Linguagens Livres-de-contexto

Linguagens Formais e Autômatos

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

Sumário

Linguagens Livres de Contexto

- Introduzimos dois novos formalismos capazes de reconhecer linguagens não-regulares, mas livres-de-contexto (LLC): as CFG e os PDA.
- Nesta aula falaremos sobre algumas propriedades de LLC.
- Contudo, veremos que **nem todas** as linguagens são livres-de-contexto.
- Existem linguagens que não podem ser reconhecidas ou geradas por pelos PDA e CFG.
- Utilizaremos o **Lema do Bombeamento para LLCs** para mostrar isso.

Sumário

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \geq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \geq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

A condição 1 nos diz que, a palavra bombeada deve estar em L também

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \geq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

A condição 2 nos diz que, pelo menos uma das palavras bombeáveis não pode ser vazia.

LB para LLC

Lema (Lema do bombeamento para LLC)

Seja L uma LLC. Logo, existe um inteiro p, tal que, para $w \in L$, com $|w| \geq p$, w pode ser dividida em cinco partes, $w = uvxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $uv^ixy^iz \in L, \quad i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

A condição 3 nos diz que a parte central de w, formada por vxy deve ter comprimento menor ou igual a p.

LB para LLC

- Assim com o no Lema do Bombeamento para linguagens regulares, podemos usar o Lema do Bombeamento para LLC para mostrar que linguagens não são livres-de-contexto.
- Se L é LLC $\Rightarrow$ o Lema do Bombeamento para LLC vale.
- Se o Lema do Bombeamento para LLC não vale $\Rightarrow$ L não é LLC.

LB para LLC

Uso do LB para LLC

Para provar que L não é livre-de-contexto usando o Lema do Bombeamento para LLC, fazemos o seguinte

1. Assuma, por absurdo, que L é LLC.
2. Use o Lema do Bombeamento para LLC para garantir que existe o inteiro p, tal que, para todo $s \in L$, com $|s| \geq p$, faz com que s possa ser bombeada.
3. Encontre uma cadeia $w \in L$, com $|w| \geq p$ que não possa ser bombeada, mostrando que, para **qualquer divisão** de $w = uvxyz$, existe algum valor de i que $uv^ixy^iz \notin L$, com $|vy| > 0$ e $|vxy| \leq p$.
4. Como chegou-se em uma contradição, a afirmação (1) tem que ser falsa, isto é, L não pode ser LLC.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{a^n b^n c^n\}$ não é LLC.

Demonstração

Suponha L livre-de-contexto.

Seja p dado pelo Lema do Bombeamento para LLC. Seja $w = a^p b^p c^p$. Claramente $w \in L$ e $|w| \geq p$, logo, o lema deve ser aplicável, isto é, w pode ser dividida em $w = uvxyz$ com:

1. $uv^i xy^i z \in L$, $i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{a^n b^n c^n\}$ não é LLC.

Demonstração

Pela condição (3), que diz que $|vxy| \leq p$, sabemos que vxy não pode possuir, simultaneamente, a's, b's e c's.

A condição (2) nos diz que $|vy| > 0$, logo a palavra uv^2xy^2z irá acrescentar novos símbolos a $a^p b^p c^p$, mas como vxy não pode ter os três tipos de símbolos, a cadeia bombeada não terá o mesmo número de a's, b's e c's, isto é, $uv^2xy^2z \notin L$.

Logo, L não pode ser livre-de-contexto. $\square$

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \left\{ a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k \right\}$ não é LLC.

Demonstração

Suponha que L seja uma LLC e tome p dado pelo Lema do bombeamento. Se escolhermos $w = a^p b^p c^p$, temos que $w \in L$, $|w| \geq p$ e que, portanto, w pode ser dividida em $w = uvxyz$ com:

1. $uv^i xy^i z \in L$, $i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \left\{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\right\}$ não é LLC.

Demonstração

Caso 1. Se v ou y possuem mais que um tipo de símbolo cada, uv^2xy^2z causará uma intercalação de símbolos. Portanto $uv^2xy^2z \notin L$.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \left\{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\right\}$ não é LLC.

Demonstração

Caso 2. Quando tanto v quanto y contêm,no máximo, apenas um tipo de símbolo do alfabeto, temos que pelo menos um dos tipos de símbolos (a, b ou c) não ocorrerá em v ou y, visto que $|vxy| \leq p$. Esse caso gera três subcasos.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \left\{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\right\}$ não é LLC.

Demonstração

Caso 2.1. Quando a's não aparecem em v ou y, uv^0xy^0z terá o mesmo número de a's de w, mas menos b's ou c's, fazendo com que $uv^0xy^0z \notin L$.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \left\{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\right\}$ não é LLC.

Demonstração

Caso 2.2. Quando b's não aparecem em v ou y, então, pelo menos um a ou um c ocorrerá em v ou y, já que ambos não podem ser vazios simultaneamente.

Se a's aparecem em v ou y, então uv^2xy^2z será uma palavra com mais a's do que b's, e, portanto, está fora de L.

Se c's aparecem em v ou y, então uv^0xy^0z terá menos c's do que b's, e, portanto, está fora de L.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \left\{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\right\}$ não é LLC.

Demonstração

Caso 2.3. Quando c's não aparecem em y ou v, então pelo menos um a ou um b ocorrerá em v ou y, fazendo com que uv^2xy^2z não esteja em L.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \left\{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\right\}$ não é LLC.

Demonstração

Logo, a linguagem L não pode ser uma LLC. $\square$

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é LLC.

Demonstração

Suponha L livre-de-contexto e seja p o comprimento dando pelo Lema do Bombeamento para LLC.Tome $w = 0^p1^p0^p1^p$. Temos que $w \in L$ e $|w| \geq p$. Logo, w pode ser divida em $w = uvxyz$ com:

1. $uv^ixy^iz \in L$, $i \geq 0$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é LLC.

Demonstração

Se vxy ocorrer exclusivamente na primeira metade ou na segunda metade de w. Se vxy ocorre exclusivamente na primeira metade, uv^2xy^2z faria com que um símbolo 1 fizesse parte do início da segunda metade da nova palavra.

Analogamente, se vxy ocorre exclusivamente na segunda metade, uv^2xy^2z faria com que um símbolo 0 fizesse parte do final da primeira metade da nova palavra.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é LLC.

Demonstração

Logo vxy deve conter o ponto médio da palavra $0^p1^p0^p1^p$. Mas, nesse caso uv^0xy^0z será da forma $0^p1^i0^j1^p$, que claramente não está em L.

Exemplos do LB para LLC

Teorema

$L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ não é LLC.

Demonstração

Logo, L não pode ser uma LLC. $\square$.

Sumário

Propriedades de LLC

Vimos que a clase das linguagens regulares é fechada sobres as operações de

- União;
- Interseção;
- Complemento.
- Fecho de Kleene, e;
- Concatenação.

Será que as LLC também possuem todas essas propriedades?

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por união. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1 \cup L_2$ também é LLC.

Demonstração

Sejam $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ e $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ as CFG que geram, respetivamente, L_1 e L_2. Conseguimos construir $G_3 = (V_3, \Sigma_3, R_3, S_3)$ que gera $L_3 = L_1 \cup L_2$ da seguinte forma:

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por união. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1 \cup L_2$ também é LLC.

Demonstração

- Se $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ renomeie as variáveis de V_2 para que não ocorram em V_1.
- Tome $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.
- Tome $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\}$, com $S_3 \notin V_1 \cup V_2$.
- Faça $R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{S_3 \to S_1 \mid S_2\}$ $\square$

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC **não** são fechadas por interseção. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1 \cap L_2$ não necessariamente é LLC.

Demonstração

As linguagens $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 0\}$ são LLC. Contudo $L_3 = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ não é uma LLC. $\square$

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC **não** são fechadas por complemento. Isto é, se L é uma LLC, não necessariamente $\bar{L}$ é uma LLC.

Demonstração

Se as LLC fossem fechadas por complemento, teríamos que $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, mas sabemos que as LLC não são fechadas por interseção. $\square$

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por fecho Kleene. Isto é, se L é uma LLC, então L^* também é uma LLC.

Demonstração

Seja $G = (V, \Sigma, R, S)$ a CFG que gera L. Podemos construir uma CFG $G' = (V', \Sigma', R', S')$ que gera L^* da seguinte forma:

- $V' = V \cup S'$, com $S' \notin V$.
- $\Sigma' = \Sigma$.
- $R' = R \cup \{S' \rightarrow S'S \mid \epsilon\}$. $\square$

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por concatenação. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1 L_2$ também é uma LLC.

Demonstração

Sejam $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ e $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ as CFG que geram, respetivamente, L_1 e L_2. Conseguimos construir $G_3 = (V_3, \Sigma_3, R_3, S_3)$ que gera $L_3 = L_1 L_2$ da seguinte forma:

Propriedades de LLC

Teorema

As LLC são fechadas por concatenação. Isto é, se L_1 e L_2 são LLC, então $L_3 = L_1L_2$ também é uma LLC.

Demonstração

- Se $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ renomeie as variáveis de V_2 para que não ocorram em V_1.
- Tome $\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.
- Tome $V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\}$, com $S_3 \notin V_1 \cup V_2$.
- Faça $R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{S_3 \to S_1S_2\}$ $\square$