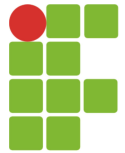
Ordenação

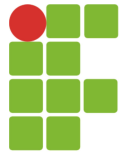
Estruturas de Dados e Algoritmos – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

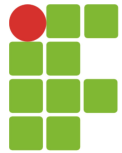
Instituto Federal de Brasília,
Câmpus Taguatinga



Sumário



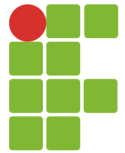
Sumário



Introdução

Ordenação

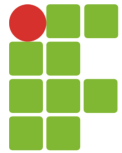
- O problema da ordenação é fundamental para a Ciência da Computação. Através da resolução deste problema, podemos solucionar diversos outros.
- Formalmente o problema é postulado como, dado uma lista de elementos, ordenar cada elemento segundo uma relação de ordem $<$ de maneira crescente. Ou seja, temos:
  - Entrada: Sequência de elementos $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.
  - Saída: Permutação da sequência original em ordem crescente, isto é, $\{a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1}\}$, $a'_i < a'_{i+1}$, $0 \leq i < n-2$.



Introdução

Exemplo

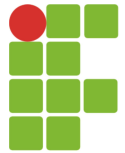
- Lista de inteiros a ser ordenada segundo a relação $\leq$ sobre $\mathbb{N}$.
- Lista de reais a ser ordenada segundo a relação $\leq$ sobre $\mathbb{R}$.
- Lista de palavras a ser ordenada segundo a ordem lexicográfica induzida sobre um alfabeto.



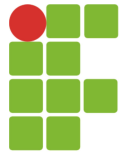
Introdução

Ordenação

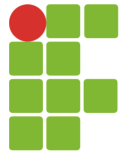
- Existem diversos métodos de ordenação diferentes, cada qual com sua técnica.
- No entanto, métodos de ordenação podem compartilhar algumas propriedades:
  - In-place: Usa-se a entrada e mais um número constante de posições de memória para executar a ordenação $(n + O(1))$.
  - Estável: Se dois elementos $v[i]$ e $v[j]$ são iguais, com $i < j$, eles terão a mesma posição relativa após a ordenação, isto é, o elemento $v[i]$ vai vir antes de $v[j]$ no vetor ordenado, apesar de terem o mesmo valor.
    - $(7, 2, 1, 2, 4, 3, 6, 5) \rightarrow (1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$



Sumário



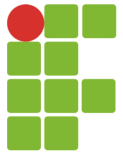
Sumário



Bubblesort

Bubblesort

- O Bubblesort, em cada iteração, lê o vetor da esquerda para a direita e troca os elementos se $v[i] > v[i+1]$.
- Como consequência disso, os maiores elementos são colocados em sua posição devida após cada iteração.
- Observe que são necessárias $n-1$ iterações para o algoritmo ordenar a sequência original, sendo que cada iteração precisa passar por toda a sequência.

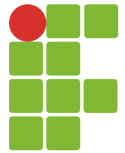


Bubblesort

Exemplo

11	17	23	2	7	29	3	13	5	19
11	17	2	23	7	29	3	13	5	19
11	17	2	7	23	29	3	13	5	19
11	17	2	7	23	3	29	13	5	19
11	17	2	7	23	3	13	29	5	19
11	17	2	7	23	3	13	5	29	19
11	17	2	7	23	3	13	5	19	29

11	2	17	7	23	3	13	5	19	29
11	2	7	17	23	3	13	5	19	29
11	2	7	17	3	23	13	5	19	29
11	2	7	17	3	13	23	5	19	29
11	2	7	17	3	13	5	23	19	29
11	2	7	17	3	13	5	19	23	29



Bubblesort

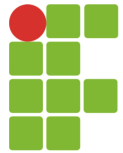
Exemplo

11	2	7	17	3	13	5	19	23	29
2	11	7	17	3	13	5	19	23	29
2	7	11	17	3	13	5	19	23	29
2	7	11	3	17	13	5	19	23	29
2	7	11	3	13	17	5	19	23	29
2	7	11	3	13	5	17	19	23	29

2	7	3	11	13	5	17	19	23	29
2	7	3	11	5	13	17	19	23	29

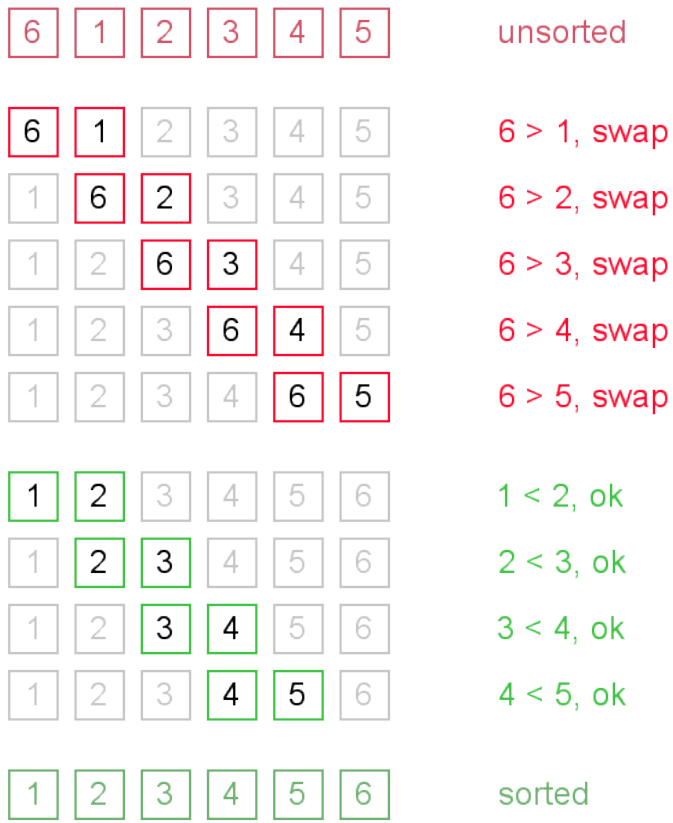
2	3	7	11	5	13	17	19	23	29
2	3	7	5	11	13	17	19	23	29

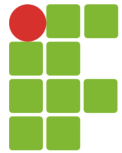
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29



Bubblesort

Exemplo

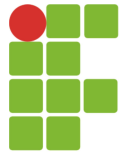




Bubblesort

Exemplo

5 1 12 -5 16	unsorted
5 1 12 -5 16	5 > 1, swap
1 5 12 -5 16	5 < 12, ok
1 5 12 -5 16	12 > -5, swap
1 5 -5 12 16	12 < 16, ok
1 5 -5 12 16	1 < 5, ok
1 5 -5 12 16	5 > -5, swap
1 -5 5 12 16	5 < 12, ok
1 -5 5 12 16	1 > -5, swap
-5 1 5 12 16	1 < 5, ok
-5 1 5 12 16	-5 < 1, ok
-5 1 5 12 16	sorted



Bubblesort

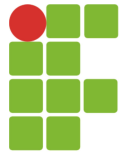
Function Bubblesort

Input: V

Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-1$

```
1 trocou ← true
2 for( i ← 0; i < V.SIZE() ∧ trocou = true; i++ )
3     trocou ← false
4     for( j ← 0; j < V.SIZE() − 1; j++ )
5         if( V[j] > V[j + 1] )
6             SWAP(V[j], V[j + 1])
7             trocou ← true
```

Bubblesort



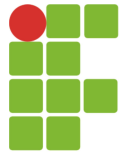
Bubblesort

Análise

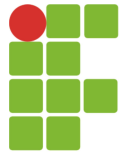
No pior caso, são necessários $n-1$ iterações sobre a sequência original. Na iteração i são realizadas $n-1-i$ comparações ao todo. Portanto, o custo do algoritmo é dado como:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = 1 + 2 + \ldots + n - 1 \in \Theta(n^2)$$

In-place	Estável
✓	✓



Sumário

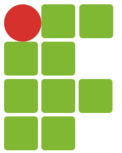


Insertionsort

Insertionsort

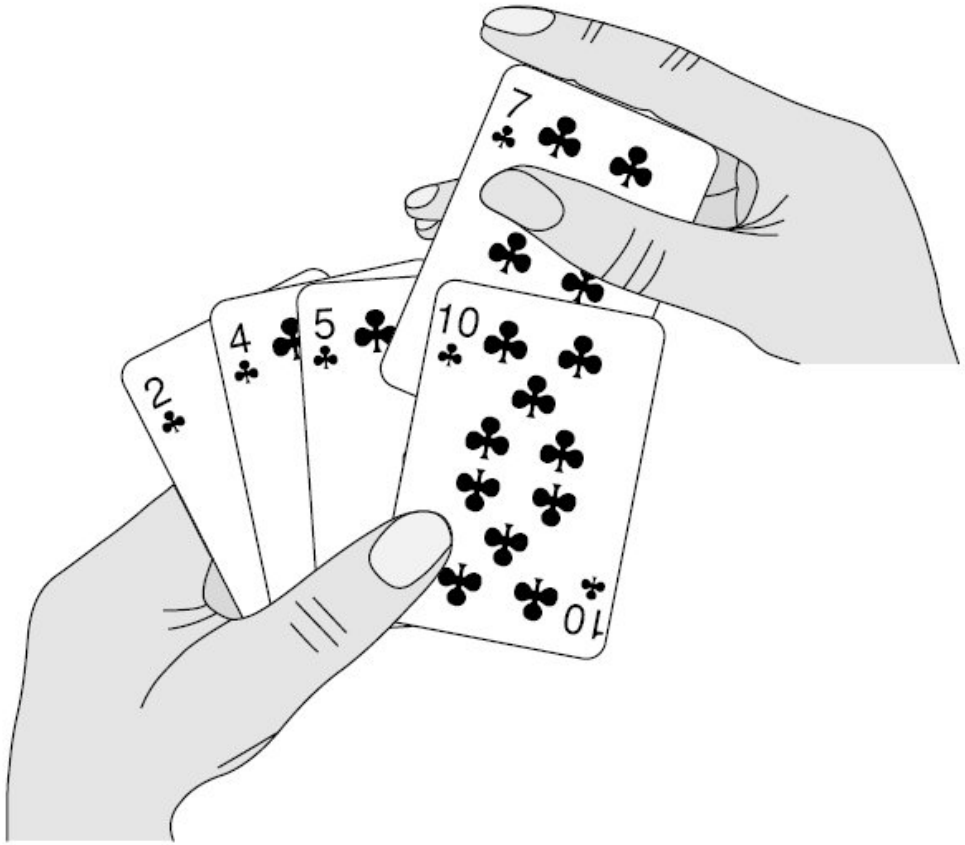
O projeto do algoritmo Insertionsort segue um argumento análogo à indução matemática.

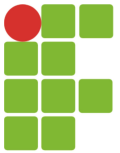
- Caso base: uma sequência com um elemento está ordenada.
- Passo de indução: a inserção de um elemento em uma sequência ordenada na posição correta também gera uma sequência ordenada.



Insertionsort

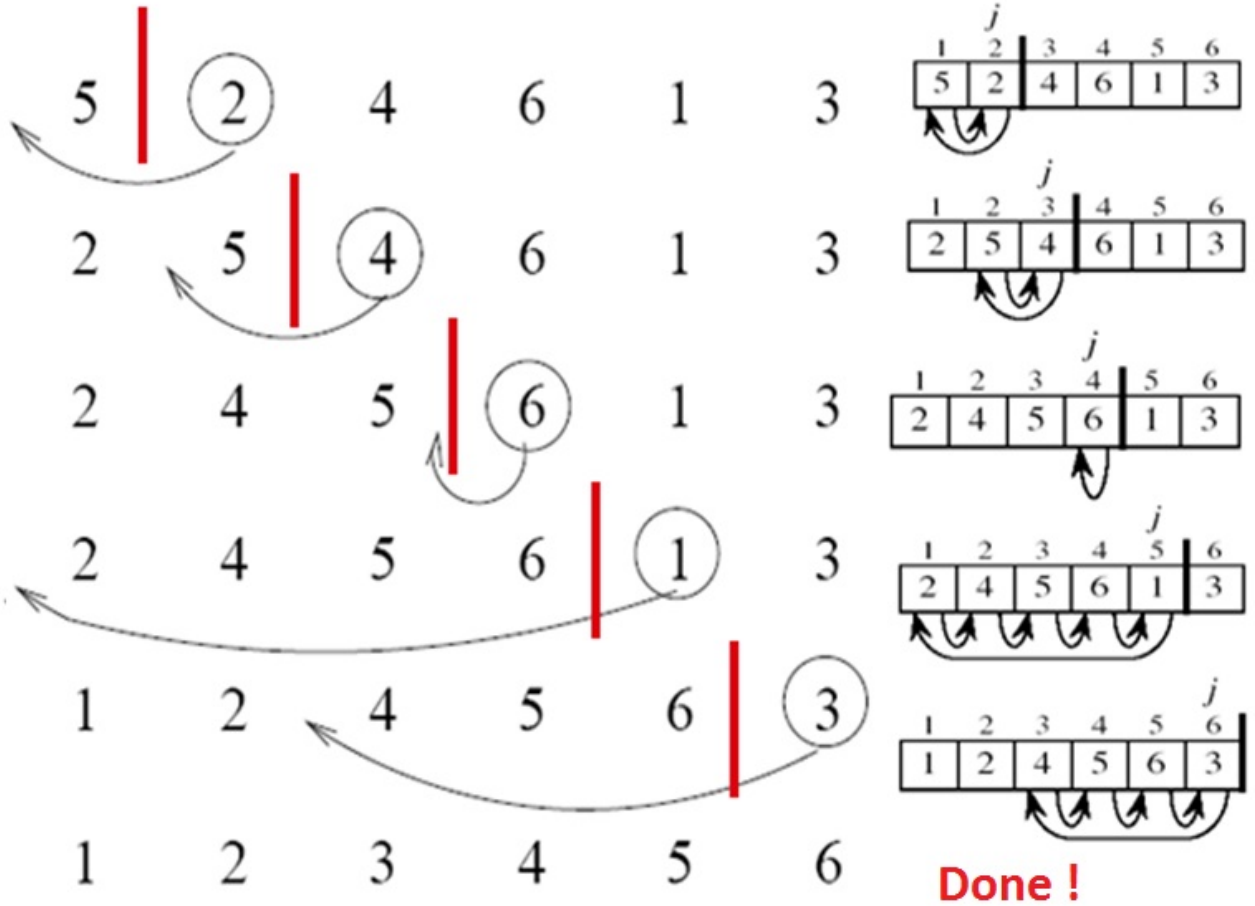
Analogia com Baralho

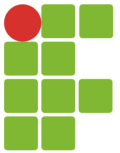




Insertionsort

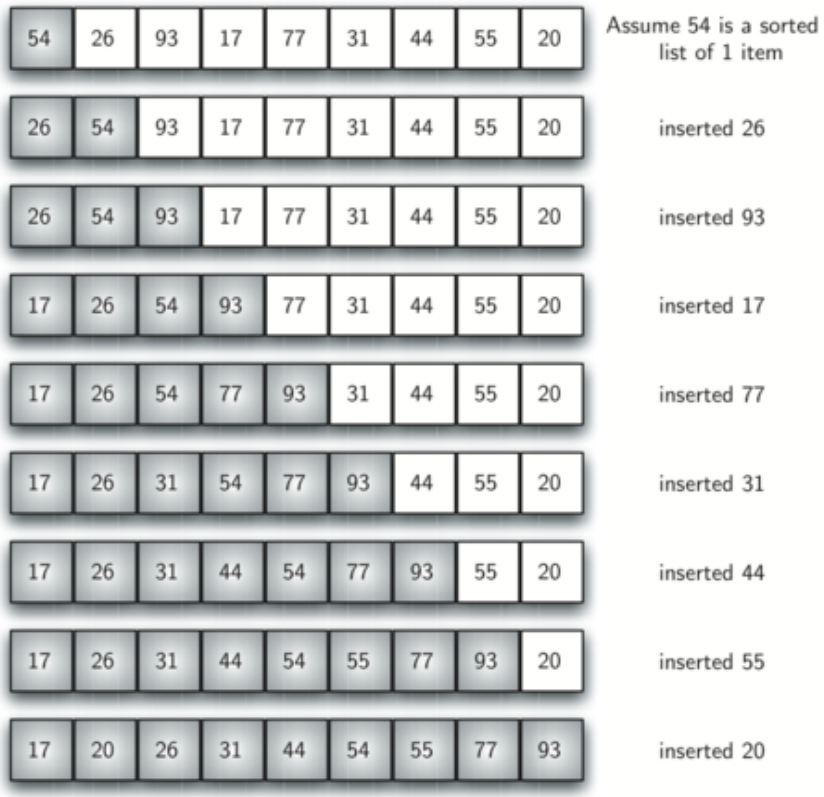
Exemplo

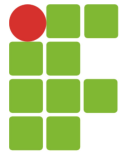




Insertionsort

Exemplo





Insertionsort

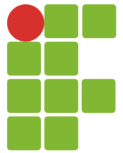
Function Insertionsort

Input: V

Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < V.\text{SIZE}() - 1$

```
1 for( i ← 1; i < V.SIZE(); i++ )
2     chave ← V[i]
3     for( j ← i − 1; j ≥ 0 ∧ V[j] > chave; j−− )
4         V[j + 1] ← V[j]
5     V[j + 1] ← chave
```

Insertionsort

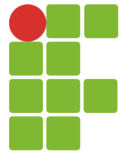


Insertionsort

Análise

- No pior caso, são necessários $n-1$ iterações sobre a sequência original. Na iteração i são realizadas no máximo, i comparações ao todo.
- A inserção do elemento na posição correta, também necessita de i operações de troca (em vetores). Portanto, o número de comparações do algoritmo (o mesmo número de trocas em vetores) é dado como:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = 1 + 2 + \ldots + n - 1 \in \Theta(n^2)$$

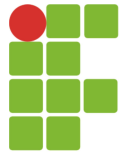


Insertionsort

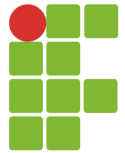
Observação

- Eficiente para entradas pequenas.
- Mais rápido na prática do que outros algoritmos quadráticos (como o Bubblesort).

In-place	Estável
✓	✓



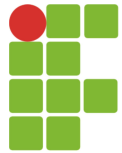
Sumário



Mergesort

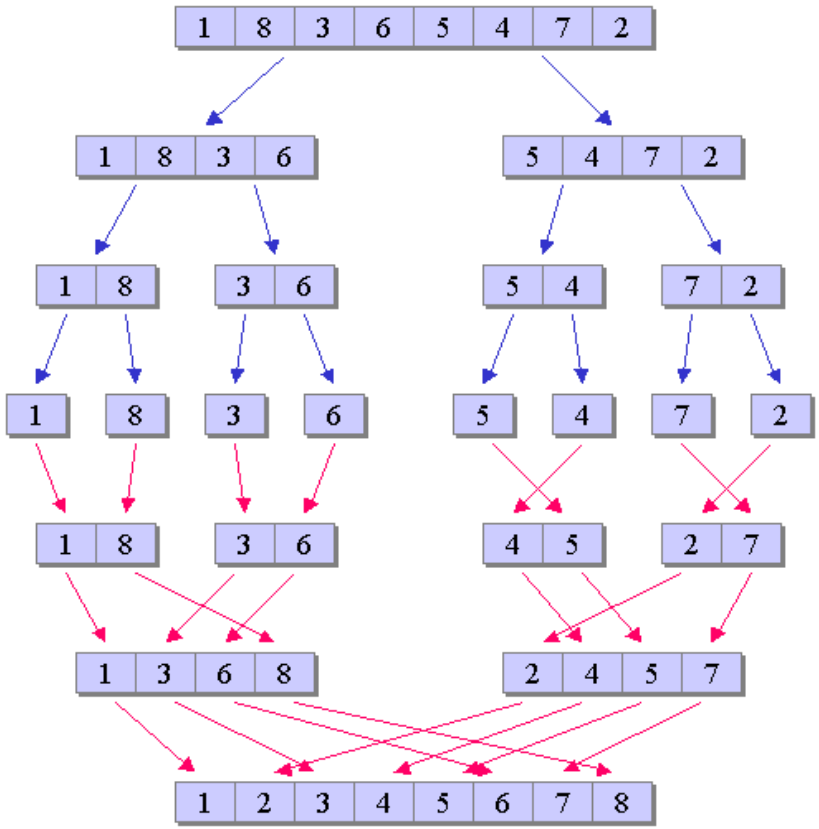
Mergesort

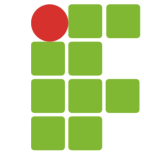
- O Mergesort se baseia no conceito de Merge (junção) de duas sequências ordenadas. Primeiramente ele subdivide a sequência original na metade e ordena recursivamente essas sequências.
- Por fim, faz a junção das duas sequências ordenadas para compor uma sequência maior ordenada.
- $(1, 3, 5, 7, 9) + (0, 2, 4, 6, 8) \xrightarrow{merge} (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$



Mergesort

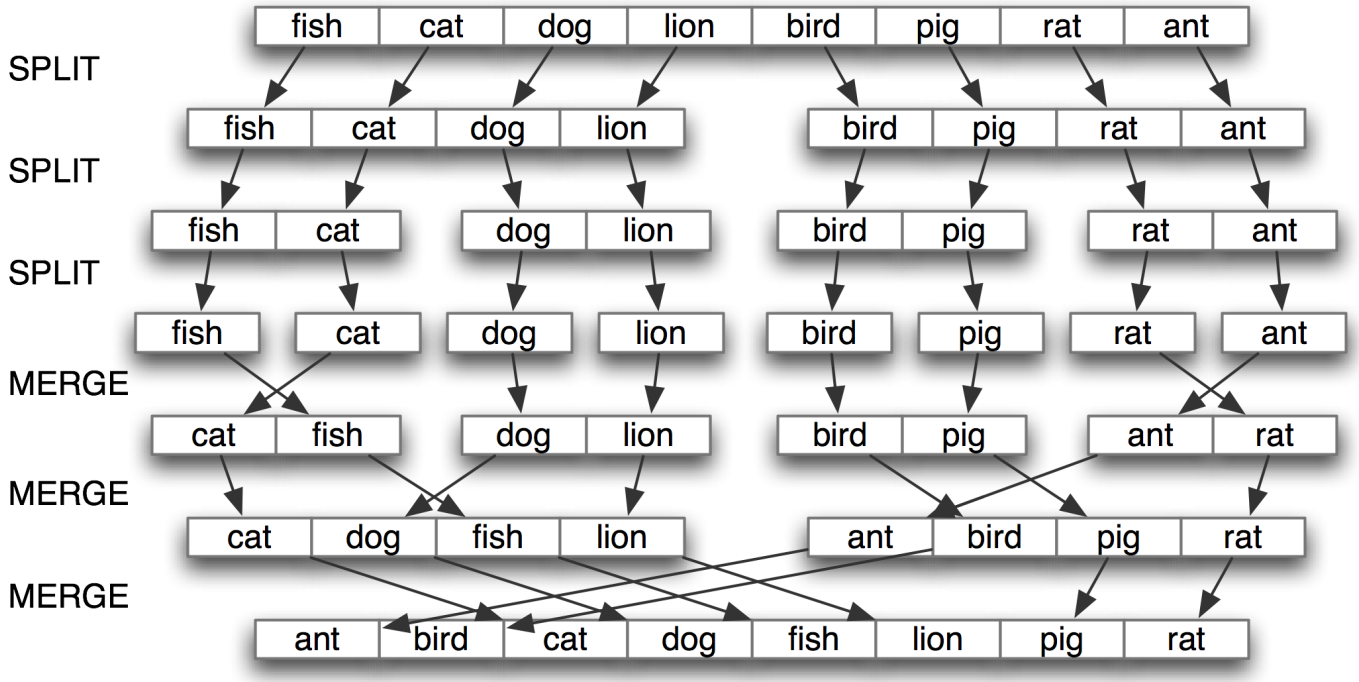
Exemplo

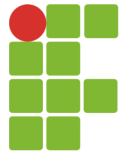




Mergesort

Exemplo





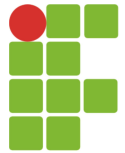
Mergesort

Function Mergesort

Input: (V, i, j)
Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < V.\text{SIZE}() - 1$

```
1 if( i ≥ j )
2     return V[i, j];
3 m ← (i + j)/2
4 V_1 ← MERGESORT(V, i, m)
5 V_2 ← MERGESORT(V, m + 1, j)
6 V ← MERGE(V_1, V_2)
7 return V
```

Mergesort



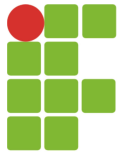
Mergesort

Function Merge

Input: V, V_1, V_2

Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-1$

```
1 for( i ← 0, j ← 0, k ← 0; j < V1.SIZE() ∧ k < V2.SIZE(); i++ )
2     if( V1[j] ≤ V2[k] )
3         V[i] ← V1[j++]
4     else
5         V[i] ← V2[k++]
6 while j < V1.SIZE() do  V[i++] ← V1[j++]
7 while k < V2.SIZE() do  V[i++] ← V2[k++]
```



Mergesort

Análise

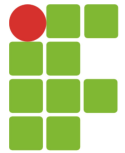
A relação de recorrência do Mergesort corresponde à:

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + O(n) \in \Theta(n \lg n)$$

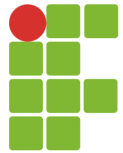
In-place	Estável
✗	✓

Observação

- Requer uma quantidade de memória superior a $O(1)$ (vetores auxiliares).
- Recursivo!



Sumário



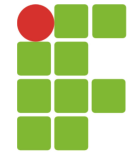
Quicksort

Quicksort

O Quicksort se baseia na escolha de um pivô. Após escolhido este pivô, a sequência original é particionada em três partes:

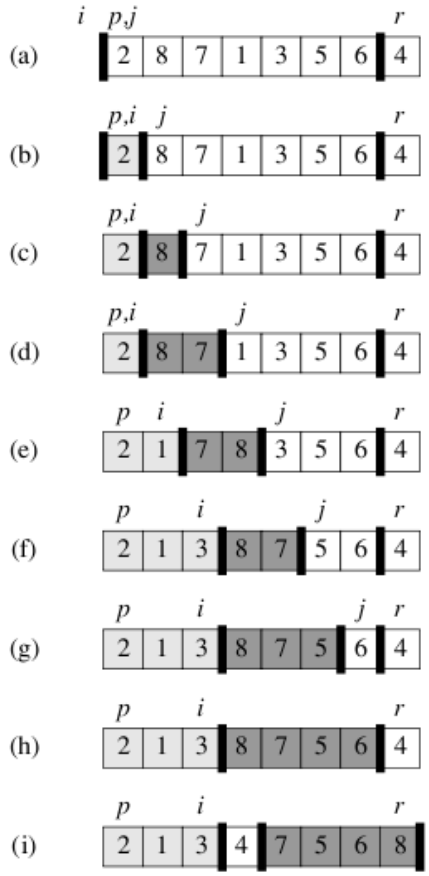
1. Elementos menores que o pivô;
2. Pivô;
3. Elementos maiores que o pivô;

O procedimento é aplicado recursivamente na primeira e última partes.



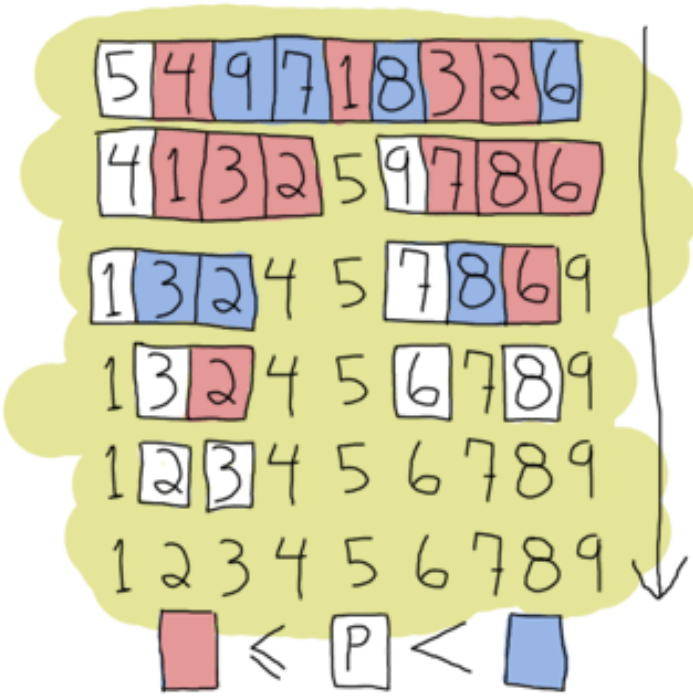
Quicksort

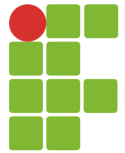
Exemplo



Quicksort

exampleblock





Quicksort

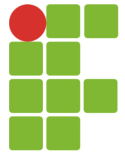
Function Quicksort

Input: V, i, j

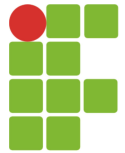
Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-2$

```
1 if( i < j )
2     p ← Partition(V, i, j)
3     Quicksort(V, i, p − 1)
4     Quicksort(V, p + 1, j)
```

Quicksort



Quicksort



Quicksort: Análise

Análise

A relação de recorrência do Mergesort, no pior caso, corresponde à:

$$T(n) = T(n-1) + O(n) \in \Theta(n^2)$$

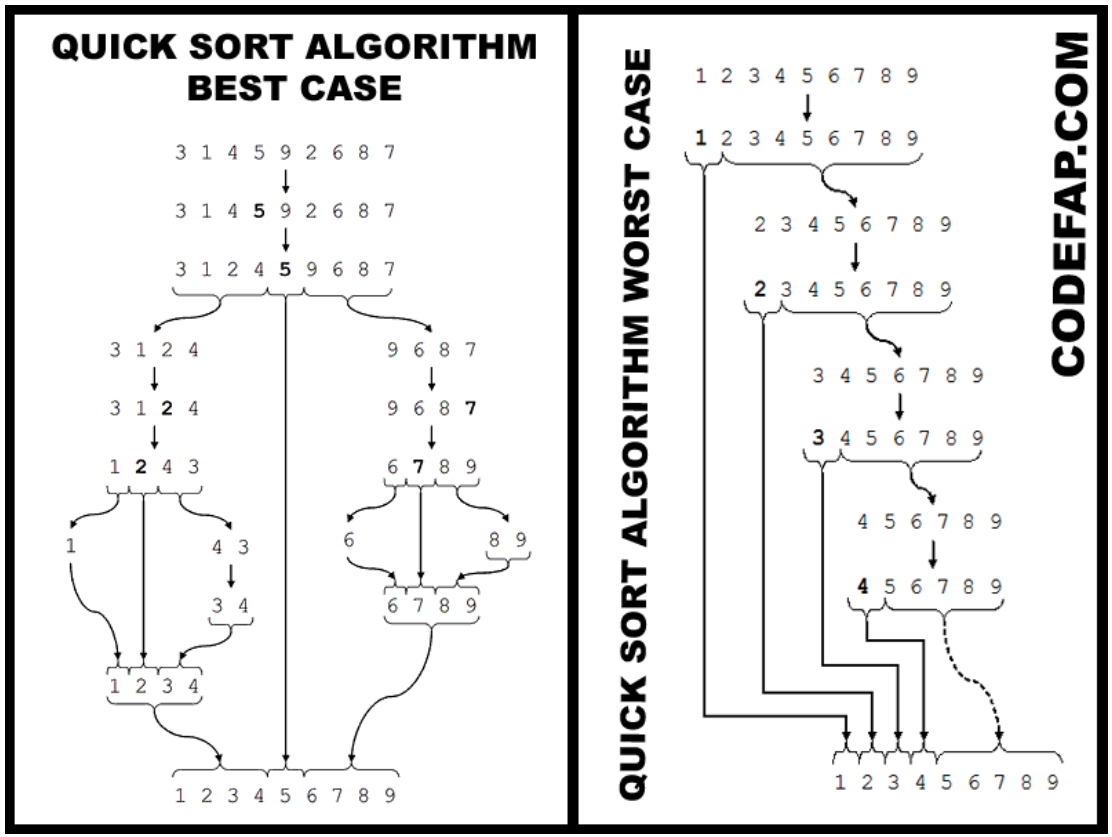
Contanto, no caso médio, o Quicksort divide as partições de modo em que a primeira e a última partição tenham tamanhos similares, o que leva a uma relação de recorrência que se aproxima de:

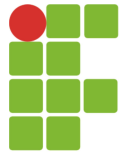
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + O(n) \in \Theta(n \lg n)$$

In-place	Estável
✗	✗

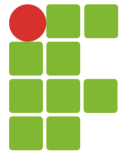
Quicksort

Análise





Sumário



Heapsort

Heap

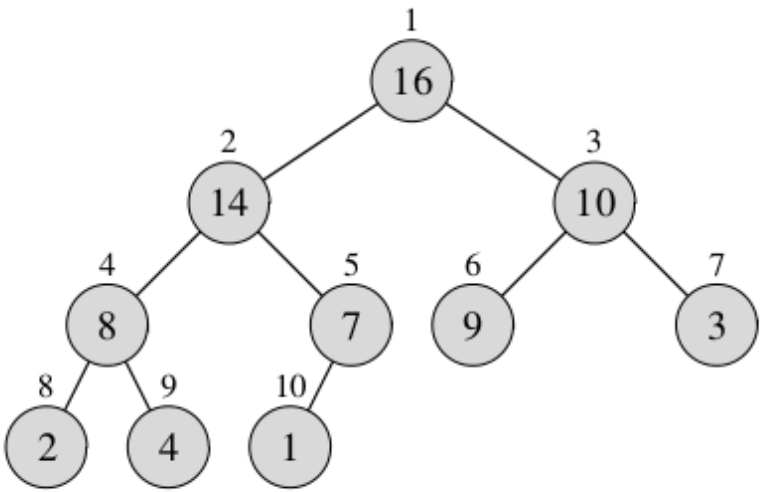
A chave do heapsort é uma estrutura denominada heap. Uma heap binária é uma estrutura de natureza recursiva e tem as seguinte propriedades:

i) O elemento pai é $\geq$ do que os seus filhos.

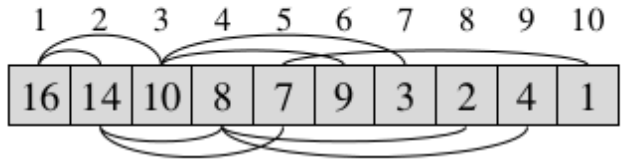
ii) O filho da esquerda é uma heap.

iii) O filho da direita também é uma heap.

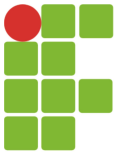
Heapsort



(a)



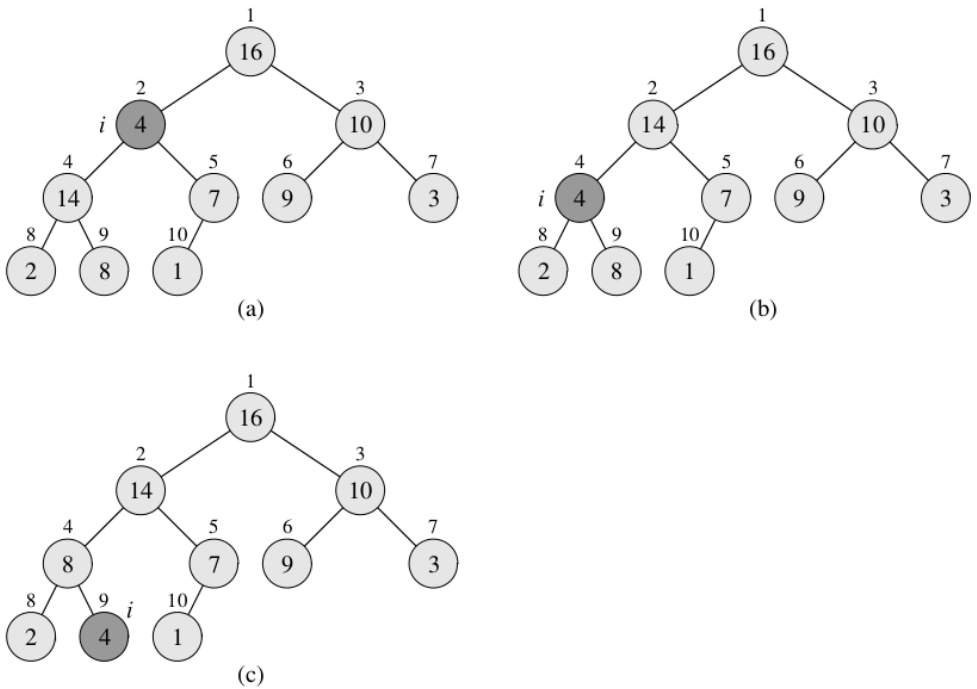
(b)

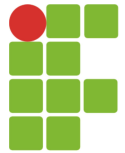


Heapsort

Heapify

Para construir uma Heap, devemos aplicar o procedimento de **heapify** nos nós que não apresentam a propriedade de Heap.

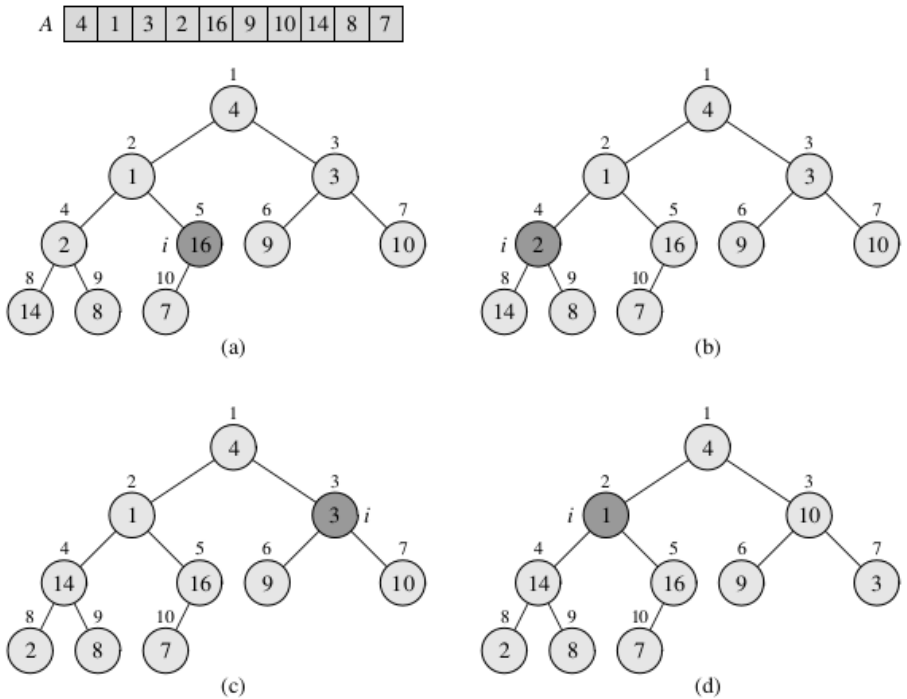


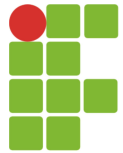


Heapsort

Heap

Note que os nós folha, já são heaps (por vacuidade). Logo, o **heapify** só necessita ser aplicado aos nós acima dos nós folhas.





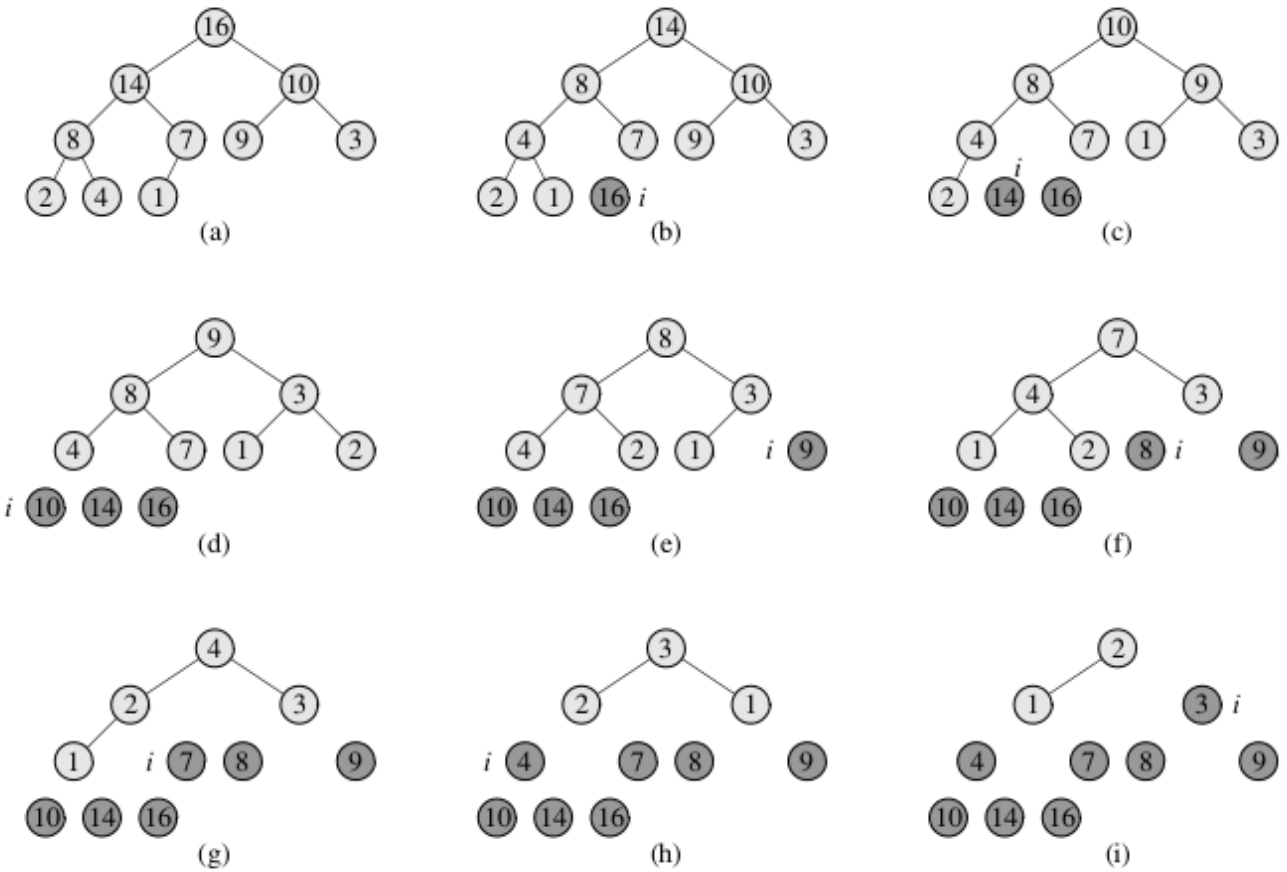
Heapsort

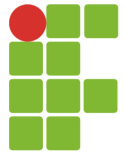
Heapsort

- Uma vez que a Heap está contruída, sabemos que o elemento raiz (primeiro elemento) é o maior de todos, logo podemos retirá-lo e colocá-lo no fim da sequência.
- Escolhemos o último nó folha para ser a raiz (primeiro elemento da sequência) e aplicamos **heapify** para manter a estrutura da heap.
- O procedimento é repetido até que tenhamos a sequência ordenada.

Heapsort

Exemplo





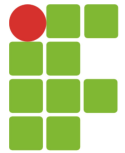
Heapsort

Function Heapsort

Input: V

Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-1$

```
1 MakeHeap(V)
2 for( i ← V.size() − 1; i > 0; i − − )
3 |   Swap(V[0], V[i])
4 |   Heapify(V, 0, i)
```



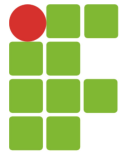
Heapsort

Function MakeHeap

Input: V

Output: V, com propriedade de **Heap**

```
1 for( i ← V.SIZE()/2; i ≥ 0; i − − )
2 |  HEAPIFY(V, i, V.size())
```



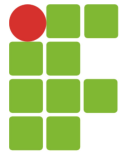
Heapsort

Function Heapify

Input: $V, i, heapSize$

```
1  l ← 2 · i + 1
2  r ← 2 · i + 2
3  largest ← i
4  if( l < heapSize ∧ V[l] > V[i] )
5      largest ← l
6  if( r < heapSize ∧ V[r] > V[largest] )
7      largest ← r
8  if( largest ≠ i )
9      SWAP(V[i], V[largest])
10     HEAPIFY(V, largest, heapSize)
```

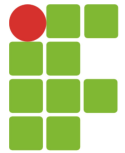
Heapsort



Heapsort

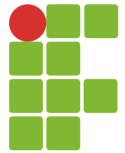
Análise

- Para construir a Heap, leva-se tempo $O(n \lg n)$, uma vez que é necessário manter a propriedade de Heap para todos os nós, e cada nó tem altura $O(\lg n)$.
- Apesar de ser um limite superior, uma análise mais detalhada mostra que a construção da Heap é feita em tempo $\Theta(n)$.
- Uma vez que a Heap é construída, a retira do nó raiz e a manutenção da propriedade da Heap levam tempo $\Theta(\lg n)$.
- Como esse procedimento é repetido para todos os nós, temos que o Heapsort leva tempo $\Theta(n \lg n)$.



Heapsort

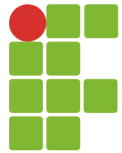
In-place	Estável
✓	✗



Heapsort

Teorema

$\textsc{MakeHeap}(\mathrm{V})$ leva tempo $O(n)$.



Heapsort

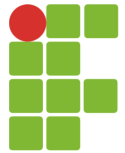
Demonstração

O procedimento $\textsc{Heapify}()$ quando chamado de um nó de altura h leva tempo $O(h)$.

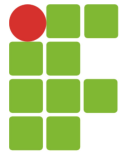
Logo, $\textsc{MakeHeap}(\mathrm{V})$ leva tempo:

$$\begin{aligned}
\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil O(h) \quad &\in \quad \diamond \text{ cada nível de altura h tem essa quantidade de folhas} \\
O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right) \quad &\leq \quad \diamond \text{ Isola o termo } n \\
O\left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} \right) \quad &= \quad \diamond \text{ Majoração} \\
O\left(n \frac{1/2}{(1-1/2)^2} \right) \quad &= \quad \diamond \text{ Equivalência} \\
O\left(2n\right) \quad &\in O(n)
\end{aligned}$$

□



Sumário

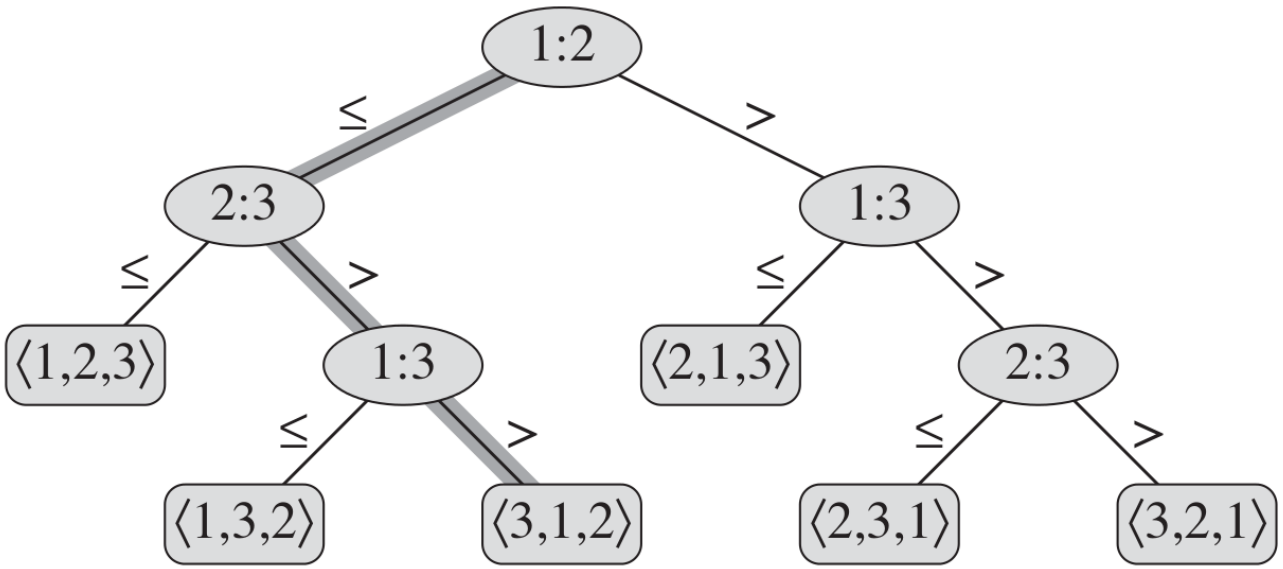


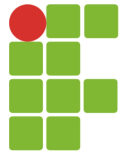
Ordenação por Comparações

Cota Inferior para Algoritmos de Ordenação por Comparações

- Vimos até o presente momento, diversos algoritmos de ordenação que se baseiam em comparações de chaves para resolver o prolema da Ordenação.
- Até agora, sabemos que uma cota superior para o problema da ordenação é de $O(n \lg n)$, obtidas por algoritmos como o **Heapsort** e o **Mergesort**.
- Existe uma cota mínima para algoritmos de ordenação por comparação?

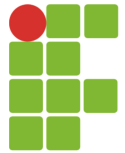
Ordenação por Comparação





Ordenação por Comparação

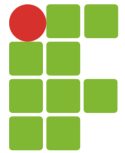
- Durante o seu trajeto, um algoritmo de ordenação faz comparações de modo a obter uma permutação da sequência original em ordem crescente.
- Isso corresponde de um percurso da raiz até uma folha.
- Quantas folhas temos? Qual a altura da árvore de decisões? Se o algoritmo deixar de explorar um caminho para todas as instâncias do problema o que acontece?



Ordenação por Comparação

- Durante o seu trajeto, um algoritmo de ordenação faz comparações de modo a obter uma permutação da sequência original em ordem crescente.
- Isso corresponde de um percurso da raiz até uma folha.
- Quantas folhas temos? Qual a altura da árvore de decisões? Se o algoritmo deixar de explorar um caminho para todas as instâncias do problema o que acontece?

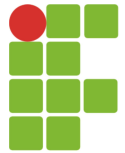
O problema de ordenações usando comparações possui cota $\Omega(n \lg n)$.



Algoritmos Ótimos

Algoritmos Ótimos

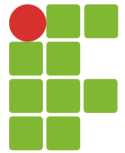
- O Heapsort e o Mergesort são **algoritmos ótimos** de ordenação por **comparações**.
- No pior caso, eles levam o mesmo tempo que o melhor algoritmo possível para o problema da ordenação por comparações, que por sua vez, possui uma cota inferior de $\Omega(n \lg n)$.



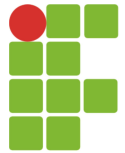
Ordenação em Tempo "Linear"

Ordenação em Tempo "Linear"

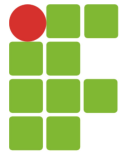
- É possível resolver o problema da ordenação em tempo linear ao explorar propriedades de algumas instâncias e resolver este problema reduzido em tempo $o(n \lg n)$, desde que não se use comparações.
- Dois métodos de ordenação em tempo "pseudolinear" são:
  1. Countingsort;
  2. Radixsort;



Sumário



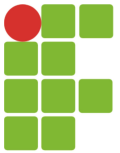
Sumário



Countingsort

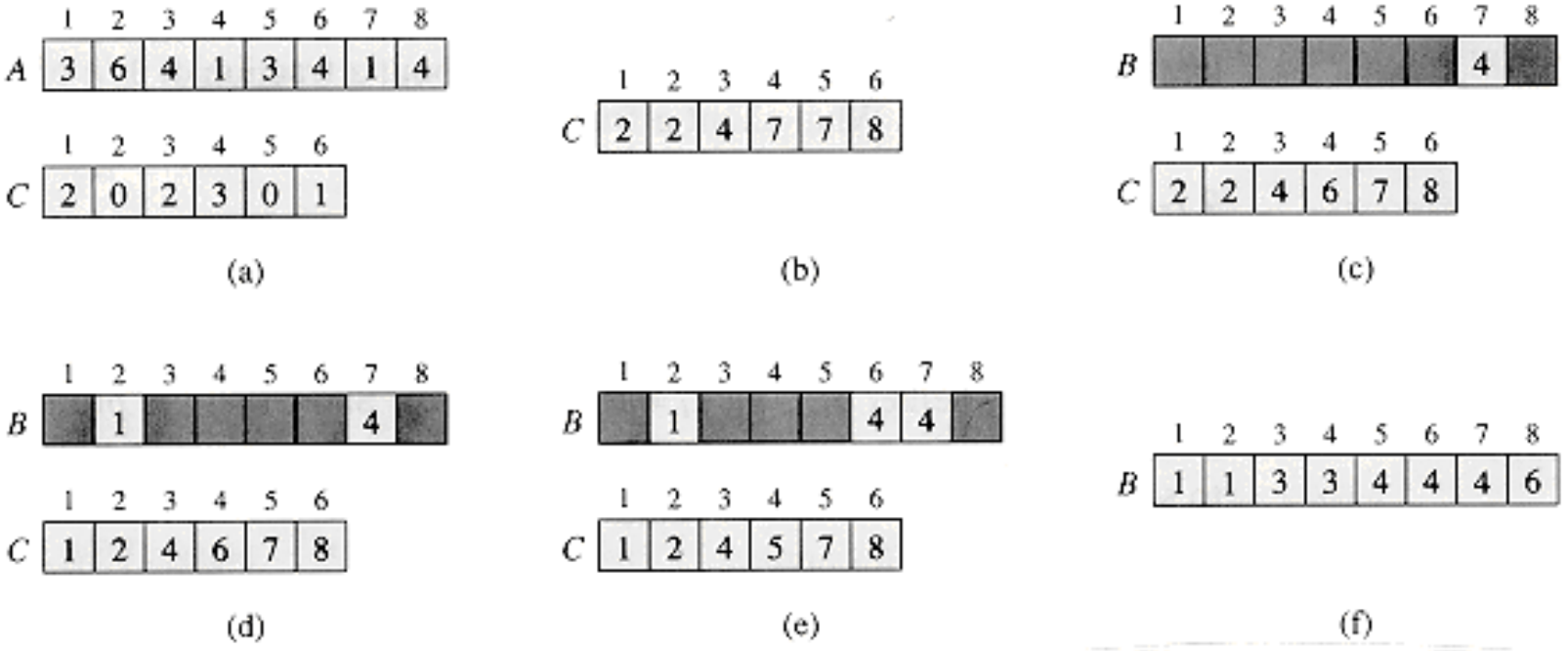
Countingsort

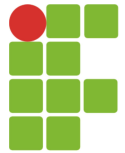
- O Countingsort conta as ocorrências de cada elemento na sequência original.
- Uma vez computada essa informação, o Countingsort calcula o número de elementos menor ou igual a um elemento i qualquer.
- A partir disso, o Countingsort consegue ordenar a sequência original.



Countingsort

exampleblock





Countingsort

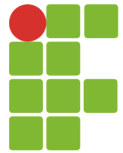
Function Countingsort

Input: V, i

Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-2$

```
1 V' ← V
2 for( i ← 0; i ≤ k; i++ )
3   C[i] ← 0
4 for( i ← 0; i < V.SIZE(); i++ )
5   C[V'[i]]++
6 for( i ← 1; i ≤ k; i++ )
7   C[i] ← C[i] + C[i − 1]
8 for( i ← V.SIZE() − 1; i ≥ 0; i−− )
9   V[−−C[V'[i]] ← V'[i]
```

Countingsort

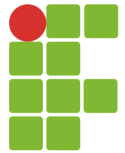


Countingsort: Análise

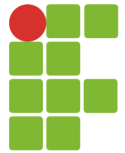
Análise

- Primeiramente, é necessário contar a ocorrência de cada elemento, o que leva tempo $\Theta(n)$.
- Depois, é preciso computar a quantidade de elementos menores ou iguais a um outro determinado elemento, o que leva tempo $\Theta(k)$, onde k é o valor do maior elemento possível na sequência.
- Por fim, uma inspeção no vetor é necessária para executar a ordenação, logo, é necessário tempo $\Theta(n)$.
- Portanto, o custo total é de $\Theta(n + k)$.

In-place	Estável
✗	✓



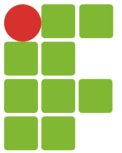
Sumário



Radixsort

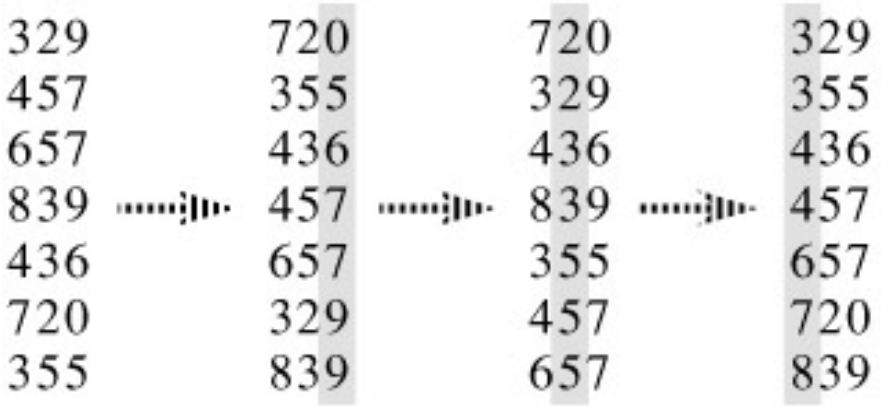
Radixsort

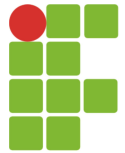
- A ideia do Radixsort é olhar, para cada iteração i, olhar para o i-ésimo dígito menos significativo e ordenar a sequência original baseado na ordem dos dígitos e na informação da iteração anterior.
- Ele pode usar o Countingsort para ordenar os dígitos na i-ésima iteração.
- Além disso, para ser um método estável, ele deve utilizar um método estável de ordenação para ordenar os dígitos em cada iteração.



Radixsort

exampleblock





Radixsort

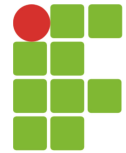
Function Radixsort

Input: V

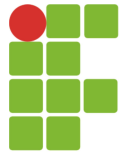
Output: $V, \quad V[i] < V[i+1], 0 \leq i < n-1$

1 **for**($i \leftarrow 0; i < d; i++$)

2 Use um método de ordenação estável considerando apenas o i-ésimo dígito menos significativo



Radixsort

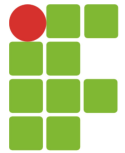


Radixsort

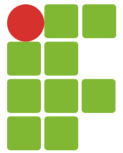
Análise

- Suponha que o maior elemento possua d dígitos.
- Se em cada iteração utilizarmos o Countingsort para ordenar os dígitos, levaremos tempo $O(n + k)$ para a iteração, onde k corresponde ao maior dígito.
- Como são necessárias d iterações, temos que o tempo total do Algoritmo corresponde à $\Theta(d \cdot (n + k))$.

In-place	Estável
✗	✓

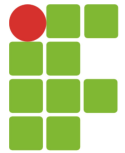


Sumário

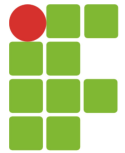


Comparações

Método	Complexidade	In-place	Estável
Bubblesort	$\Theta(n^2)$	✓	✓
Insertionsort	$\Theta(n^2)$	✓	✓
Mergesort	$\Theta(n \lg n)$	✗	✓
Quicksort	$\Theta(n^2)$	✗	✗
Heapsort	$\Theta(n \lg n)$	✓	✗
Countingsort	$\Theta(n + k)$	✗	✓
Radixsort	$\Theta(d \cdot (n + k))$	✗	✓



Sumário



Links

- Sonorização de algoritmos de ordenação:
  `http://youtu.be/t8g-iYGHpEA`
- Sonorização de algoritmos de ordenação 2:
  `http://youtu.be/kPRA0W1kECg`
- Grupo AlgoRythmics de dança:
  http://www.youtube.com/user/AlgoRythmics
- Animações de algoritmos de ordenação:
  http://www.sorting-algorithms.com/