Conceitos Preliminares

Teoria da Computação – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

Sumário

Noções Matemáticas

- Antes de iniciar o nosso estudo em TC, precisamos revisar e abordar conceitos matemáticos básicos.
- Notações e ferramentas que vamos usar.

Sumário

Conjuntos

Conjuntos

- Um conjunto é um grupo de objetos representado como uma unidade.
- Conjuntos podem ter objetos de tipos variados: números, símbolos, pessoas, ...
- Objetos que estão em um conjunto são denominados de elementos.
- Uma forma de descrever quais elementos estão em um conjunto é utilizar a notação de chaves:

$$\{7, 21, 57\}$$

Conjuntos

Notação (Pertinência)

- Os símbolos $\in$ e $\notin$ são utilizados para denotar pertinência e não-pertinência de elementos em conjuntos.
- Ex: $7 \in \{7, 21, 57\}$.
- Ex: $8 \notin \{7, 21, 57\}$

Conjuntos

Notação ($\subseteq$)

- Dizemos que um conjunto A está contido em um conjunto B, se todo o elemento de A está em B.
- Representamos por $A \subseteq B$.

Conjuntos

Notação (Igualdade)

- Dois conjuntos A e B são iguais se todo o elemento de A está em B e vice-versa.
- Em outras palavras, $A = B$, sse, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Conjuntos

Notação ($\subsetneq$)

- Dizemos que um conjunto A está propriamente contido em um conjunto B, se todo o elemento de A está em B, mas B não é igual a A.
- Representamos por $A \subsetneq B$.

Conjuntos

Notação ($\emptyset$)

- O conjunto vazio é aquele que não possui elementos.
- Representado por $\emptyset$.

Conjuntos

- A ordem na descrição não importa.
- Repetições também são ignoradas. Conjuntos são indistinguíveis considerando repetições.
- Ex: $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.
- Ex: $\{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
- **Multiconjuntos**: levam em consideração repetições.

Conjuntos

Definição (Cardinalidade)

- A cardinalidade corresponde ao número de elementos que um conjunto possui.
- Denotamos por $|A|$.
- Em especial $|\emptyset| = 0$.

Conjuntos

- Alguns conjuntos são finitos.
- Alguns conjuntos são infinitos.
- Ex: $|\{1, 2, 3, 4\}| = 4$.
- Ex: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ é infinito.
- Ex: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ é infinito.
- Ex: $\mathbb{R}$ é infinito.
- Curiosidade: $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Conjuntos

- Outra maneira de definir conjuntos, é colocando uma propriedade sobre os elementos.
- Conjunto dos pares: $P = \{x | x = 2y \text{ com } y \in \mathbb{Z}\}$
- Conjunto dos ímpares: $I = \{x | x = 2y + 1 \text{ com } y \in \mathbb{Z}\}$
- Conjunto dos primos: $\Pi = \{x | x \in \mathbb{N} \land x > 1 \land \neg \exists y (y < x \land x \mod y = 0)\}$

Conjuntos

Definição (União)

A união de dois conjuntos A e B corresponde a $C = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

A união de conjuntos é representada através do símbolo $\cup$

- Exemplo $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.
- Em especial $A \cup \emptyset = A$.

Conjuntos

Definição (Interseção)

A interseção de dois conjuntos A e B corresponde a $C = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$.

A interseção de conjuntos é representada através do símbolo $\cap$.

- Exemplo $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$.
- Em especial $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Conjuntos

Definição (Complemento)

O complemento de um conjunto A é outro conjunto cujos elementos em consideração são exatamente aqueles que não estão em A.

Denotamos o complemento de A por $\bar{A}$.

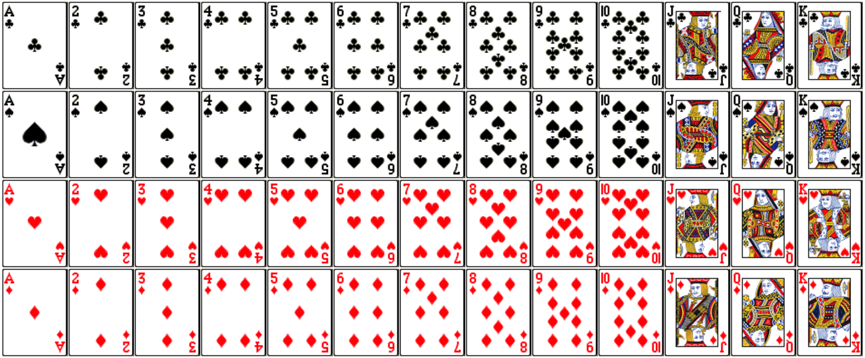
Conjuntos

Definição (Produto Cartesiano)

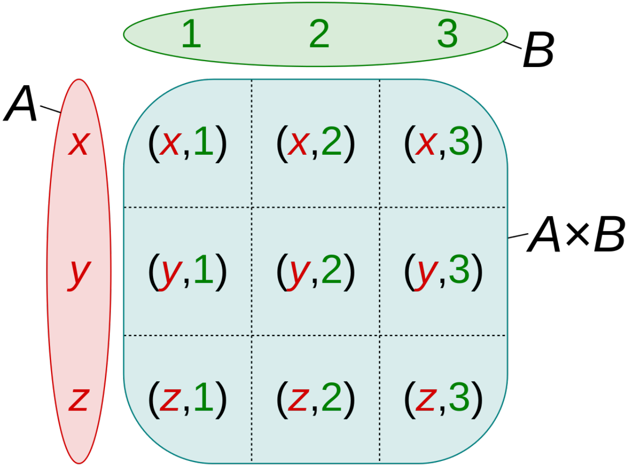
Se A e B são conjuntos, o produto cartesiano de A por B é dado por:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Conjuntos



Conjuntos



Conjuntos

Notação (Produto Cartesiano)

$$\underbrace{A \times A \times A \ldots A}_{k} = A^k$$

- Ex: $\mathbb{R}^2$, o plano cartesiano.
- Ex: $\mathbb{R}^3$, espaço tridimensional.
- Ex: $\mathbb{R}^n$.
- Ex: $\mathbb{N}^2 = \{(1,1),(1,2)\ldots(2,1),(2,2)\ldots\}$

Conjuntos

Definição (Partes de um Conjunto)

As partes de um cojunto A, denotada por $\mathcal{P}(A)$, corresponde ao conjunto dos subconjuntos de A.

Se $|A| = n$, então $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

- Ex: $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Sumário

Sequências e Tuplas

Definição (Sequências)

Sequências de objetos são listas destes objetos. Diferentemente dos conjuntos, a ordem aqui importa, bem como as repetições.

Sequências e Tuplas

- Ex: $F = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$.
- Ex: $\Pi' = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$.
- Ex: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \neq (1)$.

Sequências e Tuplas

Notação

Tuplas Uma sequência de k elementos é denominado uma k-tupla.

- Ex: $(7, 21, 57)$ é uma tripla.
- Ex: $(1, 4)$ é um par.
- Ex: $(1, 5, 3, 4, 7, 8, 1)$ é uma 7-tupla.

Sumário

Funções

Funções

Funções são objetos matemáticos que mapeia elementos de um conjunto em outro.

Se f mapeia elementos de D em CD, denotamos por:

$$f : D \to CD$$

D é chamado de domínio e CD é chamado de contradomínio.

Para ser uma função, cada elemento de D deve ter exatamente 1 mapeamento.

Funções

- Ex: $f(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $x \mapsto x^2$. Então $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(20) = 400$.
- Ex: $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ com $(x, y) \mapsto x$ mais y. Então $+(2, 2) = 4$, $+(1, 5) = 6$.

Funções

Definição

Funções Injetoras

- Se $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$ a função é dita injetora.
- Ou seja, elementos diferentes do domínio são mapeados em elementos diferentes no contradomínio.

Funções

Definição

Funções Sobrejetoras

- Seja $f : D \rightarrow CD$ e o conjunto iamgem $I = \{f(x), x \in D\}$.
- f é dita sobrejetora quando $|I| = |CD|$, ou seja, todos os elementos do contradomínio foram mapeados.

Funções

Definição

Funções Bijetoras São aquelas que são Injetoras e Sobrejetoras.

Mapeamento um para um.

Sumário

Relações

Definição (Relações)

Uma relação ou predicado é um subconjunto de algum conjunto com alguma propriedade específica.

Relações

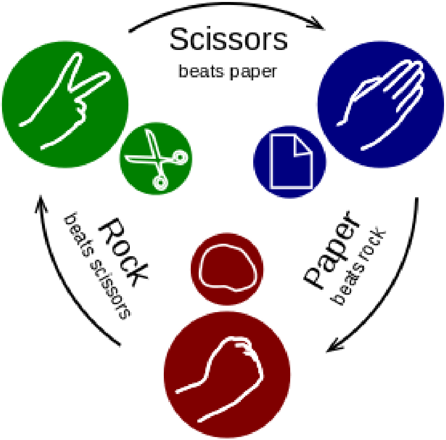
- Exemplos: $P \subseteq \mathbb{N}$ e $P := \{x | x$ é par$\}$.
- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $< := \{(a, b) | a < b\}$.

Relações

Notação

Relações Se R é uma relação e $x \in R$, dizemos que x vale, x é verdadeiro ou simplesmente x tem a propriedade R.

Relações



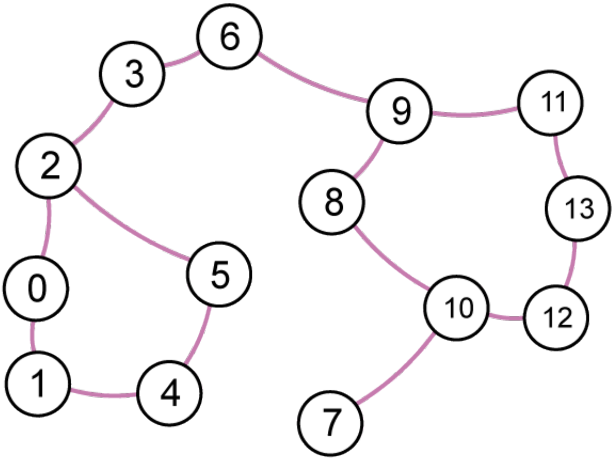
Sumário

Grafos

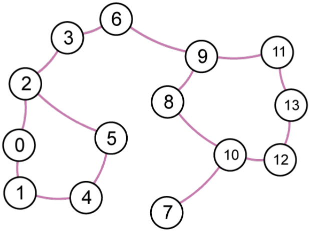
Definição (Grafos)

Um grafo não dirigido, ou grafo simples, é uma dupla $G = (V, E)$ sendo V o conjunto de vértices e $E \subseteq V \times V$ as arestas.

Grafos



Grafos



- Neste exemplo temos:

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, 13\}$$

e

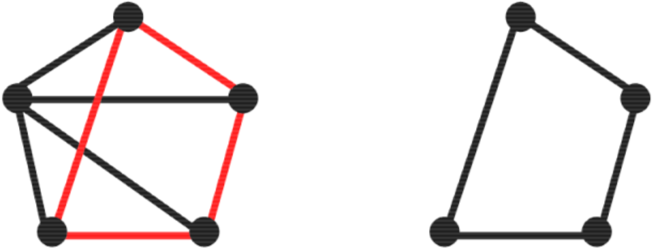
$$E = \left\{ \begin{array}{l} (0,1), (0,2), (1,4), (4,5), (5,2), (2,3), (3,6), (6,9), \\ (9,8), (9,11), (8,10), (10,12), (12,13), (13,11), (10,7) \end{array} \right\}$$

Grafos

Definição (Subgrafo)

$G' = (V', E')$ é um subgrafo de $G(V, E)$, quando $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

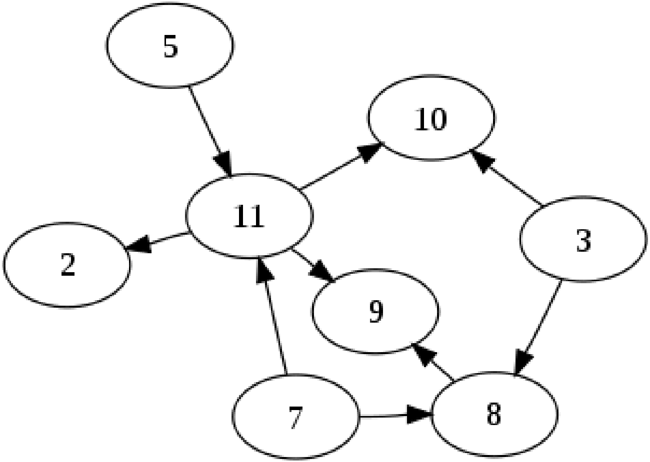
Grafos



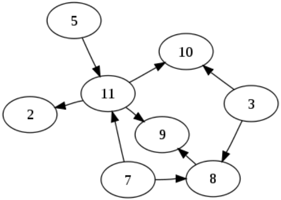
Grafos

- Grafos também podem ser direcionados.
- Neste caso, a orientação das arestas faz diferença.

Grafos



Grafos



- Neste exemplo temos:

$$V = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

e

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (5,11),(11,2),(11,10),(3,10) \\ (3,8),(8,9),(11,9),(7,11),(7,8) \end{array} \right\}$$

Grafos

- Modelam vários problemas práticos.
- Teoria dos grafos estuda estes objetos.

Sumário

Linguagens e Cadeias

Definição (Alfabeto)

Um alfabeto é qualquer conjunto não vazio e finito de símbolos.

- Ex: $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Ex: $\Sigma = \{a, \ldots, z, A, \ldots, Z\}$.
- Ex: $\Gamma = \{0, 1, x, y, z\}$.

Linguagens e Cadeias

Definição (Cadeias, Palavras ou Strings)

Cadeias, palavras ou *strings* são sequências finitas de símbolos de alfabetos.

- Supondo $\Sigma = \{0, 1\}$, então $w = 01101101$ é uma cadeia válida.
- Suponho $\Sigma = \{a, \ldots, z\}$, então $w = abracadabra$ é uma cadeia válida.

Linguagens e Cadeias

Notação (Tamanho de Cadeias)

Seja $w = w_1w_2w_3 \ldots w_n$ uma cadeia sobre o alfabeto Σ. Denotamos $|w| = n$ como o tamanho de n.

Em particular, a cadeia vazia, ϵ, tem tamanho $|\epsilon| = 0$.

Linguagens e Cadeias

Notação (Concatenação)

Suponha cadeias $x = x_1x_2 \ldots x_n$ e $y = y_1y_2 \ldots y_m$ sobre o alfabeto Σ. $xy = x_1x_2 \ldots x_ny_1y_2 \ldots y_m$ denota a concatenação de x com y.

Em especial $\underbrace{xxx \ldots x}_{k} = x^k$.

Linguagens e Cadeias

Notação (Inverso)

Seja $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ uma cadeia sobre o alfabeto Σ.
$w^R = w_n w_{n-1} \ldots w_1$ denota o inverso de w.

Linguagens e Cadeias

Definição (Ordem lexicográfica)

A ordem lexicográfica de cadeias da precedência para cadeias menores, e em caso de empate, segue-se a ordem do dicionário.

- Para $\Sigma = \{0, 1\}$, a ordem lexicográfica sobre todas as palavras sobre o alfabeto Σ é:

$$(\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots)$$

Linguagens e Cadeias

Definição (Linguagem)

Uma linguagem L é um conjunto de palavras.

- Ex: $L_1 = \{ww^R|$ w é uma cadeia sobre $\Sigma\}$
- Ex: $L_1 = \{w|w = w^R\}$

Linguagens e Cadeias

Notação (Σ^*)

Σ^* é a linguagem formada por todas as cadeias sobre o alfabeto Σ.

- Para $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\}$.
- Para $\Sigma = \{A, C, G, T\}$,
  $\Sigma^* = \{\epsilon, A, C, G, T, AA, AC, AG, AT, \ldots\}$.

Sumário

Lógica

- Por que a lógica é importante?

Lógica

- Utilizamos lógica no dia a dia, na vida profissional e na pessoal.
- Elaboramos conceitos.
- Fazemos observações.
- Formalizamos teorias.
- Utilizamos **raciocínio lógico** para derivar conclusões a partir de premissas.
- Utilizamos **demonstrações** ou **provas** para convencer os outros que estamos corretos.

Proposições

- Na matemática, uma **proposição** é uma sentença que pode ser **falsa** ou **verdadeira**, mas nunca as duas.
- Por exemplo:
  - "6 é par" é uma proposição verdadeira.
  - "4 é ímpar" é uma proposição falsa.

Sumário

Operadores lógicos

- Podemos combinar proposições para criar outras mais complexas através dos operadores lógicos.

Operadores lógicos

Negação

Sejam p uma proposição.

- Não p ($\neg p$) é verdadeiro quando p é falso.
- Não p ($\neg p$) é falso quando p é verdadeiro.

Operadores lógicos

Conjunção

Sejam, p e q proposições.

- p e q $(p \wedge q)$ é verdadeiro quando p **e** q são verdadeiros.
- Caso contrário, $p \wedge q$ é falso.

Operadores lógicos

Disjunção

Sejam p e q proposições.

- p ou q ($p \vee q$) é verdadeiro quando p **ou** q são verdadeiros.
- Caso contrário, $p \vee q$ é falso.

Operadores lógicos

Implicação

Sejam p e q proposições.

- Se p então q ($p \Rightarrow q$) é verdadeiro quando p é falso **ou** q é verdadeiro.
- Caso contrário, $p \Rightarrow q$ é falso.

Operadores lógicos

Implicação

Sejam p e q proposições.

- Se p então q ($p \Rightarrow q$) é verdadeiro quando p é falso **ou** q é verdadeiro.
- Caso contrário, $p \Rightarrow q$ é falso.
- Se p é falso, dizemos que $p \Rightarrow q$ é *vacuamente* verdadeiro.

Operadores lógicos

Bi-implicação

Sejam p e q proposições.

- p se, e somente se, q ($p \Leftrightarrow q$) é verdadeiro quando p e q são falsos ou p e q são verdadeiros.
- Caso contrário, $p \Leftrightarrow q$ é falso.
- Se $p \Leftrightarrow q$ é verdadeiro, dizemos que p e q são equivalentes.

Sumário

Quantificadores

- Considere a afirmação "x é par".
- Não podemos dizer se esta afirmação é verdadeira ou falsa, pois não sabemos quem é x.

Quantificadores

- Existem três maneiras básicas de conseguir obter um valor verdade para a afirmação.
  1. Dizer quem é x. $x = 6$ por exemplo tornaria a afirmação verdadeira.
  2. Para todo x inteiro, x é par. O que tornaria a afirmação incorreta, pois nem todo inteiro é par.
  3. Existe x inteiro, x é par. O que tornaria a afirmação correta, pois existe inteiros pares.

Quantificadores

- As frases “para todo” e “existe” são chamados de quantificadores.
- Podemos utilizar os símbolos $\forall$ e $\exists$ para representá-los de maneira mais compacta.

Quantificadores

- Talvez as coisas fiquem mais claras com uma definição matemática.

Quantificadores

Definição (Número par)

Um número x é dito par se e somente se existe um inteiro y tal que $x = 2y$.

Quantificadores

- Ou seja, estamos definido que um inteiro x é par, se e somente se existe algum y que multiplicado por 2 é igual a x.

Quantificadores

- Utilizando a mesma estratégia, podemos definir os números ímpares.

Quantificadores e Relações

Definição (Número ímpar)

Um número x é dito ímpar se e somente se existe um inteiro y tal que $x = 2y + 1$.

Quantificadores

- Os quantificadores podem ser aplicados à propriedades (relações).
- Seja $P \subseteq \mathbb{N}$ a relação dos inteiros pares e $I \subseteq \mathbb{N}$ a relação dos números ímpares.
  - Podemos dizer que $\exists x P(x)$ é verdadeiro?
  - Podemos dizer que $\exists x I(x)$ é verdadeiro?
  - Podemos dizer que $\forall x P(x)$ é verdadeiro?
  - Podemos dizer que $\forall x I(x)$ é verdadeiro?

Quantificadores e Relações

Considerando os inteiros:

- O que $\forall x \exists y (x = 2y)$ quer dizer?
- O que $\exists x \exists y (x = 2y)$ quer dizer?
- O que $\forall x (\exists y (x = 2y) \vee \exists y (x = 2y + 1))$ quer dizer?

Quantificadores e Relações

- A ordem dos quantificadores também é muito importante.

Quantificadores e Relações

Considerando $<$ como a relação de menor entre inteiros:

- $\forall x \exists y (x < y)$ é verdadeiro?
- $\exists x \forall y (x < y)$ é verdadeiro?

Sumário

Definições

Definição (Definições)

Definições descrevem os objetos e noções que utilizamos. Uma definição pode ser simples, como a de conjuntos que utilizamos, ou complexa, como a de segurança em sistemas criptográficos.

Ao definir devemos utilizar uma linguagem livre de ambiguidades, para que ser bem claro sobre o que estamos falando.

Afirmações

Definição (Afirmações)

Afirmações matemáticas expressam que determinado objeto possui determinada propriedade.

Independente de serem verdadeiras ou falsas, também devem ser precisas.

Prova

Definição (Prova)

Uma prova é uma sequência válida de passos dedutivos chegando a uma conclusão.

Sumário

Teoremas

Definição (Teoremas)

Teoremas são enunciados matemáticos verdadeiros e que podem ser provados.

Lemas

- Existem teoremas complexos de obter a prova.
- Para facilitar, podemos provar afirmações menores.
- Estas afirmações são chamadas de Lemas.
- Utilizamos Lemas para concluir os teoremas de maneira mais simples.

Corolário

- Corolários são afirmações verdadeiras que decorrem imediatamente de um teorema.

Sumário

Provas

- Uma prova ou demonstração matemática pode ser vista como um argumento para convencer outra pessoa que algo é verdadeiro.
- Uma boa prova deve ser a mais didática possível.
- Algumas estruturas são comuns dependendo da afirmação a qual se quer provar.

Estrutura de provas

Queremos provar que p é verdadeiro:

- Prove diretamente que p é verdadeiro.
- Assuma que p é falso e chegue em uma contradição.

Estrutura de provas

Queremos provar que $p \wedge q$ é verdadeiro:

- Prove diretamente que p vale e prove que q vale.

Estrutura de provas

Queremos provar que $p \vee q$ é verdadeiro:

- Assuma que p é falso e deduza que q obrigatoriamente tem que ser verdadeiro.
- Assuma q falso e deduza que p obrigatoriamente tem que ser verdadeiro.
- Prove que p é verdadeiro.
- Prove que q é verdadeiro.

Estrutura de provas

Queremos provar que $p \Rightarrow q$ é verdadeiro:

- Assuma que p vale e deduza que q também vale.
- Assuma q falso e deduza que p tem que ser falso também.

Estrutura de provas

Queremos provar que $p \Leftrightarrow q$ é verdadeiro:

- Prove $p \Rightarrow q$ e prove $q \Rightarrow p$.

Estrutura de provas

Queremos provar que $\exists x P(x)$ é verdadeiro:

- Basta encontrar um x que satisfaça a propriedade.

Estrutura de provas

Queremos provar que $\forall x P(x)$ é verdadeiro:

- Não assuma nada sobre x e prove que $P(x)$ vale.

Provas

- Por exemplo, vamos provar que, para todo inteiro x, se x é ímpar, então $x+1$ é par.

Provas

- Como queremos mostrar que o resultado vale para qualquer x, não podemos assumir absolutamente nada sobre ele.
- Como o teorema diz respeito a uma implicação (se, então), assumimos a primeira parte e tentamos provar a segunda.

Provas

Demonstração.

Assuma x ímpar.

Como x é ímpar, temos que existe um y tal que $x = 2y + 1$.

Adicionando 1 a ambos os lados, temos que $x + 1 = 2y + 2$.

Tome $w = y + 1$, substituindo temos: $x + 1 = 2w$.

Portanto $x + 1$ é par. □

Sumário

Prova por casos

Prova por casos

A prova por casos divide a prova em diversos casos, transformando-a em múltiplas provas mais simples.

Prova por casos

- Vamos pegar o seguinte teorema para ilustrar a técnica de prova por casos:

Teorema

Para qualquer inteiro x, o inteiro $x(x+1)$ é par.

- Temos dois casos: x é par ou x é ímpar.

Prova por casos

Demonstração.

Caso 1: x é par.

- Como x é par, temos que existe um y tal que $x = 2y$.
- Assim, temos que:

$$x(x+1) = 2y(2y+1)$$

- Tome $w = y(2y+1)$.
- Assim:

$$x(x+1) = 2y(2y+1) = 2w$$

- Logo $x(x+1)$ é par.

$\square$

Prova por casos

Demonstração.

Caso 2: x é ímpar.

- Como x é ímpar, temos que existe um y tal que $x = 2y + 1$.
- Assim, temos que:

$$x(x+1) = (2y+1)(2y+2) = (2y+1)(y+1)2$$

- Tome $w = (2y+1)(y+1)$.
- Assim:

$$x(x+1) = (2y+1)(2y+2) = (2y+1)(y+1)2 = 2w$$

- Logo $x(x+1)$ é par.

Prova por Construção

Muitos teoremas afirmam a existência de um tipo particular de objeto.

Provas por construção mostram que é possível construir um objeto do referido tipo.

Exemplo

Um grafo k-regular é aquele que todos os nós tem grau k.

Teorema

Para qualquer $n > 2$ par, existe um grafo 3-regular com n nós.

Demonstração.

$$E = \{(i, i+1) | 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{n-1, 0\} \cup \{(i, i+n/2) | 0 \leq i \leq n/2-1\}$$

□

Prova por Contradição

Prova por Contradição

Assume-se que um teorema é falso. Uma vez concluído o absurdo, podemos concluir que o teorema é de fato verdadeiro.

Exemplo

Teorema

$\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração.

Exemplo

Suponha $\sqrt{2}$ racional.

Logo $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, uma fração reduzida. Obviamente, n ou m é ímpar.

Elevando os dois lados ao quadrado temos:

$2 = \frac{n^2}{m^2}$, e portanto $n^2 = 2m^2$, então n^2 é par, e n também é.

Se n é par, temos $n = 2k$ para algum k.

Substituindo, temos $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Logo $4k^2 = 2m^2$ e portanto $m^2 = 2n^2$ o que torna m^2 par e consequentemente m par. Mas n e m não podem ser simultaneamente pares. Contradição.

$\sqrt{2}$ tem que ser irracional. $\square$

Prova por Indução

Prova por Indução

Prova-se o caso base. Assume que a propriedade vale para todo $k < n$. Tentamos provar que vale para n utilizando as hipóteses de indução e o caso base.

Prova por Indução

Teorema

O n ésimo termo de uma P.A de razão r é $a_0 + rn$.

Demonstração.

Para $n = 0$, $a_0 = a_0$. Suponha que a propriedade vale para todo $k < n$.

Sabemos que $a_n = a_{n-1} + r$, pela definição da P.A. Aplicando a hipótese de indução sobre a_{n-1}, temos:

$$a_n = a_0 + r(n-1) + r = a_0 + rn$$

$\square$