Máquinas de Turing

Teoria da Computação – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

INSTITUTO
FEDERAL
Brasília

Campus
Taguatinga

Sumário

Máquinas de Turing

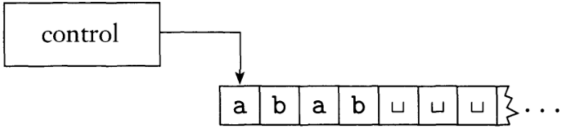
Máquinas de Turing

- Modelo Proposto por Alan Turing em 1936.
- Máquina de estados + memória infinita.
- Considera-se que faz tudo o que é possível fazer com um computador.

Máquinas de Turing

- Neste modelo possuímos uma fita infinita e um controle finito.
- A máquina possui uma cabeça de leitura e escrita que pode ler/escrever símbolos na fita e movimentar-se sobre ela.
- Inicialmente, a fita contém apenas a cadeia de entrada, e está em branco.

Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

- Se a máquina precisa armazenar alguma informação, ela pode escrever algo na fita.
- Para acessar uma informação, basta posicionar a cabeça na posição correta e ler aquele símbolo.

Máquinas de Turing

- A computação é feita ao alterar os estados do controle com base na informação contida na fita.
- A computação para quando chega em um estado de aceitação ou de rejeição. Neste caso a saída da máquina para uma entrada pode ser:
  - Aceita.
  - Rejeita.

Máquinas de Turing

Recapitulando

- Uma máquina de turing pode tanto escrever sobre a fita quanto ler.
- A cabeça de leitura/escrita pode mover tanto para a esquerda quanto para a direita um passo de cada vez.
- A fita é infinita.
- Os estados especiais para aceitar e rejeitar tem efeito imediato.

Máquinas de Turing

- Tome uma máquina de Turing M_1 para testar a pertinência na linguagem:

$$B = \{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$$

- A linguagem das palavras que são seguidas por elas próprias e separadas por cerquilha.
- Como M_1 funcionaria de acordo com a nossa descrição informal?

Máquinas de Turing

- Não podemos acessar cada símbolo através de acesso aleatório.
- Mas podemos mover sobre a fita e ler/escrever nela (acesso sequencial).

Máquinas de Turing

Estratégia Imediata

- Zigzaguear sobre os dois lados da cerquilha e comparar os caracteres.

Máquinas de Turing

$$\boxed{01001\#01001\sqcup\sqcup\ldots}$$

Máquinas de Turing

Estratégia Imediata

- Faça uma varredura na entrada para assegurar que ela contém uma única ocorrência do símbolo $\#$. Se não, **rejeite**.
- Faça um zique-zague na fita para casar os símbolos nos dois lados da separação pelo $\#$. Se os símbolos casam, marque eles com um 'x', caso contrário, **rejeite**.
- Quando todos os símbolos da esquerda forem marcados com um 'x', verifique se existe algum símbolo diferente de 'x' e $\sqcup$ à direita. Se resta algum, **rejeite**, caso contrário, aceite.

Máquinas de Turing

- Qual seria a estratégia de uma Máquina de Turing M_2 para testar a pertinência na Linguagem

$$B = \{w\#w^R | w \in \{0,1\}^*\}$$

Sumário

Sumário

Máquinas de Turing

- Agora que ganhamos uma noção sobre máquinas de Turing, vamos defini-las formalmente.

Máquinas de Turing

- O coração de uma máquina de turing é uma função de transição δ.
- Ela que especifica como a máquina vai de um passo a próximo.

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

- Dado um estado e um símbolo na posição apontada pela cabeça, δ mapeia em outro estado, escreve um símbolo na fita de acordo com a posição da cabeça e move para esquerda ou para direita.
- Ex: $\delta(q, a) = (r, b, L)$.

Máquinas de Turing

- Ex: $\delta(q, a) = (r, b, L)$.
- A máquina escreve o símbolo b no lugar de a, muda do estado q para o estado r e move a cabeça uma posição para a esquerda.

Máquinas de Turing

Definição (Máquinas de Turing)

Uma máquina de turing é uma 7-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$, *em que* Q, Σ *e* Γ *são conjuntos finitos.*

- Q: *o conjunto de estados.*
- Σ: *o alfabeto de entrada, que não contém o símbolo* $\sqcup$.
- Γ *o alfabeto da fita, onde* $\sqcup \in \Gamma$ *e* $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
- q_0 *é o estado inicial.*
- q_{aceita} *é o estado de aceitação.*
- $q_{rejeita}$ *é o estado de rejeição.*

Máquinas de Turing

- Uma vez definida a sintaxe sobre máquinas de Turing, podemos discutir a semântica de todos estes símbolos.

Máquinas de Turing

Uma máquina de Turing M computa da seguinte forma:

- Inicialmente ela recebe a sua entrada $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$.
- Esta entrada é colocada mais à esquerda na fita.
- O restante da fita possui símbolos $\sqcup$ (branco).
- Ou seja, a fita só está preenchida com a entrada, e ela está mais a esquerda possível.
- Como $\sqcup \notin \Sigma$ o símbolo em branco marca o final da entrada.

Máquinas de Turing

- Uma vez que M começa, a computação prossegue de acordo com δ.
- Se M em algum momento tenta mover a cabeça para a esquerda quando esta está sob a posição mais à esquerda da fita, a cabeça permanece naquele lugar.
- A computação continua até que ela entre nos estados de aceitação ou rejeição, nos quais ela para.
- Se ela nunca atinge estes estados, a computação persiste indefinidamente $\}$:-)

Máquinas de Turing

- À medida que uma máquina de Turing computa, ocorrem mudanças no estado atual, no conteúdo da fita e na localização da cabeça.
  - Tudo definido pela função δ.

Sumário

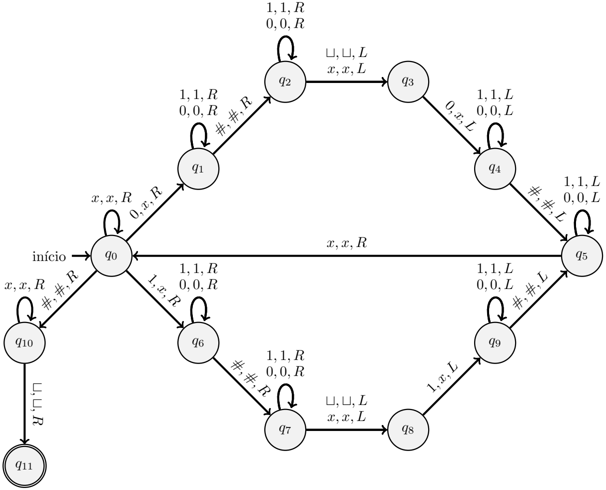
Máquinas de Turing: Representação Gráfica

- Agora que definimos uma máquina de Turing, vamos construir uma que **aceite** as palavras que estão em
$$B = \{w\#w^R | w \in \{0,1\}^*\}$$
e **rejeite** as que não estão.
- Utilizaremos uma representação gráfica da nossa definição formal.

Representação Gráfica

- Os círculos representarão os estados, sendo o estado inicial, e de aceitação explicitamente indicados. O estado inicial possui uma seta com o rótulo *início*, enquanto o estado de aceitação é formado por dois círculos concêntricos.
- Cada mapeamento da função de transição é representado por uma seta que liga um estado a outro. Esta seta possui um rótulo que indica que, ao ler um símbolo da fita, escreve-se outro no lugar, movimenta-se o cabeçote para a esquerda ou para a direita e, finalmente, vamos para outro estado.
- Para simplificar, podemos assumir que as transições que não constarem no gráfico, estão apontando para o estado de rejeição (implícito).

Representação Gráfica



Sumário

Máquinas de Turing: Configuração

Definição

Configuração Uma configuração é uma combinação de três informações:

- *O estado.*
- *O conteúdo da fita.*
- *A posição da cabeça.*

Denotas uma configuração por uqv, em que q é o estado atual, uv é o conteúdo da fita, e a cabeça está apontando para o primeiro símbolo de v.

Configuração

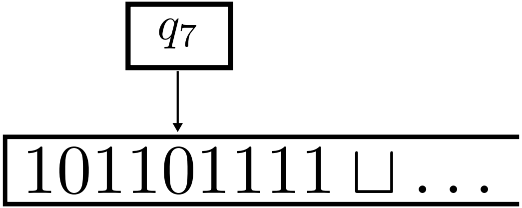


Figura: Configuração $1011q_701111$.

Configuração

- Dizemos que uma configuração C_1 produz uma C_2 se a máquina pode legalmente sair de C_1 e ir para C_2.
- Suponha $a, b, c \in \Sigma$ e $u, v \in \Sigma^\star$.
- Formalmente: uaq_ibv produz uq_jacv, se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$.
- Simetricamente: uaq_ibv produz $uacq_jv$, se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$.
- Exceção: q_ibv produz q_jcv se a transição for para a esquerda.

Configuração

- A configuração inicial de M sobre a entrada é a configuração q_0w.
- Em uma configuração de aceitação, o estado da configuração é q_{aceita}.
- Em uma configuração de rejeição, o estado da configuração é $q_{rejeita}$.

Configuração

Definição (Aceitação)

Uma máquina de Turing M aceita a entrada w se uma sequência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_k$ existe onde:

1. *C_1 é a configuração inicial de M sobre w.*
2. *Cada C_i produz C_{i+1}.*
3. *C_k é uma configuração de aceitação.*

Configuração

Notação (Aceitação)

A coleção de cadeias que M aceita é a linguagem de M, denotada por $L(M)$.

Sumário

Linguagens Turing-Reconhecíveis

Definição (Linguagens Turing-Reconhecíveis)

Uma linguagem L é chamada de Turing-reconhecível se existe alguma máquina de Turing que receba como entrada $w \in L$ e M para em um estado de aceitação.

Se $w \notin L$, então M pode:

- *Parar no estado de rejeição.*
- *Entrar em loop.*

Linguagens Turing-Decidíveis

Definição (Linguagens Turing-Decidíveis)

Uma linguagem L é chamada de Turing-decidível se existe alguma máquina de Turing que receba como entrada $w \in L$ e M para em um estado de aceitação.

Se a $w \notin L$, então M:

- *Para no estado de rejeição.*

Linguagens Turing-Decidíveis e Reconhecíveis

- Obviamente toda linguagem Turing-Decidível é Turing-Reconhecível, mas existem algumas linguagens que são Turing-Reconhecíveis, mas não Turing-Decidíveis.
- Qual a vantagem de Linguagens Turing-decidíveis?

Linguagens Turing-Decidíveis e Reconhecíveis

- Obviamente toda linguagem Turing-Decidível é Turing-Reconhecível, mas existem algumas linguagens que são Turing-Reconhecíveis, mas não Turing-Decidíveis.
- Qual a vantagem de Linguagens Turing-decidíveis?
- Se uma Linguagem é Turing-reconhecível, mas não Turing-decidível. como podemos verificar se a máquina que está demorando para dar o resultado ou se ela entrou em loop?

Linguagens Turing-Decidíveis e Reconhecíveis

- Por enquanto, vamos nos focar em Linguagens Turing-decidíveis.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w | w \in \{0, 1\}^*\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \wedge w \text{ é um número ímpar}\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \wedge w = w^R\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w | x \in \{0,1\}^* \wedge w = x\#x\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w | w = 0^{2^n}\}$$

é Turing-Decidível.