

# Conceitos Preliminares

Teoria da Computação – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira  
Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília,  
Campus Taguatinga



# Sumário

---

1 Noções Matemáticas

2 Lógica



# Sumário

---

## 1 Noções Matemáticas



# Noções Matemáticas

---

- Antes de iniciar o nosso estudo em TC, precisamos revisar e abordar conceitos matemáticos básicos.
- Notações e ferramentas que vamos usar.



# Sumário

---

- 1 Noções Matemáticas
  - Conjuntos
  - Sequências e Tuplas
  - Funções
  - Relações
  - Grafos
  - Linguagens e Cadeias



# Conjuntos

---

## Conjuntos

- Um conjunto é um grupo de objetos representado como uma unidade.
- Conjuntos podem ter objetos de tipos variados: números, símbolos, pessoas, ...
- Objetos que estão em um conjunto são denominados de elementos.
- Uma forma de descrever quais elementos estão em um conjunto é utilizar a notação de chaves:

$$\{7, 21, 57\}$$



# Conjuntos

---

## Notação (Pertinência)

- Os símbolos  $\in$  e  $\notin$  são utilizados para denotar pertinência e não-pertinência de elementos em conjuntos.
- Ex:  $7 \in \{7, 21, 57\}$ .
- Ex:  $8 \notin \{7, 21, 57\}$



# Conjuntos

---

## Notação ( $\subseteq$ )

- Dizemos que um conjunto  $A$  está contido em um conjunto  $B$ , se todo o elemento de  $A$  está em  $B$ .
- Representamos por  $A \subseteq B$ .





# Conjuntos

---

## Notação (Igualdade)

- Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais se todo o elemento de  $A$  está em  $B$  e vice-versa.
- Em outras palavras,  $A = B$ , sse,  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ .



# Conjuntos

---

## Notação ( $\subsetneq$ )

- Dizemos que um conjunto  $A$  está propriamente contido em um conjunto  $B$ , se todo o elemento de  $A$  está em  $B$ , mas  $B$  não é igual a  $A$ .
- Representamos por  $A \subsetneq B$ .



# Conjuntos

---

## Notação ( $\emptyset$ )

- O conjunto vazio é aquele que não possui elementos.
- Representado por  $\emptyset$ .



# Conjuntos

---

- A ordem na descrição não importa.
- Repetições também são ignoradas. Conjuntos são indistinguíveis considerando repetições.
- Ex:  $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ .
- Ex:  $\{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- **Multiconjuntos**: levam em consideração repetições.



# Conjuntos

---

## Definição (Cardinalidade)

- A cardinalidade corresponde ao número de elementos que um conjunto possui.
- Denotamos por  $|A|$ .
- Em especial  $|\emptyset| = 0$ .



# Conjuntos

---

- Alguns conjuntos são finitos.
- Alguns conjuntos são infinitos.
- Ex:  $|\{1, 2, 3, 4\}| = 4$ .
- Ex:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  é infinito.
- Ex:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  é infinito.
- Ex:  $\mathbb{R}$  é infinito.
- Curiosidade:  $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ .



# Conjuntos

---

- Outra maneira de definir conjuntos, é colocando uma propriedade sobre os elementos.
- Conjunto dos pares:  $P = \{x | x = 2y \text{ com } y \in \mathbb{Z}\}$
- Conjunto dos ímpares:  $I = \{x | x = 2y + 1 \text{ com } y \in \mathbb{Z}\}$
- Conjunto dos primos:  $\Pi = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x > 1 \wedge \neg \exists y (y < x \wedge x \bmod y = 0)\}$



# Conjuntos

---

## Definição (União)

A união de dois conjuntos  $A$  e  $B$  corresponde a  $C = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$ .

A união de conjuntos é representada através do símbolo  $\cup$

- Exemplo  $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ .
- Em especial  $A \cup \emptyset = A$ .





# Conjuntos

---

## Definição (Interseção)

A interseção de dois conjuntos  $A$  e  $B$  corresponde a  $C = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$ .

A interseção de conjuntos é representada através do símbolo  $\cap$ .

- Exemplo  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ .
- Em especial  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .



# Conjuntos

---

## Definição (Complemento)

O complemento de um conjunto  $A$  é outro conjunto cujos elementos em consideração são exatamente aqueles que não estão em  $A$ .

Denotamos o complemento de  $A$  por  $\bar{A}$ .



# Conjuntos

---

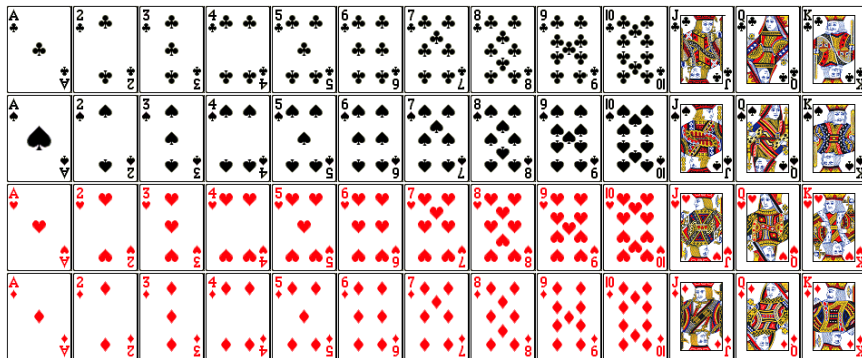
## Definição (Produto Cartesiano)

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos, o produto cartesiano de  $A$  por  $B$  é dado por:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

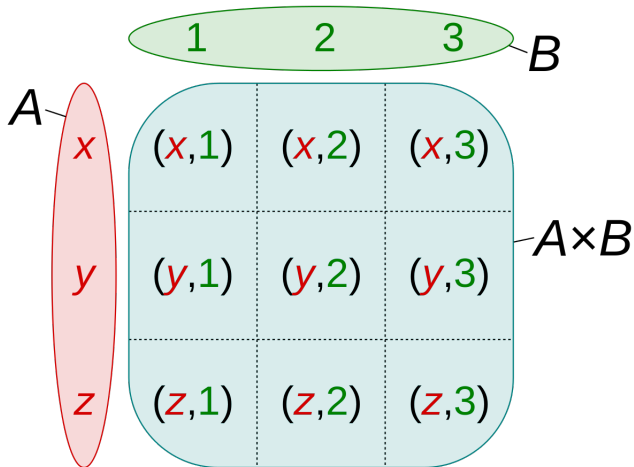


# Conjuntos





# Conjuntos





# Conjuntos

---

## Notação (Produto Cartesiano)

$$\underbrace{A \times A \times A \dots A}_k = A^k$$

- Ex:  $\mathbb{R}^2$ , o plano cartesiano.
- Ex:  $\mathbb{R}^3$ , espaço tridimensional.
- Ex:  $\mathbb{R}^n$ .
- Ex:  $\mathbb{N}^2 = \{(1, 1), (1, 2) \dots (2, 1), (2, 2) \dots\}$



# Conjuntos

---

## Definição (Partes de um Conjunto)

As partes de um conjunto  $A$ , denotada por  $\mathcal{P}(A)$ , corresponde ao conjunto dos subconjuntos de  $A$ .

Se  $|A| = n$ , então  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

- Ex:  $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$



# Sumário

---

- 1 Noções Matemáticas
  - Conjuntos
  - Sequências e Tuplas
  - Funções
  - Relações
  - Grafos
  - Linguagens e Cadeias





# Sequências e Tuplas

---

## Definição (Sequências)

Sequências de objetos são listas destes objetos. Diferentemente dos conjuntos, a ordem aqui importa, bem como as repetições.



# Sequências e Tuplas

---

- Ex:  $F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ .
- Ex:  $\Pi' = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ .
- Ex:  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \neq (1)$ .



# Sequências e Tuplas

---

## Notação

Tuplas Uma sequência de  $k$  elementos é denominado uma  $k$ -tupla.

- Ex:  $(7, 21, 57)$  é uma tripla.
- Ex:  $(1, 4)$  é um par.
- Ex:  $(1, 5, 3, 4, 7, 8, 1)$  é uma 7-tupla.



# Sumário

---

- 1 Noções Matemáticas
  - Conjuntos
  - Sequências e Tuplas
  - Funções
  - Relações
  - Grafos
  - Linguagens e Cadeias



# Funções

---

## Funções

Funções são objetos matemáticos que mapeia elementos de um conjunto em outro.

Se  $f$  mapeia elementos de  $D$  em  $CD$ , denotamos por:

$$f : D \rightarrow CD$$

$D$  é chamado de domínio e  $CD$  é chamado de contradomínio.

Para ser uma função, cada elemento de  $D$  deve ter exatamente 1 mapeamento.



# Funções

---

- Ex:  $f(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  com  $x \mapsto x^2$ . Então  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 9$ ,  $f(20) = 400$ .
- Ex:  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  com  $(x, y) \mapsto x$  mais  $y$ . Então  $+(2, 2) = 4$ ,  $+(1, 5) = 6$ .



# Funções

---

## Definição

### Funções Injetoras

- Se  $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$  a função é dita injetora.
- Ou seja, elementos diferentes do domínio são mapeados em elementos diferentes no contradomínio.



# Funções

---

## Definição

### Funções Sobrejetoras

- Seja  $f : D \rightarrow CD$  e o conjunto imagem  $I = \{f(x), x \in D\}$ .
- $f$  é dita sobrejetora quando  $|I| = |CD|$ , ou seja, todos os elementos do contradomínio foram mapeados.





# Funções

---

## Definição

Funções Bijetoras São aquelas que são Injetoras e Sobrejetoras.

Mapeamento um para um.



# Sumário

---

- 1 Noções Matemáticas
  - Conjuntos
  - Sequências e Tuplas
  - Funções
  - Relações
  - Grafos
  - Linguagens e Cadeias



# Relações

---

## Definição (Relações)

Uma relação ou predicado é um subconjunto de algum conjunto com alguma propriedade específica.



# Relações

---

- Exemplos:  $P \subseteq \mathbb{N}$  e  $P := \{x | x \text{ é par}\}$ .
- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  e  $< := \{(a, b) | a < b\}$ .



# Relações

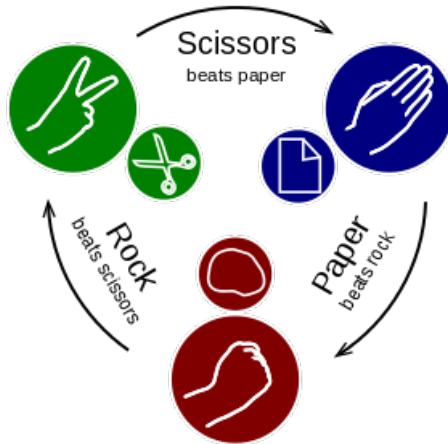
---

## Notação

Relações Se  $R$  é uma relação e  $x \in R$ , dizemos que  $x$  vale,  $x$  é verdadeiro ou simplesmente  $x$  tem a propriedade  $R$ .



# Relações





# Sumário

---

## 1 Noções Matemáticas

- Conjuntos
- Sequências e Tuplas
- Funções
- Relações
- **Grafos**
- Linguagens e Cadeias



# Grafos

---

## Definição (Grafos)

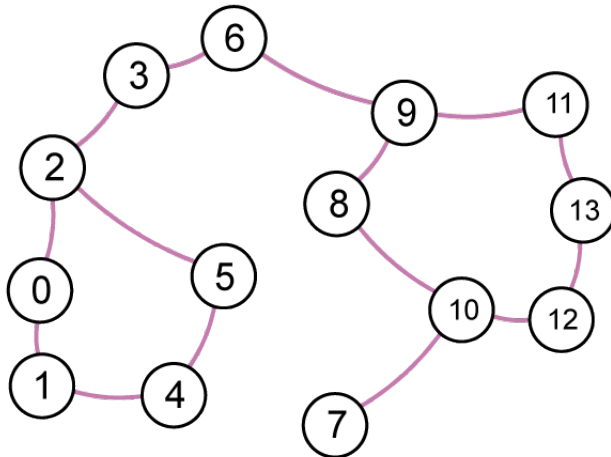
Um grafo não dirigido, ou grafo simples, é uma dupla  $G = (V, E)$  sendo  $V$  o conjunto de vértices e  $E \subseteq V \times V$  as arestas.





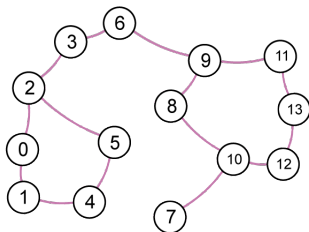
# Grafos

---





# Grafos



- Neste exemplo temos:

$$V = \{0, 1, 2, \dots, 13\}$$

e

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (0, 1), (0, 2), (1, 4), (4, 5), (5, 2), (2, 3), (3, 6), (6, 9), \\ (9, 8), (9, 11), (8, 10), (10, 12), (12, 13), (13, 11), (10, 7) \end{array} \right\}$$



# Grafos

---

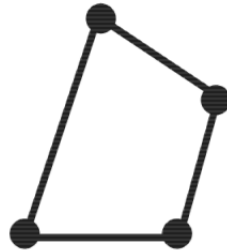
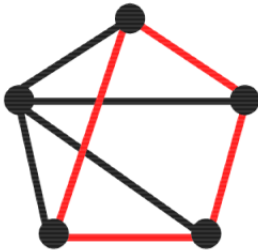
## Definição (Subgrafo)

$G' = (V', E')$  é um subgrafo de  $G(V, E)$ , quando  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .



# Grafos

---





# Grafos

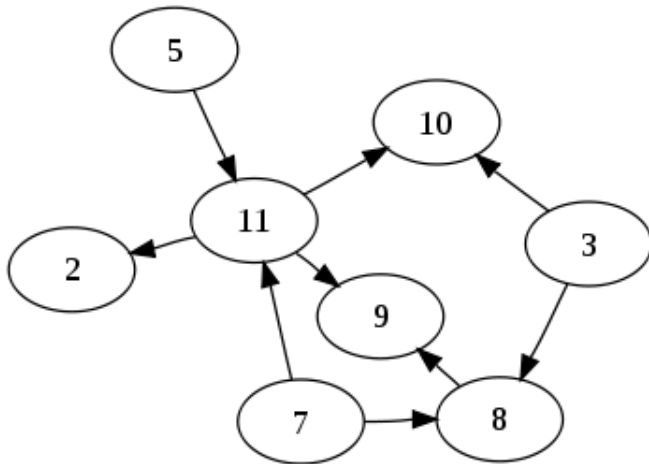
---

- Grafos também podem ser direcionados.
- Neste caso, a orientação das arestas faz diferença.



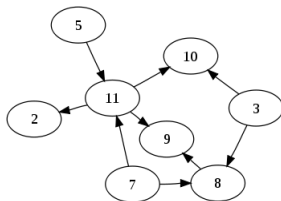
# Grafos

---





# Grafos



- Neste exemplo temos:

$$V = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

e

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (5, 11), (11, 2), (11, 10), (3, 10) \\ (3, 8), (8, 9), (11, 9), (7, 11), (7, 8) \end{array} \right\}$$



# Grafos

---

- Modelam vários problemas práticos.
- Teoria dos grafos estuda estes objetos.





# Sumário

---

- 1 Noções Matemáticas
  - Conjuntos
  - Sequências e Tuplas
  - Funções
  - Relações
  - Grafos
  - Linguagens e Cadeias



# Linguagens e Cadeias

---

## Definição (Alfabeto)

Um alfabeto é qualquer conjunto não vazio e finito de símbolos.

- Ex:  $\Sigma = \{0, 1\}$ .
- Ex:  $\Sigma = \{a, \dots, z, A, \dots, Z\}$ .
- Ex:  $\Gamma = \{0, 1, x, y, z\}$ .



# Linguagens e Cadeias

---

## Definição (Cadeias, Palavras ou Strings)

Cadeias, palavras ou *strings* são sequências finitas de símbolos de alfabetos.

- Supondo  $\Sigma = \{0, 1\}$ , então  $w = 01101101$  é uma cadeia válida.
- Suponho  $\Sigma = \{a, \dots, z\}$ , então  $w = abracadabra$  é uma cadeia válida.



# Linguagens e Cadeias

---

## Notação (Tamanho de Cadeias)

Seja  $w = w_1w_2w_3 \dots w_n$  uma cadeia sobre o alfabeto  $\Sigma$ . Denotamos  $|w| = n$  como o tamanho de  $n$ .

Em particular, a cadeia vazia,  $\epsilon$ , tem tamanho  $|\epsilon| = 0$ .



# Linguagens e Cadeias

---

## Notação (Concatenação)

Suponha cadeias  $x = x_1x_2 \dots x_n$  e  $y = y_1y_2 \dots y_m$  sobre o alfabeto  $\Sigma$ .  $xy = x_1x_2 \dots x_ny_1y_2 \dots y_m$  denota a concatenação de  $x$  com  $y$ .

Em especial  $\underbrace{xxx \dots x}_k = x^k$ .



# Linguagens e Cadeias

---

## Notação (Inverso)

Seja  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  uma cadeia sobre o alfabeto  $\Sigma$ .

$w^R = w_n w_{n-1} \dots w_1$  denota o inverso de  $w$ .



# Linguagens e Cadeias

---

## Definição (Ordem lexicográfica)

A ordem lexicográfica de cadeias da precedência para cadeias menores, e em caso de empate, segue-se a ordem do dicionário.

- Para  $\Sigma = \{0, 1\}$ , a ordem lexicográfica sobre todas as palavras sobre o alfabeto  $\Sigma$  é:

$$(\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots)$$



# Linguagens e Cadeias

---

## Definição (Linguagem)

Uma linguagem  $L$  é um conjunto de palavras.

- Ex:  $L_1 = \{ww^R \mid w \text{ é uma cadeia sobre } \Sigma\}$
- Ex:  $L_1 = \{w \mid w = w^R\}$





# Linguagens e Cadeias

---

## Notação ( $\Sigma^*$ )

$\Sigma^*$  é a linguagem formada por todas as cadeias sobre o alfabeto  $\Sigma$ .

- Para  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \dots\}$ .
- Para  $\Sigma = \{A, C, G, T\}$ ,  
 $\Sigma^* = \{\epsilon, A, C, G, T, AA, AC, AG, AT, \dots\}$ .



# Sumário

---

## 2 Lógica



# Lógica

---

- Por que a lógica é importante?



# Lógica

---

- Utilizamos lógica no dia a dia, na vida profissional e na pessoal.
- Elaboramos conceitos.
- Fazemos observações.
- Formalizamos teorias.
- Utilizamos **raciocínio lógico** para derivar conclusões a partir de premissas.
- Utilizamos **demonstrações** ou **provas** para convencer os outros que estamos corretos.



# Proposições

---

- Na matemática, uma **proposição** é uma sentença que pode ser **falsa** ou **verdadeira**, mas nunca as duas.
- Por exemplo:
  - ▶ “6 é par” é uma proposição verdadeira.
  - ▶ “4 é ímpar” é uma proposição falsa.



# Sumário

---

## 2 Lógica

- Operadores Lógicos
- Quantificadores
- Definições
- Teoremas
- Provas
- Técnicas de Prova



# Operadores lógicos

---

- Podemos combinar proposições para criar outras mais complexas através dos operadores lógicos.



# Operadores lógicos

---

## Negação

Sejam  $p$  uma proposição.

- Não  $p$  ( $\neg p$ ) é verdadeiro quando  $p$  é falso.
- Não  $p$  ( $\neg p$ ) é falso quando  $p$  é verdadeiro.





# Operadores lógicos

---

## Conjunção

Sejam,  $p$  e  $q$  proposições.

- $p$  e  $q$  ( $p \wedge q$ ) é verdadeiro quando  $p$  e  $q$  são verdadeiros.
- Caso contrário,  $p \wedge q$  é falso.



# Operadores lógicos

---

## Disjunção

Sejam  $p$  e  $q$  proposições.

- $p$  ou  $q$  ( $p \vee q$ ) é verdadeiro quando  $p$  **ou**  $q$  são verdadeiros.
- Caso contrário,  $p \vee q$  é falso.



# Operadores lógicos

---

## Implicação

Sejam  $p$  e  $q$  proposições.

- Se  $p$  então  $q$  ( $p \Rightarrow q$ ) é verdadeiro quando  $p$  é falso **ou**  $q$  é verdadeiro.
- Caso contrário,  $p \Rightarrow q$  é falso.



# Operadores lógicos

---

## Implicação

Sejam  $p$  e  $q$  proposições.

- Se  $p$  então  $q$  ( $p \Rightarrow q$ ) é verdadeiro quando  $p$  é falso **ou**  $q$  é verdadeiro.
- Caso contrário,  $p \Rightarrow q$  é falso.
- Se  $p$  é falso, dizemos que  $p \Rightarrow q$  é *vacuamente* verdadeiro.



# Operadores lógicos

---

## Bi-implicação

Sejam  $p$  e  $q$  proposições.

- $p$  se, e somente se,  $q$  ( $p \Leftrightarrow q$ ) é verdadeiro quando  $p$  e  $q$  são falsos ou  $p$  e  $q$  são verdadeiros.
- Caso contrário,  $p \Leftrightarrow q$  é falso.
- Se  $p \Leftrightarrow q$  é verdadeiro, dizemos que  $p$  e  $q$  são equivalentes.



# Sumário

---

## 2 Lógica

- Operadores Lógicos
- Quantificadores
- Definições
- Teoremas
- Provas
- Técnicas de Prova



# Quantificadores

---

- Considere a afirmação “ $x$  é par”.
- Não podemos dizer se esta afirmação é verdadeira ou falsa, pois não sabemos quem é  $x$ .



# Quantificadores

---

- Existem três maneiras básicas de conseguir obter um valor verdade para a afirmação.
  - ① Dizer quem é  $x$ .  $x = 6$  por exemplo tornaria a afirmação verdadeira.
  - ② Para todo  $x$  inteiro,  $x$  é par. O que tornaria a afirmação incorreta, pois nem todo inteiro é par.
  - ③ Existe  $x$  inteiro,  $x$  é par. O que tornaria a afirmação correta, pois existe inteiros pares.





# Quantificadores

---

- As frases “para todo” e “existe” são chamados de quantificadores.
- Podemos utilizar os símbolos  $\forall$  e  $\exists$  para representá-los de maneira mais compacta.



# Quantificadores

---

- Talvez as coisas fiquem mais claras com uma definição matemática.



# Quantificadores

---

## Definição (Número par)

Um número  $x$  é dito par se e somente se existe um inteiro  $y$  tal que  $x = 2y$ .



# Quantificadores

---

- Ou seja, estamos definido que um inteiro  $x$  é par, se e somente se existe algum  $y$  que multiplicado por 2 é igual a  $x$ .



# Quantificadores

---

- Utilizando a mesma estratégia, podemos definir os números ímpares.



# Quantificadores e Relações

---

## Definição (Número ímpar)

Um número  $x$  é dito ímpar se e somente se existe um inteiro  $y$  tal que  $x = 2y + 1$ .



# Quantificadores

---

- Os quantificadores podem ser aplicados à propriedades (relações).
- Seja  $P \subseteq \mathbb{N}$  a relação dos inteiros pares e  $I \subseteq \mathbb{N}$  a relação dos números ímpares.
  - ▶ Podemos dizer que  $\exists x P(x)$  é verdadeiro?
  - ▶ Podemos dizer que  $\exists x I(x)$  é verdadeiro?
  - ▶ Podemos dizer que  $\forall x P(x)$  é verdadeiro?
  - ▶ Podemos dizer que  $\forall x I(x)$  é verdadeiro?



# Quantificadores e Relações

---

Considerando os inteiros:

- O que  $\forall x \exists y (x = 2y)$  quer dizer?
- O que  $\exists x \exists y (x = 2y)$  quer dizer?
- O que  $\forall x (\exists y (x = 2y) \vee \exists y (x = 2y + 1))$  quer dizer?





# Quantificadores e Relações

---

- A ordem dos quantificadores também é muito importante.



# Quantificadores e Relações

---

Considerando  $<$  como a relação de menor entre inteiros:

- $\forall x \exists y (x < y)$  é verdadeiro?
- $\exists x \forall y (x < y)$  é verdadeiro?



# Sumário

---

## 2 Lógica

- Operadores Lógicos
- Quantificadores
- Definições
- Teoremas
- Provas
- Técnicas de Prova



# Definições

---

## Definição (Definições)

Definições descrevem os objetos e noções que utilizamos. Uma definição pode ser simples, como a de conjuntos que utilizamos, ou complexa, como a de segurança em sistemas criptográficos.

Ao definir devemos utilizar uma linguagem livre de ambiguidades, para que ser bem claro sobre o que estamos falando.



# Afirmações

---

## Definição (Afirmações)

Afirmações matemáticas expressam que determinado objeto possui determinada propriedade.

Independente de serem verdadeiras ou falsas, também devem ser precisas.



# Prova

---

## Definição (Prova)

Uma prova é uma sequência válida de passos dedutivos chegando a uma conclusão.



# Sumário

---

## 2 Lógica

- Operadores Lógicos
- Quantificadores
- Definições
- Teoremas
- Provas
- Técnicas de Prova



# Teoremas

---

## Definição (Teoremas)

Teoremas são enunciados matemáticos verdadeiros e que podem ser provados.





# Lemas

---

- Existem teoremas complexos de obter a prova.
- Para facilitar, podemos provar afirmações menores.
- Estas afirmações são chamadas de Lemas.
- Utilizamos Lemas para concluir os teoremas de maneira mais simples.



# Corolário

---

- Corolários são afirmações verdadeiras que decorrem imediatamente de um teorema.



# Sumário

---

## 2 Lógica

- Operadores Lógicos
- Quantificadores
- Definições
- Teoremas
- **Provas**
- Técnicas de Prova



# Provas

---

- Uma prova ou demonstração matemática pode ser vista como um argumento para convencer outra pessoa que algo é verdadeiro.
- Uma boa prova deve ser a mais didática possível.
- Algumas estruturas são comuns dependendo da afirmação a qual se quer provar.



## Estrutura de provas

---

Queremos provar que  $p$  é verdadeiro:

- Prove diretamente que  $p$  é verdadeiro.
- Assuma que  $p$  é falso e chegue em uma contradição.



# Estrutura de provas

---

Queremos provar que  $p \wedge q$  é verdadeiro:

- Prove diretamente que  $p$  vale e prove que  $q$  vale.



## Estrutura de provas

---

Queremos provar que  $p \vee q$  é verdadeiro:

- Assuma que  $p$  é falso e deduza que  $q$  obrigatoriamente tem que ser verdadeiro.
- Assuma  $q$  falso e deduza que  $p$  obrigatoriamente tem que ser verdadeiro.
- Prove que  $p$  é verdadeiro.
- Prove que  $q$  é verdadeiro.



## Estrutura de provas

---

Queremos provar que  $p \Rightarrow q$  é verdadeiro:

- Assuma que  $p$  vale e deduza que  $q$  também vale.
- Assuma  $q$  falso e deduza que  $p$  tem que ser falso também.





## Estrutura de provas

---

Queremos provar que  $p \Leftrightarrow q$  é verdadeiro:

- Prove  $p \Rightarrow q$  e prove  $q \Rightarrow p$ .



# Estrutura de provas

---

Queremos provar que  $\exists x P(x)$  é verdadeiro:

- Basta encontrar um  $x$  que satisfaça a propriedade.



# Estrutura de provas

---

Queremos provar que  $\forall x P(x)$  é verdadeiro:

- Não assumamos nada sobre  $x$  e prove que  $P(x)$  vale.



# Provas

---

- Por exemplo, vamos provar que, para todo inteiro  $x$ , se  $x$  é ímpar, então  $x + 1$  é par.



# Provas

---

- Como queremos mostrar que o resultado vale para qualquer  $x$ , não podemos assumir absolutamente nada sobre ele.
- Como o teorema diz respeito a uma implicação (se, então), assumimos a primeira parte e tentamos provar a segunda.



# Provas

---

## Demonstração.

Assuma  $x$  ímpar.

Como  $x$  é ímpar, temos que existe um  $y$  tal que  $x = 2y + 1$ .

Adicionando 1 a ambos os lados, temos que  $x + 1 = 2y + 2$ .

Tome  $w = y + 1$ , substituindo temos:  $x + 1 = 2w$ .

Portanto  $x + 1$  é par.





# Sumário

---

## 2 Lógica

- Operadores Lógicos
- Quantificadores
- Definições
- Teoremas
- Provas
- Técnicas de Prova



# Prova por casos

---

## Prova por casos

A prova por casos divide a prova em diversos casos, transformando-a em múltiplas provas mais simples.





# Prova por casos

---

- Vamos pegar o seguinte teorema para ilustrar a técnica de prova por casos:

## Teorema

Para qualquer inteiro  $x$ , o inteiro  $x(x + 1)$  é par.

- Temos dois casos:  $x$  é par ou  $x$  é ímpar.



# Prova por casos

---

## Demonstração.

Caso 1:  $x$  é par.

- Como  $x$  é par, temos que existe um  $y$  tal que  $x = 2y$ .
- Assim, temos que:

$$x(x + 1) = 2y(2y + 1)$$

- Tome  $w = y(2y + 1)$ .
- Assim:

$$x(x + 1) = 2y(2y + 1) = 2w$$

- Logo  $x(x + 1)$  é par.





## Prova por casos

---

### Demonstração.

Caso 2:  $x$  é ímpar.

- Como  $x$  é ímpar, temos que existe um  $y$  tal que  $x = 2y + 1$ .
- Assim, temos que:

$$x(x + 1) = (2y + 1)(2y + 2) = (2y + 1)(y + 1)2$$

- Tome  $w = (2y + 1)(y + 1)$ .
- Assim:

$$x(x + 1) = (2y + 1)(2y + 2) = (2y + 1)(y + 1)2 = 2w$$

- Logo  $x(x + 1)$  é par.



## Prova por Construção

Muitos teoremas afirmam a existência de um tipo particular de objeto.

Provas por construção mostram que é possível construir um objeto do referido tipo.



## Exemplo

---

Um grafo  $k$ -regular é aquele que todos os nós tem grau  $k$ .

### Teorema

Para qualquer  $n > 2$  par, existe um grafo 3-regular com  $n$  nós.

### Demonstração.

$$E = \{(i, i+1) | 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{n-1, 0\} \cup \{(i, i+n/2) | 0 \leq i \leq n/2-1\}$$





# Prova por Contradição

---

## Prova por Contradição

Assume-se que um teorema é falso. Uma vez concluído o absurdo, podemos concluir que o teorema é de fato verdadeiro.



# Exemplo

---

## Teorema

$\sqrt{2}$  é irracional.

Demonstração.



## Exemplo

---

Suponha  $\sqrt{2}$  racional.

Logo  $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ , uma fração reduzida. Obviamente,  $n$  ou  $m$  é ímpar.

Elevando os dois lados ao quadrado temos:

$2 = \frac{n^2}{m^2}$ , e portanto  $n^2 = 2m^2$ , então  $n^2$  é par, e  $n$  também é.

Se  $n$  é par, temos  $n = 2k$  para algum  $k$ .

Substituindo, temos  $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ . Logo  $4k^2 = 2m^2$  e portanto  $m^2 = 2k^2$  o que torna  $m^2$  par e consequentemente  $m$  par. Mas  $n$  e  $m$  não podem ser simultaneamente pares. Contradição.

$\sqrt{2}$  tem que ser irracional.







# Prova por Indução

---

## Prova por Indução

Prova-se o caso base. Assume que a propriedade vale para todo  $k < n$ . Tentamos provar que vale para  $n$  utilizando as hipóteses de indução e o caso base.



# Prova por Indução

---

## Teorema

O  $n$  ésimo termo de uma P.A de razão  $r$  é  $a_0 + rn$ .

## Demonstração.

Para  $n = 0$ ,  $a_0 = a_0$ . Suponha que a propriedade vale para todo  $k < n$ .

Sabemos que  $a_n = a_{n-1} + r$ , pela definição da P.A. Aplicando a hipótese de indução sobre  $a_{n-1}$ , temos:

$$a_n = a_0 + r(n - 1) + r = a_0 + rn$$

