Redutibilidade

Teoria da Computação – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

Sumário

Introdução

- Anteriormente estabelecemos as Máquinas de Turing como modelo padrão de computação de propósito-geral.
- Apresentamos vários problemas que são decidíveis utilizando MTs.
- Mas também apresentamos problemas indecidíveis, como o problema A_{MT}, o problema da parada.
- Veremos agora como utilizar problemas que sabemos que são indecidíveis para mostrar que outros problemas também são.
- Utilizaremos o método de **redução** entre problemas.

Reduções

- Uma redução é uma maneira de converter um problema em outro de forma que a solução para o segundo problema pode ser utilizada para resolver o primeiro problema.
- Podemos utilizar esse conceito informal para fazer uma analogia com o dia-a-dia.

Reduções

Exemplo

- Suponha que queiramos nos localizar em uma cidade nova.
- Localizar seria fácil se tivéssemos um mapa dela.
- Assim, podemos reduzir o problema de nos localizar na cidade ao problema de obter um mapa.
- Se resolvemos um segundo, podemos usar a solução para resolver o primeiro.

Reduções

- As reduções sempre envolvem dois problemas, chamados A e B.
- Se A se reduz a B, podemos utilizar a solução de B para resolver A.
- No nosso exemplo:
  - $A =$ problema de se localizar na cidade.
  - $B =$ problema de encontrar um mapa.
- Note que a redutibilidade não diz nada sobre resolver A ou B independentemente, mas sim sobre resolver A na presença de uma solução de B.

Reduções

Exemplo

- O problema de viajar de Taguatinga para Paris se reduz ao problema de comprar uma passagem de avião entre as duas cidades.
- O problema de comprar a passagem se reduz ao problema de arrumar o dinheiro.
- O problema de arrumar o dinheiro se reduz ao problema de encontrar um emprego.
- Note que não especificamos como resolver cada problema, mas estamos falando que podemos resolver um problema dada a solução do outro.

Reduções

- Reduções também ocorrem em problemas matemáticos.
- O problema de calcular a área de um retângulo se reduz ao problema de mensurar sua altura e largura.
- O problema de resolver um sistema linear de equações se reduz ao problema de inverter uma matriz.

Reduções

- Reduções apresentam um importante papel em classificar os problemas em decidíveis ou indecidíveis.
- São importantíssimas em classificar problemas decidíveis em níveis de dificuldade, o que é de interesse para a área de Complexidade Computacional.

Reduções

- Se um problema A se reduz a um problema B, o que podemos dizer sobre a **dificuldade** de B em relação A?

Reduções

- Resolver A não pode ser mais difícil do que resolver B.
- A partir de uma solução de B, conseguimos resolver A.

Reduções

- Se A se reduz a B, e A é indecidível, o que podemos dizer sobre B?
- Se A se reduz a B, e B é decidível, o que podemos dizer sobre A?

Reduções

- Se A se reduz a B, e A é indecidível, o que podemos dizer sobre B?
  - B tem que ser indecidível.
- Se A se reduz a B, e B é decidível, o que podemos dizer sobre A?

Reduções

- Se A se reduz a B, e A é indecidível, o que podemos dizer sobre B?
  - B tem que ser indecidível.
- Se A se reduz a B, e B é decidível, o que podemos dizer sobre A?
  - A tem que ser decidível.

Reduções

- Para provar que um problema é indecidível, basta mostrar que outro problema indecidível se reduz a ele.
- Nosso ponto de partida: A_{MT}.

Sumário

Turing-redutibilidade

- Para podermos utilizar a técnica de redução entre problemas, precisamos formalizá-la.
- **Turing-redutibilidade**.

Turing-redutibilidade

Definição (Máquinas de Turing com oráculo)

Um **oráculo** para uma linguagem B é um dispositivo externo que é capaz de dizer, para qualquer *string* w, se ela pertence ou não pertence a B.

Uma **Máquina de Turing com oráculo** tem a capacidade adicional de fazer consultas ao oráculo.

Turing Redutibilidade

- Ou seja, uma máquina de Turing com oráculo possui uma caixa preta que pode ser consultada para a Linguagem B.
- Esta caixa-preta diz se uma determinada palavra está ou não está em B, independentemente da indecidibilidade de B.

Turing-redutibilidade

Definição (Decidibilidade relativa)

Uma linguagem B é decidível em relação a uma linguagem A, se existe uma Máquina de Turing com oráculo para A que é capaz de decidir B.

Turing-redutibilidade

Definição (Turing-redutibilidade)

Uma linguagem A é Turing-redutível a uma linguagem B, denotado por $A \leq_T B$, se A é decidível em relação a B.

Ou seja, se existe uma a máquina com oráculo para B de modo que seja possível decidir A com ela, temos que $A \leq_T B$.

Turing-redutibilidade

- Com relação a estes conceitos, podemos concluir duas coisas.

Turing-redutibilidade

Teorema

Se $A \leq_T B$ e B é decidível, então A é decidível.

Turing-redutibilidade

Demonstração.

- Suponha que $A \leq_T B$, ou seja, A é decidível por através de uma máquina com oráculo para B.
- Se B é decidível então podemos trocar o oráculo de B por um procedimento que decida B, sem utilizar o oráculo para B.
- Assim, temos uma máquina de Turing que decide A ao eliminar este oráculo.

$\square$

Turing-redutibilidade

Corolário

Se $A \leq_T B$ e A é indecidível, então B é indecidível.

Turing-redutibilidade

Demonstração.

- Tome $A \leq_T B$ e A indecidível e suponha B decidível.
- Se B é decidível, podemos trocar o oráculo que A utiliza para se reduzir a B pela própria máquina que decide B.
- Dessa forma, podemos decidir A através de B sem utilizar o oráculo.
- Impossível, pois A é indecidível.
- $\therefore B$ tem que ser indecidível.

$\square$

Turing-redutibilidade

- Agora que temos este conceito de Turing-redutibilidade, podemos utilizá-lo para mostrar que outros problemas são indecidíveis.
- Vamos utilizar da estrutura da prova do nosso último corolário e de A_{MT} para isto.

Problemas indecidíveis

- Sabemos que A_{MT} é indecidível.
- Vamos considerar um problema parecido: $HALT_{MT}$.
- $HALT_{MT}$ concentra-se em determinar se uma Máquina de Turing para (aceitando ou rejeitando) ou não em uma determinada entrada:

$$HALT_{MT} = \{\langle M, w\rangle | M \text{ é uma MT e } M \text{ para sobre } w\}$$

Problemas indecidíveis

- Provaremos que $HALT_{MT}$ é indecidível ao mostrarmos uma redução de A_{MT} para $HALT_{MT}$.

Problemas indecidíveis

Teorema

$HALT_{MT}$ é indecidível.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- A prova será por contradição.
- Assumiremos que $HALT_{MT}$ é decidível e utilizaremos este fato para chegar a conclusão que A_{MT} é decidível, gerando um absurdo.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- Suponha que temos uma MT R que decida $HALT_{MT}$.
- Podemos utilizar R para construir S, uma MT que decide A_{MT}.
- Uma abordagem inicial para construção de S é simular M sobre w.
- Se M aceita w, S aceita.
- Se M rejeita w ou entra em loop, S deve dizer rejeita.
- O problema é: pela simulação não da conseguimos dizer se uma máquina está em loop.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- Esta abordagem inicial não funciona.
- Vamos utilizar R ao nosso favor.
- Com R, testamos se M para sobre w:
  - Se R diz aceita, significa que M para sobre M (aceita ou rejeita). Fazemos a simulação de M sobre W e pegamos a resposta da simulação como a resposta de S.
  - Se não para, quer dizer que M entra em loop sobre W,e portanto M não aceita w. Logo, S deve dizer rejeita.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- Assim, se a MT R existe, podemos decidir A_{MT} através de S.
- Mas sabemos que A_{MT} é indecidível.
- Contradição.
- R não pode existir.
- $\therefore HALT_{MT}$ é indecidível.

Problemas indecidíveis

- Agora podemos ir para a prova.

Problemas indecidiveis

Demonstração

Algorithm 1: Construção da máquina S que decide A_{MT}

Input: $\langle M, w \rangle$, uma descrição de M e uma entrada w
Output: $aceita$, caso M aceita w e $rejeita$ caso contrário .

```
Rode R sobre a entrada ⟨M, w⟩
if( R rejeita )
    return rejeita
else
    Simule M sobre w até M parar.
    if( M aceita w )
        return aceita
    else
        return rejeita
```

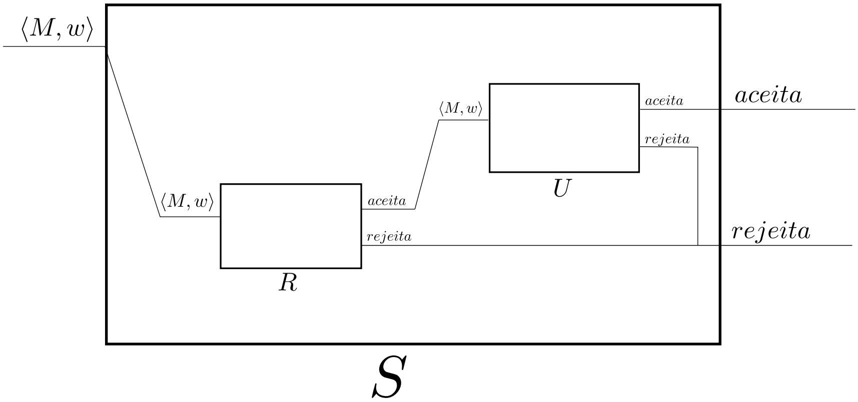
Problemas indecidíveis

Demonstração.

- Como R decide $HALT_{MT}$, mostramos como construir S que decide A_{MT}.
- Mas A_{MT} é indecidível.
- R não pode existir.
- $\therefore HALT_{MT}$ é **indecidível**.

□

Problemas indecidíveis



Problemas indecidíveis

- A mesma prova pode ser feita utilizando a nossa definição de Turing-redutibilidade.
- Basta mostrar que, se tivermos uma máquina com oráculo R para $HALT_{MT}$, conseguimos decidir A_{MT}.
- Feito isso teremos que $A_{MT} \leq_T HALT_{MT}$, e como A_{MT} é indecidível, pelo teorema visto anteriormente, $HALT_{MT}$ tem que ser indecidível também.

Problemas indecidíveis

Algorithm 2: Mostrando que $A_{MT} \leq_T HALT_{MT}$

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: *aceita*, caso M aceita w e *rejeita* caso contrário

Consulte o oráculo R para verificar se M para sobre w

if(*Se* M *para sobre* w)

    Simule M sobre w

    if(M *aceita* w)

        return *aceita*

    else

        return *rejeita*

else

    return *rejeita*

Problemas indecidíveis

- Essas estratégias de prova são muito comuns para mostrar que certos problemas são indecidíveis.
- Com exceção do A_{MT}, que foi provado diretamente via método da diagonalização, podemos mostrar que outros problemas são indecidíveis via redução.
- Vamos mostrar que outro problema é indecidível utilizando a mesma estratégia.

Problemas indecidíveis

- Tome o seguinte problema:

$$E_{MT} = \{\langle M \rangle | M \text{ é uma MT e } L(M) = \emptyset\}$$

- E_{MT} é a linguagem das máquinas que não aceitam nada.

Problemas indecidíveis

Teorema

E_{MT} é indecidível.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- Utilizaremos o mesmo *framework* da demonstração de indecidibilidade de $HALT_{MT}$.
- É uma prova por contradição.
- Vamos supor que E_{MT} é decidível e acabar concluindo que A_{MT} é decidível, o que é um absurdo.
- Dessa forma conclui-se que E_{MT} é indecidível.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- Suponha a existência de uma máquina R que decide E_{MT}.
- Vamos utilizar R para construir uma máquina S que decide A_{MT}.
- Como construir S?

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- Uma primeira abordagem para construção de S é rodar R sobre a entrada $\langle M \rangle$ e verificar se R a aceita.
- Se R aceita $\langle M \rangle$, sabemos que $L(M) = \emptyset$, e portanto, S deve dizer rejeita.
- Se R rejeita $\langle M \rangle$, então $L(M) \neq \emptyset$, mas não sabemos se uma string w em particular é aceita por M, que é o que A_{MT} justamente quer.
- Precisamos de outra abordagem, esta não funciona.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- Em vez de rodar R sobre $\langle M \rangle$ rodaremos R sobre uma versão modificada de $\langle M \rangle$.
- Modificamos $\langle M \rangle$ de modo que M rejeite todas as strings diferentes de w.
- Se a string for w, a versão modificada funciona como M.
- Você consegue construir tal máquina?

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- A ideia é fazer com que w faça parte da descrição da máquina modificada.
- Assim, para qualquer entrada x, basta compará-la com a palavra w embutida na descrição.
- Se as palavras não batem, a máquina modificada rejeita.
- Se as palavras batem, então $x = w$ e a máquina modificada funciona como a máquina original.
- Só precisamos inserir alguns estados a mais na máquina original para efetuar esta comparação.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- A versão modificada de $\langle M \rangle$ rejeita todas as strings diferentes de w.
- Se R rejeita sobre a versão modificada de $\langle M \rangle$, sabemos que S deve aceitar a entrada $\langle M, w \rangle$.
- Se R aceita sobre a versão modificada de $\langle M \rangle$, sabemos que M não aceita w, e portanto, S deve rejeitar sobre a entrada $\langle M, w \rangle$.

Problemas indecidíveis

- Agora podemos partir para a demonstração.

Problemas indecidíveis

Demonstração.

- Chame a versão modificada de $\langle M \rangle$ de M_1.

Algorithm 3: Máquina M_1

Input: $x \in \Sigma^*$

Output: $aceita$ se $x = w$ e $rejeita$ caso contrário

```
if( x ≠ w )
    return rejeita
else
    Roda M sobre w e aceita, se M aceita w.
```

Problemas indecidíveis

Demonstração.

- Dado M_1 agora podemos construir S.

Algorithm 4: Construção de S

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: $aceita$ se M aceita w e $rejeita$, caso contrário.

Utilize $\langle M, w \rangle$ para construir M_1

Rode R sobre $\langle M_1 \rangle$

if(R *aceita*)

  return $rejeita$

else

  return $aceita$

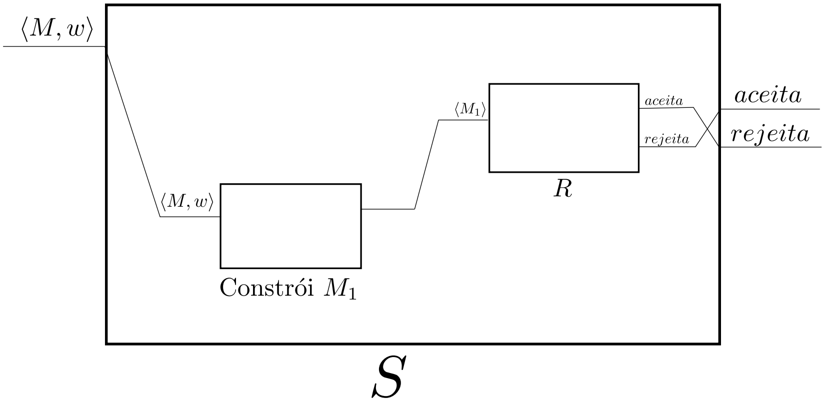
Problemas indecidíveis

Demonstração.

- Dado que R decide E_{MT}, mostramos que S decide A_{MT}.
- Mas A_{MT} é indecidível.
- A máquina R não pode existir.
- $\therefore E_{MT}$ é indecidível.

$\square$

Problemas indecidíveis



Problemas indecidíveis

- Outra forma, é utilizar a mesma estratégia da redução de A_{MT} para $HALT_{MT}$.
- Assumimos que existe uma máquina com oráculo para E_{MT} e decidimos A_{MT}.
- Isso prova que $A_{MT} \leq_T E_{MT}$ e portanto que E_{MT} é indecidível.

Problemas indecidíveis

Algorithm 5: Mostrando que $A_{MT} \leq_T E_{MT}$

Input: $\langle M, w\rangle$ e R, uma máquina com oráculo para E_{MT}

Output: *aceita*, caso M aceita w e *rejeita* caso contrário

```
Crie a máquina M_1 como descrito na prova anterior
Consulte o oráculo R para verificar se M_1 não aceita nada
if( Se M_1 não aceita nada )
    return rejeita
else
    return aceita
```

Problemas indecidíveis

- Até agora utilizamos a redução a partir de A_{MT} para mostrar que outro problema é indecidível.
- Às vezes, é mais fácil provar um teorema sobre indecidibilidade se partirmos de outo problema.
- Mostraremos agora que um problema é indecidível ao reduzirmos E_{MT} para ele.

Problemas indecidíveis

- Tome o problema EQ_{MT}:

$$EQ_{MT} = \{\langle M_1, M_2\rangle | M_1 \text{ e } M_2 \text{ são MTs e } L(M_1) = L(M_2)\}$$

- Ou seja, queremos saber se dois programas possuem o mesmo comportamento.

Problemas indecidíveis

Teorema

EQ_{MT} é indecidível

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- A prova é por contradição.
- Vamos mostrar que, se EQ_{MT} é decidível, conseguimos decidir E_{MT}.
- O que é um absurdo, pois sabemos que E_{MT} é indecidível.
- Assim concluímos que EQ_{MT} é indecidível.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- E_{MT} é o problema de determinar se $L(M)$ é vazia para alguma máquina M.
- EQ_{MT} é o problema de determinar se $L(M_1) = L(M_2)$ para máquinas M_1 e M_2.
- Assim, se $L(M_1) = \emptyset$, e a resposta de EQ_{MT} sobre a entrada $\langle M_1, M_2 \rangle$ é **aceita**, conseguimos concluir que $L(M_2) = \emptyset$.
- O E_{MT} é um caso especial de EQ_{MT}.

Problemas indecidíveis

Demonstração.

- Tome como R a máquina que decide EQ_{MT}.
- Podemos construir S a partir de R da seguinte maneira.

Problemas indecidíveis

Demonstração.

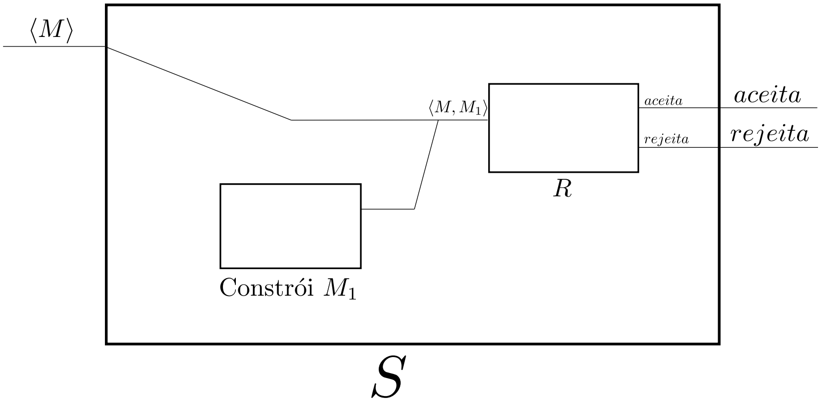
Algorithm 6: Construção de S que decide E_{MT}.

Input: $\langle M \rangle$

Output: $aceita$, se $L(M) = \emptyset$ e $rejeita$ caso contrário.

```
Rode R sobre a entrada ⟨M, M_1⟩, onde M_1 é uma MT que rejeita
  qualquer entrada
if( R aceita )
  return aceita
else
  return rejeita
```

Problemas indecidíveis



Sumário

Reduções via histórico de computação

- O método de histórico de computação é importante para mostrar que A_{MT} é redutível a outras linguagens.
- Este método é frequentemente utilizando quando o problema a ser provado indecidível envolve a busca da existência de algo.
- Por exemplo, este método pode ser utilizado para provar a indecidibilidade do décimo problema de Hilbert: buscar a existência de raízes inteiras de um polinômio.

Reduções via histórico de computação

- O histórico de computação de uma máquina sobre uma entrada é simplesmente a sequência de configurações que a máquina tem ao processar uma entrada.
- Imagine que a cada função de transição, uma foto seja tirada da situação da máquina.
- É um registro completo da computação da máquina.

Reduções via histórico de computação

- Históricos de computação são sequências **finitas**.
- Se uma máquina M não para sobre uma entrada w, dizemos que o histórico de computação não existe para M sobre w.
- Máquinas determinísticas possuem no máximo um histórico de computação para uma determinada entrada.
- Máquinas não-determinísticas podem possuir múltiplos históricos para uma mesma entrada.

Reduções via histórico de computação

- Vamos definir a noção de histórico mais precisamente.

Reduções via histórico de computação

Definição (Histórico de computação)

- Seja M uma MT e w uma entrada.
- Um histórico de computação de aceitação de M em w é uma sequência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_l$, onde C_1 é a configuração inicial de M em w e C_l é uma configuração de aceitação de M.
- Cada C_i é derivado de C_{i-1} respeitando as regras de M.
- Similarmente, um histórico de computação de rejeição de M em w tem como C_l uma configuração de rejeição.

Reduções via histórico de computação

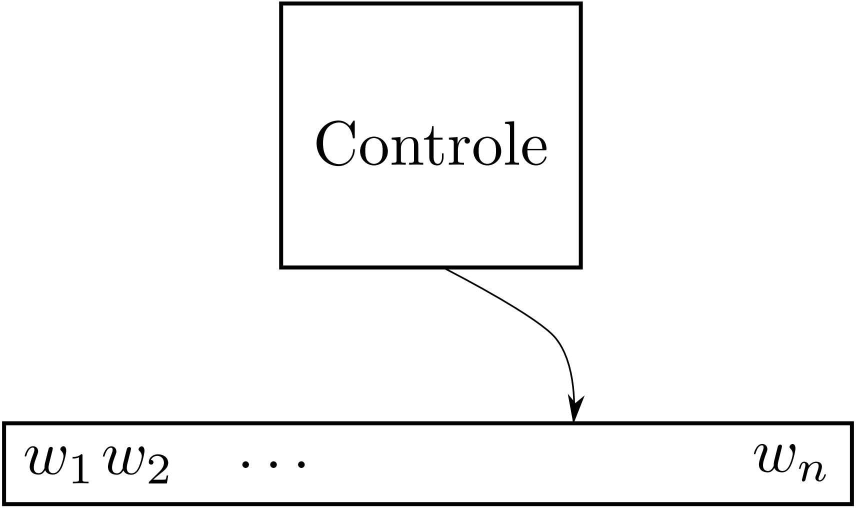
- Agora que sabemos o que é um histórico de computação podemos atacar problemas e mostrá-los indecidíveis.
- Vamos mostrar que um problema relacionado a um **autômato linearmente limitado** é indecidível via este método.

Reduções via histórico de computação

Definição (Autômato linearmente limitado)

- Um autômato linearmente limitado (LBA — linear bounded automata) é um tipo restrito de MT.
- A cabeça de leitura/escrita não pode se mover além do espaço delimitado pela entrada.
- Se a máquina tenta se mover para além de qualquer uma das extremidades da entrada, a cabeça continua na mesma posição.

Autômato linearmente limitado



Autômato linearmente limitado

- Apesar de ter memória limitada, um autômato linearmente limitado é bem poderoso.
- Vamos mostrar um primeiro resultado sobre ele.
- Tome a linguagem:

$$A_{LBA} = \{\langle M, w\rangle | M \text{ é um LBA que aceita } w\}$$

Autômato linearmente limitado

Teorema

A_{LBA} é decidível.

Autômato linearmente limitado

- Para mostrar que A_{LBA} é decidível, vamos precisar provar um lema antes.

Autômato linearmente limitado

Lema

Seja M um LBA com q estados e g símbolos em Γ, o alfabeto da fita. Existem no máximo qng^n configurações distintas de M para uma fita de comprimento n.

Autômato linearmente limitado

Demonstração

- Lembre-se de que uma configuração é como se fosse uma foto do estado da máquina.
- Ela consiste de:
  - Estado.
  - Posição da cabeça.
  - Conteúdo da fita.

Autômato linearmente limitado

Demonstração

- M tem q estados.
- O comprimento da fita é n, então a cabeça só pode ocupar n posições distintas.
- O conteúdo da fita possui g^n possibilidades.

Autômato linearmente limitado

Demonstração.

- O número total de combinações equivale ao produto das três quantidades.
- qng^n.

$\square$

Autômato linearmente limitado

- Vamos provar agora o teorema sobre a decidibilidade de A_{LBA}.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- Para decidir de um LBA M aceita w, simulamos M sobre w.
- Durante a simulação, se M para e aceita/rejeita, aceitamos ou rejeitamos de acordo.
- O problema está quando M entra em loop sobre w.
- Temos que conseguir detectar loops, uma coisa que é impossível em MTs.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- No entanto, em LBAs, conseguimos detectar um loop.
- Se M repete alguma configuração, podemos concluir que ela repetirá essa configuração após algumas outras configurações.
- Pelo nosso lema, temos um número **finito** de configurações.
- Se após qng^n configurações a máquina não tiver parado, ela tem que estar em loop.

Autômato linearmente limitado

Demonstração.

Algorithm 7: Algoritmo que decide A_{LBA}

Input: $\langle M, w \rangle$ tal que M é um LBA.
Output: $aceita$ se M aceita w.

```
Simule M sobre w por qng^n passos ou até que ela pare
if( M parou )
    if( M aceitou w )
        return aceita
    else
        return rejeita
else
    return rejeita
```

Autômato linearmente limitado

- Este teorema mostra uma diferença fundamental entre os LBAs e as MTs.
- Enquanto A_{LBA} é decidível, A_{MT} não é.
- Modelos diferentes com resultados diferentes no que tange o problema da aceitação.

Autômato linearmente limitado

- Agora que ganhamos uma intuição sobre os LBAs, estamos prontos para mostrar resultados de indecidibilidade sobre eles.
- Tome a linguagem:

$$E_{LBA} = \{\langle M \rangle | M \text{ é um LBA tal que } L(M) = \emptyset\}$$

- Ou seja, queremos saber se a linguagem reconhecida por um LBA é vazia.
- Este problema é indecidível.

Autômato linearmente limitado

Teorema

E_{LBA} é indecidível.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- Esta prova é obtida através da redução de A_{MT}.
- Se supomos que E_{LBA} é decidível através de um algoritmo R, como podemos mostrar que A_{MT} é decidível e gerar uma contradição?
- Dado uma entrada $\langle M, w \rangle$ a ideia é construir um LBA B que é aceito por R, se e somente se, M não aceita w.
- Se R rejeita $\langle B \rangle$, então $L(B) \neq \emptyset$, e concluímos que A_{MT} diz aceita.
- Se R aceita $\langle B \rangle$, então $L(B) = \emptyset$, e concluímos que A_{MT} diz rejeita.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- Como construir B de M e w?
- Vamos construir B para aceitar uma entrada x se x é um histórico de computação de aceitação para M sobre w.
- Lembre-se que um histórico de computação de aceitação é uma sequência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_l$ que M passa e aceita w.

Autômato linearmente limitado

$$\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_1}\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_2}\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_3}\#\quad\cdots\quad\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_l}\#$$

Figura: Uma possível entrada para B

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- B funciona da seguinte maneira. Quando recebe x, B aceita x se x é um histórico de computação de aceitação de M sobre w.
- B então quebra cada configuração através de delimitadores $\#$ e determina se as configurações satisfazem as condições de um histórico de computação de aceitação:
  - C_1 é a configuração inicial de M sobre w.
  - Cada C_{i+1} pode ser derivado de C_i.
  - C_l é uma configuração de aceitação de M.

Autômato linearmente limitado

$$\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_1}\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_2}\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_3}\#\quad\cdots\quad\#\underbrace{\qquad\qquad}_{C_l}\#$$

Figura: Uma possível entrada para B

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

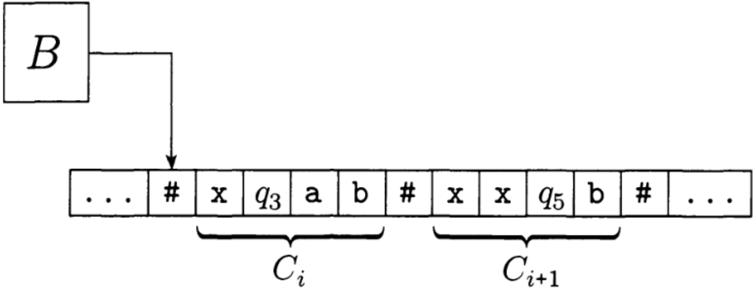
- A configuração inicial de C_1 para M sobre w é a palavra $q_0 w_1 w_2 \ldots w_n$, onde q_0 é o estado inicial de M sobre w.
- Para verificar se C_l é uma configuração de aceitação, basta varrer e verificar se ela contém o estado q_{aceita}.
- A segunda condição é a mais difícil. Para cada par adjacente de configurações, B tem que checar se C_{i+1} pode decorrer de C_i.
- Isso envolve verificar se C_i e C_{i+1} são idênticas exceto pela célula apontada sobre a cabeça e adjacente a cabeça de C_i.
- Estas células tem que obrigatoriamente ser atualizadas de acordo com δ de M.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- B verifica isso ao zigzaguear sobre C_i e C_{i+1}.
- De modo a marcar as posições das fitas, B utiliza símbolos com um ponto em cima.
- Finalmente, se as três condições são aceitas, B aceita a sua entrada.

Autômato linearmente limitado



Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- O propósito da criação de B não é rodar sobre uma entrada.
- É simplesmente servir de entrada para R.
- Uma vez que R retorna uma resposta, é possível dar uma resposta para A_{MT}.

Autômato linearmente limitado

Demonstração

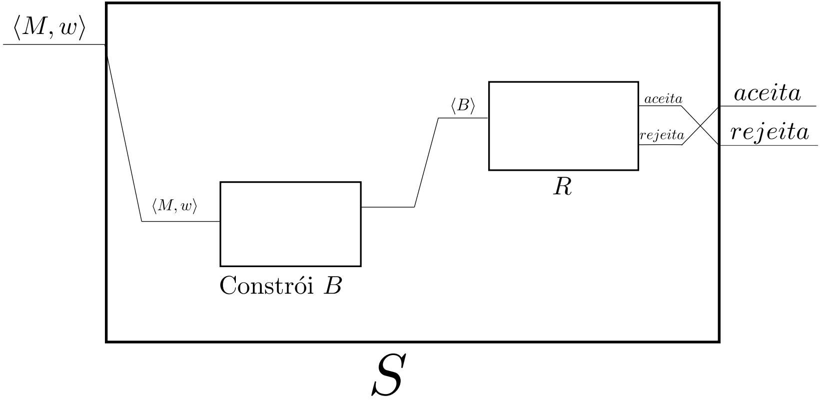
Algorithm 8: Demonstração de indecidibilidade de E_{LBA}

Input: $\langle M, w \rangle$, tal que M é uma MT e w é uma entrada

Output: $aceita$, se e somente se M aceita w

Construa o LBA B de M e w de acordo com a ideia da prova
Rode R sobre $\langle B \rangle$
if(R *rejeita*)
  return $aceita$
else
  return $rejeita$

Autômato linearmente limitado



Sumário

Redutibilidade por mapeamento

- Mostramos como utilizar reduções para provar que vários problemas são indecidíveis.
- Até o momento, utilizamos um tipo de redução chamada de Turing-redução.
- Mostraremos agora uma noção mais forte de redução, denominada *redução por mapeamento*.

Redutibilidade por mapeamento

- A noção de reduzir um problema a outro pode ser definido formalmente de diversas formas.
- Estudaremos a **redutibilidade por mapeamento**.
- A grosso modo, ao utilizar a redutibilidade por mapeamento para reduzir um problema A para um problema B significa que existe uma **função computável** que converte instâncias do problema A em instâncias do problema B.

Redutibilidade por mapeamento

- Se existe esta função computável, chamada de **redução**, podemos resolver A a partir da solução de B.
- Se sabemos resolver B, basta aplicar a redução nas instâncias de A para transformá-las em instâncias para B e resolver B, e logo, A.

Sumário

Funções computáveis

- Uma máquina de Turing computa uma função f ao começar com x na fita e ao parar, deixa na fita $f(x)$.

Funções computáveis

Definição (Funções computáveis)

Uma função $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ é dita uma **função computável** se existe uma Máquina de Turing M que, para qualquer $w \in \Sigma^*$, M para e deixa $f(w)$ na fita.

Funções computáveis

Exemplo

- Todas as operações aritméticas em inteiros são funções computáveis.
- Podemos construir uma máquina que recebe como entrada $\langle m, n\rangle$ e retorna $m + n$.

Funções computáveis

Exemplo

- Funções computáveis também podem ser transformações em descrições de máquinas.
- Uma função computável f pode, por exemplo, receber uma entrada $w \in \Sigma^*$ e retornar a descrição de uma MT $\langle M' \rangle$ se $w = \langle M \rangle$ é uma codificação de uma MT.
- A MT M' é uma máquina que reconhece a mesma linguagem de M, mas nunca tenta mover a cabeça de leitura/escrita à esquerda da posição inicial.
- A função f consegue isso ao adicionar vários estados na descrição de M e deve retornar ϵ, caso w não seja uma codificação de MT válida.

Sumário

Redutibilidade por mapeamento

- Agora que temos a noção formal de funções computáveis, podemos definir o que é de fato uma redutibilidade por mapeamento.

Redutibilidade por mapeamento

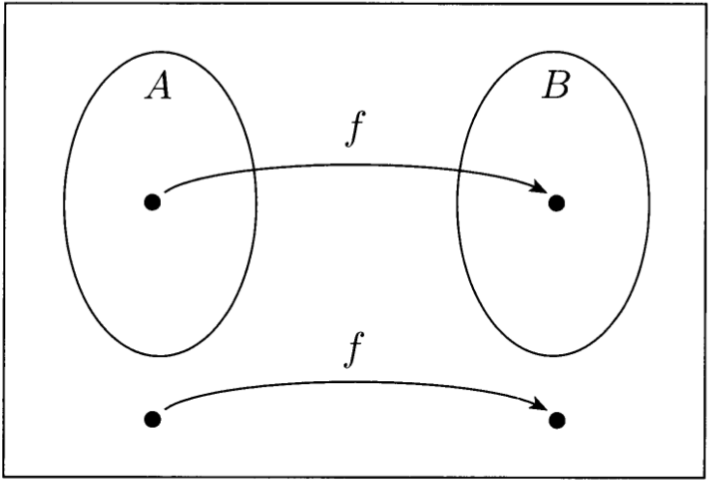
Definição (Redutibilidade por mapeamento)

Uma linguagem A é redutível via mapeamento a uma linguagem B, denotado por $A \leq_m B$, se existe uma função computável $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, tal que, para todo $w \in \Sigma^*$

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

A função f é denominada de redução de A para B.

Redutibilidade por mapeamento



Redutibilidade por mapeamento

- Uma redução via mapeamento de A para B permite uma maneira de converter perguntas sobre a pertinência de uma entrada em A para uma pertinência de uma entrada em B.
- Para responder se $w \in A$, utilizamos f para mapear w em $f(w)$ e testar se $f(w) \in B$.
- Em caso afirmativo, temos que $w \in A$.
- Em caso negativo, temos que $w \notin A$.
- Quem garante essa propriedade?

Redutibilidade por mapeamento

- Uma redução via mapeamento de A para B permite uma maneira de converter perguntas sobre a pertinência de uma entrada em A para uma pertinência de uma entrada em B.
- Para responder se $w \in A$, utilizamos f para mapear w em $f(w)$ e testar se $f(w) \in B$.
- Em caso afirmativo, temos que $w \in A$.
- Em caso negativo, temos que $w \notin A$.
- Quem garante essa propriedade?
- A função de redução.

Redutibilidade por mapeamento

- Se um problema é redutível por mapeamento a um segundo problema, cuja solução ja é conhecida, podemos obter uma solução para o primeiro problema.
- Capturamos esta noção com o seguinte teorema.

Redutibilidade por mapeamento

Teorema

Se $A \leq_m B$, e B é decidível, então A é decidível.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- Seja M uma MT que decide B e f uma função de redução de A para B. Podemos descrever uma MT N que decide A da seguinte maneira:

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 9: Construção de N

Input: w

Output: $aceita$, se $w \in A$ e $rejeita$ caso contrário

Compute $f(w)$
Rode M sobre $f(w)$
if($f(w) \in B$)
    return $aceita$
else
    return $rejeita$

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração.

- Claramente, se $w \in A$, então $f(w) \in B$, visto que f é uma redução de A para B.
- Assim, M aceita $f(w)$ sempre que $w \in A$ e M rejeita $f(w)$ sempre que $w \notin A$.
- N funciona como o esperado.

$\square$

Redutibilidade por mapeamento

- A partir do resultado anterior, podemos chegar no seguinte corolário.

Redutibilidade por mapeamento

Corolário

Se $A \leq_m B$ e A é indecidível, então B é indecidível.

Redutibilidade por mapeamento

- Vamos agora revisitar as nossas provas anteriores que utilizaram o conceito informal de redução e mostrar como o nosso conceito formal de redução se aplica.

Redutibilidade por mapeamento

Exemplo

- Mostramos anteriormente que $HALT_{MT}$ é indecidível via uma redução de A_{MT}.
- Essa redução mostrou como uma MT que decide $HALT_{MT}$ pode ser utilizada para decidir A_{MT}, gerando a esperada contradição.
- Vamos demonstrar uma redução via mapeamento de A_{MT} para $HALT_{MT}$.

Redutibilidade por mapeamento

- Precisamos apresentar uma função computável f que recebe como entrada $\langle M, w\rangle$ e dá como saída $\langle M', w'\rangle$, tal que:

$$\langle M, w\rangle \in A_{MT} \text{ se, e somente se, } \langle M', w'\rangle \in HALT_{MT}$$

- Utilizaremos uma máquina F para computar tal função.

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 10: Computando a função f através de uma máquina F

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: $\langle M', w \rangle$

1 Construa M' tal que, sobre uma entrada x, M' roda x sobre M e: se M aceita x, M' aceita. Se M rejeita x, M' entra em loop. Deixe $\langle M', w \rangle$ na fita

Redutibilidade por mapeamento

Exemplo

- A redução via mapeamento de E_{MT} para EQ_{MT} baseia-se no teorema provado sobre a indecidibilidade de EQ_{MT} visto anteriormente.
- Neste caso, a redução f está mapeando a entrada $\langle M \rangle$ em $\langle M, M_1 \rangle$, em que M_1 é uma MT que rejeita tudo.

Redutibilidade por mapeamento

Exemplo

- Na demonstração da indecidibilidade de E_{MT} nós utilizamos uma redução a partir de A_{MT}.
- Vamos verificar como podemos converter esta redução em uma redução via mapeamento.
- Da redução original, podemos construir uma função f que recebe como entrada $\langle M, w \rangle$ e produz $\langle M_1 \rangle$, sendo M_1 uma máquina que aceita apenas w se e somente se M aceita w.

Redutibilidade por mapeamento

- M_1 é a MT descrita na demonstração.
- Mas M aceita w se, e somente se, $L(M_1)$ não é vazia, então f é um redução via mapeamento de A_{MT} para $\overline{E_{MT}}$.
- Mas ainda preservarmos o resultado de que E_{MT} é indecidível, uma vez que decidibilidade não é afetado por complementação.
- Mas não é uma redução via mapeamento de A_{MT} para E_{MT}.

Redutibilidade por mapeamento

- A sensibilidade da redutibilidade via mapeamento sobre a complementação é importante para provar a não-reconhecibilidade de certas linguagens.
- Também podemos utilizar a redução via mapeamento para mostrar que problemas sequer são Turing-reconhecíveis.

Redutibilidade por mapeamento

Teorema

Se $A \leq_m B$ e B é Turing-reconhecível, A também é.

Redutibilidade por mapeamento

- A prova
  deste teorema é muito parecida com a demonstração anterior de que:
  Se $A \leq_m B$ e B é Turing-decidível, então A também é.
- Exercício.

Redutibilidade por mapeamento

Corolário

Se $A \leq_m B$ e A não é Turing-reconhecível, B também não é.

Redutibilidade por mapeamento

- Uma aplicação típica deste corolário é tomar A como $\overline{A_{MT}}$.
- Sabemos que $\overline{A_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.
- Pela definição de redução via mapeamento, temos que se $A \leq_m B$ então $\bar{A} \leq_m \bar{B}$.
- Para provar então que B não é Turing-reconhecível, basta mostrar que $A_{MT} \leq_m \bar{B}$.

Redutibilidade por mapeamento

- É possível também utilizar reduções via mapeamento para demonstrar que linguagens não são Turing-reconhecíveis e nem co-Turing-reconhecíveis.

Redutibilidade por mapeamento

Teorema

EQ_{MT} não é Turing-reconhecível e nem co-Turing-reconhecível.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- Primeiramente vamos mostrar que EQ_{MT} não é Turing-reconhecível.
- Basta mostrar que A_{MT} é redutível a $\overline{EQ_{MT}}$.

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 11: Construindo a função de redução A_{MT} para $\overline{EQ_{MT}}$

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: $\langle M_1, M_2 \rangle$

1 Construa duas máquinas M_1 e M_2 da seguinte maneira:
2 M_1 sobre qualquer entrada diz rejeita
3 M_2 sobre qualquer entrada roda M sobre w e se M aceita, M_2 aceita
4 Deixe $\langle M_1, M_2 \rangle$ na fita.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- M_1 não aceita nada.
- Se M aceita w, M_2 aceita qualquer coisa, e portanto as duas máquinas não são equivalentes.
- Se M não aceita w, M_2 não aceita nada, e portanto são equivalentes.
- Assim f é uma redução de A_{MT} para $\overline{EQ_{MT}}$.
- Portanto EQ_{MT} não é Turing-reconhecível.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- Vamos mostrar agora que $\overline{EQ_{MT}}$ não é Turing-reconhecível, isto é, que EQ_{MT} não é co-Turing-reconhecível.
- Precisamos fornecer uma redução de A_{MT} para EQ_{MT}.

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 12: Construindo a função de redução A_{MT} para EQ_{MT}

Input: $\langle M, w\rangle$

Output: $\langle M_1, M_2\rangle$

1 Construa duas máquinas M_1 e M_2 da seguinte maneira:

2 M_1 sobre qualquer entrada diz aceita

3 M_2 sobre qualquer entrada roda M sobre w e se M aceita, M_2 aceita

4 Deixe $\langle M_1, M_2\rangle$ na fita.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- É a mesma construção da função anterior, mas agora M_1 aceita tudo em vez de rejeitar.
- Assim, M aceita w, se e somente se, M_1 e M_2 são equivalentes.
- Logo $A_{MT} \leq_m EQ_{MT}$ e portanto, EQ_{MT} não é co-Turing-reconhecível.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração.

- Como EQ_{MT} não é Turing-reconhecível e nem co-Turing-reconhecível, finalizamos a prova.

$\square$