

# CALCULADORA CROMÁTICA



Por:

Luis Daniel Ramos López

Dra. María Guadalupe Rodríguez Sánchez.

## **Importante:**

El programa se ejecuta gracias al JDK 19, si no puedes entrar al programa, descarga e instala el siguiente archivo:

[https://download.oracle.com/java/19/archive/jdk-19\\_windows-x64\\_bin.exe](https://download.oracle.com/java/19/archive/jdk-19_windows-x64_bin.exe)

## Introducción

Sea  $G = (V, A)$  una gráfica, donde  $V$  denota el conjunto de vértices y  $A$  el conjunto de aristas de  $G$ . Las aristas son pares no ordenados de vértices que forman una arista  $\{u, v\}$ , donde  $u, v \in V$ , se permite que  $u = v$ . Si  $\{u, v\}$  es una arista, se dice que  $u$  y  $v$  son adyacentes.

En una representación geométrica de  $G$ , los vértices se representan por puntos y las aristas por líneas que unen dos puntos si los vértices correspondientes son adyacentes.

Dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas si existe una función biyectiva  $f$  entre los vértices de  $G_1$  y  $G_2$ , y una función biyectiva  $g$  entre aristas de  $G_1$  y  $G_2$ , tales que una arista  $e$  es incidente a los vértices de  $u$  y  $v$  en  $G_1$  si solo si la arista  $g(e)$  es incidente a los vértices  $f(u)$  y  $f(v)$  en  $G_2$ .

Este programa se utilizará para calcular el polinomio cromático  $P(G, \lambda)$  y las clases cromáticas.

## Algunos conceptos clave

El polinomio cromático  $P(G, \lambda)$  es un invariante de una gráfica  $G$ . Si  $\lambda$  es un número entero positivo, entonces  $P(G, \lambda)$  proporciona el número de coloraciones distintas de los vértices de  $G$  usando  $\lambda$  colores.

Una clase cromática es el conjunto de gráficas que comparten el polinomio  $P(G, \lambda)$ .

La cromaticidad de una gráfica  $G$  es el número de gráficas no isomorfas que pertenecen a la clase de  $G$ .

Sea  $G$  una gráfica con polinomio cromático  $P(G, \lambda)$ , se dice que  $G$  es cromáticamente única si y solo si ninguna gráfica no isomorfa a ella tiene a  $P(G, \lambda)$  como polinomio cromático.

## Instrucciones de uso de la “Calculadora cromática”.

En el menú principal, se pueden escoger dos funciones:

1. **Calcular el polinomio cromático** de una gráfica dada su matriz de adyacencia o su lista de aristas. Sea  $n$  el número de vértices de la gráfica, para  $n \leq 8$ , se calcula también la cromaticidad de la gráfica.
2. **Calcular la clase cromática** de una gráfica dada su matriz de adyacencia, o todas las clases cromáticas de  $n$  vértices.

A continuación, se darán instrucciones de uso de las dos funciones:

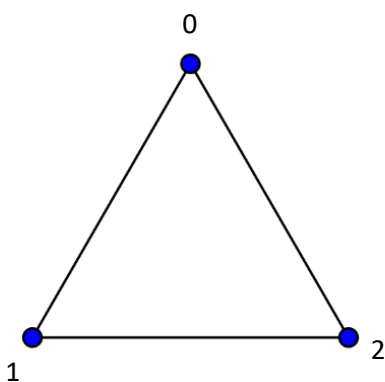
### Calculadora de polinomios

El número de vértices debe ser un número entero positivo mayor que 1.

Se puede ingresar la información de la gráfica de dos formas: Lista de aristas y matriz de adyacencia. A continuación, se mostrará la sintaxis de cada una de estas.

**Lista de arista:** Para ingresar una gráfica de esta manera, los vértices deben de estar etiquetados del 0 al  $n - 1$ , la sintaxis de una arista está compuesta como  $\{u, v\}$ , donde  $u$  y  $v$  son dos vértices adyacentes, SIN NINGÚN ESPACIO. Cada par de aristas deben de estar separadas por un espacio, o por un salto de línea.

Ejemplo



**Calculadora del polinomio cromático de una gráfica**

Elige la forma en la que está representada tu gráfica:

☒ Lista de aristas

☐ Matriz de adyacencia

Ingresa el número de vértices:

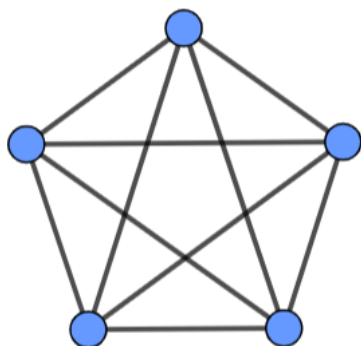
3

Ingresa tus aristas o matriz de adyacencia:

{0,1} {0,2} {1,2}

**Matriz de adyacencia:** Para ingresar una gráfica de esta manera, se debe de ingresar la matriz como una matriz de ceros y unos, cada par elementos de una fila deben de estar separados por un espacio y cada fila deben de estar separada por un salto de línea.

Ejemplo:



Elige la forma en la que está representada tu gráfica:

☒ Lista de aristas

☐ Matriz de adyacencia

Ingresa el número de vértices:

3

Ingresa tus aristas o matriz de adyacencia:

```
0 1 1 1 1
1 0 1 1 1
1 1 0 1 1
1 1 1 0 1
1 1 1 1 0
```

Si ya están todos los datos completos, para calcular el polinomio cromático se tiene que pulsar el botón “¡Calcula el polinomio!”.

Polynomial Calculator - Calculadora del polinomio cromático de una gráfica

**Calculadora del polinomio cromático de una gráfica**

Elige la forma en la que está representada tu gráfica:

☐ Lista de aristas

☒ Matriz de adyacencia

Ingresa el número de vértices:

5

Ingresa tus aristas o matriz de adyacencia:

```
0 1 1 1 1
1 0 1 1 1
1 1 0 1 1
1 1 1 0 1
1 1 1 1 0
```

**Calculadora cromática**

Si necesitas ayuda, puedes consultar las instrucciones de uso en el archivo instrucciones.pdf, que se encuentra en la carpeta de instalación del programa.

Resultado:

**Polinomio cromático:**  
 $\lambda^5 - 10\lambda^4 + 35\lambda^3 - 50\lambda^2 + 24\lambda$ .  
La gráfica es cromáticamente única.

Si se presenta algún error en los datos, por lo general, el resultado quedará en blanco.

El resultado es un polinomio simplificado en términos de lambda  $\lambda$ , simplificado.

La complejidad del algoritmo que calcula el polinomio es de  $O(2^n)$  donde  $n$  es el número de vértices en la gráfica.

Para vértices  $n < 9$ , se añadirá un texto que mencionará si la gráfica  $G$  es cromáticamente única (quiere decir, que la gráfica no comparte el mismo polinomio con una gráfica no isomorfa a  $G$ ), o en caso contrario, mencionará el número de gráficas no isomorfas a  $G$  que comparten el mismo polinomio.

Resultado:

Polinomio cromático:

$$\lambda^5 - 10\lambda^4 + 35\lambda^3 - 50\lambda^2 + 24\lambda.$$

La gráfica es cromáticamente única.

Resultado:

Polinomio cromático:

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda.$$

La gráfica comparte su polinomio con 2 gráfica(s) no isomorfa(s) a ella.

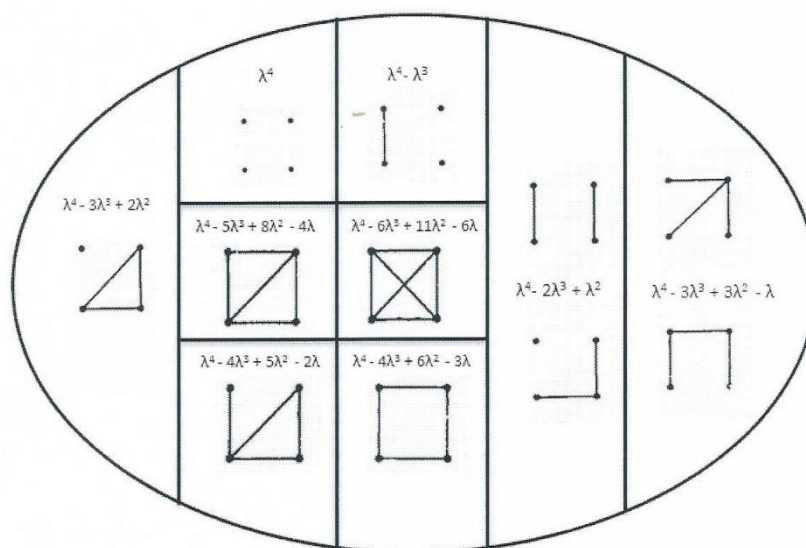
## Calculadora de clases cromáticas

Esta función puede calcular la clase cromática de una gráfica, quiere decir, calcula todas las gráficas no isomorfas (excepto una, la gráfica isomorfa a la entrada que está guardada en el programa) que tienen el mismo polinomio cromático que la gráfica original. También puede calcular todas las clases cromáticas de las gráficas de  $n$  vértices, con  $n \leq 8$ .

**Cálculo de todas las clases cromáticas de  $n$  vértices.** En esta sección solo se tiene que ingresar el número de vértices  $n$ , a continuación, hacer click en el botón que dice “¡Calcula la clase!”.

Ejemplo:

Las clases cromáticas de las gráficas de 4 vértices son las siguientes:



Para calcular estas clases cromáticas basta con colocar la opción adecuada y el 4 en el lugar del número de vértices:

Calculadora de clases cromáticas

Elige la opción que deseas calcular:

☒ Calcular todas las clases de n vértices
 ☐ Calcular la clase de una gráfica dada su matriz de adyacencia

Ingresar el número de vértices:

4

El resultado será el siguiente:

Las gráficas de 4 vértices tienen 9 clases de polinomios.

Polinomio:  $\lambda^4$ .

Existe 1 gráfica en la clase:

0 0 0 0

0 0 0 0

0 0 0 0

0 0 0 0

Polinomio:  $\lambda^4 - \lambda^3$ .

Existe 1 gráfica en la clase:

0 0 0 1

0 0 0 0

0 0 0 0

1 0 0 0

Polinomio:  $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2$ .

Existen 2 gráficas no isomorfas que pertenecen a esta clase:

0 0 0 1

0 0 0 1

0 0 0 0

1 1 0 0

0 0 1 0

0 0 0 1

1 0 0 0

0 1 0 0

Polinomio:  $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda$ .

Existen 2 gráficas no isomorfas que pertenecen a esta clase:

0 0 0 1

0 0 0 1

0 0 0 1

1 1 1 0

0 0 1 1

0 0 0 1

1 0 0 0

1 1 0 0

Polinomio:  $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2$ .

Existe 1 gráfica en la clase:

0 0 1 1

0 0 0 0

1 0 0 1

1 0 1 0

Polinomio:  $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda$ .

Existe 1 gráfica en la clase:

0 0 1 1

0 0 0 1

1 0 0 1

1 1 1 0

Polinomio:  $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda$ .

Existe 1 gráfica en la clase:

0 0 1 1

0 0 1 1

1 1 0 0

1 1 0 0

Polinomio:  $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda$ .

Existe 1 gráfica en la clase:

0 0 1 1

0 0 1 1

1 1 0 1

1 1 1 0

Polinomio:  $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda$ .

Existe 1 gráfica en la clase:

0 1 1 1

1 0 1 1

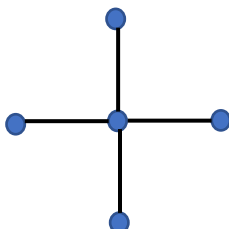
1 1 0 1

1 1 1 0

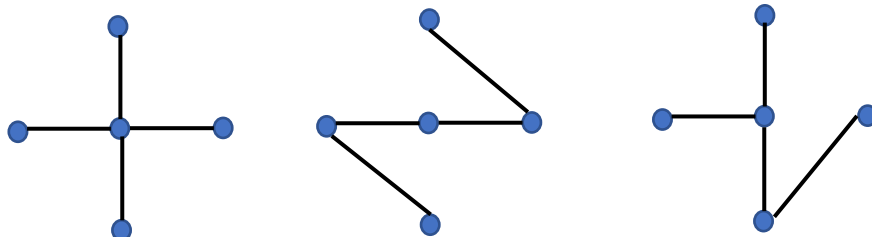
**Calculadora de la clase cromática de una gráfica.** En esta sección se tiene que poner la opción adecuada, el número de vértices de la gráfica e ingresar en el cuadro de texto grande la matriz de adyacencia de la gráfica, de la misma manera que en la calculadora de polinomios cromáticos, seguido de esto, pulsar el botón de “¡Calcula la clase!”.

Ejemplo:

Se quiere calcular la clase cromática de la siguiente gráfica:



En este caso, al ser un árbol, comparte el polinomio cromático con todos los árboles de 5 vértices no isomorfos a la gráfica, por lo tanto, las gráficas en su clase cromática son las siguientes:



El polinomio cromático que comparten es  $\lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda$ .

Este cálculo se puede realizar en el programa, con la entrada la matriz de adyacencia de la gráfica inicial.

Calculadora de clases cromáticas

Elige la opción que deseas calcular:  
☐ Calcular todas las clases de n vértices  
☒ Calcular la clase de una gráfica dada su matriz de adyacencia

Ingresa el número de vértices:

Ingresa tus aristas o matriz de adyacencia:  

0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0

El resultado que arroja el programa es el siguiente:

Polinomio:  $\lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda$       0 0 0 1 1

La gráfica comparte su polinomio con      0 0 0 0 1  
las siguientes 3 gráficas, una de      0 0 0 0 1  
estas es isomorfa a ella:

0 0 0 0 1      1 0 0 0 0

0 0 0 0 1      1 1 1 0 0

0 0 0 0 1      0 0 1 0 1

0 0 0 0 1      0 0 0 1 1

1 1 1 1 0      1 0 0 0 0

0 1 0 0 0

1 1 0 0 0

El programa tiene detectores de errores muy simples, si encuentra alguno, o para  
quejas y sugerencias, por favor enviar un correo a [daniel.ramos@omegaup.com](mailto:daniel.ramos@omegaup.com).