Terceiro projeto de IE509
Estimação de Resposta ao Impulso

13 de outubro de 2018

1 Introdução

Suponha que você quer estimar a resposta ao impulso $h[k]$ de um sistema. Como uma aplicação, podemos usar a resposta ao impulso acústico de uma garrafa para ”colocar” um elefante em uma garrafa, como visto nesse vídeo que é uma ótima revisão da convolução: `youtu.be/nWHX_5gfMco`. Caso você queira também colocar o elefante na garrafa, você pode baixar a resposta ao impulso e o som do elefante.

A estimação da resposta ao impulso pode ser feita colocando um ruído branco na entrada do sistema, observando sua saída, e fazendo algumas operações. Por exemplo, para medir a resposta ao impulso da garrafa, podemos colocar um alto falante tocando um ruído branco conhecido, $w[k]$, medir com um microfone o áudio resultante dentro da garrafa, $r[k]$, e usar esses dois sinais para a estimação.

Antes de começar, usar um alto falante para medir a resposta ao impulso é muito trabalhoso para os fins desse projeto. Vamos então usar a resposta ao impulso da garrafa do vídeo acima e simular esse experimento. Para isso, você vai ler o arquivo de áudio com a resposta ao impulso, $h[k]$, gerar o ruído de excitação $w[k]$ e o ruído de leitura $n[k]$, e vai simular a gravação usando uma convolução: $r[k] = w[k] * h[k] + n[k]$. Assuma que o ruído de leitura tem variância 0.01.

Nesse projeto, vamos estudar três formas de estimar a resposta ao impulso da garrafa do vídeo acima, comparando a qualidade da estimação de cada um deles. Para isso, seja $\hat{h}[k]$ um estimador de $h[k]$. Vamos medir a qualidade da estimação calculando a distância entre a resposta e sua estimativa, normalizando pelo “tamanho” de $h[k]$:

$$\frac{\sum |h[k] - \hat{h}[k]|^2}{\sum |h[k]|^2}$$

A motivação para essa normalização é que, por exemplo, um erro de uma unidade é mais sério se $h[k] = 1$ do que se $h[k] = 1000$. A normalização dá o erro como uma fração do tamanho de $h[k]$.

Prazo: 22/11

2 Estimação por Correlação

1. A correlação cruzada entre duas sequências pode ser estimada por uma média amostral:
$$\rho[k] = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{K} r[m]w[m-k].$$
Mostre como essa correlação pode ser obtida através da passagem de $r[k]$ por um filtro cuja resposta seja $w[-k]$.

2. Calcule a transformada de Fourier de $\rho[k]$ a partir das transformadas de $w[k]$ e $h[k]$. Sabendo que o ruído é branco, estabeleça uma relação aproximada entre as transformadas de Fourier de $\rho[k]$ e $h[k]$. Finalmente, use esse resultado para estabelecer uma relação aproximada entre $\rho[k]$ e $h[k]$, surgindo assim o primeiro método para estimar $h[k]$ a partir de $r[k]$.

3. Implemente o estimador acima. Para isso, você pode usar os programas de cálculo de correlação já implementados em Matlab, Python, Octave, ou a linguagem que você escolher.

3 Melhorando a Correlação

Na derivação do estimador anterior, você deve ter usado o fato de que se o ruído é branco, então a densidade espectral de potência é igual a 1. Por outro lado, $P(f)$, a transformada de Fourier de $\rho[n]$, não depende da densidade espectral de potência de $w[n]$, mas depende de $W(f)$, a transformada de Fourier de uma única realização do processo estocástico, aquela que você gerou. Lembrando que a densidade espectral de potência é $E[|W(f)|]^2$, sugira e implemente um segundo detector.

Verifique por simulação que, para um mesmo número de amostras de ruído $w[k]$, o segundo detector é melhor do que o primeiro.

4 Mínimo Erro Quadrático Médio

Finalmente, vamos estimar o canal usando um estimador de mínimo erro quadrático médio. Para isso, vamos considerar que os ruídos e o sinal medido pelo microfone são processos estocásticos $R[k]$, $W[k]$ e $N[k]$. Para começar, mostre que podemos escrever $R[k] = \mathbf{W}^T[k]\mathbf{h} + N[k]$, mostrando como os vetores $\mathbf{h}$ e $\mathbf{W}^T[k]$ podem ser escritos, respectivamente, a partir da resposta ao impulso do canal, $h[k]$, e a partir das amostras do ruído de excitação, $W[k]$.

A ideia do estimador de mínimo erro quadrático médio (MMSE, do inglês minimum mean-squared error) é a hipótese do ruído benevolente. Vamos imaginar que você chute que a resposta ao impulso é dada por um valor $\mathbf{h}_0$ qualquer. Com esse chute, você está essencialmente supondo que as amostras de ruído são dadas por $N[k] = R[k] - \mathbf{W}^T[k]\mathbf{h}_0$. A hipótese do ruído benevolente diz que, entre todas as possibilidades, você deve escolher aquela que supõe o ruído com a menor variância. Ou seja, eu devo estimar a resposta ao impulso do canal como aquela que minimiza

$$E[|N[k]|]^2 = E[|R[k] - \mathbf{W}^T[k]\mathbf{h}|^2].$$

Derivando em relação a $\mathbf{h}$ usando a regra da cadeia, chegamos ao princípio da ortogonalidade:

$$E[\mathbf{W}[k](R[k] - \mathbf{W}^T[k]\mathbf{h})] = 0.$$

Finalmente, concluímos que a melhor estimativa da resposta ao impulso do canal, de acordo com esse critério, deve satisfazer

$$E[\mathbf{W}[k]R[k] - \mathbf{W}[k]\mathbf{W}^T[k]\mathbf{h}] = 0 \Rightarrow E[\mathbf{W}[k]\mathbf{W}^T[k]]\mathbf{h} = E[\mathbf{W}[k]R[k]]$$

Use os valores de $w[k]$ e $r[k]$ para estimar os valores esperados acima e estime o canal de acordo com o critério MMSE. Vai ser necessário criar uma matriz de autocorrelação para isso. O jeito mais fácil para fazer isso, na minha opinião, é usar as funções de correlação e de criação de matriz Toeplitz da linguagem que você escolheu. Em Python você não precisa criar explicitamente a matriz: a função `solve_toeplitz` do `scipy` é muito mais eficiente, e dispensa a criação da matriz. Não encontrei uma função equivalente em matlab.

Questões bonus:

- Existe uma relação muito forte entre o MMSE e o primeiro estimador, baseado na correlação. Identifique essa relação, mostrando quais aproximações podem ser feitas ao estimador MMSE que levam ao estimador de correlação, e justificando a validade destas aproximações.

- Também existe uma relação muito forte entre a regressão linear, projeção em subepsaços e o estimador MMSE como implementado acima, em que os valores esperados são estimados a partir dos dados. Mostre que, na realidade, os três são exatamente a mesma coisa.