Autômatos finitos não determinísticos

Linguagens Formais e Autômatos

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

INSTITUTO FEDERAL
Brasília
Campus
Taguatinga

Sumário

Introdução

- Em DFAs, dado um estado qualquer q e um símbolo de entrada, sabemos exatamente qual será o próximo estado.
- Em outras palavras, todo passo de computação é gerado unicamente do passo anterior.
- Chamamos isso de **determinismo**.

Introdução

- Em uma situação de **não-determinismo**, podemos derivar diferentes passos de computação a partir de um único ponto.
- Isto é, dado um estado q e um símbolo de entrada, podemos produzir como resultado, mais de um possível estado.

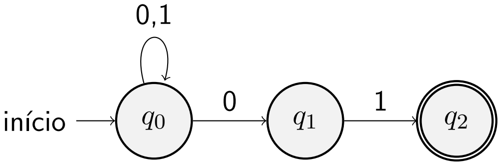
Introdução

- O **não-determinismo** pode ser visto como uma generalização do **determinismo**, visto que, todo modelo determinístico também é um não-determinístico.
- Estudaremos a versão não-determinística dos autômatos finitos: os **autômatos finitos não-determinísticos**, ou simplesmente, **NFAs**.

Sumário

NFAs

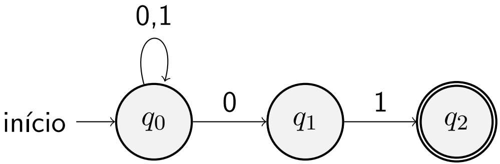
Tome o seguinte NFA:



Este autômato reconhece a linguagem $L = \{w | w \in \{0,1\}^* \text{ e } w \text{ termina com } 01\}$

NFAs

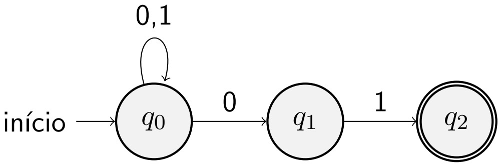
Tome o seguinte NFA:



Ao se deparar com o símbolo 0 no estado q_0, o que o autômato faz? Para qual estado ele vai?

NFAs

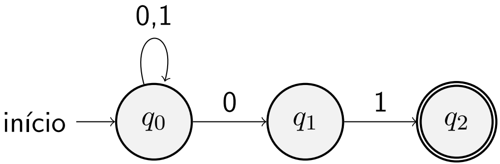
Tome o seguinte NFA:



Ele permanece em q_0 e vai para q_1, simultaneamente!

NFAs

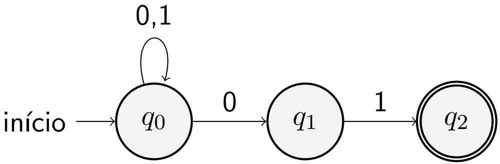
Tome o seguinte NFA:



Esse autômato tem a capacidade de adivinhar quando estamos nos dois últimos símbolos da entrada.

NFAs

Tome o seguinte NFA:



Como ele opera quando a entrada é $w = 00101$?

NFAs

$$
\begin{tikzcd}
q_0 \arrow[r] \arrow[dr] & q_0 \arrow[r] \arrow[dr] & q_0 \arrow[r] & q_0 \arrow[r] \arrow[dr] & q_0 \arrow[r] & q_0 \\
 & q_1 & q_1 \arrow[dr] & & q_1 \arrow[dr] & \\
 & & & q_2 & & q_2 \text{ (aceita)}
\end{tikzcd}
$$

Figura: Processamento do NFA sobre a entrada $w = 00101$

NFAs: definição formal

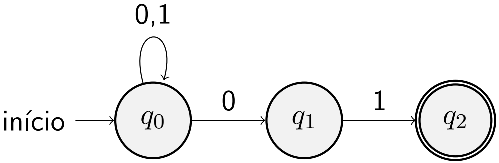
Definição (Definição formal de um NFA)

Um NFA é uma 5-tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, em que:

- *Q é um conjunto finito de* **estados**,
- *Σ é o* **alfabeto de entrada**,
- *$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ é a* **função de transição**,
- *$q_0 \in Q$ é o estado inicial,*
- *$F \subseteq Q$ é o* **conjunto de estados de aceitação**.

NFAs: definição formal

Para o NFA de exemplo abaixo, temos a seguinte função de transição:



	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

NFAs: noção formal de computação

Definição (Aceitação em NFAs)

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *um NFA e* $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$. *Dizemos que* N *aceita* w *se existe uma sequência de estados* $r_0, r_1, \ldots, r_n$ *com as seguintes condições:*

- $r_0 = q_0$
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$, $0 \leq i < m$
- $r_m \in F$

Em outras palavras, basta que um ramo de computação chegue em um estado de aceitação ao final da entrada w *para que* N *aceite* w.

Sumário

Equivalência de NFAs e DFAs

- Apesar de ser uma característica interessante, NFAs não resolvem mais problemas que DFAs.
- Os dois formalismos reconhecem a mesma classe de linguagem, as **linguagens regulares**.
- Conseguimos mostrar que todo NFA possui um DFA equivalente, isto é, que reconhece a mesma linguagem.

Equivalência de NFAs e DFAs

Ideia da prova

A ideia é, a partir de um NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$, construir um DFA $D = (Q_D, \sigma, \delta_D, q_0, F_D)$.

Equivalência de NFAs e DFAs

Ideia da prova

No caso $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$, ou seja, se N possui $|Q_N|$ estados, D possuirá $2^{|Q_N|}$ estados. Contudo, alguns estados poderão ser excluídos em uma etapa posterior, pois não serão acessíveis do estado inicial. Cada um desses estados é rotulado com um subconjunto de Q_N.

Equivalência de NFAs e DFAs

Ideia da prova

O conjunto de estados de aceitação F_D será um subconjunto de Q_D de forma que todo $S \in F_D$, temos que se $X \in F_N$, temos que $X \in S$. Em outras palavras, os estados de aceitação em F_D serão aqueles que, tem ao menos, um estado de aceitação em F_N.

Equivalência de NFAs e DFAs

Ideia da prova

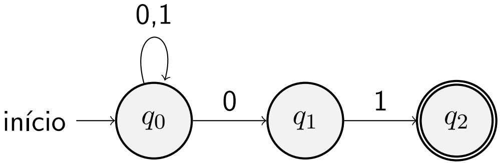
Por fim, para qualquer $S \in Q_D$ e um símbolo $a \in \Sigma$, temos que:

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

.

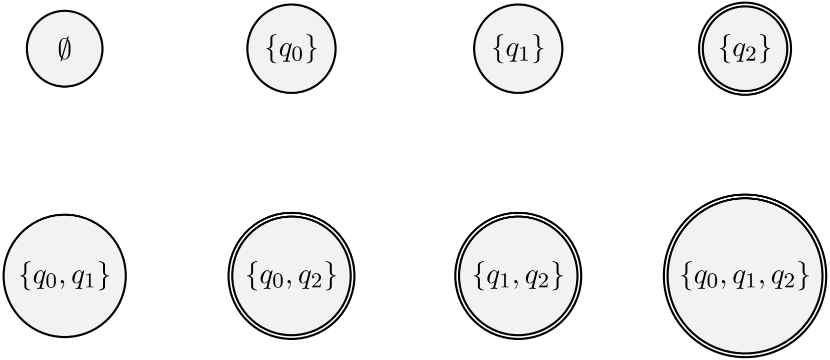
Equivalência de NFAs e DFAs

Tomando o NFA de exemplo:



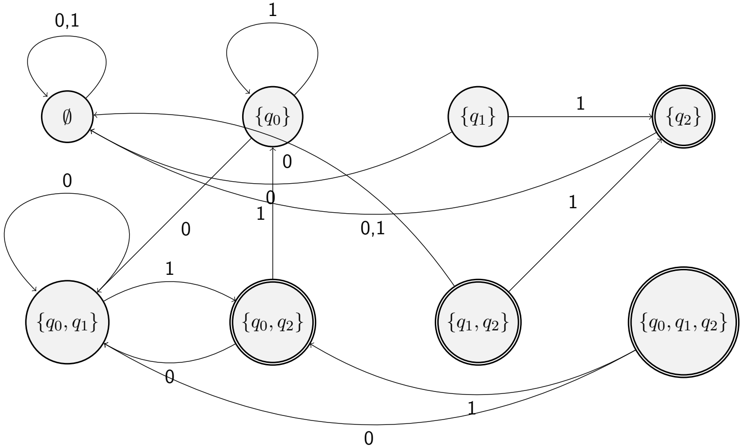
Equivalência de NFAs e DFAs

O DFA equivalente teria os seguintes estados:



Equivalência de NFAs e DFAs

Adicionando as transições, teríamos:



Sumário

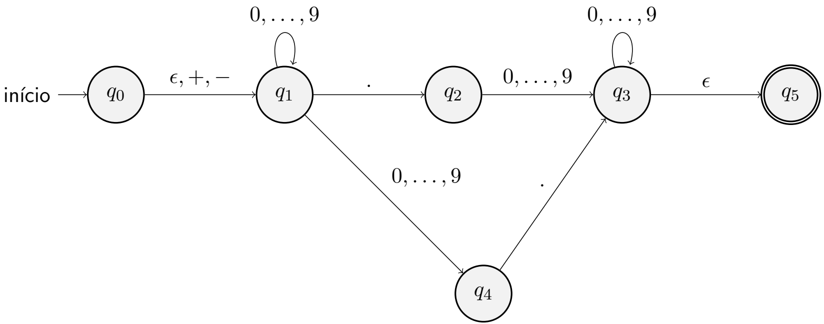
ϵ-NFA

- ϵ-NFAs estendem a noção de NFAs ao possibilitar uma **transição livre**, isto é, aquela que não consome um símbolo da entrada.
- Apesar dessa nova capacidade, esse formalismo não computa mais problemas que os NFAs ou DFAs. Mas pode ser utilizado convenientemente.
- Esses formalismos também tem uma proximidade muito grande com as **expressões regulares**.

ϵ-NFAs: um exemplo

- Suponha que o objetivo seja reconhecer um número.
- Números:
  1. Opcionalmente começam com um sinal ($-$ ou $+$).
  2. São compostos de uma sequência de dígitos.
  3. Um ponto decimal.
  4. Outra sequência de dígitos.
- 2 e 4 são opcionais, mas pelo menos você deve ter um deles. Por exemplo $.50$ e $50.$ são ambos válidos, assim como 50.50, ou $+50.50$ e -50.50.

ϵ-NFAs:um exemplo



ϵ-NFAs: um exemplo

- Como modificar o ϵ-NFA anterior para aceitar números cujo uso do ponto decimal também seja opcional?

ϵ-NFAs: definição formal

Definição (Definição formal de um ϵ-NFA)

Um ϵ-NFA é uma 5-tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, em que:

- Q *é um conjunto finito de* **estados**,
- Σ *é o* **alfabeto de entrada**,
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \to \mathcal{P}(Q)$ *é a* **função de transição**,
- $q_0 \in Q$ *é o estado inicial,*
- $F \subseteq Q$ *é o* **conjunto de estados de aceitação**.

Em relação aos NFAs, apenas a função δ muda, que passa a aceitar o símbolo ϵ.

ϵ-NFAs: conversão de ϵ-NFA para NFA

- Usar transições do tipo ϵ não adiciona poder computacional em relação aos DFAs ou NFAs.
- De fato, qualquer ϵ-NFA pode ser convertido em um NFA equivalente.
- Para mostrar isso, precisamos de algumas noções.

ϵ-NFAs: conversão de ϵ-NFA para NFA

Definição (ECLOSE)

O fecho-ϵ, chamado de ECLOSE, *pode ser definido recursivamente da seguinte forma:*

- $q \in \mathrm{ECLOSE}(q)$.
- *Se* $p \in \mathrm{ECLOSE}(q)$ *e* $r \in \delta(p, \epsilon)$, *então,* $r \in \mathrm{ECLOSE}(q)$.

Em outras palavras, $\mathrm{ECLOSE}(q)$ *contém todos os estados atingíveis por* q *usando apenas transições* ϵ

ϵ-NFAs: conversão de ϵ-NFA para NFA

Algoritmo para computar NFA equivalente ao ϵ-NFA

Seja $E = (Q, \Sigma_E, \delta_E, q_0, F_E)$ um ϵ-NFA. Construiremos um NFA $N = (Q, \Sigma_N, \delta_N, q_0, F_N)$ da seguinte forma.

1. Se $q \in F_E$ e $q \in \mathrm{ECLOSE}(p)$, então $q \in F_N$.

$$F_N = \{s \in Q | \mathrm{ECLOSE}(s) \cap F_E \neq \emptyset\}$$

2. Se $s' \in \mathrm{ECLOSE}(s)$ e $t \in \delta_E(s', a)$, então $t \in \delta_N(s, a)$.

$$\delta_N(s, a) = \bigcup_{s' \in \mathrm{ECLOSE}(s)} \delta(s', a)$$