

Árvores: Introdução

Estruturas de Dados e Algoritmos – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira
Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília,
Campus Taguatinga



Sumário

1 Introdução



Árvores

- Árvores são EDs utilizadas para resolver muitos problemas.
- Podemos ter vários tipos diferentes de árvore.
- São de natureza recursiva e hierárquica.



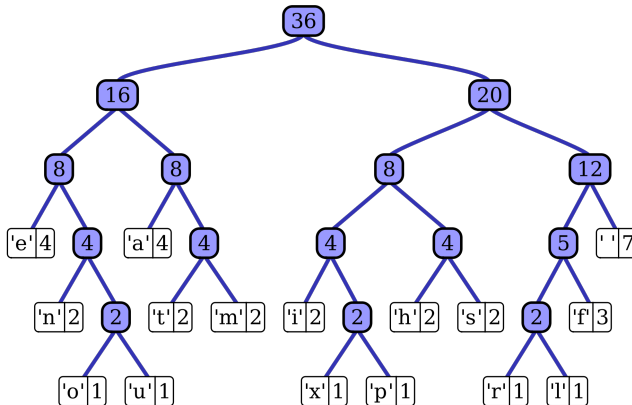
Árvores

Árvores de Huffman

- Utilizadas em compressão de dados.
- Organizam os símbolos mais frequentes próximo da raiz.
- Códigos menores para os símbolos mais frequentes.



Árvores de Huffman





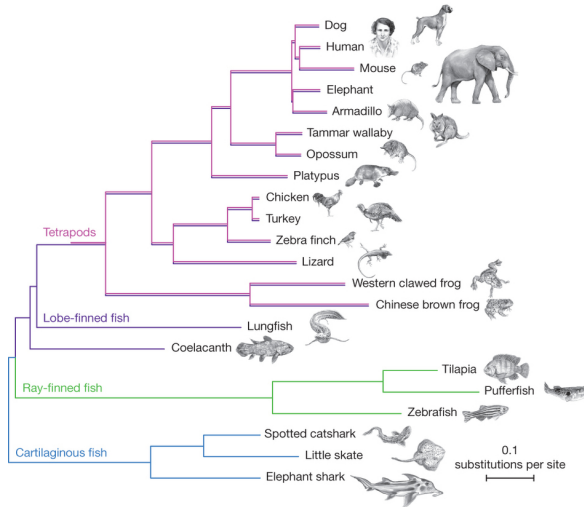
Árvores

Árvores Filogenéticas

- Utilizadas em Biologia Computacional.
- Estimam a distância evolutiva de organismos.



Árvores Filogenéticas





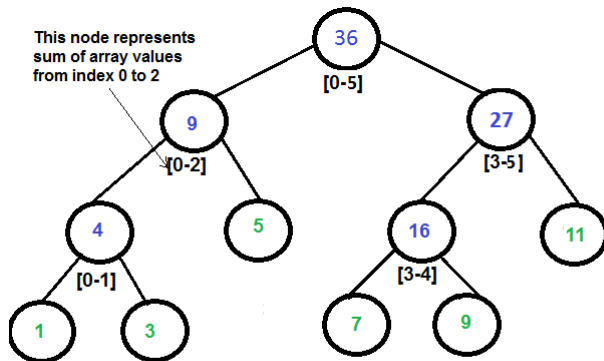
Árvores

Árvores de Segmentos

- Utilizadas em problemas diversos.
- Armazenam alguma propriedade sobre um dado intervalo $[l, r]$.



Árvores de Segmentos



Segment Tree for input array {1, 3, 5, 7, 9, 11}



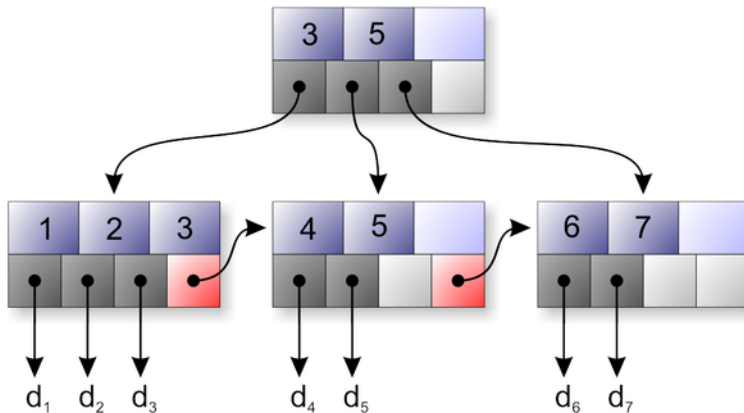
Árvores

Árvores B e B+

- Utilizadas em Sistemas de Arquivos.
- Convertem endereço de bloco de arquivo para endereço de disco.



Árvores B e B+





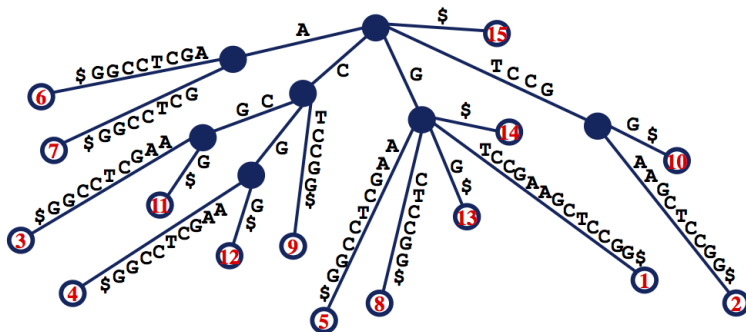
Árvores de Sufixos

Árvores de Sufixos

- Utilizadas em processamento de palavras.
- Codificam todos os sufixos de um texto de maneira compacta.
- Resolvem vários problemas sobre strings.



Árvores de Sufixos





Árvores

- Podemos citar várias outras:
 - ▶ K^2 -Tree: representação compacta de relações binárias.
 - ▶ Árvore-Rubro-Negra: árvore ordenada.
 - ▶ Fenwick Tree: calcula eficientemente soma de prefixos.
 - ▶ Tries: utilizadas em casamento de múltiplos padrões.
- Já deu para entender a infinidade de problemas que podemos resolver com árvores, certo?



Árvores

- No nosso curso, estudaremos uma das famílias mais básicas de árvores.
- As árvores binárias.
- Estamos trabalhando só com a ponta do *iceberg*.
- No entanto, servirá de alicerce ao estudar estruturas mais complexas posteriormente.



Sumário

2 Árvores Binárias



Sumário

2 Árvores Binárias

- Terminologia
- Estrutura



Terminologia

- Antes de elaborar qualquer algoritmo sobre árvore binárias, precisamos entender a sua representação.

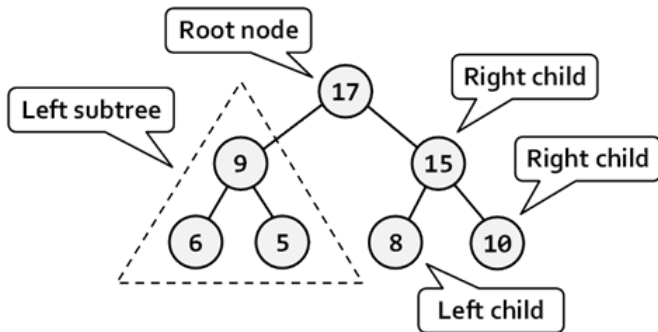


Terminologia

- **Raiz:** corresponde ao topo de uma árvore.
- **Pai:** nó que precede imediatamente um segundo em um caminho partindo da raiz.
- **Filho:** Nó que ocorre imediatamente após o outro em um caminho partindo da raiz.
- **Filho da esquerda:** se x é pai de y e y ocorre imediatamente após x ao seguir para esquerda, então y é o filho da esquerda de x .
- **Filho da direita:** se x é pai de y e y ocorre imediatamente após x ao seguir para direita, então y é o filho da direita de x .
- **Folha:** nó que não possui nenhum descendente.



Terminologia



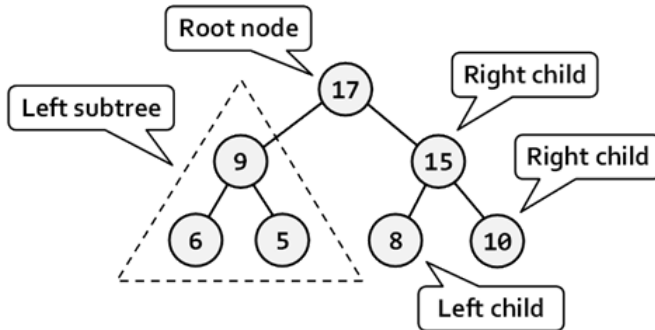


Terminologia

- **Altura:** a altura do nó x corresponde a maior distância de x a uma folha.
- **Grau:** quantidade de descendentes de um nó.
- **Nível:** conjunto de nós que estão na mesma altura em relação a raiz.



Terminologia





Árvore Binária

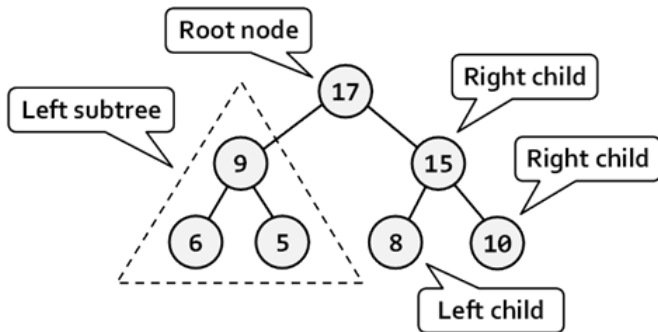
Definição (Árvore Binária)

Uma árvore binária é composta de:

- Um potencial nó denominado de raiz.
- Caso a raiz exista:
 - ▶ Uma subárvore da esquerda.
 - ▶ Uma subárvore da direita.



Terminologia





Árvores Binárias

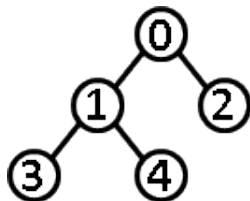
- Repare que a definição de uma árvore binária atua sobre ela própria.
- É uma definição recursiva!
- É natural que os algoritmos que atuem em árvores também sejam recursivos.



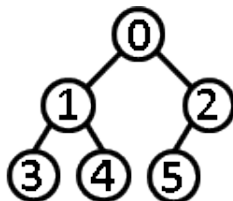
- Uma árvore binária pode ser:
 - ▶ Completa ou incompleta.
 - Uma árvore binária é completa quando todos os níveis dela estão preenchidos exceto pelo último, no qual os nós devem se encontrar mais a esquerda possível.
 - Pode ser representada através de um simples vetor.
 - ▶ Cheia ou não cheia.
 - Uma árvore binária é cheia se todo nó possui grau 0 ou 2.
 - ▶ Perfeita ou imperfeita.
 - Uma árvore binária é perfeita quando é cheia e todas as folhas possuem o mesmo nível.



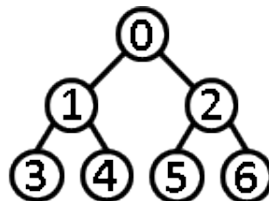
Terminologia



**full
binary tree**



**complete
binary tree**

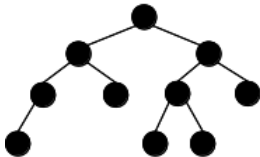


**perfect
binary tree**

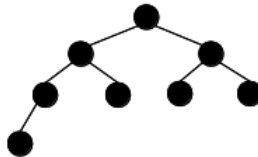


Terminologia

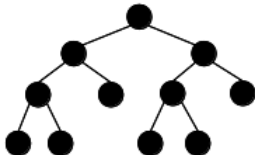
Neither complete nor full



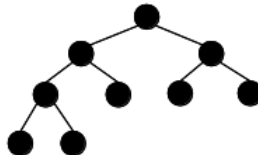
Complete but not full



Full but not complete



Complete and full





Sumário

2 Árvores Binárias

- Terminologia
- Estrutura



Estrutura

- Como visto, uma árvore binária possui, uma subárvore da esquerda e da direita.
- Podemos utilizar uma definição recursiva para representar essa estrutura computacionalmente.
- Como C não suporta tipos recursivos, emulamos essa característica através de ponteiros.



Estrutura

```
typedef struct tree_node{  
    void* data; /* Dado da árvore */  
    struct tree_node* left; /* Ponteiro para subárvore da esquerda */  
    struct tree_node* right; /* Ponteiro para subárvore da direita */  
}tree_node;  
  
typedef struct arvore{  
    tree_node* root; /* Raiz da Arvore */  
}arvore;
```



Exemplos

Figura: É uma árvore binária?



Exemplos

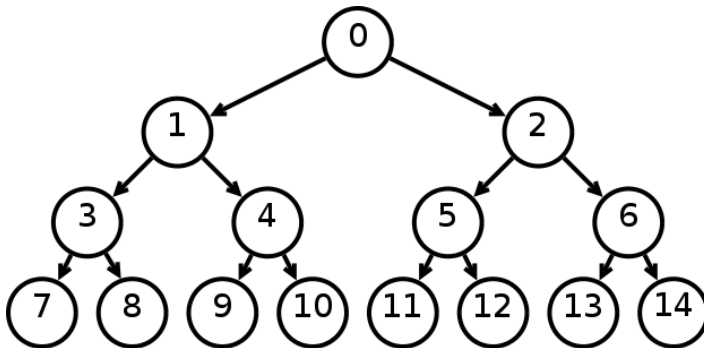


Figura: É uma árvore binária?



Exemplos

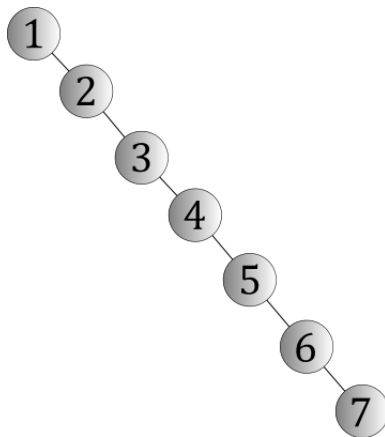


Figura: É uma árvore binária?



Exemplos

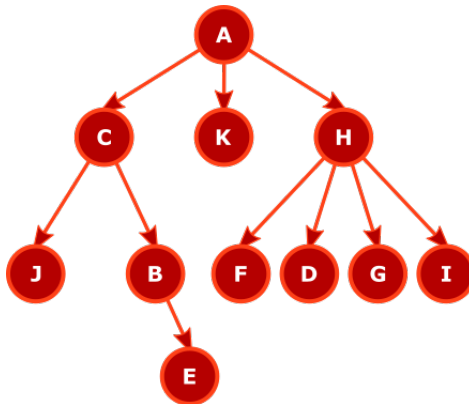


Figura: É uma árvore binária?



Árvores Binárias

- Árvores representam dados de maneira hierárquica.
- Se a árvore não tiver uma certa forma, sua utilidade pode ser questionada.



Exemplos

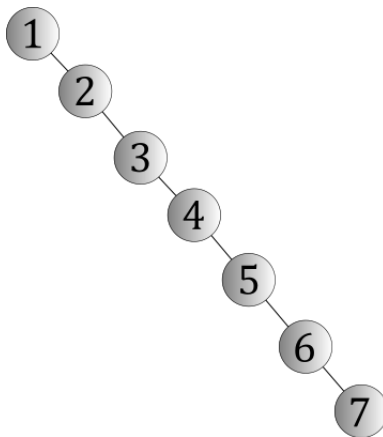


Figura: Árvore ou Lista?



Árvores Binárias

- Agora que conhecemos a terminologia e definições, podemos nos concentrar em aprender algo novo e útil.



Sumário

3 Percurso em Árvores



Percurso em Árvores

- Um dos problemas fundamentais sobre esta estrutura de dados é percorrê-la.
- Qual estratégia adotar?
- Busca em largura?
- Busca em profundidade?
 - ▶ Pré-ordem?
 - ▶ Em-ordem?
 - ▶ Pós ordem?



Percurso em Árvores

- Examinaremos agora cada uma destas abordagens.



Sumário

- 3 Percurso em Árvores
 - Busca em Largura
 - Busca em profundidade



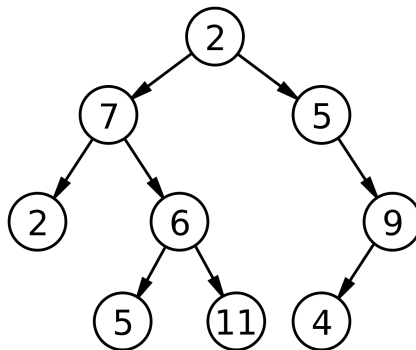
Percurso em Árvores

- Busca em largura ou amplitude.
 - ▶ Breath-first-search (BFS).
- Parte de um nó específico.
- Visita os vizinhos deste nó.
- Visita os vizinhos dos vizinhos do nó inicial.
- Visita os vizinhos dos vizinhos dos vizinhos do nó inicial.
- ...



Percurso em Árvores

Exemplo

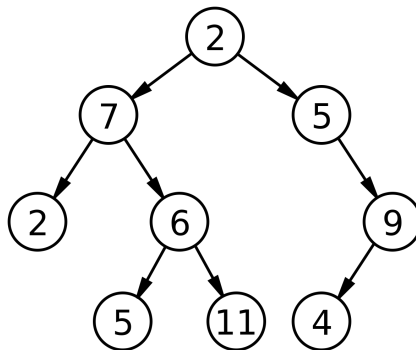


Qual a ordem dos nós a serem visitados ao partir do nó raiz?



Percurso em Árvores

Exemplo



2, 7, 5, 2, 6, 9, 5, 11, 4



Busca em largura

- Como implementar uma busca em largura?



Busca em largura

- Colocamos o nó inicial em uma **fila**.
- Enquanto a fila não for vazia:
 - ▶ Processo o nó que está na frente da fila.
 - ▶ Insira todos os seus vizinhos no fim da fila.
 - ▶ Retire o nó da fila.



Busca em Largura

```
void bfs(tree_node *node) {
    queue_t *queue;
    queue_initialize(&queue);
    if (node != NULL) {
        queue_push(queue, node);
    }
    while (!queue_empty(queue)) {
        tree_node *u = queue_front(queue);
        process(u);
        if (u->left != NULL) {
            queue_push(queue, u->left);
        }
        if (u->right != NULL) {
            queue_push(queue, u->right);
        }
        queue_pop(queue);
    }
    queue_delete(&queue);
}
```




Sumário

- 3 Percurso em Árvores
 - Busca em Largura
 - Busca em profundidade



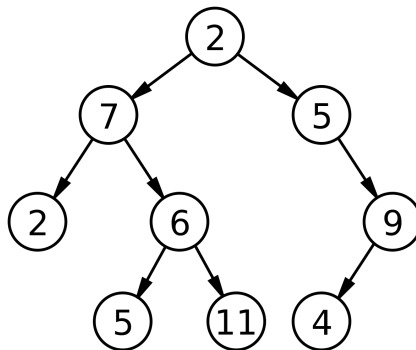
Busca em profundidade

- A busca em profundidade (depth-first-search), difere da busca em largura pois ela busca em um ramo inteiro da árvore antes de olhar para o outro ramo.
- Basicamente um nó é visitado e a busca procede recursivamente para o vizinho imediato.



Percurso em Árvores

Exemplo

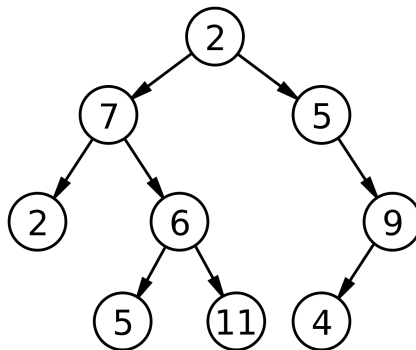


Qual a ordem dos nós a serem visitados ao partir do nó raiz?



Percurso em Árvores

Exemplo



2, 7, 2, 6, 5, 11, 5, 9, 4



Busca em profundidade

- Como implementar uma busca em profundidade?
- Substituindo a fila da busca em largura por uma pilha.



Busca em Profundidade

```
void dfs(tree_node *node) {
    stack_t *stack;
    stack_initialize(&stack);
    if (node != NULL) {
        stack_push(stack, node);
    }
    while (!stack_empty(stack)) {
        tree_node *u = stack_top(stack);
        process(u);
        stack_pop(stack);
        if (u->right != NULL) {
            stack_push(stack, u->right);
        }
        if (u->left != NULL) {
            stack_push(stack, u->left);
        }
    }
    stack_delete(&stack);
}
```



Busca em profundidade

- Implementação recursiva é mais simples, mais elegante e até mais rápida.
- Usamos uma pilha implícita quando chamamos a função recursivamente.



Busca em Profundidade

```
void dfs(tree_node* node){  
    if(node!=NULL){  
        process(node);  
        dfs(node->left);  
        dfs(node->right);  
    }  
}
```



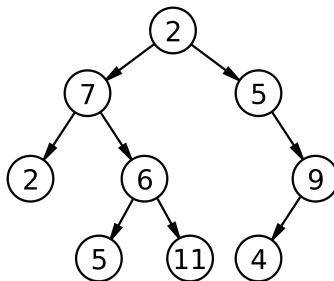

Busca em profundidade

- A busca em profundidade possui algumas variações.
- Pré-ordem: visitamos o nó antes de proceder recursivamente aos vizinhos.
- Em-ordem: procedemos recursivamente à esquerda, visitamos o nó, e procedemos recursivamente à direita.
- Pós-ordem: procedemos recursivamente à esquerda, procedemos recursivamente à direita, visitamos o nó.



Percurso em Árvores

Exemplo

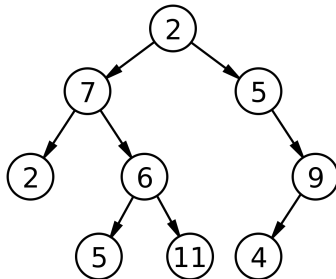


Qual a ordem dos nós a serem visitados ao partir do nó raiz em busca profundidade em pré-ordem?



Percurso em Árvores

Exemplo

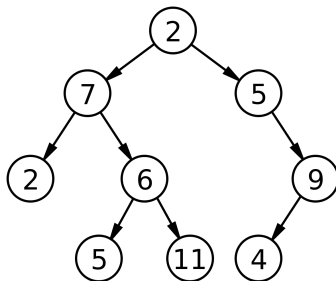


2, 7, 2, 6, 5, 11, 5, 9, 4



Percurso em Árvores

Exemplo

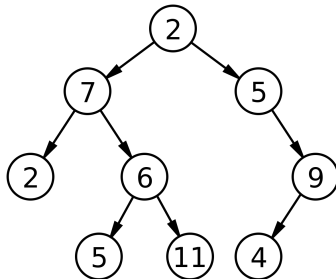


Qual a ordem dos nós a serem visitados ao partir do nó raiz em busca profundidade em-ordem?



Percurso em Árvores

Exemplo



2, 7, 5, 6, 11, 2, 5, 4, 9



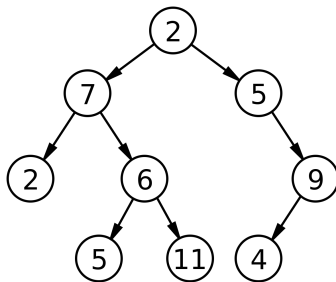
Busca em Profundidade

```
void dfs(tree_node* node){  
    if(node!=NULL){  
        dfs(node->left);  
        process(node);  
        dfs(node->right);  
    }  
}
```



Percurso em Árvores

Exemplo

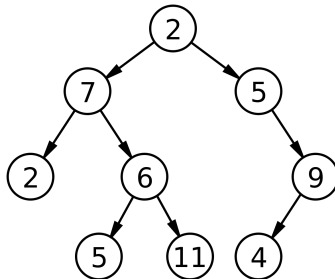


Qual a ordem dos nós a serem visitados ao partir do nó raiz em busca profundidade em pós-ordem?



Percurso em Árvores

Exemplo



2, 5, 11, 6, 7, 4, 9, 5, 2



Busca em Profundidade

```
void dfs(tree_node* node){  
    if(node!=NULL){  
        dfs(node->left);  
        dfs(node->right);  
        process(node);  
    }  
}
```