Linguagens Livres-de-contexto

Linguagens Formais e Autômatos

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

INSTITUTO FEDERAL
Brasília

Sumário

Linguagens Livres de Contexto

- Introduzimos dois novos formalismos capazes de reconhecer linguagens não-regulares, mas livres-de-contexto (LLC): as CFG e os PDA.
- Nesta aula falaremos sobre algumas propriedades de LLC.
- Contudo, veremos que **nem todas** as linguagens são livres-de-contexto.
- Existem linguagens que não podem ser reconhecidas ou geradas por pelos PDA e CFG.
- Utilizaremos o **Lema do Bombeamento para LLCs** para mostrar isso.

Sumário

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \leq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \leq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

A condição 1 nos diz que, a palavra bombeada deve estar em L também

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \leq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

A condição 2 nos diz que, pelo menos uma das palavras bombeáveis não pode ser vazia.

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \leq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

A condição 3 nos diz que a parte central de w, formada por vxy deve ter comprimento menor ou igual a p.

LB para LLC

- Assim com o no Lema do Bombeamento para linguagens regulares, podemos usar o Lema do Bombeamento para LLC para mostrar que linguagens não são livres-de-contexto.
- Se L é LLC $\Rightarrow$ o Lema do Bombeamento para LLC vale.
- Se o Lema do Bombeamento para LLC não vale $\Rightarrow$ L não é LLC.

LB para LLC

Uso do LB para LLC

Para provar que L não é livre-de-contexto usando o Lema do Bombeamento para LLC, fazemos o seguinte

1. Assuma, por absurdo, que L é LLC.
2. Use o Lema do Bombeamento para LLC para garantir que existe o inteiro p, tal que, para todo $s \in L$, com $|s| \geq p$, faz com que s possa ser bombeada.
3. Encontre uma cadeia $w \in L$, com $|w| \geq p$ que não possa ser bombeada, mostrando que, para **qualquer divisão** de $w = uvxyz$, existe algum valor de i que $uv^ixy^iz \notin L$, com $|vy| > 0$ e $|vxy| \leq p$.
4. Como chegou-se em uma contradição, a afirmação (1) tem que ser falsa, isto é, L não pode ser LLC.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{a^n b^n c^n\}$ não é LLC.

Demonstração

Suponha L livre-de-contexto.

Seja p dado pelo Lema do Bombeamento para LLC. Seja $w = a^p b^p c^p$. Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$, logo, o lema deve ser aplicável, isto é, w pode ser dividida em $w = uvxyz$ com:

1. $uv^i xy^i z \in L$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{a^n b^n c^n\}$ não é LLC.

Demonstração

Pela condição (3), que diz que $|vxy| \leq p$, sabemos que vxy não pode possuir, simultaneamente, a's, b's e c's.

A condição (2) nos diz que $|vy| < 0$, logo a palavra uv^2xy^2z irá acrescentar novos símbolos a $a^pb^pc^p$, mas como vxy não pode ter os três tipos de símbolos, a cadeia bombeada não terá o mesmo número de a's, b's e c's, isto é, $uv^2xy^2z \notin L$.

Logo, L não pode ser livre-de-contexto.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\}$ não é LLC.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é LLC.

Sumário

Propriedades de LLC

Vimos que a clase das linguagens regulares é fechada sobres as operações de

- União;
- Interseção;
- Complemento.
- Fecho de Kleene, e;
- Concatenação.

Será que as LLC também possuem todas essas propriedades?

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por união. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1 \cup L_2$ também é LLC.

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC **não** são fechadas por interseção. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1 \cap L_2$ não necessariamente é LLC.

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC **não** são fechadas por complemento. Isto é, se L é uma LLC, não necessariamente $\bar{L}$ é uma LLC.

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por fecho Kleene. Isto é, se L é uma LLC, então L^* também é uma LLC.

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por concatenação. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1 L_2$ também é uma LLC.