

# Árvores AVL

Estruturas de Dados e Algoritmos – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira  
Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília,  
Campus Taguatinga



# Sumário

---

- 1 Introdução
- 2 Implementação
- 3 Considerações



# Sumário

---

## 1 Introdução



# Árvores AVL

---

- As árvores AVL foram as primeiras BST balanceadas da literatura.
- Nomeada de acordo com os seus desenvolvedores: Georgy **A**delson-**V**elsky e Evgenii **L**andis.
- Possuem tempo de consulta/inserção/remoção limitado a  $\Theta(\lg n)$ .
- São estruturas que são auto-balanceáveis, tentando deixar as alturas dos nós de cada nível próximas.



# Árvore AVL

---

- Antes de expor os algoritmos que atuam sobre esta estrutura de dados, é necessário formalizar alguns conceitos.



# Sumário

---

- 1 Introdução
  - Conceitos preliminares
  - Operações em árvores AVL



# Árvore AVL

---

## Definição ( $h(x)$ )

- Seja  $T$  uma árvore binária com raiz no nó  $x$  e seja uma função  $ht(v)$  que nos dá a altura de um nó  $v \in T$ .
- A função  $h(T)$  corresponde à seguinte definição:

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T \text{ é uma árvore vazia} \\ ht(x) + 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



# Árvore AVL

---

## Definição (Fator de Equilíbrio)

Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as subárvores da esquerda e da direita de uma árvore com raiz no nó  $x$ .

O fator de equilíbrio (*balance factor*) de  $x$  é dado como:

$$bf(x) := h(T_1) - h(T_2)$$





# Árvore AVL

---

## Definição (Árvore AVL)

Seja  $T$  uma árvore binária de pesquisa.  $T$  também é uma árvore AVL se e somente se:

- $T$  é vazia; ou
- $-1 \leq bf(x) \leq 1, \forall x \in T$



# Árvore AVL

---

`figuras/AVL-tree.pdf`



# Árvore AVL

---

## Fator de Equilíbrio

- Em árvores AVL, o fator de equilíbrio de cada nó está limitado a três possíveis valores:  $\{-1, 0, 1\}$ .
- Esta restrição que possibilita operações de inserção/remoção/busca serem efetuadas em tempo  $\Theta(\lg n)$ .



# Árvore AVL

---

`figuras/AVL-tree.pdf`



# Sumário

---

- 1 Introdução
  - Conceitos preliminares
  - Operações em árvores AVL



# Operações em Árvores AVL

---

- Como árvores AVL são especializações de BST, os procedimentos de inserção, remoção e busca são bem parecidos.
- A diferença é que, após uma inserção e remoção, a árvore pode ficar desbalanceada, isto é, o fator de equilíbrio de algum nó está fora do intervalo  $\{-1, 0, 1\}$ .
- Assim, é necessário rebalancear a árvore.



# Balanceamento em Árvores AVL

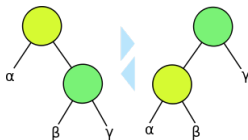
---

- O rebalanceamento é feito através de rotações, que podem ser:
  - ▶ Rotações para a esquerda.
  - ▶ Rotações para a direita.
- Uma rotação não interfere na propriedade de BST, isto é, a subárvore da esquerda continua os elementos com chaves menores do que a nova raiz e a subárvore da direita continua com os elementos com chaves maiores que a da nova raiz.



# Rotações

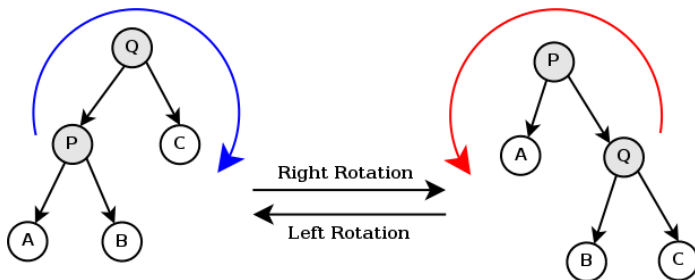
---







# Rotações





# Árvores AVL

---

► Tree Rotation



# Árvores AVL

---

- Ao final de cada inserção/remoção, a árvore deve ser atualizada.
- Para cada nó ao longo do caminho percorrido, deve-se computar:
  - ▶ A nova altura.
  - ▶ O novo fator de equilíbrio.
- Rotações para a esquerda/direita são feitas de modo a preservar os fatores de balanceamento no intervalo  $\{-1, 0, 1\}$ .
- Elas aumentam a altura de algumas subárvores enquanto diminuem a de outras.



# Balanceamento de Árvores AVL

---

- O balanceamento das árvores AVL concentram-se em 4 casos:
  - ▶ Rotação para esquerda (L).
  - ▶ Rotação para direita (R).
  - ▶ Rotação para esquerda seguida de rotação para direita (LR).
  - ▶ Rotação para direita seguida de rotação para esquerda (RL).



# Balanceamento de Árvores AVL

---

## Caso 1 (L)

- Se a raiz da árvore tem fator de equilíbrio  $-2$  e seu filho da direita possui fator de equilíbrio  $\leq 0$ , uma rotação à esquerda é suficiente para balancear a árvore.

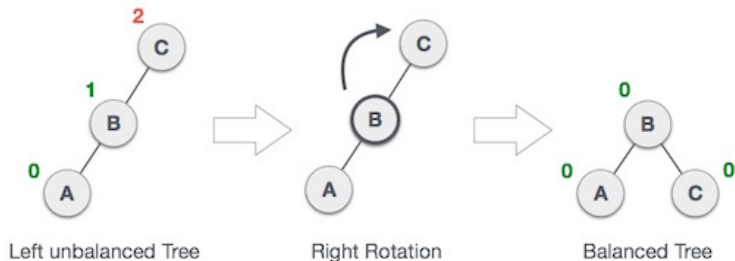
`figuras/avl-tree-case-1.jpg`



# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 2 (R)

- Se a raiz da árvore tem fator de equilíbrio 2 e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $\geq 0$ , uma rotação à direita é suficiente para balancear a árvore.

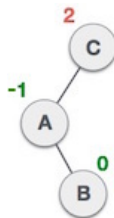




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 3 (LR)

- Se a raiz da árvore tem fator de equilíbrio 2 e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $< 0$ , uma rotação à esquerda seguida de uma a direita é suficiente para balancear a árvore.

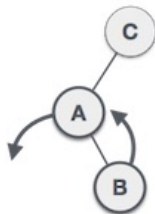




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 3 (LR)

- Se a raiz da árvore tem fator de equilíbrio 2 e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $< 0$ , uma rotação à esquerda seguida de uma a direita é suficiente para balancear a árvore.



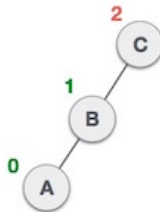




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 3 (LR)

- Se a raiz da árvore tem fator de equilíbrio 2 e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $< 0$ , uma rotação à esquerda seguida de uma a direita é suficiente para balancear a árvore.





# Balanceamento de Árvores AVL

---

## Caso 3 (LR)

- Se a raiz da árvore tem fator de equilíbrio 2 e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $< 0$ , uma rotação à esquerda seguida de uma a direita é suficiente para balancear a árvore.

`figuras/avl-tree-case-3-4.jpg`

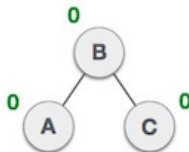


# Balanceamento de Árvores AVL

---

## Caso 3 (LR)

- Se a raiz da árvore tem fator de equilíbrio 2 e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $< 0$ , uma rotação à esquerda seguida de uma a direita é suficiente para balancear a árvore.

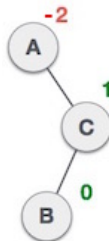




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 4 (RL)

- Se raiz da árvore tem fator de equilíbrio  $-2$  e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $> 0$ , uma rotação à direita seguida de uma à esquerda é suficiente para balancear a árvore.

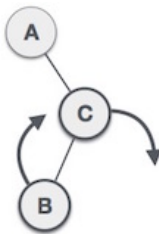




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 4 (RL)

- Se raiz da árvore tem fator de equilíbrio  $-2$  e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $> 0$ , uma rotação à direita seguida de uma à esquerda é suficiente para balancear a árvore.

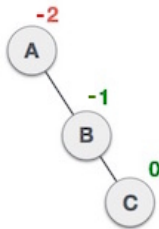




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 4 (RL)

- Se raiz da árvore tem fator de equilíbrio  $-2$  e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $> 0$ , uma rotação à direita seguida de uma à esquerda é suficiente para balancear a árvore.

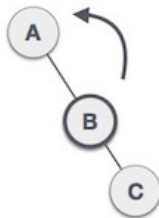




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 4 (RL)

- Se raiz da árvore tem fator de equilíbrio  $-2$  e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $> 0$ , uma rotação à direita seguida de uma à esquerda é suficiente para balancear a árvore.

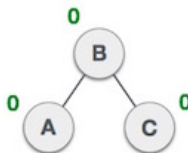




# Balanceamento de Árvores AVL

## Caso 4 (RL)

- Se raiz da árvore tem fator de equilíbrio  $-2$  e seu filho da esquerda possui fator de equilíbrio  $> 0$ , uma rotação à direita seguida de uma à esquerda é suficiente para balancear a árvore.







# Balanceamento de Árvores AVL

---

► AVL Applet



# Sumário

---

## 2 Implementação



# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- Busca
- Inserção
- Remoção
- Limpeza
- Análise



# Definição

---

```
typedef struct avl_node_t {  
    int data;  
    size_t height;  
    struct avl_node_t *left;  
    struct avl_node_t *right;  
} avl_node_t;
```



# Definição

---

```
typedef struct avl_tree_t {  
    struct avl_node_t *root;  
    size_t size;  
} avl_tree_t;
```



# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- Busca
- Inserção
- Remoção
- Limpeza
- Análise



# Inicialização

---



# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- Busca
- Inserção
- Remoção
- Limpeza
- Análise





# Funções auxiliares

---

Devolve o tamanho (número de nós) em uma árvore AVL.

---



# Funções auxiliares

---

Cria um novo nó.





# Funções auxiliares

---

Deleta um nó.

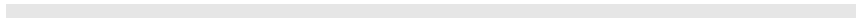




## Funções auxiliares

---

Retorna a altura de uma árvore com raiz em  $v$ .

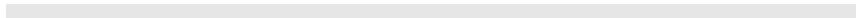




## Funções auxiliares

---

Calcula a altura de uma árvore com raiz em  $v$  a partir dos seus filhos.





## Funções auxiliares

---

Obtém o fator de equilíbrio da árvore com raiz em  $v$ .



## Funções auxiliares

---

Realiza a rotação para a esquerda da árvore com raiz em  $x$  e devolve a nova raiz.



## Funções auxiliares

---

Realiza a rotação para a direita da árvore com raiz em  $y$  e devolve a nova raiz.





# Funções auxiliares

---

Balanceia uma árvore com raiz em  $v$ .





# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- **Busca**
- Inserção
- Remoção
- Limpeza
- Análise



# Busca

---



# Busca

---



# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- Busca
- **Inserção**
- Remoção
- Limpeza
- Análise



# Inserção

---

Insere o dado estipulado na árvore. Premissa: o dado não existe como chave na árvore.



# Inserção

---

Insere o dado estipulado na árvore. Premissa: o dado não existe como chave na árvore.



# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- Busca
- Inserção
- Remoção
- Limpeza
- Análise





# Remoção

---

Remove o dado estipulado da árvore. Premissa: o dado existe como chave na árvore.



# Remoção

---

Remove o dado estipulado da árvore. Premissa: o dado existe como chave na árvore.

---



# Remoção

---

Remove o dado estipulado da árvore. Premissa: o dado existe como chave na árvore.



# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- Busca
- Inserção
- Remoção
- **Limpeza**
- Análise



# Limpeza

---

Deleta a árvore.

---



# Limpeza

---

Deleta a árvore.

---



# Sumário

---

## 2 Implementação

- Definição
- Inicialização
- Funções auxiliares
- Busca
- Inserção
- Remoção
- Limpeza
- Análise



# Análise

---

	Busca	Inserção	Remoção
BST	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
AVL	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$





# Sumário

---

## 3 Considerações



## Considerações

---

- A árvore AVL aumenta a BST ao incluir uma estratégia de balanceamento por altura.
- Para alcançar esse objetivo, utiliza de rotações à esquerda e à direita, que conservam a propriedade de BST.
- Com esta estratégia, a altura máxima da árvore é  $\Theta(\lg n)$ .
- Implementá-la é um pouco mais complicado que implementar uma BST, mas o esforço vale a pena a longo prazo.