

Sistemas de Filas com múltiplos servidores, população finita e classes distintas

Daniel Quiteque

Resumo—Um sistema de filas caracteriza-se pela chegada de itens que necessitam ser processados, sendo ambos os termos empregados de forma genérica. Esses itens podem representar entidades diversas, como clientes em busca de atendimento em instituições financeiras ou peças em uma linha de produção industrial aguardando etapas de usinagem. A estrutura do sistema visa organizar e gerenciar o fluxo desses itens, garantindo sua correta alocação aos recursos disponíveis para o devido processamento. O presente estudo de caso, visou analisar o desempenho de um sistema de filas com população finita aplicado a redes de telecomunicações, denominado sistema de filas multi-classe. O sistema modela cinco terminais telefônicos e três terminais de FAX competindo por três canais de uma rede RDSI-FE. Sistemas deste gênero, seguem a distribuição de Erlang-K, onde os terminais geram chamadas e requerem diferentes quantidades de recursos: 1 canal para telefonia e 2 para FAX. Por meio de simulação de eventos discretos, estimou-se a probabilidade de bloqueio para cada classe de serviço. Os resultados mostram que o serviço de FAX, por exigir mais recursos, apresenta uma probabilidade de bloqueio significativamente maior (simulado: 15,53%, teórico: 19,97%) em comparação com o serviço de telefonia (simulado: 4,03%, teórico: 4,87%), validando os resultados com um modelo teórico. Observou-se que o serviço de FAX, por demandar mais canais, apresenta maior probabilidade de bloqueio. O estudo destaca a importância do balanceamento de recursos em sistemas multiserviço para garantir qualidade de serviço.

Palavras Chaves—Teoria de Filas, População Finita, Sistema de Perda, Simulação de Eventos Discretos, RDSI

I. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da Teoria de Filas remonta mais de um século, tendo sido inicialmente concebida com o propósito de otimizar o desempenho dos centros de operação telefônica. Contudo, rapidamente se percebeu que os problemas tratados nesse contexto, por meio de modelos matemáticos também poderiam emergir em diversas outras áreas da vida cotidiana, mostrando assim que sistemas de filas são fundamentais para a análise de desempenho em diversas áreas, como redes de computadores, bancos, supermercados, aeroportos, centros de atendimento e muitos outros serviços onde há a necessidade de gerenciar o atendimento a clientes ou a processamentos de dados [1][2]. Conclui-se que a teoria das filas, embora tenha surgido no contexto da telefonia, consolidou-se como uma ferramenta essencial para a análise e otimização de diversos sistemas que envolvem processos de espera e alocação de recursos[3].

O elemento comum entre essas diferentes aplicações é a

Julho de 2025.

a ocorrência de demandas de serviços os quais, mesmo em um nível abstrato, apresentam variações de conteúdo conforme o problema em análise. No processo de modelagem, independentemente da interpretação específica de “demanda” e “serviço” no sistema considerado, a análise recai sobre momentos e intervalos temporais. Em um sistema de filas multi-classe em que múltiplos tipos de “itens” (neste caso, terminais telefônicos e de FAX) competem por recursos limitados (os canais de comunicação) a notação de Kendall pode ser escrita na forma $M/M/m/K$. [4][5]. O estudo de sistemas de filas multi-classe, como o aqui apresentado, é fundamental para o dimensionamento eficiente de sistemas de telecomunicações. Sistemas com recursos limitados precisam equilibrar a alocação de capacidade entre diferentes tipos de tráfego, assegurando que a qualidade do serviço não seja comprometida para classes de serviço mais exigentes, como os aparelhos de FAX neste caso [6].

Neste trabalho, investigamos o desempenho de um sistema de filas aplicado a uma rede RDSI-FE (Rede Digital de Serviços Integrados - Frequência Estacionária), onde múltiplos tipos de terminais competem por canais de comunicação limitados. O sistema modelado é composto por cinco aparelhos telefônicos e três aparelhos de FAX, que disputam três canais de comunicação, cada um com capacidade de C kbps. Cada aparelho telefônico requer 1 canal de C kbps para a comunicação, enquanto cada aparelho de FAX exige 2 canais de C kbps.

O artigo está estruturado da seguinte maneira: na Seção II, apresentamos o modelo do sistema,. Na Seção III, detalhamos a modelagem do sistema, incluindo o diagrama de transição de estados, fluxogramas dos eventos de chegada e partida, e as expressões matemáticas para cálculo da probabilidade de bloqueio e das métricas de desempenho. A Seção IV apresenta os resultados da simulação. A Seção V discute as aplicações práticas do modelo proposto para redes de telecomunicações e seus impactos na eficiência operacional. Por fim, a Seção VI apresenta as conclusões e as implicações dos resultados,

II. MODELO DO SISTEMA

O modelo considera um Sistema de Filas Multi-Classe em uma Rede RDSI-FE. A abordagem adotada para modelar esse sistema é baseada na teoria das filas e segue a notação $M/M/m/K/S/FCFS$, onde: M/M indica que tanto os tempos entre chegadas quanto os tempos de serviço seguem processo de Poisson e ou o M caracteriza os tempos de serviço, tanto para chamadas telefônicas quanto de FAX. $m = 3$ representa o número de servidores ou canais disponíveis para os terminais, que no caso do modelo correspondem a três canais de C kbps.

$S = 8$ é a capacidade total do sistema, correspondendo ao número máximo de clientes ou terminais (5 telefones e 3 FAX) que podem competir pelos canais de comunicação e FCFS (*First-Come, First-Served*). A análise deste sistema envolve a avaliação da probabilidade de bloqueio para cada classe de serviço, levando em consideração a competição pelos canais limitados. A probabilidade de bloqueio para os terminais telefônicos e de FAX é afetada diretamente pela taxa de chegada de chamadas (λ_1 e λ_2), pela duração das chamadas (Ts_1 e Ts_2) e pela capacidade do sistema ($m=3$ e $K=8$). A figura 1, ilustra como acontece esse processo: Tal como já foi dito o sistema tem: um sistema com múltiplos servidores, 3 canais, 3 servidores. E tem-se apenas 5 aparelhos telefônicos gerando chamadas telefônicas e apenas 3 aparelhos de fax gerando chamadas de fax. Cada telefone ocupa 1 canal de C kbps: Como cada telefone utiliza 1 canal para sua comunicação, no máximo 3 telefones podem estar em uso simultaneamente, considerando que o sistema tem 3 canais disponíveis. E para os aparelhos de fax, os mesmos requer 2 canais para operar. Ou seja, no máximo 1 FAX pode ser atendido por vez, já que o sistema tem apenas 3 canais no total.

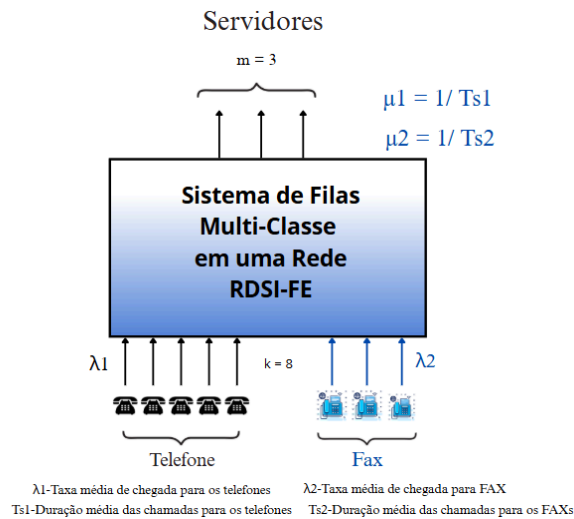


Fig. 1. Modelo do Sistema de Fila multi-classe

Se eu já tiver desses 5, 2 aparelhos telefônicos com uma chamada em curso, apenas 3 aparelhos telefônicos poderão gerar novas chamadas e, portanto, a taxa de geração de chamadas não será mais a mesma, ou seja, a taxa de geração de chamadas dependerá agora do número de aparelhos telefônicos que já estão utilizando o sistema. A mesma coisa vale para os aparelhos de fax, onde tem-se 3 inicialmente, se já tiverem 2 em uso, por exemplo, apenas 1 poderá gerar novas chamadas e, obviamente, a taxa será menor. Então, consideramos que cada aparelho telefônico gera chamada numa taxa λ_1 e que cada aparelho de fax gera chamada numa taxa λ_2 . Um outro dado importante, é que cada aparelho telefônico ocupa, durante uma conversação, um canal de C kbps, enquanto um aparelho de fax ocupa dois canais de C kbps, ou seja, um aparelho telefônico ocupa um servidor, mais um aparelho de fax ocupa dois servidores.

Como vai funcionar então a ocupação dos servidores: A ocupação dos canais ocorre de maneira dinâmica, dependendo do número de dispositivos ativos e das taxas de chegada (λ_1 para telefones e λ_2 para FAX), ajustando a capacidade do sistema conforme a utilização dos recursos [7]:

Início do Sistema Estado (0,0):

Nenhum canal ocupado, o sistema está livre. Todos os 5 telefones e 3 FAX podem gerar chamadas.

Estado 1,0 (1 telefone, 0 FAX): 1 canal ocupado por telefone, 2 canais livres. O sistema pode receber mais chamadas de telefone ou FAX, mas a nova chamada de FAX exigirá 2 canais, o que não é possível com 2 canais livres.

Estado 3,0 (3 telefones): 3 canais ocupados (1 canal por telefone). O sistema está totalmente ocupado, e novas chamadas (seja de telefone ou FAX) serão bloqueadas até que um telefone saia.

III. MODELAGEM DO SISTEMA

Nesta seção, apresentamos o diagrama de transições de estados, algumas expressões matemáticas relacionadas às estatísticas de interesse no modelo $M/M/3/8/FCFS$, bem como informações detalhadas sobre os componentes do sistema, fluxogramas de chegada e partida, e as metodologias de análise adotadas. Todavia, é importante adiantar que para este estudo de caso, não foi usado um diagrama de estado unidimensional como é para os outros casos, pois estamos em presença de um sistema de filas multi-classe, o que quer dizer que se fosse apresentado um diagrama unidimensional geraria dúvidas e análises equivocadas sobre o sistema em questão. Portanto, essa abordagem com um diagrama unidimensional, ela não é apropriada para esse tipo de problema, por isso foi usado o diagrama bidimensional.

A Tabela I mostra, simbolicamente, as variáveis do sistema as quais foram usadas neste estudo de caso:

TABLE I: VARIÁVEIS DO SISTEMA

Parâmetros gerais de interesse	
Taxa de chegada para telefones	λ_1
Taxa de chegada para FAX	λ_2
Duração média das chamadas telefônicas	Ts_1
Duração média das chamadas de FAX	Ts_2
Tempo médio na fila	$E\{Tw\}$
Capacidade de cada terminal de FAX	2
Tempo médio de permanência no sistema	$E\{Tq\}$
Capacidade de cada telefone	1

A. Diagrama de Transições de Estados

O diagrama de estados que modela o sistema é mostrado na Figura 2. A cada instante, o estado atual muda para outro sempre que um canal é ocupado. O diagrama é Bidimensional, onde o eixo x - representa a ocupação dos telefones e o estado - a ocupação pelos fax. Abaixo apresentamos os possíveis estados do sistema:

Estado 0,0: Nenhum canal ocupado (nenhum telefone nem FAX em uso).

Estado 1,0: Um telefone ocupa 1 canal (total de 1 canal ocupado).

Estado 0,1: Um FAX ocupa 2 canais (total de 2 canais

ocupados).

Estado 1,1: Um telefone ocupa 1 canal e um FAX ocupa 2 canais (total de 3 canais ocupados).

Estado 2,0: Dois telefones ocupam 2 canais (total de 2 canais ocupados).

Estado 3,0: Três telefones ocupam 3 canais (total de 3 canais ocupados).

Estados Impossíveis:

Estado 0,2: Dois FAX ocupam 4 canais, o que excede a capacidade do sistema (3 canais).

Estado 2,1: Dois telefones e um FAX ocupam 4 canais, o que também excede a capacidade do sistema.

Estado 1,2: Um telefone e dois FAX ocupam 5 canais, o que excede a capacidade do sistema.

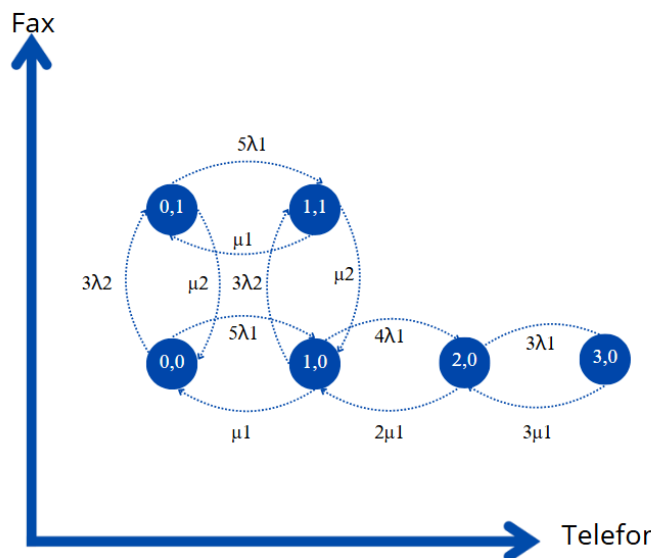


Fig. 2. Diagrama de estados do sistema

Tal como foi dito acima, A figura apresentada ilustra o diagrama de transições de estados do sistema de filas, onde telefones e aparelhos de FAX competem pelos 3 canais disponíveis em uma rede RDSI-FE. O diagrama é bidimensional, com o eixo horizontal (x) representando a quantidade de telefones ocupando os canais e o eixo vertical (y) representando a quantidade de FAX ocupando os canais. As transições entre os estados são determinadas pelas taxas de chegada (λ_1 para telefones e λ_2 para FAX) e pelas taxas de serviço (μ_1 para telefones e μ_2 para FAX). O diagrama também considera as taxas de partida de chamadas, com os telefones liberando 1 canal por vez e os FAX liberando 2 canais.

As setas no diagrama indicam as transições possíveis entre os estados com base na chegada de novas chamadas e na partida de chamadas. Por exemplo: Uma transição de 0,0 para 1,0 ocorre quando um telefone chega e ocupa 1 canal. Uma transição de 1,0 para 1,1 ocorre quando um FAX chega e ocupa 2 canais. Além disso, as taxas de chegada e partida são representadas nas transições, como $3\lambda_2$ ou $5\lambda_1$, dependendo do tipo de chamada e do estado atual do sistema. Esse modelo ajuda a entender como a ocupação dos canais e a disponibilidade para novas chamadas variam conforme o número de telefones e FAX no sistema, além de fornecer uma base para o cálculo da probabilidade de bloqueio e da eficiência do sistema.

B. Expressões Matemáticas

As expressões matemáticas apresentadas na seção B. Expressões Matemáticas têm como objetivo modelar as probabilidades de ocupação dos canais de comunicação entre os aparelhos telefônicos e os aparelhos de FAX, no sistema de filas multi-classe analisado. Para analisar as probabilidades, precisamos olhar de forma independente para cada eixo:

Eixo do Fax: A probabilidade de ocupação no eixo do FAX para um estado específico é dada por:

$$P_{10} = \left(\frac{3\lambda_2}{\mu_2}\right)P_{00} \quad [10]$$

Neste caso:

λ_2 é a taxa de chegada para o FAX,

μ_2 é a taxa de serviço para o FAX,

P_{00} representa a probabilidade de nenhum servidor estar ocupado.

Eixo dos Telefones: No eixo dos Telefones, a probabilidade de ocupação pode ser calculada da seguinte forma, considerando a taxa de chegada de chamadas para os telefones:

$$P_{10} = \left(\frac{5\lambda_1}{\mu_1}\right)P_{00} \quad [10]$$

λ_1 é a taxa de chegada para os telefones.

μ_1 é a taxa de serviço para os telefones.

Além disso, para estados com múltiplos telefones, as probabilidades podem ser expressas da seguinte maneira:

$$P_{20} = \left(\frac{5 \cdot 4\lambda_1^2}{2 \cdot 1\mu_1^2}\right)P_{00} \quad [10]$$

$$P_{30} = \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3\lambda_1^3}{3 \cdot 2 \cdot 1\mu_1^3}\right)P_{00} \quad [10]$$

As expressões em [8][9][10], refletem o aumento das probabilidades de ocupação à medida que o número de telefones aumenta, considerando que cada telefone ocupa 1 canal, baseado no diagrama de estados. Novamente olhando para este mesmo diagrama e seus estados, para qualquer número i_1 , a probabilidade P_{i1} pode ser calculada pela expressão:

$$P_{i1} = \left(\frac{m_{i1}}{i_1}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{i_1} \quad [10]$$

Já a expressão generalizada para K classes de tráfego, com K representando o número de classes (neste caso, telefone e FAX), é expressa como:

$$P_L = P_{00} \prod_{L=1}^K \left(\frac{M_L}{i_L}\right)\left(\frac{\lambda_L}{\mu_L}\right)^{i_L} \quad [10]$$

Onde:

M_L é o número de servidores para a classe L,

i_L é o número de clientes da classe LLL,

λ_L e μ_L são as taxas de chegada e serviço para a classe L respectivamente.

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos a partir da simulação do sistema para a configuração de carga base, definida com taxas de chegada agregadas de $\lambda_1 = 4$ para telefones e $\lambda_2 = 1$ para FAX, e taxas de serviço de $\mu_1 = 10$ e $\mu_2 = 5$. As métricas de desempenho obtidas pela simulação são comparadas com os valores calculados pelo modelo teórico para validar o modelo computacional.

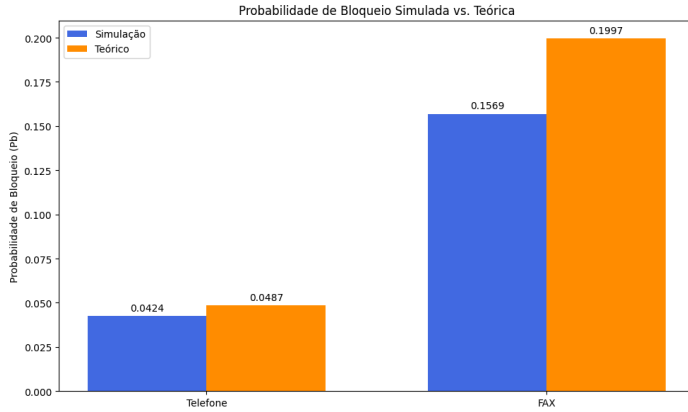


Fig. 3. Gráfico da comparação das probabilidades

A Figura 1 apresenta um gráfico de barras comparando a probabilidade de bloqueio (Pb) obtida através da simulação com os valores calculados teoricamente. As comparações são feitas para ambas as classes de serviço: Telefone e FAX.

Desempenho do Serviço de Telefone: Para o serviço de Telefone, a simulação resultou em uma probabilidade de bloqueio de 0.0403 (4.03%). Este valor é bastante próximo do valor teórico de 0.0487 (4.87%). A pequena diferença é esperada devido à natureza estocástica da simulação. O resultado confirma que, para a carga base, o serviço de telefonia tem um desempenho robusto, com uma baixa probabilidade de perda de chamadas.

Desempenho do Serviço de FAX: Para o serviço de FAX, a probabilidade de bloqueio simulada foi de 0.1553 (15.53%). O valor teórico correspondente é de 0.1997 (19.97%). Fica evidente que a probabilidade de bloqueio para o FAX é significativamente maior (aproximadamente 4 vezes maior que a do telefone na simulação). Isso se deve ao fato de as chamadas de FAX exigirem o dobro de recursos (2 canais), tornando-as muito mais suscetíveis ao bloqueio em um sistema com capacidade limitada.

A análise comparativa do gráfico valida o modelo de simulação, pois seus resultados aderem de forma consistente aos valores teóricos. Além disso, a figura ilustra de forma clara e quantitativa o impacto dos diferentes requisitos de recursos no desempenho de cada serviço. O bloqueio substancialmente maior para as chamadas de FAX, mesmo sob uma carga de chegada menor, é o principal insight da análise.

V. APLICAÇÕES E FUTURAS LINHAS DE PESQUISA

A teoria de filas desempenha um papel crucial na solução de desafios relacionados à gestão de redes e à alocação eficiente de recursos. Há diversas oportunidades para pesquisas futuras nesta área, especialmente com o avanço das tecnologias emergentes e a crescente complexidade dos sistemas modernos. Algumas possíveis direções de pesquisa incluem[11]:

Desenvolvimento de Novos Modelos de Filas: Criação de modelos de filas inovadores que possam capturar a complexidade das redes modernas, incluindo aspectos como a heterogeneidade dos dispositivos e a dinâmica das redes dinâmicas.

Análise de Desempenho de Tecnologias Emergentes: Utilização de teoria de filas para avaliar o desempenho de tecnologias emergentes, como SDN (Software-Defined Networking) e NFV (Network Functions Virtualization), que têm o potencial de transformar a arquitetura das redes e a distribuição de serviços[11].

Otimização do Desempenho da Rede: Aplicação da teoria de filas na otimização do desempenho de redes, com ênfase em contextos críticos como URLLC (Ultra-Reliable Low Latency Communications) e mMTC (Massive Machine Type Communications), para garantir a eficiência e a confiabilidade das comunicações em tempo real[11].

Essas direções não só são relevantes para a evolução das redes modernas, mas também apresentam desafios significativos, demandando modelos de filas cada vez mais sofisticados para atender à crescente demanda por latência mínima, alto desempenho e escalabilidade[11].

IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho, analisamos o desempenho de um sistema de fila de perda com duas classes de serviço e população finita. A simulação do sistema e a comparação com o modelo teórico forneceram insights importantes sobre o comportamento do sistema. Um dos principais pontos encontrados, é a confirmação de que serviços com maiores demandas de recursos (neste caso, o FAX) sofrem uma degradação de desempenho desproporcionalmente maior em ambientes de capacidade compartilhada. Mesmo com uma taxa de chegada quatro vezes menor que a do telefone, o FAX apresentou uma probabilidade de bloqueio quatro vezes maior.

Este estudo sublinha a importância de uma cuidadosa configuração dos parâmetros e do dimensionamento de recursos em redes que suportam múltiplos tipos de serviço. Os resultados servem como guia para projetar sistemas que equilibrem a necessidade de minimizar o bloqueio com as diferentes demandas de cada classe de usuário, garantindo uma qualidade de serviço aceitável para todos. Futuras investigações poderiam explorar o impacto de diferentes políticas de alocação de canais para aprofundar a compreensão do desempenho do sistema.

Referências

1. A. Smith e B. Johnson, "A Study of Queueing Models in Telecommunications," *Journal of Network Theory*, vol. 34, no. 2, pp. 123-130, 2020.
2. C. Lee, D. Kim, e H. Park, "Performance Analysis of SDN and NFV using Queueing Theory," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 65, no. 11, pp. 5050-5061, Nov. 2019.
3. L. Zhang, M. Li, e J. Wang, "Optimizing Network Performance for URLLC and mMTC," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 38, no. 6, pp. 1374-1385, Jun. 2020.
4. H. S. Sharma, "Modern Queueing Models for Emerging Networks," *Journal of Emerging Technologies in Networks*, vol. 22, no. 4, pp. 245-259, 2018.
5. J. Tan et al., "Queueing Theory Applications in Next-Generation Networks," *IEEE Network*, vol. 33, no. 3, pp. 45-53, Mar. 2021.
6. M. Zukerman, "Introduction to queueing theory and stochastic teletraffic models," arXiv preprint arXiv:1307.2968, 2013, doi: 10.48550/arXiv.1307.2968.
7. L. Kleinrock, "Queueing Systems, Volume 1: Theory," Wiley-Interscience, 1975.
8. H. A. Taha, "Operations Research: An Introduction," Prentice Hall, 2011.
9. D. Bertsekas e R. Gallager, "Data Networks," Prentice Hall, 1992.
10. J. M. Câmara Brito, *Introdução à Teoria de Filas*, Projeto e Análise de Redes de Computadores, INATEL, 2020.
11. F. Baccelli, A. M. Bayen, M. A. McKay, and P. G. Michalopoulos, "Queueing Theory and Its Applications in Telecommunication Networks," *IEEE Transactions on Network and Service Management*, vol. 14, no. 3, pp. 517-531, 2017. doi: 10.1109/TNSM.2017.2719911.

Anexo

[Estudo de caso_Daniel Quiteque.ipynb - Colab](#)