



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – Câmpus Taguatinga  
Ciência da Computação – Teoria da Computação  
Lista de Exercícios – Conceitos Básicos  
Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Aluno: \_\_\_\_\_

Matrícula: \_\_\_\_\_

### Exercício 1

Examine os seguintes conjuntos e descreva em português a descrição de cada um:

- (a)  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$
- (b)  $\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$
- (c)  $\{n | n = 2m \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}$
- (d)  $\{n | n = 2m \text{ para algum } m \in \mathbb{N} \wedge n = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$
- (e)  $\{w | w \text{ é uma string de 0s e 1s e } w = w^R\}$
- (f)  $\{n | n \in \mathbb{Z} \wedge n = n + 1\}$

### Exercício 2

Dada as seguintes descrições informais dos conjuntos, escreva eles usando uma notação formal:

- (a) O conjunto contendo os números 1, 10 e 100.
- (b) O conjunto contendo todos os inteiros maiores que 5.
- (c) O conjunto com a palavra *aba*.
- (d) O conjunto contendo a palavra vazia
- (e) O conjunto não contendo coisa alguma.

### Exercício 3

Seja  $A = \{x, y, z\}$  e  $B = \{x, y\}$ .

- (a)  $A \subseteq B$ ?
- (b)  $B \subseteq A$  ?
- (c) Quem é  $A \cup B$  ?
- (d) Quem é  $A \cap B$  ?
- (e) Quem é  $A \times B$  ?
- (f) Quem é  $\mathcal{P}(B)$ ?

---

**Exercício 4**

Se  $|A| = a$  e  $|B| = b$  quantos elementos tem  $A \times B$ ?

**Exercício 5**

Se  $|C| = c$ , quantos elementos possui  $\mathcal{P}(C)$ ?

**Exercício 6**

Seja  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ . Tome  $f = X \rightarrow Y$  e  $g : X \times Y \rightarrow Y$  descritas como:

$n$	$f(n)$	$g$	6	7	8	9	10
1	6	1	10	10	10	10	10
2	7	2	7	10	10	10	10
3	6	3	7	10	10	10	10
4	7	4	9	10	10	10	10
5	6	5	6	10	10	10	10

- (a) Quem é  $f(2)$ ?
- (b) Qual o domínio e contradomínio de  $f$ .
- (c) Quem é  $g(2, 10)$ ?
- (d) Quem é o domínio e contradomínio de  $g$ ?
- (e) Qual é o valor de  $g(4, f(4))$ ?

**Exercício 7**

Desenhe o grafo  $G = (V, E)$  com  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 4), (1, 4)\}$ .

Além disto, responda:

- (a) Qual o grau do nó 1?
- (b) Qual o grau do nó 3?
- (c) Indique um caminho do nó 3 ao nó 4.

**Exercício 8**

Prove que:

- (a) Para qualquer inteiro  $x$ , se  $x$  é par, então para qualquer inteiro  $y$ ,  $xy$  é par também.
- (b) Para qualquer inteiro  $x$  e para qualquer inteiro  $y$ , se  $x$  é ímpar e  $y$  é ímpar, então  $x + y$  é par.
- (c) Para qualquer inteiro  $x$ , se  $x$  é ímpar, então  $x^3$  é ímpar.

**Exercício 9**

Prove que, para qualquer inteiro  $x$ , se  $x$  é ímpar, então existe um inteiro  $y$  tal que  $x^2 = 8y + 1$ .

**Exercício 10**

Prove que se  $x$  é racional e  $y$  é irracional então  $x + y$  é irracional.

---

## Exercício 11

Dado um número real  $x \neq 1$ . Mostre que para qualquer inteiro positivo  $n$ , temos que:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

## Exercício 12

Prove que todo grafo  $G(V, E)$  com  $|V| \geq 2$  tem pelo menos dois nós com graus iguais.

## Exercício 13

Suponha que você tenha  $n$  lâmpadas em sequência, cada qual numerada de 0 a  $n - 1$ , de modo que a lâmpada 0 seja a única acesa.

O Sr. Roberval, responsável pela instalação das lâmpadas, fez um serviço mal feito através de várias gambiarra. Da forma como está a rede elétrica, para ligar ou desligar a lâmpada  $i$  é necessário que a lâmpada  $i + 1$  esteja ligada e que as lâmpadas  $i + 2, \dots, n - 1$  estejam desligadas. A lâmpada  $n - 1$  pode ser ligada ou desligada a qualquer momento, independentemente do estado das demais.

Prove que o número mínimo de operações de ligar/desligar para apagar todas as lâmpadas é  $2^n - 1$ .

**Solution:** A prova é por indução.

**Caso base:** Quando temos uma lâmpada e ela está ligada, é necessário

$$1 = 2^n - 1 = 2^1 - 1$$

movimentos.

Então o caso base vale.

**Hipótese de indução:** Suponha que para qualquer número de lâmpadas  $k < n$ , conseguimos apagar a  $k$ -ésima lâmpada com as demais desligadas utilizando  $2^k - 1$  movimentos.

**Passo de indução:** Resta provar o mesmo resultado para  $n$ . Neste cenário, apenas a lâmpada 0 está ligada enquanto as demais estão desligadas. Para desligar todas, precisamos:

1. Ligar apenas a lâmpada 1 com as demais desligadas, o que leva  $2^{n-1} - 1$  passos pela hipótese de indução. Uma vez que podemos utilizar o mesmo procedimento para apagar a lâmpada 1 quando somente ela está ligada, mas para acendê-la.
2. Desligar a lâmpada 0, levando 1 passo.
3. Desligar a lâmpada 1 e manter as posteriores desligadas, o que leva  $2^{n-1} - 1$  passos pela hipótese de indução.

Somando 1,2 e 3, temos que o número de movimentos necessários para desligar a lâmpada 0 no cenário original é  $2^n - 1$ .