

Redutibilidade

Teoria da Computação – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes



**INSTITUTO
FEDERAL**

Brasília

Campus
Taguatinga

Sumário

Introdução

Turing-redutibilidade

Histórico

Redutibilidade por mapeamento

Sumário

Introdução

Turing-redutibilidade

Histórico

Redutibilidade por mapeamento

Introdução

- ▶ Anteriormente estabelecemos as Máquinas de Turing como modelo padrão de computação de propósito-geral.
- ▶ Apresentamos vários problemas que são decidíveis utilizando MT s.
- ▶ Mas também apresentamos problemas indecidíveis, como o problema A_{MT} , o problema da parada.
- ▶ Veremos agora como utilizar problemas que sabemos que são indecidíveis para mostrar que outros problemas também são.
- ▶ Utilizaremos o método de **redução** entre problemas.

Reduções

- ▶ Uma redução é uma maneira de converter um problema em outro de forma que a solução para o segundo problema pode ser utilizada para resolver o primeiro problema.
- ▶ Podemos utilizar esse conceito informal para fazer uma analogia com o dia-a-dia.

Reduções

Exemplo

- ▶ Suponha que queiramos nos localizar em uma cidade nova.
- ▶ Localizar seria fácil se tivéssemos um mapa dela.
- ▶ Assim, podemos reduzir o problema de nos localizar na cidade ao problema de obter um mapa.
- ▶ Se resolvemos um segundo, podemos usar a solução para resolver o primeiro.

Reduções

- ▶ As reduções sempre envolvem dois problemas, chamados A e B .
- ▶ Se A se reduz a B , podemos utilizar a solução de B para resolver A .
- ▶ No nosso exemplo:
 - ▶ A = problema de se localizar na cidade.
 - ▶ B = problema de encontrar um mapa.
- ▶ Note que a redutibilidade não diz nada sobre resolver A ou B independentemente, mas sim sobre resolver A na presença de uma solução de B .

Reduções

Exemplo

- ▶ O problema de viajar de Taguatinga para Paris se reduz ao problema de comprar uma passagem de avião entre as duas cidades.
- ▶ O problema de comprar a passagem se reduz ao problema de arrumar o dinheiro.
- ▶ O problema de arrumar o dinheiro se reduz ao problema de encontrar um emprego.
- ▶ Note que não especificamos como resolver cada problema, mas estamos falando que podemos resolver um problema dada a solução do outro.

Reduções

- ▶ Reduções também ocorrem em problemas matemáticos.
- ▶ O problema de calcular a área de um retângulo se reduz ao problema de mensurar sua altura e largura.
- ▶ O problema de resolver um sistema linear de equações se reduz ao problema de inverter uma matriz.

Reduções

- ▶ Reduções apresentam um importante papel em classificar os problemas em decidíveis ou indecidíveis.
- ▶ São importantíssimas em classificar problemas decidíveis em níveis de dificuldade, o que é de interesse para a área de Complexidade Computacional.

Reduções

- ▶ Se um problema A se reduz a um problema B , o que podemos dizer sobre a **difículdade** de B em relação A ?

Reduções

- ▶ Resolver A não pode ser mais difícil do que resolver B .
- ▶ A partir de uma solução de B , conseguimos resolver A .

Reduções

- ▶ Se A se reduz a B , e A é indecidível, o que podemos dizer sobre B ?
- ▶ Se A se reduz a B , e B é decidível, o que podemos dizer sobre A ?

Reduções

- ▶ Se A se reduz a B , e A é indecidível, o que podemos dizer sobre B ?
 - ▶ B tem que ser indecidível.
- ▶ Se A se reduz a B , e B é decidível, o que podemos dizer sobre A ?

Reduções

- ▶ Se A se reduz a B , e A é indecidível, o que podemos dizer sobre B ?
 - ▶ B tem que ser indecidível.
- ▶ Se A se reduz a B , e B é decidível, o que podemos dizer sobre A ?
 - ▶ A tem que ser decidível.

Reduções

- ▶ Para provar que um problema é indecidível, basta mostrar que outro problema indecidível se reduz a ele.
- ▶ Nosso ponto de partida: A_{MT} .

Sumário

Introdução

Turing-redutibilidade

Histórico

Redutibilidade por mapeamento

Turing-redutibilidade

- ▶ Para podermos utilizar a técnica de redução entre problemas, precisamos formalizá-la.
- ▶ **Turing-redutibilidade.**

Turing-redutibilidade

Definição (Máquinas de Turing com oráculo)

Um **oráculo** para uma linguagem B é um dispositivo externo que é capaz de dizer, para qualquer string w , se ela pertence ou não pertence a B .

Uma **Máquina de Turing com oráculo** tem a capacidade adicional de fazer consultas ao oráculo.

Turing Redutibilidade

- ▶ Ou seja, uma máquina de Turing com oráculo possui uma caixa preta que pode ser consultada para a Linguagem B .
- ▶ Esta caixa-preta diz se uma determinada palavra está ou não está em B , independentemente da indecidibilidade de B .

Turing-redutibilidade

Definição (Decidibilidade relativa)

Uma linguagem B é decidível em relação a uma linguagem A , se existe uma Máquina de Turing com oráculo para A que é capaz de decidir B .

Turing-redutibilidade

Definição (Turing-redutibilidade)

Uma linguagem A é Turing-redutível a uma linguagem B , denotado por $A \leq_T B$, se A é decidível em relação a B .

Ou seja, se existe uma máquina com oráculo para B de modo que seja possível decidir A com ela, temos que $A \leq_T B$.

Turing-redutibilidade

- ▶ Com relação a estes conceitos, podemos concluir duas coisas.

Turing-redutibilidade

Teorema

Se $A \leq_T B$ e B é decidível, então A é decidível.

Turing-redutibilidade

Demonstração.

- ▶ Suponha que $A \leq_T B$, ou seja, A é decidível por através de uma máquina com oráculo para B .
- ▶ Se B é decidível então podemos trocar o oráculo de B por um procedimento que decida B , sem utilizar o oráculo para B .
- ▶ Assim, temos uma máquina de Turing que decide A ao eliminar este oráculo.



Turing-redutibilidade

Corolário

Se $A \leq_T B$ e A é indecidível, então B é indecidível.

Turing-redutibilidade

Demonstração.

- ▶ Tome $A \leq_T B$ e A indecidível e suponha B decidível.
- ▶ Se B é decidível, podemos trocar o oráculo que A utiliza para se reduzir a B pela própria máquina que decide B .
- ▶ Dessa forma, podemos decidir A através de B sem utilizar o oráculo.
- ▶ Impossível, pois A é indecidível.
- ▶ $\therefore B$ tem que ser indecidível.



Turing-redutibilidade

- ▶ Agora que temos este conceito de Turing-redutibilidade, podemos utilizá-lo para mostrar que outros problemas são indecidíveis.
- ▶ Vamos utilizar da estrutura da prova do nosso último corolário e de A_{MT} para isto.

Problemas indecidíveis

- ▶ Sabemos que A_{MT} é indecidível.
- ▶ Vamos considerar um problema parecido: $HALT_{MT}$.
- ▶ $HALT_{MT}$ concentra-se em determinar se uma Máquina de Turing para (aceitando ou rejeitando) ou não em uma determinada entrada:

$$HALT_{MT} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ é uma MT e } M \text{ para sobre } w\}$$

Problemas indecidíveis

- ▶ Provaremos que $HALT_{MT}$ é indecidível ao mostrarmos uma redução de A_{MT} para $HALT_{MT}$.

Problemas indecidíveis

Teorema

HALT_{MT} é *indecidível*.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ A prova será por contradição.
- ▶ Assumiremos que HALT_{MT} é decidível e utilizaremos este fato para chegar a conclusão que A_{MT} é decidível, gerando um absurdo.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ Suponha que temos uma MT R que decida HALT_{MT} .
- ▶ Podemos utilizar R para construir S , uma MT que decide A_{MT} .
- ▶ Uma abordagem inicial para construção de S é simular M sobre w .
- ▶ Se M aceita w , S aceita.
- ▶ Se M rejeita w ou entra em loop, S deve dizer rejeita.
- ▶ O problema é: pela simulação não conseguimos dizer se uma máquina está em loop.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ Esta abordagem inicial não funciona.
- ▶ Vamos utilizar R ao nosso favor.
- ▶ Com R , testamos se M para sobre w :
 - ▶ Se R diz aceita, significa que M para sobre M (aceita ou rejeita). Fazemos a simulação de M sobre w e pegamos a resposta da simulação como a resposta de S .
 - ▶ Se não para, quer dizer que M entra em loop sobre w , e portanto M não aceita w . Logo, S deve dizer rejeita.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ Assim, se a MT R existe, podemos decidir A_{MT} através de S .
- ▶ Mas sabemos que A_{MT} é indecidível.
- ▶ Contradição.
- ▶ R não pode existir.
- ▶ $\therefore \text{HALT}_{MT}$ é indecidível.

Problemas indecidíveis

- ▶ Agora podemos ir para a prova.

Problemas indecidíveis

Demonstração

Algorithm 1: Construção da máquina S que decide A_{MT}

Input: $\langle M, w \rangle$, uma descrição de M e uma entrada w

Output: *aceita*, caso M aceita w e *rejeita* caso contrário .

1Rode R sobre a entrada $\langle M, w \rangle$

2**if**(R *rejeita*)

3**return** *rejeita*

4**else**

5Simule M sobre w até M parar.

6**if**(M *aceita* w)

7**return** *aceita*

8**else**

9**return** *rejeita*

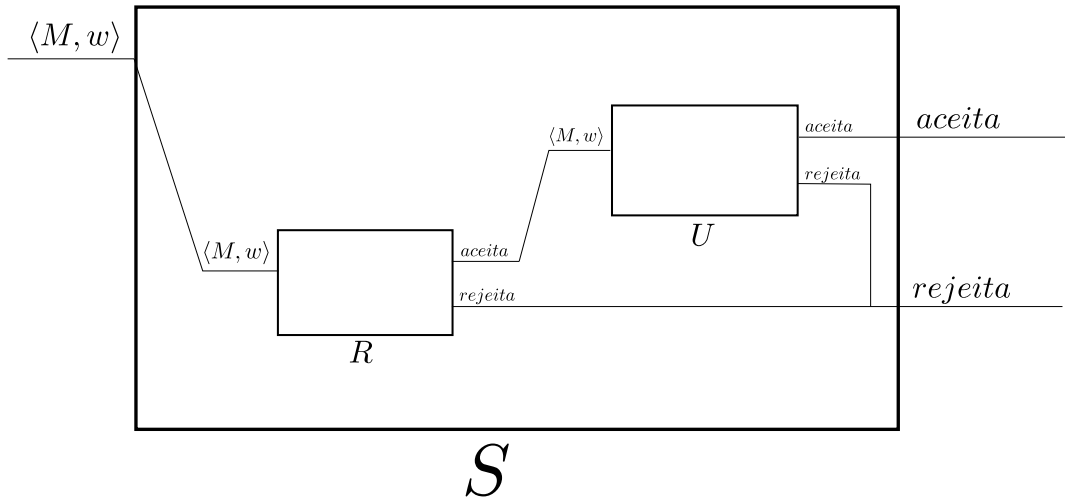
Problemas indecidíveis

Demonstração.

- ▶ Como R decide HALT_{MT} , mostramos como construir S que decide A_{MT} .
- ▶ Mas A_{MT} é indecidível.
- ▶ R não pode existir.
- ▶ $\therefore \text{HALT}_{\text{MT}}$ é **indecidível**.



Problemas indecidíveis



Problemas indecidíveis

- ▶ A mesma prova pode ser feita utilizando a nossa definição de Turing-redutibilidade.
- ▶ Basta mostrar que, se tivermos uma máquina com oráculo R para HALT_{MT} , conseguimos decidir A_{MT} .
- ▶ Feito isso teremos que $A_{\text{MT}} \leq_T \text{HALT}_{\text{MT}}$, e como A_{MT} é indecidível, pelo teorema visto anteriormente, HALT_{MT} tem que ser indecidível também.

Problemas indecidíveis

Algorithm 2: Mostrando que $A_{MT} \leq_T \text{HALT}_{MT}$

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: *aceita*, caso M aceita w e *rejeita* caso contrário

1 Consulte o oráculo R para verificar se M para sobre w

2 **if**(*Se M para sobre w*)

3 Simule M sobre w

4 **if**(M aceita w)

5 **return** *aceita*

6 **else**

7 **return** *rejeita*

8 **else**

9 **return** *rejeita*

Problemas indecidíveis

- ▶ Essas estratégias de prova são muito comuns para mostrar que certos problemas são indecidíveis.
- ▶ Com exceção do A_{MT} , que foi provado diretamente via método da diagonalização, podemos mostrar que outros problemas são indecidíveis via redução.
- ▶ Vamos mostrar que outro problema é indecidível utilizando a mesma estratégia.

Problemas indecidíveis

- ▶ Tome o seguinte problema:

$$E_{MT} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ é uma MT e } L(M) = \emptyset\}$$

- ▶ E_{MT} é a linguagem das máquinas que não aceitam nada.

Problemas indecidíveis

Teorema

E_{MT} é *indecidível*.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ Utilizaremos o mesmo *framework* da demonstração de indecidibilidade de HALT_{MT} .
- ▶ É uma prova por contradição.
- ▶ Vamos supor que E_{MT} é decidível e acabar concluindo que A_{MT} é decidível, o que é um absurdo.
- ▶ Dessa forma conclui-se que E_{MT} é indecidível.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ Suponha a existência de uma máquina R que decide E_{MT} .
- ▶ Vamos utilizar R para construir uma máquina S que decide A_{MT} .
- ▶ Como construir S ?

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ Uma primeira abordagem para construção de S é rodar R sobre a entrada $\langle M \rangle$ e verificar se R a aceita.
- ▶ Se R aceita $\langle M \rangle$, sabemos que $L(M) = \emptyset$, e portanto, S deve dizer rejeita.
- ▶ Se R rejeita $\langle M \rangle$, então $L(M) \neq \emptyset$, mas não sabemos se uma string w em particular é aceita por M , que é o que A_{MT} justamente quer.
- ▶ Precisamos de outra abordagem, esta não funciona.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ Em vez de rodar R sobre $\langle M \rangle$ rodaremos R sobre uma versão modificada de $\langle M \rangle$.
- ▶ Modificamos $\langle M \rangle$ de modo que M rejeite todas as strings diferentes de w .
- ▶ Se a string for w , a versão modificada funciona como M .
- ▶ Você consegue construir tal máquina?

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ A ideia é fazer com que w faça parte da descrição da máquina modificada.
- ▶ Assim, para qualquer entrada x , basta compará-la com a palavra w embutida na descrição.
- ▶ Se as palavras não batem, a máquina modificada rejeita.
- ▶ Se as palavras batem, então $x = w$ e a máquina modificada funciona como a máquina original.
- ▶ Só precisamos inserir alguns estados a mais na máquina original para efetuar esta comparação.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ A versão modificada de $\langle M \rangle$ rejeita todas as strings diferentes de w .
- ▶ Se R rejeita sobre a versão modificada de $\langle M \rangle$, sabemos que S deve aceitar a entrada $\langle M, w \rangle$.
- ▶ Se R aceita sobre a versão modificada de $\langle M \rangle$, sabemos que M não aceita w , e portanto, S deve rejeitar sobre a entrada $\langle M, w \rangle$.

Problemas indecidíveis

- ▶ Agora podemos partir para a demonstração.

Problemas indecidíveis

Demonstração.

- Chame a versão modificada de $\langle M \rangle$ de M_1 .

Algorithm 3: Máquina M_1

Input: $x \in \Sigma^*$

Output: *aceita* se $x = w$ e *rejeita* caso contrário

1**if** $(x \neq w)$

2 **return** *rejeita*

3**else**

4 Roda M sobre w e aceita, se M aceita w .

Problemas indecidíveis

Demonstração.

- Dado M_1 agora podemos construir S .

Algorithm 4: Construção de S

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: *aceita* se M aceita w e *rejeita*, caso contrário.

1 Utilize $\langle M, w \rangle$ para construir M_1

2 Rode R sobre $\langle M_1 \rangle$

3 **if**(R aceita)

4 **return** *rejeita*

5 **else**

6 **return** *aceita*

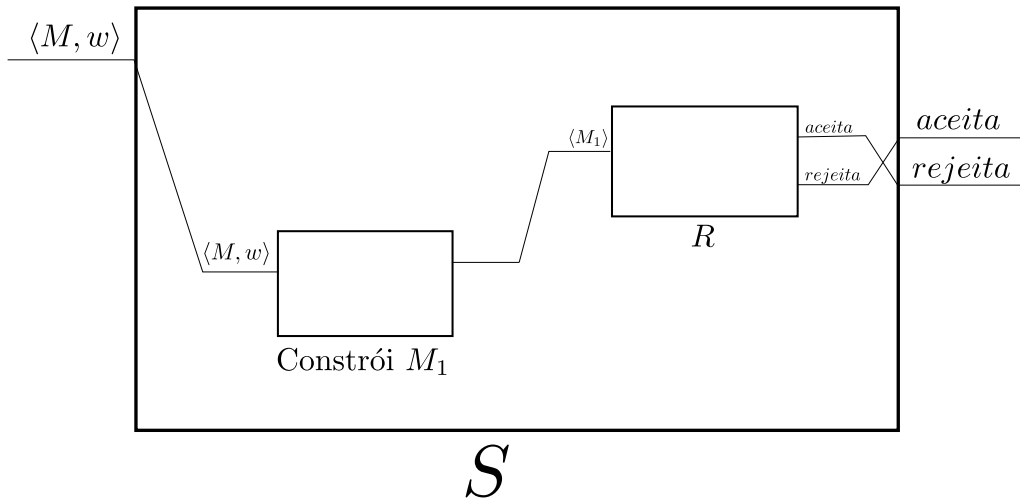
Problemas indecidíveis

Demonstração.

- ▶ Dado que R decide E_{MT} , mostramos que S decide A_{MT} .
- ▶ Mas A_{MT} é indecidível.
- ▶ A máquina R não pode existir.
- ▶ $\therefore E_{MT}$ é indecidível.



Problemas indecidíveis



Problemas indecidíveis

- ▶ Outra forma, é utilizar a mesma estratégia da redução de A_{MT} para $HALT_{MT}$.
- ▶ Assumimos que existe uma máquina com oráculo para E_{MT} e decidimos A_{MT} .
- ▶ Isso prova que $A_{MT} \leq_T E_{MT}$ e portanto que E_{MT} é indecidível.

Problemas indecidíveis

Algorithm 5: Mostrando que $A_{MT} \leq_T E_{MT}$

Input: $\langle M, w \rangle$ e R , uma máquina com oráculo para E_{MT}

Output: *aceita*, caso M aceita w e *rejeita* caso contrário

1 Crie a máquina M_1 como descrito na prova anterior

2 Consulte o oráculo R para verificar se M_1 não aceita nada

3 **if**(Se M_1 não aceita nada)

4 **return** *rejeita*

5 **else**

6 **return** *aceita*

Problemas indecidíveis

- ▶ Até agora utilizamos a redução a partir de A_{MT} para mostrar que outro problema é indecidível.
- ▶ Às vezes, é mais fácil provar um teorema sobre indecidibilidade se partirmos de outro problema.
- ▶ Mostraremos agora que um problema é indecidível ao reduzirmos E_{MT} para ele.

Problemas indecidíveis

- ▶ Tome o problema EQ_{MT} :

$$EQ_{MT} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ e } M_2 \text{ são MTs e } L(M_1) = L(M_2)\}$$

- ▶ Ou seja, queremos saber se dois programas possuem o mesmo comportamento.

Problemas indecidíveis

Teorema

EQ_{MT} é *indecidível*

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ A prova é por contradição.
- ▶ Vamos mostrar que, se EQ_{MT} é decidível, conseguimos decidir E_{MT} .
- ▶ O que é um absurdo, pois sabemos que E_{MT} é indecidível.
- ▶ Assim concluímos que EQ_{MT} é indecidível.

Problemas indecidíveis

Ideia da prova

- ▶ E_{MT} é o problema de determinar se $L(M)$ é vazia para alguma máquina M .
- ▶ EQ_{MT} é o problema de determinar se $L(M_1) = L(M_2)$ para máquinas M_1 e M_2 .
- ▶ Assim, se $L(M_1) = \emptyset$, e a resposta de EQ_{MT} sobre a entrada $\langle M_1, M_2 \rangle$ é **aceita**, conseguimos concluir que $L(M_2) = \emptyset$.
- ▶ O E_{MT} é um caso especial de EQ_{MT} .

Problemas indecidíveis

Demonstração.

- ▶ Tome como R a máquina que decide EQ_{MT} .
- ▶ Podemos construir S a partir de R da seguinte maneira.

Problemas indecidíveis

Demonstração.

Algorithm 6: Construção de S que decide E_{MT} .

Input: $\langle M \rangle$

Output: *aceita*, se $L(M) = \emptyset$ e *rejeita* caso contrário.

1 Rode R sobre a entrada $\langle M, M_1 \rangle$, onde M_1 é uma MT que rejeita qualquer entrada

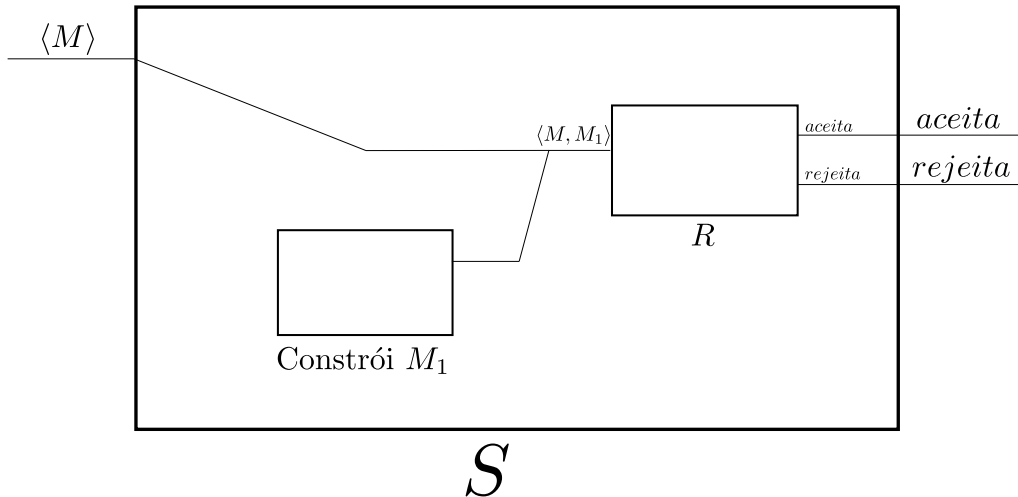
2 **if** (R aceita)

3 **return** *aceita*

4 **else**

5 **return** *rejeita*

Problemas indecidíveis



Sumário

Introdução

Turing-redutibilidade

Histórico

Redutibilidade por mapeamento

Reduções via histórico de computação

- ▶ O método de histórico de computação é importante para mostrar que A_{MT} é redutível a outras linguagens.
- ▶ Este método é frequentemente utilizado quando o problema a ser provado indecidível envolve a busca da existência de algo.
- ▶ Por exemplo, este método pode ser utilizado para provar a indecidibilidade do décimo problema de Hilbert: buscar a existência de raízes inteiras de um polinômio.

Reduções via histórico de computação

- ▶ O histórico de computação de uma máquina sobre uma entrada é simplesmente a sequência de configurações que a máquina tem ao processar uma entrada.
- ▶ Imagine que a cada função de transição, uma foto seja tirada da situação da máquina.
- ▶ É um registro completo da computação da máquina.

Reduções via histórico de computação

- ▶ Históricos de computação são sequências **finitas**.
- ▶ Se uma máquina M não para sobre uma entrada w , dizemos que o histórico de computação não existe para M sobre w .
- ▶ Máquinas determinísticas possuem no máximo um histórico de computação para uma determinada entrada.
- ▶ Máquinas não-determinísticas podem possuir múltiplos históricos para uma mesma entrada.

Reduções via histórico de computação

- ▶ Vamos definir a noção de histórico mais precisamente.

Reduções via histórico de computação

Definição (Histórico de computação)

- ▶ *Seja M uma MT e w uma entrada.*
- ▶ *Um histórico de computação de aceitação de M em w é uma sequência de configurações C_1, C_2, \dots, C_l , onde C_1 é a configuração inicial de M em w e C_l é uma configuração de aceitação de M .*
- ▶ *Cada C_i é derivado de C_{i-1} respeitando as regras de M .*
- ▶ *Similarmente, um histórico de computação de rejeição de M em w tem como C_l uma configuração de rejeição.*

Reduções via histórico de computação

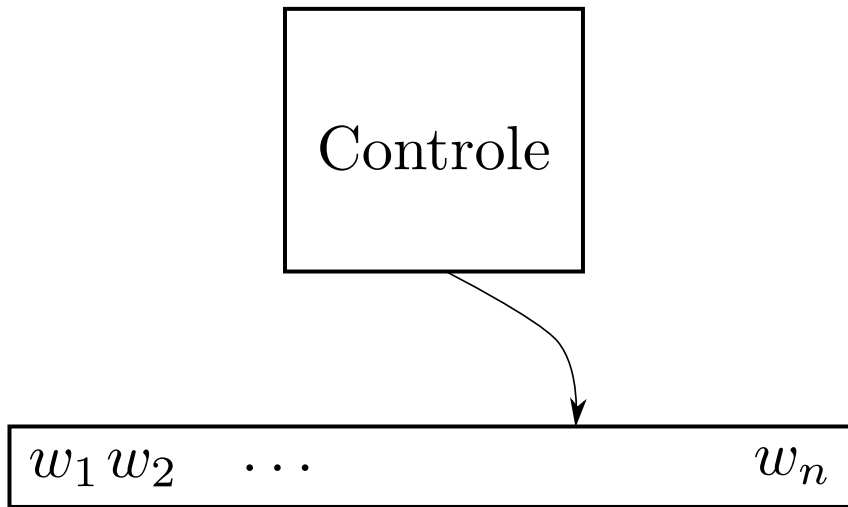
- ▶ Agora que sabemos o que é um histórico de computação podemos atacar problemas e mostrá-los indecidíveis.
- ▶ Vamos mostrar que um problema relacionado a um **autômato linearmente limitado** é indecidível via este método.

Reduções via histórico de computação

Definição (Autômato linearmente limitado)

- ▶ *Um autômato linearmente limitado (LBA — linear bounded automata) é um tipo restrito de MT.*
- ▶ *A cabeça de leitura/escrita não pode se mover além do espaço delimitado pela entrada.*
- ▶ *Se a máquina tenta se mover para além de qualquer uma das extremidades da entrada, a cabeça continua na mesma posição.*

Autômato linearmente limitado



Autômato linearmente limitado

- ▶ Apesar de ter memória limitada, um autômato linearmente limitado é bem poderoso.
- ▶ Vamos mostrar um primeiro resultado sobre ele.
- ▶ Tome a linguagem:

$$A_{\text{LBA}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ é um LBA que aceita } w\}$$

Autômato linearmente limitado

Teorema

A_{LBA} é decidível.

Autômato linearmente limitado

- ▶ Para mostrar que A_{LBA} é decidível, vamos precisar provar um lema antes.

Autômato linearmente limitado

Lema

Seja M um LBA com q estados e g símbolos em Γ , o alfabeto da fita. Existem no máximo qng^n configurações distintas de M para uma fita de comprimento n .

Autômato linearmente limitado

Demonstração

- ▶ Lembre-se de que uma configuração é como se fosse uma foto do estado da máquina.
- ▶ Ela consiste de:
 - ▶ Estado.
 - ▶ Posição da cabeça.
 - ▶ Conteúdo da fita.

Autômato linearmente limitado

Demonstração

- ▶ M tem q estados.
- ▶ O comprimento da fita é n , então a cabeça só pode ocupar n posições distintas.
- ▶ O conteúdo da fita possui g^n possibilidades.

Autômato linearmente limitado

Demonstração.

- ▶ O número total de combinações equivale ao produto das três quantidades.
- ▶ qng^n .



Autômato linearmente limitado

- ▶ Vamos provar agora o teorema sobre a decidibilidade de A_{LBA} .

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- ▶ Para decidir de um LBA M aceita w , simulamos M sobre w .
- ▶ Durante a simulação, se M para e aceita/rejeita, aceitamos ou rejeitamos de acordo.
- ▶ O problema está quando M entra em loop sobre w .
- ▶ Temos que conseguir detectar loops, uma coisa que é impossível em MTs.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- ▶ No entanto, em LBAs, conseguimos detectar um loop.
- ▶ Se M repete alguma configuração, podemos concluir que ela repetirá essa configuração após algumas outras configurações.
- ▶ Pelo nosso lema, temos um número **finito** de configurações.
- ▶ Se após qng^n configurações a máquina não tiver parado, ela tem que estar em loop.

Autômato linearmente limitado

Demonstração.

Algorithm 7: Algoritmo que decide A_{LBA}

Input: $\langle M, w \rangle$ tal que M é um LBA.

Output: *aceita* se M aceita w .

1 Simule M sobre w por qng^n passos ou até que ela pare

2 **if** (M parou)

3 **if** (M aceitou w)

4 **return** *aceita*

5 **else**

6 **return** *rejeita*

7 **else**

8 **return** *rejeita*



Autômato linearmente limitado

- ▶ Este teorema mostra uma diferença fundamental entre os LBAs e as MTs.
- ▶ Enquanto A_{LBA} é decidível, A_{MT} não é.
- ▶ Modelos diferentes com resultados diferentes no que tange o problema da aceitação.

Autômato linearmente limitado

- ▶ Agora que ganhamos uma intuição sobre os LBAs, estamos prontos para mostrar resultados de indecidibilidade sobre eles.
- ▶ Tome a linguagem:

$$E_{\text{LBA}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ é um LBA tal que } L(M) = \emptyset\}$$

- ▶ Ou seja, queremos saber se a linguagem reconhecida por um LBA é vazia.
- ▶ Este problema é indecidível.

Autômato linearmente limitado

Teorema

E_{LBA} é *indecidível*.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- ▶ Esta prova é obtida através da redução de A_{MT} .
- ▶ Se supomos que E_{LBA} é decidível através de um algoritmo R , como podemos mostrar que A_{MT} é decidível e gerar uma contradição?
- ▶ Dado uma entrada $\langle M, w \rangle$ a ideia é construir um LBA B que é aceito por R , se e somente se, M não aceita w .
- ▶ Se R rejeita $\langle B \rangle$, então $L(B) \neq \emptyset$, e concluímos que A_{MT} diz aceita.
- ▶ Se R aceita $\langle B \rangle$, então $L(B) = \emptyset$, e concluímos que A_{MT} diz rejeita.

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- ▶ Como construir B de M e w ?
- ▶ Vamos construir B para aceitar uma entrada x se x é um histórico de computação de aceitação para M sobre w .
- ▶ Lembre-se que um histórico de computação de aceitação é uma sequência de configurações C_1, C_2, \dots, C_l que M passa e aceita w .

Autômato linearmente limitado

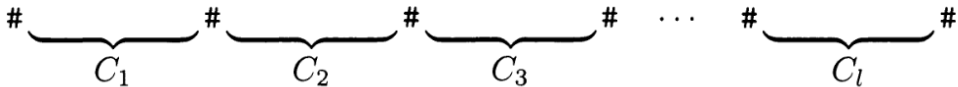


Figura: Uma possível entrada para B

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- ▶ B funciona da seguinte maneira. Quando recebe x , B aceita x se x é um histórico de computação de aceitação de M sobre w .
- ▶ B então quebra cada configuração através de delimitadores $\#$ e determina se as configurações satisfazem as condições de um histórico de computação de aceitação:
 - ▶ C_1 é a configuração inicial de M sobre w .
 - ▶ Cada C_{i+1} pode ser derivado de C_i .
 - ▶ C_l é uma configuração de aceitação de M .

Autômato linearmente limitado

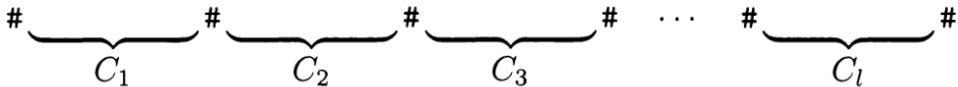


Figura: Uma possível entrada para B

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

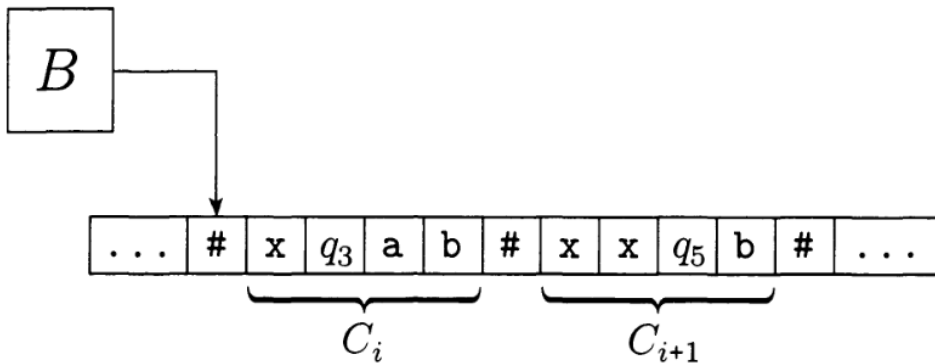
- ▶ A configuração inicial de C_1 para M sobre w é a palavra $q_0w_1w_2 \dots w_n$, onde q_0 é o estado inicial de M sobre w .
- ▶ Para verificar se C_l é uma configuração de aceitação, basta varrer e verificar se ela contém o estado q_{aceita} .
- ▶ A segunda condição é a mais difícil. Para cada par adjacente de configurações, B tem que checar se C_{i+1} pode decorrer de C_i .
- ▶ Isso envolve verificar se C_i e C_{i+1} são idênticas exceto pela célula apontada sobre a cabeça e adjacente a cabeça de C_i .
- ▶ Estas células tem que obrigatoriamente ser atualizadas de acordo com δ de M .

Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- ▶ B verifica isso ao zigzaguear sobre C_i e C_{i+1} .
- ▶ De modo a marcar as posições das fitas, B utiliza símbolos com um ponto em cima.
- ▶ Finalmente, se as três condições são aceitas, B aceita a sua entrada.

Autômato linearmente limitado



Autômato linearmente limitado

Ideia da prova

- ▶ O propósito da criação de B não é rodar sobre uma entrada.
- ▶ É simplesmente servir de entrada para R .
- ▶ Uma vez que R retorna uma resposta, é possível dar uma resposta para A_{MT} .

Autômato linearmente limitado

Demonstração

Algorithm 8: Demonstração de indecidibilidade de E_{LBA}

Input: $\langle M, w \rangle$, tal que M é uma MT e w é uma entrada

Output: *aceita*, se e somente se M aceita w

1 Construa o LBA B de M e w de acordo com a ideia da prova

2 Rode R sobre $\langle B \rangle$

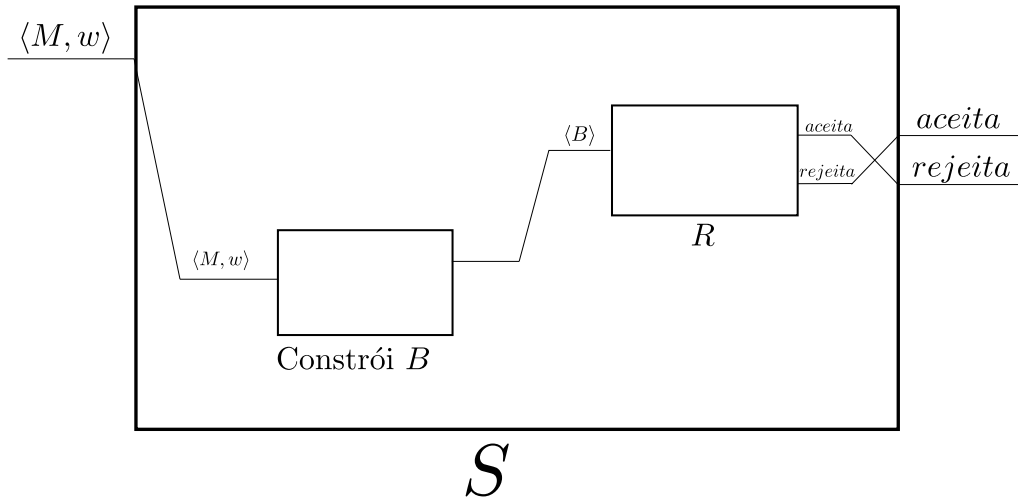
3 **if**(R *rejeita*)

4 **return** *aceita*

5 **else**

6 **return** *rejeita*

Autômato linearmente limitado



Sumário

Introdução

Turing-redutibilidade

Histórico

Redutibilidade por mapeamento

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Mostramos como utilizar reduções para provar que vários problemas são indecidíveis.
- ▶ Até o momento, utilizamos um tipo de redução chamada de Turing-redução.
- ▶ Mostraremos agora uma noção mais forte de redução, denominada *redução por mapeamento*.

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ A noção de reduzir um problema a outro pode ser definido formalmente de diversas formas.
- ▶ Estudaremos a **redutibilidade por mapeamento**.
- ▶ A grosso modo, ao utilizar a redutibilidade por mapeamento para reduzir um problema A para um problema B significa que existe uma **função computável** que converte instâncias do problema A em instâncias do problema B .

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Se existe esta função computável, chamada de **redução**, podemos resolver A a partir da solução de B .
- ▶ Se sabemos resolver B , basta aplicar a redução nas instâncias de A para transformá-las em instâncias para B e resolver B , e logo, A .

Sumário

Redutibilidade por mapeamento

Funções computáveis

Definição formal de redutibilidade por mapeamento

Funções computáveis

- ▶ Uma máquina de Turing computa uma função f ao começar com x na fita e ao parar, deixa na fita $f(x)$.

Funções computáveis

Definição (Funções computáveis)

Uma função $f : \Sigma^ \rightarrow \Sigma^*$ é dita uma **função computável** se existe uma Máquina de Turing M que, para qualquer $w \in \Sigma^*$, M para e deixa $f(w)$ na fita.*

Funções computáveis

Exemplo

- ▶ Todas as operações aritméticas em inteiros são funções computáveis.
- ▶ Podemos construir uma máquina que recebe como entrada $\langle m, n \rangle$ e retorna $m + n$.

Funções computáveis

Exemplo

- ▶ Funções computáveis também podem ser transformações em descrições de máquinas.
- ▶ Uma função computável f pode, por exemplo, receber uma entrada $w \in \Sigma^*$ e retornar a descrição de uma MT $\langle M' \rangle$ se $w = \langle M \rangle$ é uma codificação de uma MT.
- ▶ A MT M' é uma máquina que reconhece a mesma linguagem de M , mas nunca tenta mover a cabeça de leitura/escrita à esquerda da posição inicial.
- ▶ A função f consegue isso ao adicionar vários estados na descrição de M e deve retornar ϵ , caso w não seja uma codificação de MT válida.

Sumário

Redutibilidade por mapeamento

Funções computáveis

Definição formal de redutibilidade por mapeamento

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Agora que temos a noção formal de funções computáveis, podemos definir o que é de fato uma redutibilidade por mapeamento.

Redutibilidade por mapeamento

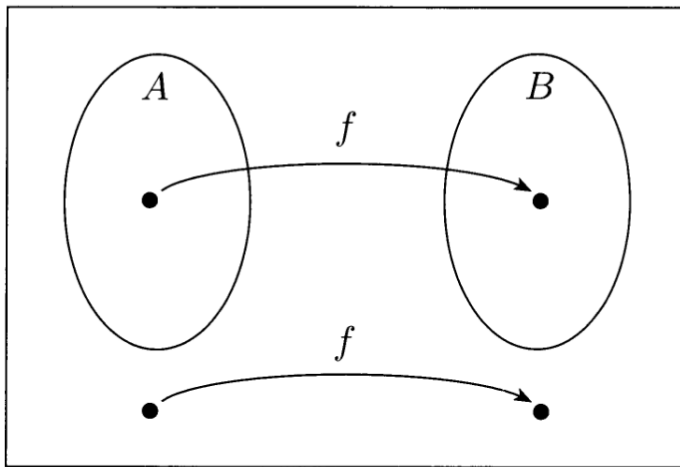
Definição (Redutibilidade por mapeamento)

Uma linguagem A é redutível via mapeamento a uma linguagem B , denotado por $A \leq_m B$, se existe uma função computável $f : \Sigma^ \rightarrow \Sigma^*$, tal que, para todo $w \in \Sigma^*$*

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

A função f é denominada de redução de A para B .

Redutibilidade por mapeamento



Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Uma redução via mapeamento de A para B permite uma maneira de converter perguntas sobre a pertinência de uma entrada em A para uma pertinência de uma entrada em B .
- ▶ Para responder se $w \in A$, utilizamos f para mapear w em $f(w)$ e testar se $f(w) \in B$.
- ▶ Em caso afirmativo, temos que $w \in A$.
- ▶ Em caso negativo, temos que $w \notin A$.
- ▶ Quem garante essa propriedade?

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Uma redução via mapeamento de A para B permite uma maneira de converter perguntas sobre a pertinência de uma entrada em A para uma pertinência de uma entrada em B .
- ▶ Para responder se $w \in A$, utilizamos f para mapear w em $f(w)$ e testar se $f(w) \in B$.
- ▶ Em caso afirmativo, temos que $w \in A$.
- ▶ Em caso negativo, temos que $w \notin A$.
- ▶ Quem garante essa propriedade?
- ▶ A função de redução.

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Se um problema é redutível por mapeamento a um segundo problema, cuja solução já é conhecida, podemos obter uma solução para o primeiro problema.
- ▶ Capturamos esta noção com o seguinte teorema.

Redutibilidade por mapeamento

Teorema

Se $A \leq_m B$, e B é decidível, então A é decidível.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- ▶ Seja M uma MT que decide B e f uma função de redução de A para B . Podemos descrever uma MT N que decide A da seguinte maneira:

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 9: Construção de N

Input: w

Output: *aceita*, se $w \in A$ e *rejeita* caso contrário

1 Compute $f(w)$

2 Rode M sobre $f(w)$

3 **if** ($f(w) \in B$)

4 **return** *aceita*

5 **else**

6 **return** *rejeita*

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração.

- ▶ Claramente, se $w \in A$, então $f(w) \in B$, visto que f é uma redução de A para B .
- ▶ Assim, M aceita $f(w)$ sempre que $w \in A$ e M rejeita $f(w)$ sempre que $w \notin A$.
- ▶ N funciona como o esperado.



Redutibilidade por mapeamento

- ▶ A partir do resultado anterior, podemos chegar no seguinte corolário.

Redutibilidade por mapeamento

Corolário

Se $A \leq_m B$ e A é indecidível, então B é indecidível.

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Vamos agora revisar as nossas provas anteriores que utilizaram o conceito informal de redução e mostrar como o nosso conceito formal de redução se aplica.

Redutibilidade por mapeamento

Exemplo

- ▶ Mostramos anteriormente que HALT_{MT} é indecidível via uma redução de A_{MT} .
- ▶ Essa redução mostrou como uma MT que decide HALT_{MT} pode ser utilizada para decidir A_{MT} , gerando a esperada contradição.
- ▶ Vamos demonstrar uma redução via mapeamento de A_{MT} para HALT_{MT} .

Redutibilidade por mapeamento

- Precisamos apresentar uma função computável f que recebe como entrada $\langle M, w \rangle$ e dá como saída $\langle M', w' \rangle$, tal que:

$$\langle M, w \rangle \in A_{MT} \text{ se, e somente se, } \langle M', w' \rangle \in \text{HALT}_{MT}$$

- Utilizaremos uma máquina F para computar tal função.

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 10: Computando a função f através de uma máquina F

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: $\langle M', w \rangle$

1 Construa M' tal que, sobre uma entrada x , M' roda x sobre M e: se M aceita x , M' aceita. Se M rejeita x , M' entra em loop. Deixe $\langle M', w \rangle$ na fita

Redutibilidade por mapeamento

Exemplo

- ▶ A redução via mapeamento de E_{MT} para EQ_{MT} baseia-se no teorema provado sobre a indecidibilidade de EQ_{MT} visto anteriormente.
- ▶ Neste caso, a redução f está mapeando a entrada $\langle M \rangle$ em $\langle M, M_1 \rangle$, em que M_1 é uma MT que rejeita tudo.

Redutibilidade por mapeamento

Exemplo

- ▶ Na demonstração da indecidibilidade de E_{MT} nós utilizamos uma redução a partir de A_{MT} .
- ▶ Vamos verificar como podemos converter esta redução em uma redução via mapeamento.
- ▶ Da redução original, podemos construir uma função f que recebe como entrada $\langle M, w \rangle$ e produz $\langle M_1 \rangle$, sendo M_1 uma máquina que aceita apenas w se e somente se M aceita w .

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ M_1 é a MT descrita na demonstração.
- ▶ Mas M aceita w se, e somente se, $L(M_1)$ não é vazia, então f é um redução via mapeamento de A_{MT} para $\overline{E_{MT}}$.
- ▶ Mas ainda preservarmos o resultado de que E_{MT} é indecidível, uma vez que decidibilidade não é afetado por complementação.
- ▶ Mas não é uma redução via mapeamento de A_{MT} para E_{MT} .

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ A sensibilidade da redutibilidade via mapeamento sobre a complementação é importante para provar a não-reconhecibilidade de certas linguagens.
- ▶ Também podemos utilizar a redução via mapeamento para mostrar que problemas sequer são Turing-reconhecíveis.

Redutibilidade por mapeamento

Teorema

Se $A \leq_m B$ e B é Turing-reconhecível, A também é.

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ A prova deste teorema é muito parecida com a demonstração anterior de que:
Se $A \leq_m B$ e B é Turing-decidível, então A também é.
- ▶ Exercício.

Redutibilidade por mapeamento

Corolário

Se $A \leq_m B$ e A não é Turing-reconhecível, B também não é.

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ Uma aplicação típica deste corolário é tomar A como $\overline{A_{\text{MT}}}$.
- ▶ Sabemos que $\overline{A_{\text{MT}}}$ não é Turing-reconhecível.
- ▶ Pela definição de redução via mapeamento, temos que se $A \leq_m B$ então $\bar{A} \leq_m \bar{B}$.
- ▶ Para provar então que B não é Turing-reconhecível, basta mostrar que $A_{\text{MT}} \leq_m \bar{B}$.

Redutibilidade por mapeamento

- ▶ É possível também utilizar reduções via mapeamento para demonstrar que linguagens não são Turing-reconhecíveis e nem co-Turing-reconhecíveis.

Redutibilidade por mapeamento

Teorema

EQ_{MT} *não é Turing-reconhecível e nem co-Turing-reconhecível.*

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- ▶ Primeiramente vamos mostrar que EQ_{MT} não é Turing-reconhecível.
- ▶ Basta mostrar que A_{MT} é redutível a $\overline{EQ_{MT}}$.

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 11: Construindo a função de redução A_{MT} para $\overline{EQ_{MT}}$

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: $\langle M_1, M_2 \rangle$

1 Construa duas máquinas M_1 e M_2 da seguinte maneira:

2 M_1 sobre qualquer entrada diz rejeita

3 M_2 sobre qualquer entrada roda M sobre w e se M aceita, M_2 aceita

4 Deixe $\langle M_1, M_2 \rangle$ na fita.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- ▶ M_1 não aceita nada.
- ▶ Se M aceita w , M_2 aceita qualquer coisa, e portanto as duas máquinas não são equivalentes.
- ▶ Se M não aceita w , M_2 não aceita nada, e portanto são equivalentes.
- ▶ Assim f é uma redução de A_{MT} para $\overline{EQ_{MT}}$.
- ▶ Portanto EQ_{MT} não é Turing-reconhecível.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- ▶ Vamos mostrar agora que $\overline{EQ_{MT}}$ não é Turing-reconhecível, isto é, que EQ_{MT} não é co-Turing-reconhecível.
- ▶ Precisamos fornecer uma redução de A_{MT} para EQ_{MT} .

Redutibilidade por mapeamento

Algorithm 12: Construindo a função de redução A_{MT} para EQ_{MT}

Input: $\langle M, w \rangle$

Output: $\langle M_1, M_2 \rangle$

1 Construa duas máquinas M_1 e M_2 da seguinte maneira:

2 M_1 sobre qualquer entrada diz aceita

3 M_2 sobre qualquer entrada roda M sobre w e se M aceita, M_2 aceita

4 Deixe $\langle M_1, M_2 \rangle$ na fita.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração

- ▶ É a mesma construção da função anterior, mas agora M_1 aceita tudo em vez de rejeitar.
- ▶ Assim, M aceita w , se e somente se, M_1 e M_2 são equivalentes.
- ▶ Logo $A_{MT} \leq_m EQ_{MT}$ e portanto, EQ_{MT} não é co-Turing-reconhecível.

Redutibilidade por mapeamento

Demonstração.

- ▶ Como EQ_{MT} não é Turing-reconhecível e nem co-Turing-reconhecível, finalizamos a prova.

