = v_1 - g(t_2 - t_1) = 0$ y $v_1 = a_0 t_0 = 12,6 \cdot 11 = 38,6 m/s$

$$t_2 - t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{138,6}{9,8} = 14,14s \Rightarrow t_2 = 25,14s$$

$$x_1 = x_0 + v_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 12,6 \cdot 11^2 = 762,3m$$

Por lo tanto, $x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2 = 762,3 + 138,6 \cdot 14,14 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (14,14)^2 = 1742,40m$

(II) Primero calculamos el tiempo que ha transcurrido desde el lanzamiento hasta que choca con el suelo

$$x_3 = x_2 + v_2(t_3 - t_2) - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 \Rightarrow 0 = 1742,40 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (t_3 - t_2)^2$$

$$\Rightarrow (t_3 - t_2)^2 = \frac{2}{9,8} \cdot 1742,40 \Rightarrow t_3 = 44s$$

Por tanto,

$$v_3 = v_2 - g(t_3 - t_2) = -9,8 \cdot 18,857 = -184,80m/s$$

Ejercicio 1.1.6. *Un objeto lanzado desde el suelo bajo un ángulo de 35° cae a 4km del punto de lanzamiento. Determinar*

(I) La velocidad de lanzamiento y el tiempo de vuelo.

(II) La altura máxima que alcanza el proyectil

(III) La velocidad en el punto más alto

(I) Tenemos un movimiento en dos dimensiones y por tanto, estudiamos el movimiento en las dos coordenadas por separado.

$$x_1 = x_0 + v_{0x}(t_1 - t_0) = v_0 \cos 35 t_1$$

$$y_1 = y_0 + v_{0y}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2 \Leftrightarrow 0 = v_0 \operatorname{sen} 35 - \frac{1}{2}9,8t_1$$

Por lo tanto, sabemos que $v_0 \cos 35 = \frac{4000}{t_1}$ y que $v_0 \operatorname{sen} 35 = \frac{9,8}{2} t_1$. Dividiendo, obtenemos $\tan 35 = \frac{9,8}{8000} t_1^2$,

$$t_1^2 = \frac{8000}{9,8} \tan 35 \Rightarrow t_1 = 23,918$$

Finalmente, obtenemos la velocidad de lanzamiento,

$$v_0 = \frac{9,8}{2} \frac{23,918}{\operatorname{sen} 35} = 204,26 m/s$$

(II) Para obtener la altura máxima, calculamos el tiempo que tarda en llegar a esa posición, $v_{2y} = v_{0y} - g(t_0 - t_1)$,

$$0 = v_0 \operatorname{sen} 35 - 9,8 t_2 \Rightarrow t_2 = 11,95 s$$

Por tanto, $y_2 = y_0 + v_0 \operatorname{sen} 35 (t_2 - t_0) - \frac{1}{2} g (t_2 - t_0)^2 = 204,26 \operatorname{sen} 35 \cdot 11,95 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 11,95^2 = 700,31 m$.

(III) La velocidad en el punto más alto se obtiene por sustitución en la ecuación: $v_2 = v_0 \cos 35 \hat{\imath} = 167,32 \hat{\imath}$.

Ejercicio 1.1.7. *Un aeroplano está volando horizontalmente a una altura h con velocidad v. En el instante en el que el aeroplano está directamente sobre un cañón antiaéreo, el cañón dispara al aeroplano. Calcule la velocidad mínima v_0 y el ángulo de apunte que requiere el proyectil para darle al aeroplano.*

El proyectil debe llegar a una altura h con $v_y = 0$. Tenemos que la ecuación del proyectil es $v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}$.

Supongamos que (x_A, y_A) son las coordenadas del avión y (x_p, y_p) las del proyectil. Evidentemente, $x_A = x_p$ y $y_A = y_p$, por tanto, $vt = v_0 \cos \theta t$ y $h = v_0 \operatorname{sen} \theta t - \frac{1}{2} g t^2$.

$$h = v_0 \operatorname{sen} \theta \cdot v_0 \frac{\operatorname{sen} \theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g^2} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} \theta}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$$

Por tanto, $v_0 \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2gh}$ y $v_0 \cos \theta = v$,

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{2gh}{v^2}}$$

Finalmente, $v_0 = \sqrt{v^2 + 2gh}$

1.2. Movimiento circular

Tenemos que $\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}$, entonces $ds = Rd\theta \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R$. La velocidad angular está definida por $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, por lo que $\mathbf{v} = \omega R$. Algunas notas importantes sobre los componentes del movimiento circular son:

(I) $\mathbf{R} = \mathbf{r} \operatorname{sen} y$

(II) ω es perpendicular al plano $\mathbf{R} - \mathbf{v}$

(III) $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v} = \omega \cdot \mathbf{r} \operatorname{sen} y = \omega R$

1.2.1. Movimiento circular uniforme

Este movimiento es aplicable a cualquier proceso cíclico o periódico. Definimos T como el período que se tarda en dar una vuelta, $f = \frac{1}{T}$ la frecuencia y $\theta = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Como ω es constante:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

1.2.2. Movimiento circular uniformemente acelerado

La aceleración angular está definida por $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Por tanto, la ecuación de movimiento será $\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0) \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 \Delta t + \alpha\frac{(\Delta t)^2}{2}$. Tenemos que:

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(R \cdot \omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

En el movimiento circular uniforme solo hay aceleración normal, que sería: $\mathbf{a}_n = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$

Ejercicio 1.2.1. *Las aspas de un ventilador que gira a* $200 r.p.m.$ *miden* $60 cm$. *Determinar*

(I) *La frecuencia*

(II) *El periodo*

(III) *La velocidad angular del ventilador*

(IV) *La velocidad lineal de un punto del borde del aspa y su aceleración y compárela con la velocidad y la aceleración de un punto situado a $20cm$ del centro.*

(I)
$$\omega = 200 \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{20}{3}\pi \text{rad}/s$$

(II)
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \frac{3}{20\pi} = \frac{3}{10}s$$

(III)
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{3}s^{-1}$$

(IV) Tenemos que $\mathbf{v}_1 = \omega_R \hat{e}_t = \frac{20}{3}\pi \cdot 0,6\hat{e}_t = 4\pi\hat{e}_t m/s$, entonces,

$$\mathbf{a}_n = \frac{v_1^2}{R}\hat{e}_t = \frac{16\pi^2}{0,6}\hat{e}_t = \frac{8}{0,3}\pi^2 ms^{-2}$$

La velocidad y la aceleración de un punto situado a 20cm del centro será, siguiendo el mismo procedimiento:

$$\mathbf{v}_2 = \omega \cdot 0,2\hat{e}_t = \frac{4\pi}{3}m/s\hat{e}_t$$

y

$$\mathbf{a}_{2n} = \frac{v_2^2}{0,2}\hat{e}_t = \frac{16}{9}\pi^2\frac{1}{0,2}\hat{e}_t = \frac{8}{0,9}\pi^2 ms^{-2}$$

Ejercicio 1.2.2. *El ventilador del ejercicio anterior se frena en un instante dado, deteniéndose en $25s$. Determine*

(I) *La aceleración angular supuesta constante.*

(II) *El número de vueltas que da el volante desde que comienza a frenarse hasta que se detiene.*

(III) *La aceleración normal y la aceleración tangencial de un punto del extremo de una de las aspas a los $5s$ de haberse iniciado el frenado. ¿Cuál será la aceleración total?*

(I)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{-\frac{20}{3}\pi}{25} = \frac{-4}{15}\pi \mathrm{rad} s^{-2}$$

(II) Sabemos que $\phi = \phi + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$, por tanto, sustituyendo valores, $\phi = \left(\frac{20}{3}\pi\right) \cdot 25 - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{15}\right) \cdot 25^2 = 261,80\mathrm{rad} = 41,66$ vueltas.

(III) De nuevo, sabemos que $\omega = \omega_0 t + \alpha(t - t_0) = \left(\frac{20}{3}\pi\right) - \left(\frac{4\pi}{15}\right) \cdot 5 = \frac{80}{15}\pi \mathrm{rad}/s$.

$$a_t = \omega R = -\frac{4}{15}\pi \cdot 0,6 = -\frac{4}{25}\pi m s^{-2}$$

$$a_n = \omega^2 R = \left(\frac{16}{3}\pi\right)^2 \cdot 0,6 = \frac{256}{15}\pi^2 m s^{-2}$$

Por tanto, $\mathbf{a} = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n$.

Ejercicio 1.2.3. *Una partícula se mueve en el plano XY de manera que* $v_x = 4t^2 + 4$ *y* $v_y = 4t$ *expresadas ambas en* m/s*. Si la posición de la partícula cuando* $t = 0$ *es* $\boldsymbol{r} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ *(expresada en m), halle la ecuación de la trayectoria y las componentes intrínsecas de la aceleración. Calcule el valor de estas y de la aceleración total para* $t = 1s$.

Tenemos que $\mathbf{r}_0 = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, entonces

$$\int_1^x dx = \int_0^t (4t^2 + 4)dt \Rightarrow x = \frac{4}{3}t^3 + 4t + 1$$

$$\int_2^y dy = \int_0^t 4t dt \Rightarrow y = 2t^2 + 2$$

La ecuación de la trayectoria será $t = \sqrt{\frac{y-2}{2}}$, por lo tanto,

$$x = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{y-2}{2}\right)^{3/2} + 4\left(\frac{y-2}{2}\right)^{1/2} + 1$$

Por tanto, $\mathbf{v} = 4(t^2 + 1)\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath}$, y $\mathbf{a} = 8t\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$. Ahora, para calcular las componentes de la aceleración, $v^2 = 16(t^2 + 1)^2 + 16t^2$, y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 32t(t^2 + 1) + 16t = 32t^3 + 48t$.

$$\mathbf{a}_t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{v^2} = \frac{32t^3 + 48t}{16(t^2 + 1)^2 + 16t^2}[4(t^2 + 1)\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath}] = \frac{8t^3 + 12t}{(t^2 + 1)^2 + t^2}[4(t^2 + 1)\hat{\imath} + 4t\hat{\jmath}]$$

y,

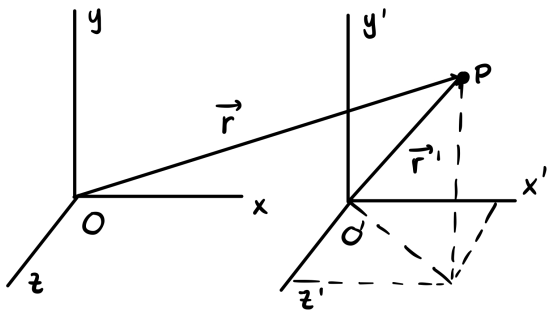
$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = (8t\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) - \mathbf{a}_t$$

Para $t = 1s$, $\mathbf{a} = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, $\mathbf{a}_t = 8\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\mathbf{a}_n = 0$.

1.3. Movimiento relativo

El movimiento es un concepto relativo referido a un sistema de referencia.

Sistemas con movimiento relativo de traslación: transformación de Galileo



Tenemos que **OP** = **OO'** + **O'P**, que también se escribe como $\mathbf{r} = \mathbf{r'}_0 + \mathbf{r'}$. La ley de composición de velocidades de Galileo dice que $\mathbf{v} = \mathbf{v'}_0 + \mathbf{v'}$, es decir,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r'}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r'}}{dt}$$

Derivando de nuevo con respecto al tiempo obtenemos que: $\mathbf{a} = \mathbf{a'}_0 + \mathbf{a'}$. Si $\mathbf{v'}_0$ es constante, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{a'}$. Las aceleraciones son iguales si k' se mueve con velocidad constante respecto de k.

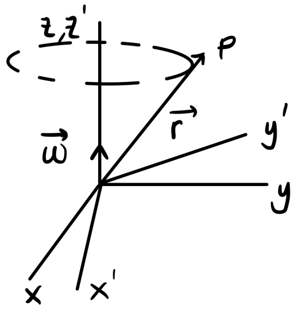
Si $\mathbf{v'}_0$ es constante y $\mathbf{OO'} = 0$ para $t = 0$, entonces

$$\begin{cases} x' = x - v'_0 t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

son las transformaciones de Galileo. Ten en cuenta que la aceleración es invariable bajo una transformación de Galileo.

Sistemas con movimiento relativo de rotación

Una rotación es un giro, que matemáticamente se representa con una matriz de rotación. Estudiamos el caso donde los orígenes del sistema coinciden: Si $\mathbf{v'} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.



Si $\mathbf{v'} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v'} + \mathbf{w} \times \mathbf{r}$. El término de arrastre del segundo caso se debe al giro.

Ahora bien, la velocidad en el sistema k será $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_k$, la velocidad en el sistema k' será $\mathbf{v'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{k'}$, y la relación entre ambas:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_k = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{k'} + \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

La aceleración en el sistema k será $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_k$, la aceleración en el sistema k' será $\mathbf{a'} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{k'}$, y la relación entre ambas:

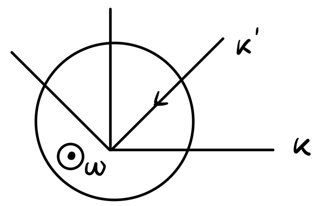
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_k = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{k'} + \mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v'}}{dt}\Big|_{k'} + \mathbf{w} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{k'} + \mathbf{w} \times \mathbf{v'} + \underbrace{\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})}_{\text{Término de arrastre}}$$

Por tanto,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a'} + \underbrace{2\mathbf{w} \times \mathbf{v'}}_{\text{Aceleración de Coriolis}} + \underbrace{\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})}_{\text{Aceleración centrípeta}}$$

La aceleración de Coriolis surge cuando la partícula va pasando por zonas donde la velocidad de arrastre va cambiando y se produce una descompensación entre la velocidad de la partícula y la velocidad de arrastre correspondiente.



Si la partícula no se mueve respecto al sistema k', entonces $\mathbf{a} = \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$, es decir $\mathbf{a'} = 0$ y $\mathbf{v'} = 0$.

Ejercicio 1.3.1. *Dos trenes A y B se desplazan sobre dos vías paralelas a 70km/h y 90km/h respectivamente. Determine la velocidad relativa de B respecto a A si:*

(I) *Se mueven en el mismo sentido.*

(II) *Se mueven en sentidos opuestos.*

(III) *Si los trenes se desplazan sobre unas vías que forman un ángulo de 60°. ¿Cuál será la velocidad de B relativa a A?*

(I)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v'}_B \Rightarrow \mathbf{v'}_B = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = 20km/h$$

(II) En este caso, $\mathbf{v}_B = -90km/h$, entonces:

$$\mathbf{v'}_B = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = -160km/h$$

(III) Tenemos que $\mathbf{v}_A = 70\hat{\imath}$ y $\mathbf{v}_B = 90\cos 60\hat{\imath} + 90\,\mathrm{sen}\,60\hat{\jmath} = 45\hat{\imath} + 45\sqrt{3}\hat{\jmath}$.

$$\mathbf{v'}_B = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = -25\hat{\imath} + 45\sqrt{3}\hat{\jmath}km/h$$

Ejercicio 1.3.2. *Un conductor que viaja a 80km/h en su vehículo a través de una tormenta observa que las gotas de lluvia dejan trazas en las ventanillas laterales que forman un ángulo de 80° con la vertical y cuando se detiene la lluvia cae verticalmente. Determine la velocidad relativa de la lluvia respecto del automóvil:*

(I) *Cuando está parado.*

(II) *Cuando se mueve a 80km/h.*

(I) Sabemos que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v'}$, y que $\mathbf{v} = -\mathbf{v}\hat{\jmath}$, $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{\imath}$. Entonces, $\mathbf{v'} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}\hat{\jmath} - \mathbf{v}_0\hat{\imath}$.

(II) Ahora bien, $\tan\alpha = \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{v_0}{v} = \tan 80°$. Entonces, $v = \frac{v_0}{\tan 80°} = 14,11 km/h$ y $\mathbf{v} = -14,11\hat{\jmath} - 80\hat{\imath}(km/h)$

Ejercicio 1.3.3. *La velocidad de un barco en agua quieta es de $15ms^{-1}$. El piloto quiere llegar a un punto A situado a $8km$ al Este del punto en el que se encuentra, la corriente, que lleva una velocidad de $5ms^{-1}$, va dirigida hacia el Norte.*

(I) *Determine la dirección en la que ha de viajar el barco para llegar directamente al punto A.*

(II) *¿Cuánto tiempo ha tardado en hacer el trayecto?*

(I) Sabemos que $|\mathbf{v'}| = 15m/s$ y que $\mathbf{v'} = 15\cos\alpha\hat{\imath} + 15\operatorname{sen}\alpha\hat{\jmath}$. También sabemos que $\mathbf{v}_0 = 5\hat{\jmath}$. Por tanto, dado que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v'}$,

$$\mathbf{v} = 15\cos\alpha\hat{\imath} + (5 + 15\operatorname{sen}\alpha)\hat{\jmath}$$

Calculamos α teniendo en cuenta que $v_y = 0 \Rightarrow 5 + 15\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 19,5°$. Por eso, $\mathbf{v} = 10\sqrt{2}\hat{\imath}$ y $\mathbf{v'} = 10\sqrt{2}\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$.

(II) Como el trayecto son 8km, $8000 = 10\sqrt{2}t \Rightarrow t = \frac{800}{\sqrt{2}}s$.

Ejercicio 1.3.4. *Un ascensor baja con aceleración de $a_0 = 3,4ms^{-2}$.*

(I) *¿Qué aceleración tendrá un objeto que se deja libre dentro del ascensor para un observador que está dentro?*

(II) *¿Y para un observador que está fuera?*

(III) *¿Y si el ascensor sube con la misma aceleración?*

(I) Tenemos que $\mathbf{a}_0 = -3,4ms^{-2}\hat{\imath}$ y $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -9,8ms^{-2}\hat{\imath}$. Entonces, como $\mathbf{a} = \mathbf{a'} + \mathbf{a}_0$, $\mathbf{a'} = (-9,8 - (-3,4))\hat{\imath} = -6,4ms^{-2}$.

(II) $\mathbf{g}$

(III) $\mathbf{a}_0 = 3,4\hat{\imath}$ y $\mathbf{a'} = (-9,8 - 3,4)\hat{\imath}$, entonces $\mathbf{a'} = -13,2\hat{\imath}m/s$.

Ejercicio 1.3.5. *Un hombre que se encuentra en un tren que se mueve a* $10ms^{-1}$ *tira una pelota y la recoge al caer. La velocidad de la pelota respecto del tren es de* $15ms^{-1}$ *dirigida hacia arriba.*

(I) *¿Cuál será el módulo y la dirección de la velocidad inicial de la pelota para un observador de pie junto a la via?*

(II) *¿Cuál es la velocidad de la pelota en el punto más alto para el observador que se encuentra dentro del tren? ¿Y para el hombre en la vía?*

(III) *Describa la trayectoria de la pelota para el hombre en la vía y para el hombre dentro del tren.*

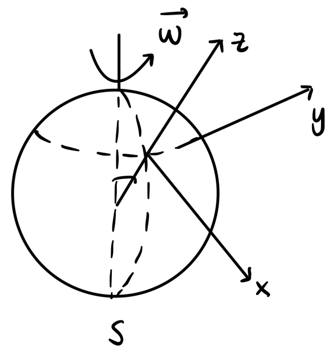
(I) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v'}_1 = 10\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}$, $|\mathbf{v}_1| = 18,03m/s$, $\tan\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 33,69°$.

(II) $\mathbf{a} = \mathbf{a'} + \mathbf{a}_0$ y $\mathbf{a'} = \mathbf{g} = -g\hat{\jmath}$. Además, $\mathbf{v'}_2 = 0$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v'}_2$, entonces $\mathbf{v}_2 = 10\hat{\imath}$.

(III) El movimiento de la pelota para el hombre en el tren es rectilíneo en k' y visto desde la vía será parabólico en k.

Movimiento con respecto a la tierra

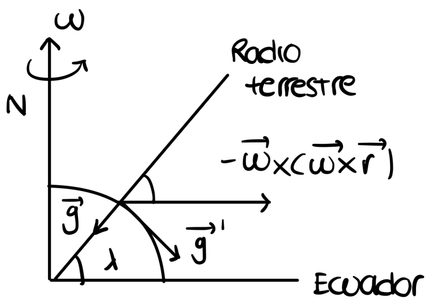
Podemos calcular ω sabiendo que cada 24h da una vuelta, $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}\text{rad}s^{-1}$ Una



partícula se mueve hacia el centro de la Tierra con aceleración $\mathbf{g}$ medida desde un sistema exterior:

$$\mathbf{a'} = \mathbf{g} - 2\mathbf{w} \times \mathbf{v'} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$$

Considera ahora λ la latitud que forma la línea que va del centro de la Tierra al punto con el plano del Ecuador.

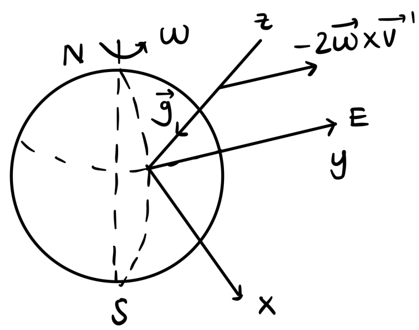


$$\mathbf{g'} = \mathbf{g} - \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$$

Sabemos que $\mid \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) \mid \approx 10^{-2} g$ en el Ecuador, donde es máxima. Y sabemos que $\mid \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) \mid = \omega^2 R \cos\lambda$. A medida que λ aumenta, $\mid \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) \mid$ disminuye. Deducimos entonces que será máxima en el Ecuador, donde $\mathbf{g'} = 9,78 ms^{-2}$ y 0 en el polo norte, donde $\mathbf{g'} = 9,83 ms^{-2}$.

Efecto coriolis

Si tiro un objeto desde lo alto de un rascacielos llevaría una aceleración de $\mathbf{g} - 2\mathbf{w} \times \mathbf{v'}$.



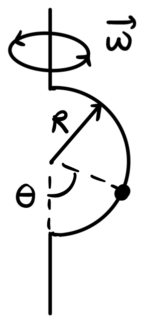
El sistema de la Tierra no es inercial sino rotatorio.

Ejercicio 1.3.6. *En la figura se observa una cuenta A pegada a un alambre de forma semicircular que gira a 15 revoluciones por segundo en torno al eje.*

(I) ¿Qué trayectoria describe la cuenta para un observador fijo? ¿Y para un observador que gira con el alambre?

(II) ¿Cuál será la aceleración de la cuenta para el observador fijo? ¿Y para el observador solidario al alambre? Indique módulo, dirección y sentido.

Considerar $R = 25cm$.



Tenemos que $\omega = 15 \cdot 2\pi = 30\pi \text{rad}/s$.

(I) La trayectoria para un observador fijo es una circunferencia de radio $R \operatorname{sen}\theta$ en k, y para un observador que gira con el alambre está quieta en k'.

(II) Sabemos que **a'** $= 0$ y que **v'** $= 0$. Entonces, $\mathbf{a} = \mathbf{a'} + 2\mathbf{w} \times \mathbf{v'} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$, $\mid \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) \mid = \omega^2 R \operatorname{sen}\theta$.

Ejercicio 1.3.7. *Una partícula se mueve con velocidad v_0 a lo largo de una ranura practicada a lo largo de un diámetro de un disco que gira a 30 revoluciones por minuto. Inicialmente la partícula estaba en un extremo del disco de radio R. Determinar la posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula en función del tiempo respecto:*

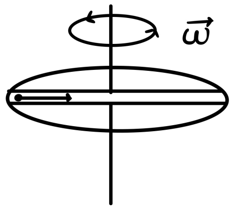
(I) Un observador ligado al disco.

(II) Un observador fijo en el suelo.

(Considerar sólo el movimiento hasta que llega al otro extremo del diámetro).

x' e y' coinciden en $t = 0$. Consideramos $\mathbf{r} = x'\hat{i}'$, y $\omega = 30 \cdot \frac{2\pi}{60} = \pi \text{rad}/s$, $\mathbf{w} = \omega\hat{k}$.

(I) $\mathbf{r} = (R - v_0 t)\hat{i}'$, $\mathbf{v'} = -v_0\hat{i}'$ y $\mathbf{a'}=\mathbf{0}$.



(II) Haciendo cálculos simples, obtenemos que $\mathbf{v} = \mathbf{v'} + \mathbf{w} \times \mathbf{r} = v_0\hat{\imath}' + \omega x'\hat{\jmath}'$. Para calcular $\mathbf{a} = \mathbf{a'} + 2\mathbf{w} \times \mathbf{v'} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$, primero tenemos que

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v'} = \omega\hat{k} \times (-v_0\hat{\imath}') = -v_0\omega\hat{\jmath}'$$

$$\mathbf{w} \times \mathbf{r} = \omega\hat{k} \times (x'\hat{\imath}') = \omega x'\hat{\jmath}'$$

$$\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = \omega\hat{k} \times (x'\omega)\hat{\jmath}' = -\omega^2 x'\hat{\imath}$$

Por lo tanto, $\mathbf{a} = -2\omega v_0\hat{\jmath}' - \omega^2 x'\hat{\imath}'$. Como $\hat{\imath}' = \cos\omega t\hat{\imath} + \operatorname{sen}\omega t\hat{\jmath}$ y $\hat{\jmath}' = -\operatorname{sen}\omega t\hat{\imath} + \cos\omega t\hat{\jmath}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -2\cos v_0(-\operatorname{sen}\omega t\hat{\imath} + \cos\omega t\hat{\jmath}) - \omega^2 x'(\cos\omega t\hat{\imath} + \operatorname{sen}\omega t\hat{\jmath}) \\ &= (2\pi v_0 \operatorname{sen}\omega t - \pi^2(R - v_0 t)\cos\omega t)\hat{\imath} - (2\pi v_0\cos\omega t + \pi^2(R - v_0 t)\operatorname{sen}\omega t)\hat{\jmath}\end{aligned}$$

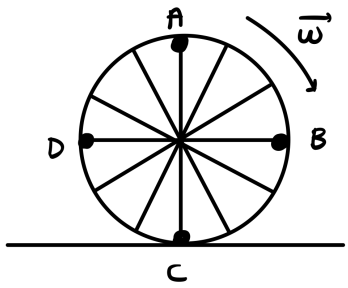
Entonces, la velocidad será:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -v_0(\cos\omega t\hat{\imath} + \operatorname{sen}\omega t\hat{\jmath}) + \omega x'(-\operatorname{sen}\omega t\hat{\imath} + \cos\omega t\hat{\jmath}) \\ &= -(v_0\cos\omega t + \omega(R - v_0 t)\operatorname{sen}\omega t)\hat{\imath} + (-v_0\operatorname{sen}\omega t + \omega(R - v_0 t)\cos\omega t)\hat{\jmath}\end{aligned}$$

La posición vendrá dada por $\mathbf{r} = (R - v_0 t)\cos\omega t\hat{\imath} + (R - v_0 t)\operatorname{sen}\omega t\hat{\jmath}$.

Ejercicio 1.3.8. *Una piedra está incrustada en la rueda de una bicicleta de radio $R = 55cm$ cuyo centro se desplaza con velocidad $v_0 = 15km/h$. Suponga que la rueda gira a una velocidad angular ω. Sobre el dibujo de la rueda indique las velocidades de la piedra relativas al centro de la rueda en las posiciones marcadas. ¿Cuál será la velocidad de la piedra en dichas posiciones respecto de un observador en el suelo? Si el punto más bajo ha de estar instantáneamente en reposo respecto al suelo (condición de rodadura), ¿qué relación existe entre ω y*

v_0?



Dado que $R = 0,55m$, $\mid \mathbf{v'} \mid = \omega \cdot R = 0,55\omega$. Por tanto, $\mathbf{v'}_A = 0,55\omega\hat{\imath}$, $\mathbf{v'}_B = -0,55\omega\hat{\jmath}$, $\mathbf{v'}_C = -0,55\omega\hat{\imath}$ y $\mathbf{v'}_D = 0,55\omega\hat{\jmath}$. Entonces, $\mathbf{v}_A = \left(\frac{25}{6} + 0,55\omega\right)\hat{\imath}$, $\mathbf{v}_B = \frac{25}{6}\hat{\imath} - 0,55\omega\hat{\jmath}$, $\mathbf{v}_C = \left(\frac{25}{6} - 0,55\omega\right)\hat{\imath}$ y $\mathbf{v}_D = \frac{25}{6}\hat{\imath} + 0,55\omega\hat{\jmath}$.

Si $v_C = 0 \Rightarrow \omega = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{0{,}55} = 7,57\text{rad}/s$. La condición de rodadura es $v = \frac{v_0}{R}$. En este caso, $v_A = \frac{25}{6} + o,55 \cdot \frac{25}{26} \cdot \frac{1}{0{,}55} = 2 \cdot \frac{25}{6}$, es decir $v_A = 2v_B$.

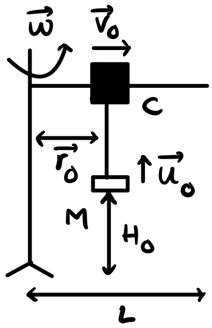
Si v_0 es constante, $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a'}_A$. Pero, $\mathbf{a}_0 = 0$, por tanto, $\mathbf{a}_A = -\omega^2 R\hat{\jmath}$, $\mathbf{a}_B = -\omega^2 R\hat{\imath}$, $\mathbf{a}_C = \omega^2 R\hat{\jmath}$ y $\mathbf{a}_D = \omega^2 R\hat{\imath}$.

Ejercicio 1.3.9. *El brazo de una grúa de construcción de longitud L se encuentra a una altura H. Cuando gira alrededor de su eje con una velocidad angular constante ω, el carro C se desplaza por su brazo, alejándose del eje con una velocidad v_0, a la vez que levanta un objeto M con una velocidad u_0 respecto a él. Si inicialmente el carro se encontraba a una distancia r_0 del eje y M a una distancia H_0 del suelo. ¿Cuál será la posición de M en función del tiempo referida a un observador fijo en el suelo? ¿Cuál será su velocidad? ¿Y su aceleración? ¿Cuál será la aceleración normal? ¿Y la aceleración tangencial?*

$$\mathbf{r} = (r_0 + v_0 t)\hat{\jmath}' + (H_0 + v_0 t)\hat{k}$$

Sabemos que $\hat{\jmath}' = -\operatorname{sen}\omega t\hat{\imath} + \cos\omega t\hat{\jmath}$. Por tanto,

$$\mathbf{r} = (r_0 + v_0 t)\operatorname{sen}\omega t\hat{\imath} + (r_0 + v_0 t)\cos\omega t\hat{\jmath} + (H_0 + v_0 t)\hat{k}$$



La velocidad es $\mathbf{v'} = v_0\hat{j}' + v_0\hat{k}$, y $\mathbf{w} = \omega\hat{k}$. Como $\mathbf{w} \times \mathbf{r} = -\omega(r_0 + v_0 t)\hat{i}'$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v'} + \mathbf{w} \times \mathbf{r} = -\omega(r_0 + v_0 t)\hat{i}' + v_0\hat{j}' + v_0\hat{k}$$

Ahora, $\mathbf{a'} = 0$, $\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = -\omega^2(r_0 + v_0 t)\hat{j}'$, y $\mathbf{w} \times \mathbf{v'} = -\omega v_0\hat{i}'$.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{a'} + 2\mathbf{w} \times \mathbf{v'} + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) \\ &= -2\omega v_0\hat{i}' - \omega^2(r_0 + v_0 t)\hat{j}'\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 2\omega^2 v_0(r_0 + v_0 t) - v_0\omega^2(r_0 + v_0 t)$$

$$v^2 = \omega^2(r_0 + v_0 t)^2 + v_0^2 + v_0^2$$

Finalmente, $\mathbf{a}_t = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t$.