

Máquinas de Turing

Teoria da Computação – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes



**INSTITUTO
FEDERAL**

Brasília

Campus
Taguatinga

Sumário

Introdução

Definição

Linguagens Decidíveis e Reconhecíveis

Máquinas de Turing

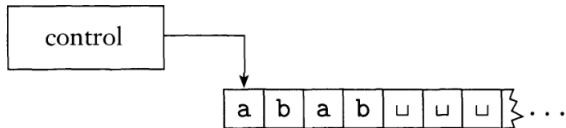
Máquinas de Turing

- ▶ Modelo Proposto por Alan Turing em 1936.
- ▶ Máquina de estados + memória infinita.
- ▶ Considera-se que faz tudo o que é possível fazer com um computador.

Máquinas de Turing

- ▶ Neste modelo possuímos uma fita infinita e um controle finito.
- ▶ A máquina possui uma cabeça de leitura e escrita que pode ler/escrever símbolos na fita e movimentar-se sobre ela.
- ▶ Inicialmente, a fita contém apenas a cadeia de entrada, e está em branco.

Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

- ▶ Se a máquina precisa armazenar alguma informação, ela pode escrever algo na fita.
- ▶ Para acessar uma informação, basta posicionar a cabeça na posição correta e ler aquele símbolo.

Máquinas de Turing

- ▶ A computação é feita ao alterar os estados do controle com base na informação contida na fita.
- ▶ A computação para quando chega em um estado de aceitação ou de rejeição. Neste caso a saída da máquina para uma entrada pode ser:
 - ▶ Aceita.
 - ▶ Rejeita.

Máquinas de Turing

Recapitulando

- ▶ Uma máquina de turing pode tanto escrever sobre a fita quanto ler.
- ▶ A cabeça de leitura/escrita pode mover tanto para a esquerda quanto para a direita um passo de cada vez.
- ▶ A fita é infinita.
- ▶ Os estados especiais para aceitar e rejeitar tem efeito imediato.

Máquinas de Turing

- ▶ Tome uma máquina de Turing M_1 para testar a pertinência na linguagem:

$$B = \{w\#w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

- ▶ A linguagem das palavras que são seguidas por elas próprias e separadas por cerquilha.
- ▶ Como M_1 funcionaria de acordo com a nossa descrição informal?

Máquinas de Turing

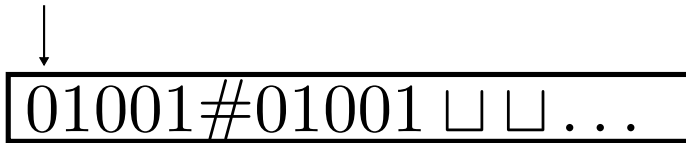
- ▶ Não podemos acessar cada símbolo através de acesso aleatório.
- ▶ Mas podemos mover sobre a fita e ler/escrever nela (acesso sequencial).

Máquinas de Turing

Estratégia Imediata

- ▶ Zigzaguear sobre os dois lados da cerquilha e comparar os caracteres.

Máquinas de Turing



Máquinas de Turing

Estratégia Imediata

- ▶ Faça uma varredura na entrada para assegurar que ela contém uma única ocorrência do símbolo $\#$. Se não, **rejeite**.
- ▶ Faça um zigue-zague na fita para casar os símbolos nos dois lados da separação pelo $\#$. Se os símbolos casam, marque eles com um 'x', caso contrário, **rejeite**.
- ▶ Quando todos os símbolos da esquerda forem marcados com um 'x', verifique se existe algum símbolo diferente de 'x' e \square à direita. Se resta algum, **rejeite**, caso contrário, aceite.

Máquinas de Turing

- Qual seria a estratégia de uma Máquina de Turing M_2 para testar a pertinência na Linguagem

$$B = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

Sumário

Introdução

Definição

Linguagens Decidíveis e Reconhecíveis

Sumário

Definição

Definição Formal

Representação Gráfica

Configuração

Máquinas de Turing

- ▶ Agora que ganhamos uma noção sobre máquinas de Turing, vamos defini-las formalmente.

Máquinas de Turing

- ▶ O coração de uma máquina de turing é uma função de transição δ .
- ▶ Ela que especifica como a máquina vai de um passo a próximo.

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

- ▶ Dado um estado e um símbolo na posição apontada pela cabeça, δ mapeia em outro estado, escreve um símbolo na fita de acordo com a posição da cabeça e move para esquerda ou para direita.
- ▶ Ex: $\delta(q, a) = (r, b, L)$.

Máquinas de Turing

- ▶ Ex: $\delta(q, a) = (r, b, L)$.
- ▶ A máquina escreve o símbolo b no lugar de a , muda do estado q para o estado r e move a cabeça uma posição para a esquerda.

Máquinas de Turing

Definição (Máquinas de Turing)

Uma máquina de turing é uma 7-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$, em que Q , Σ e Γ são conjuntos finitos.

- ▶ Q : o conjunto finito de estados.
- ▶ Σ : o alfabeto finito de entrada, que não contém o símbolo \sqcup .
- ▶ Γ o alfabeto finito da fita, onde $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- ▶ $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
- ▶ $q_0 \in Q$ é o estado inicial.
- ▶ $q_{aceita} \in Q$ é o estado de aceitação, $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$.
- ▶ $q_{rejeita} \in Q$ é o estado de rejeição, $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$.

Máquinas de Turing

- ▶ Uma vez definida a sintaxe sobre máquinas de Turing, podemos discutir a semântica de estes símbolos.

Máquinas de Turing

Uma máquina de Turing M computa da seguinte forma:

- ▶ Inicialmente ela recebe a sua entrada $w = w_1w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$.
- ▶ Esta entrada é colocada mais à esquerda na fita.
- ▶ O restante da fita possui símbolos \sqcup (branco).
- ▶ Ou seja, a fita só está preenchida com a entrada, e ela está mais a esquerda possível.
- ▶ Como $\sqcup \notin \Sigma$ o símbolo em branco marca o final da entrada.

Máquinas de Turing

- ▶ Uma vez que M começa, a computação prossegue de acordo com δ .
- ▶ Se M em algum momento tenta mover a cabeça para a esquerda quando esta está sob a posição mais à esquerda da fita, a cabeça permanece naquele lugar.
- ▶ A computação continua até que ela entre nos estados de aceitação ou rejeição, nos quais ela para.
- ▶ Se ela nunca atinge estes estados, a computação persiste indefinidamente }:-)

Máquinas de Turing

- ▶ À medida que uma máquina de Turing computa, ocorrem mudanças no estado atual, no conteúdo da fita e na localização da cabeça.
 - ▶ Tudo definido pela função δ .

Sumário

Definição

Definição Formal

Representação Gráfica

Configuração

Máquinas de Turing: Representação Gráfica

- ▶ Agora que definimos uma máquina de Turing, vamos construir uma que **aceite** as palavras que estão em

$$B = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

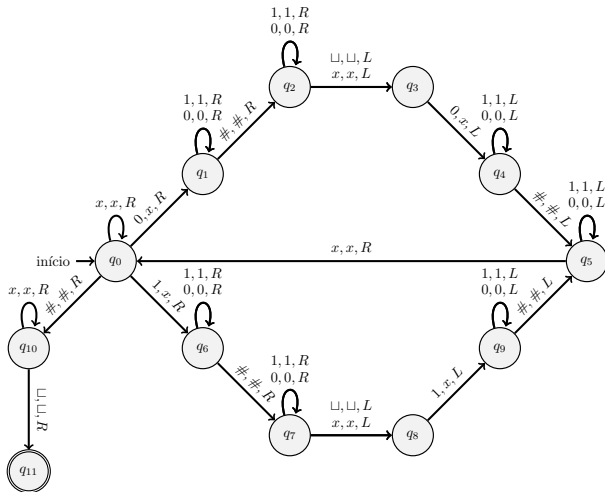
e **rejeite** as que não estão.

- ▶ Utilizaremos uma representação gráfica da nossa definição formal.

Representação Gráfica

- ▶ Os círculos representarão os estados, sendo o estado inicial, e de aceitação explicitamente indicados. O estado inicial possui uma seta com o rótulo *início*, enquanto o estado de aceitação é formado por dois círculos concêntricos.
- ▶ Cada mapeamento da função de transição é representado por uma seta que liga um estado a outro. Esta seta possui um rótulo que indica que, ao ler um símbolo da fita, escreve-se outro no lugar, movimenta-se o cabeçote para a esquerda ou para a direita e, finalmente, vamos para outro estado.
- ▶ Para simplificar, podemos assumir que as transições que não constarem no gráfico, estão apontando para o estado de rejeição (implícito).

Representação Gráfica



Sumário

Definição

Definição Formal

Representação Gráfica

Configuração

Máquinas de Turing: Configuração

Definição

Configuração Uma configuração é uma combinação de três informações:

- ▶ *O estado.*
- ▶ *O conteúdo da fita.*
- ▶ *A posição da cabeça.*

Denotamos uma configuração por uqv , em que q é o estado atual, uv é o conteúdo da fita, e a cabeça está apontando para o primeiro símbolo de v .

Configuração

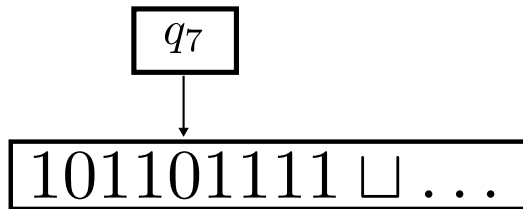


Figura: Configuração $1011q_701111$.

Configuração

- ▶ Dizemos que uma configuração C_1 produz uma C_2 se a máquina pode legalmente sair de C_1 e ir para C_2 .
- ▶ Suponha $a, b, c \in \Sigma$ e $u, v \in \Sigma^*$.
- ▶ Formalmente: $u a q_i b v$ produz $u q_j a c v$, se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$.
- ▶ Simetricamente: $u a q_i b v$ produz $u a c q_j v$, se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$.
- ▶ Exceção: $q_i b v$ produz $q_j c v$ se a transição for para a esquerda.

Configuração

- ▶ A configuração inicial de M sobre a entrada é a configuração q_0w .
- ▶ Em uma configuração de aceitação, o estado da configuração é q_{aceita} .
- ▶ Em uma configuração de rejeição, o estado da configuração é $q_{rejeita}$.

Configuração

Definição (Aceitação)

Uma máquina de Turing M aceita a entrada w se uma sequência de configurações C_1, C_2, \dots, C_k existe onde:

- 1. C_1 é a configuração inicial de M sobre w .*
- 2. Cada C_i produz C_{i+1} .*
- 3. C_k é uma configuração de aceitação.*

Configuração

Notação (Aceitação)

A coleção de cadeias que M aceita é a linguagem de M , denotada por $L(M)$.

Configuração

Definição (Rejeição)

Uma máquina de Turing M aceita a entrada w se uma sequência de configurações C_1, C_2, \dots, C_k existe onde:

1. C_1 é a configuração inicial de M sobre w .
2. Cada C_i produz C_{i+1} .
3. C_k é uma configuração de rejeição.

Sumário

Introdução

Definição

Linguagens Decidíveis e Reconhecíveis

Linguagens Turing-reconhecíveis

Definição (Linguagens Turing-Reconhecíveis)

*Uma linguagem L é chamada de Turing-reconhecível se existe alguma máquina de Turing que sempre chega a um estado de **aceitação** para toda entrada $w \in L$:*

Se $w \notin L$, então M pode:

- ▶ *Parar no estado de rejeição.*
- ▶ *Entrar em loop.*

Linguagens Turing-decidíveis

Definição (Linguagens Turing-decidíveis)

Uma linguagem L é chamada de Turing-decidível se existe alguma máquina de Turing que sempre chega a um estado de aceitação ou rejeição para toda entrada w :

- ▶ **Aceita** se $w \in L$.
- ▶ **Rejeita** se $w \notin L$.

Propriedades de linguagens

Observação

Reconhecibilidade e decidibilidade são propriedades de **linguagens**, não de máquinas de Turing.

É incorreto dizer que uma máquina é Turing-decidível ou Turing-reconhecível.

Linguagens Turing-Decidíveis e Reconhecíveis

- ▶ Obviamente toda linguagem Turing-Decidível é Turing-Reconhecível, mas existem algumas linguagens que são Turing-Reconhecíveis, mas não Turing-Decidíveis.
- ▶ Qual a vantagem de Linguagens Turing-decidíveis?

Linguagens Turing-Decidíveis e Reconhecíveis

- ▶ Obviamente toda linguagem Turing-Decidível é Turing-Reconhecível, mas existem algumas linguagens que são Turing-Reconhecíveis, mas não Turing-Decidíveis.
- ▶ Qual a vantagem de Linguagens Turing-decidíveis?
- ▶ Se uma Linguagem é Turing-reconhecível, mas não Turing-decidível, como podemos verificar se a máquina que está demorando para dar o resultado ou se ela entrou em loop?

Linguagens Turing-Decidíveis e Reconhecíveis

- ▶ Por enquanto, vamos nos focar em Linguagens Turing-decidíveis.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w | w \in \{0, 1\}^*\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \wedge w \text{ é um número ímpar}\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \wedge w = w^R\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w|x \in \{0,1\}^* \wedge w = x\#x\}$$

é Turing-Decidível.

Linguagens Turing-Decidíveis

Exemplo

Verifique que a linguagem

$$L = \{w | w = 0^{2^n}\}$$

é Turing-Decidível.