

# Linguagens Regulares

## Linguagens Formais e Autômatos

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Brasília

---

Campus  
Taguatinga

# Sumário

Introdução

Propriedades

Lema do bombeamento

Exemplos

# Linguagens regulares

Nas últimas aulas vimos diversos formalismos capazes de reconhecer, ou descrever, linguagens regulares, tais como: DFAs, NFAs,  $\varepsilon$ -NFAs e REGEXs.

Todos esses formalismos são equivalentes entre si, qualquer linguagem reconhecida (ou descrita) por um, pode ser reconhecida ou descrita pelo outro.

Contudo, nem todas as linguagens são regulares. Precisamos saber reconhecer que algumas linguagens podem ser reconhecidas/descritas pelos formalismos que aprendemos e outras não. Para isso, estudaremos as propriedades das linguagens regulares.

# Sumário

Introdução

Propriedades

Lema do bombeamento

Exemplos

# Propriedades das linguagens regulares

- ▶ As linguagens regulares possuem propriedades interessantes.
- ▶ Em especial elas são **fechadas** por complementação, união e interserção.

# Propriedades das linguagens regulares

Teorema (Linguagens regulares são fechadas pela união)

*Se  $L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares,  $L_1 \cup L_2$  também é regular.*

# Fecho por união

## Demonstração

*Como  $L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares, então existem expressões regulares  $E_1$  e  $E_2$  com  $L(E_1) = L_1$  e  $L(E_2) = L_2$ .*

*A partir de  $E_1$  e  $E_2$ , podemos construir a expressão regular  $E_1 + E_2$ , a qual descreve a linguagem  $L(E_1 + E_2) = L_1 \cup L_2$ . □*

# Fecho por complemento

Teorema (Linguagens regulares são fechadas por complementação)

*Se  $L$  é uma linguagem regular, então  $\overline{L}$  também é.*



# Fecho por complemento

## Demonstração

*Se  $L$  é uma linguagem regular, então existe um DFA  $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  que a reconhece. Podemos modificar  $D$  para  $D' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ , isto é, os estados que não eram de aceitação em  $D$  passaram a ser de aceitação em  $D'$ , e os estados que eram de aceitação em  $D$ , não são de aceitação em  $D'$ .*

*Como  $D'$  reconhece  $\overline{L}$ , então  $\overline{L}$  é regular.  $\square$*

# Fecho por interseção

Teorema (Linguagens regulares são fechadas por interseção)

*Se  $L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares, então  $L_1 \cap L_2$  também é regular.*

# Fecho por interseção

## Demonstração

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

*Como as linguagens regulares são fechadas por união e complementação, então  $L_1 \cap L_2$  é regular.  $\square$*

## Fecho por diferença

- ▶ Como as linguagens regulares são fechadas por união, interseção e complemento, podemos estender esses resultados para provar outras propriedades.

# Fecho por diferença

Teorema (Linguagens regulares são fechadas por diferença)

*Se  $L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares, então  $L_1 - L_2$  também é regular.*

# Fecho por diferença

## Demonstração

*Temos que  $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ . Logo a diferença também de duas linguagens regulares também é regular.  $\square$*

# Linguagens regulares

Contudo, nem todas as linguagens são regulares. Isto é, existem problemas que não conseguiremos resolver com os formalismos mencionados.  
Como determinar que uma linguagem não é regular?

# Linguagens não-regulares

Tome a seguinte linguagem:

$$\{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ possui o mesmo número de 0s e 1s}\}$$

- ▶ Essa linguagem não parece regular, pois teríamos que ter a capacidade de contar o número 0s e 1s, e um autômato não tem essa capacidade.
- ▶ Contudo, essa intuição não é suficiente! Precisamos **provar** que a linguagem não é regular.
- ▶ O **Lema do bombeamento** é capaz de demonstrar que uma linguagem  $L$  não é regular.



# Sumário

Introdução

Propriedades

**Lema do bombeamento**

Exemplos

# Lema do bombeamento

## Lema (Lema do bombeamento)

*Tome  $L$  uma linguagem regular, então existe um  $p$  tal que, se  $w \in L$  é uma palavra com tamanho de pelo menos  $p$  símbolos,  $w$  pode ser dividida em três partes,  $w = xyz$ , satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Para todo  $i \geq 0$ ,  $xy^iz \in L$ .*
2.  *$|y| > 0$ .*
3.  *$|xy| \leq p$ .*

*O número  $p$  é chamado de comprimento do bombeamento.*

# Lema do bombeamento

## Lema (Lema do bombeamento)

*Tome  $L$  uma linguagem regular, então existe um  $p$  tal que, se  $w \in L$  é uma palavra com tamanho de pelo menos  $p$  símbolos,  $w$  pode ser dividida em três partes,  $w = xyz$ , satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Para todo  $i \geq 0$ ,  $xy^iz \in L$ .*
2.  *$|y| > 0$ .*
3.  *$|xy| \leq p$ .*

*O número  $p$  é chamado de comprimento do bombeamento.*

Tanto  $z$  quando  $x$  podem ser  $\varepsilon$ , mas a condição 2 determina que  $y \neq \varepsilon$ .

# Lema do bombeamento

## Lema (Lema do bombeamento)

*Tome  $L$  uma linguagem regular, então existe um  $p$  tal que, se  $w \in L$  é uma palavra com tamanho de pelo menos  $p$  símbolos,  $w$  pode ser dividida em três partes,  $w = xyz$ , satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Para todo  $i \geq 0$ ,  $xy^iz \in L$ .*
2.  *$|y| > 0$ .*
3.  *$|xy| \leq p$ .*

*O número  $p$  é chamado de comprimento do bombeamento.*

Sem a condição 2 o lema seria trivialmente verdadeiro.

# Lema do bombeamento

## Lema (Lema do bombeamento)

*Tome  $L$  uma linguagem regular, então existe um  $p$  tal que, se  $w \in L$  é uma palavra com tamanho de pelo menos  $p$  símbolos,  $w$  pode ser dividida em três partes,  $w = xyz$ , satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Para todo  $i \geq 0$ ,  $xy^iz \in L$ .*
2.  *$|y| > 0$ .*
3.  *$|xy| \leq p$ .*

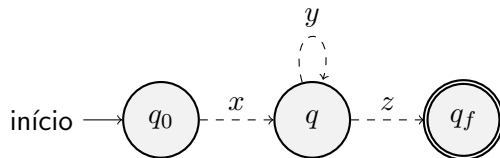
*O número  $p$  é chamado de comprimento do bombeamento.*

A condição 3 especifica que o tamanho de  $xy$  não pode ser maior que  $p$ .

# Lema do bombeamento

## Intuição

- ▶ Tome um DFA  $D$ , com  $p$  estados, que reconheça uma linguagem regular  $L$  e uma string  $w$ , com  $|w| \geq p$ .
- ▶ Se  $D$  aceita  $w$ , ele o faz repetindo ao menos um estado  $q$ <sup>1</sup>. Isto é, existe um ciclo que passa por  $q$ .
- ▶ Logo,  $w$  pode ser dividido em  $w = xyz$ , com  $|y| > 0$  e  $|xy| \leq p$



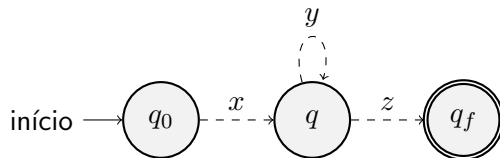
---

<sup>1</sup>Princípio da casa dos pombos

# Lema do bombeamento

## Intuição

- ▶ Tome um DFA  $D$ , com  $p$  estados, que reconheça uma linguagem regular  $L$  e uma string  $w$ , com  $|w| \geq p$ .
- ▶ Se  $D$  aceita  $w$ , ele o faz repetindo ao menos um estado  $q$ <sup>1</sup>. Isto é, existe um ciclo que passa por  $q$ .
- ▶ Logo,  $w$  pode ser dividido em  $w = xyz$ , com  $|y| > 0$  e  $|xy| \leq p$



Podemos dizer que qualquer cadeia  $w = xy^iz$ ,  $i \geq 0$  será aceita por  $D$

---

<sup>1</sup>Princípio da casa dos pombos

# Lema do bombeamento

Pelo [Lema do bombeamento](#), temos que, se uma linguagem é regular, **então** ela atende as condições descritas.

Pela contrapositiva, temos que, se uma linguagem não atende as condições descritas, ela não pode ser regular.

$$\begin{aligned}\phi &\Rightarrow \psi \\ \neg\psi &\Rightarrow \neg\phi\end{aligned}$$



# Sumário

Introdução

Propriedades

Lema do bombeamento

Exemplos

# Exemplos

Utilizaremos o **Lema do bombeamento** para mostrar a não-regularidade de algumas linguagens.

$0^n 1^n$ 

## Teorema

*A linguagem  $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$  não é regular.*

$0^n 1^n$ 

## Demonstração

*Suponha, por absurdo que  $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$  seja regular.*

*Tome  $w = 0^p 1^p$ , em que  $p$  é o comprimento de bombeamento dado pelo Lema do bombeamento.*

*Como  $|w| \geq p$  e  $w \in L$  o **Lema do bombeamento** garante que  $w$  pode ser dividido em  $w = xyz$  de forma que  $xy^i z \in L$  para qualquer  $i \geq 0$ .*

*Iremos verificar que isso é impossível!*

$0^n 1^n$ 

## Demonstração

*Se  $y$  é uma palavra que tem somente 0s,  $xy^2z$  terá mais zeros do que 1s, fazendo com que  $xy^2z \notin L$ .*

$0^n 1^n$ 

## Demonstração

*Se  $y$  é uma palavra que tem somente 1s,  $xy^2z$  terá mais 1s do que 0s, fazendo com que  $xy^2z \notin L$ .*

$0^n 1^n$ 

## Demonstração

*Se  $y$  contém 0s e 1s, pode até ser que  $xy^2z$  tenha o mesmo número de 0s e 1s, mas eles estarão intercalados, fazendo com que  $xy^2z \notin L$ .*

$0^n 1^n$ 

## Demonstração

*Temos uma **contradição**, logo,  $L$  não é regular.*  $\square$



$0^n 1^n$ 

Nessa demonstração, poderíamos deixar de lado os casos em que  $y$  contém 0s e 1s, ou que  $y$  contém apenas 1s se aplicássemos a terceira condição do [Lema do bombeamento](#), que diz que  $|xy| \leq p$ . Logo  $y$  só pode possuir 0s.

# Mesmo número de 0s e 1s

## Teorema

*Mostre que a linguagem*

$$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ possui o mesmo número de 0s e 1s}\}$$

*não é regular.*

# Mesmo número de 0s e 1s

## Demonstração

*Suponha, por absurdo, que  $L$  é regular e tome  $p$  o comprimento do bombeamento dado pelo [Lema do bombeamento](#).*

*Tome  $w = 0^p 1^p$ . Certamente  $w \in L$ , e como  $|w| \geq p$ ,  $w$  pode ser dividido em  $w = xyz$ , em que qualquer  $xy^i z$ ,  $i \geq 0$  esteja em  $L$ .*

*Pela terceira condição do [Lema do bombeamento](#),  $|xy| \leq p$ , portanto  $y$  é composto somente de 0s, fazendo com que  $xy^2 z \notin L$ , o que é um absurdo.*

*Portanto,  $L$  não é regular.  $\square$*

## Mesmo número de 0s e 1s

A escolha de  $w = 0^p 1^p$  foi crucial para fecharmos a demonstração. Se escolhêssemos  $w = (01)^p$ , então, poderíamos ter pego  $x = \varepsilon$ ,  $y = 01$  e  $z = (01)^{p-1}$ , fazendo com que  $xy^i z \in L$  para qualquer  $i \geq 0$ .

Se sua demonstração falhou, pode ser que, tentando outra palavra  $w$ , você consiga provar.

$ww$ 

## Teorema

*Mostre que a linguagem  $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$  não é regular.*

$ww$ 

## Demonstração

Suponha, por absurdo, que  $L$  é regular e tome  $p$  o comprimento do bombeamento dado pelo [Lema do bombeamento](#).

Tome  $w = 0^p 10^p 1$ , claramente  $w \in L$  e  $|w| \geq p$ . Assim,  $w$  pode ser dividido em  $w = xyz$ , em que qualquer  $xy^i z \in L$ ,  $i \geq 0$ .

Pela terceira condição do [Lema do bombeamento](#),  $|xy| \leq p$ , logo,  $y$  tem que possuir somente 0s. Nesta ocasião,  $xy^2 z \notin L$ , o que é uma contradição.

Portanto,  $L$  não é regular.

# Quadrado perfeito

## Teorema

*Mostre que a linguagem*

$$L = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

*não é regular.*

# Quadrado perfeito

## Observações

- ▶ A sequência dos quadrados perfeitos é:  $1, 4, 9, 16, 25, \dots$
- ▶ A distância entre dois elementos consecutivos aumenta cada vez mais.
- ▶ Dois quadrados perfeitos grandes não podem estar próximos.

Agora podemos ir para a demonstração:



# Quadrado perfeito

## Demonstração

*Por absurdo, suponha  $L$  regular. Tome a string  $w = 1^{p^2}$ , em que  $p$  é dado pelo [Lema do bombeamento](#).*

*Temos que  $w \in L$  e  $|w| \geq p$ . Portanto,  $w$  pode ser dividido em  $w = xyz$  e  $xy^iz \in L$ ,  $i \geq 0$ .*

*Pela terceira condição do [Lema do bombeamento](#),  $|xy| \leq p$ , e portanto,  $|y| \leq p$ . Como  $|xyz| = p^2$ , temos que  $|xy^2z| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$ , o próximo quadrado perfeito.*

*Assim,  $xy^2z \notin L$ , logo,  $L$  não é regular.  $\square$*

$0^i 1^j$ 

## Teorema

*A linguagem*

$$L = \{0^i 1^j \mid i > j\}$$

*não é regular.*

$0^i 1^j$ 

## Demonstração

*Por absurdo, suponha  $L$  regular. Tome a palavra  $w = 0^{p+1}1^p$ , em que  $p$  é dado pelo [Lema do bombeamento](#).*

*Certamente,  $w \in L$  e  $|w| \geq p$ . Logo,  $w$  pode ser dividido em  $w = xyz$  e  $xy^i z \in L$ ,  $i \geq 0$ .*

*Como  $|xy| \leq p$ ,  $y$  deve ser uma palavra formada apenas de 0s. Se tomarmos  $xy^0 z$ , teremos uma palavra com uma quantidade de 0s menor ou igual à quantidade de 1, visto que  $|y| > 0$ . Portanto,  $xy^0 z \notin L$  e  $L$  não é regular.*