

# Variantes de Máquinas de Turing

Teoria da Computação – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Brasília

---

Campus  
Taguatinga

# Sumário

Introdução

Máquinas Multi-fitas

Máquinas Não-determinísticas

Máquinas Enumeradoras

Equivalência

# Sumário

Introdução

Máquinas Multi-fitas

Máquinas Não-determinísticas

Máquinas Enumeradoras

Equivalência

# Variantes

- ▶ Existem definições alternativas de Máquinas de Turing.
- ▶ Algumas possuem mais de uma fita.
- ▶ Outras não são determinísticas.
- ▶ Elas são chamadas de variantes do nosso modelo inicial da Máquina de Turing.

# Variantes

- ▶ O interessante é que, apesar de diferentes elas tem o mesmo **poder** computacional.
- ▶ Todas as linguagens reconhecíveis por uma variante, são reconhecidas por outra.

# Variantes

- ▶ Chamamos esta invariância de **robustez**.
- ▶ Vamos mudar a nossa definição de máquina de Turing inicial para ilustrar isto.

# Variantes

- ▶ Em nossa definição da máquina de Turing, a cabeça de leitura movimentava-se para a esquerda ou para a direita.
- ▶ Ou seja:

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

## Variantes

- ▶ Podemos alterá-la levemente de modo a permitir a operação de continuar na mesma célula.
- ▶ Ou seja, a cabeça de leitura fica no mesmo lugar.
- ▶ A função de transição então seria alterada para:

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\} \quad (1)$$

- ▶  $S$  especifica que a cabeça não muda de lugar.



# Variantes

- ▶ Esta variante possui mais poder computacional?
- ▶ Ela consegue resolver mais problemas que a versão original?
- ▶ Em outras palavras, esta variante reconhece mais linguagens?

# Variantes

- ▶ Esta variante possui mais poder computacional?
- ▶ Ela consegue resolver mais problemas que a versão original?
- ▶ Em outras palavras, esta variante reconhece mais linguagens?
- ▶ Na verdade **não**.

# Variantes

- ▶ Podemos converter qualquer  $MT'$  com a característica de ficar imóvel sobre a fita pela nossa.
- ▶ Como?
- ▶ Convertendo qualquer transição que não mova a cabeça de leitura por uma que mova para a esquerda e outra para a direita.

# Variantes

## Exercício

Mostre que qualquer  $MT'$  pode ser convertida para uma  $MT$  com a nossa definição original.

# Variantes

- ▶ Mostraremos agora alguns modelos que, apesar de diferentes, possuem o mesmo poder computacional do que uma MT ordinária.
- ▶ Para mostrar a equivalência, só precisamos mostrar que um modelo consegue simular o outro, e vice-versa.
- ▶ Quando falamos em **poder**, estamos falando em termos de computabilidade, e não em “velocidade”.
- ▶ Ou seja, apresentaremos modelos que podem até reconhecer ou decidir linguagens mais rápido do que nossa MT ou original, mas as linguagens reconhecidas/decididas são as mesmas.

# Sumário

Introdução

**Máquinas Multi-fitas**

Máquinas Não-determinísticas

Máquinas Enumeradoras

Equivalência

# Máquinas Multi-fitas

- ▶ Uma máquina de Turing multi-fita é como uma máquina de turing com várias fitas.
- ▶ Cada fita tem a sua própria cabeça de leitura e escrita.
- ▶ Inicialmente, a entrada aparece na fita 1.
- ▶ As outras fitas estão em branco.

# Máquinas Multi-Fitas

- ▶ Supondo que este modelo possui  $k$  fitas a função de transição deve ser modificada de modo a possibilitar:
  - ▶ Ler.
  - ▶ Escrever.
  - ▶ Mover.
- ▶ Estas operações podem ser suportadas simultaneamente em fitas separadas.
- ▶ Podemos operar em algumas fitas e deixar outras de fora.



# Máquinas Multi-Fitas

► Formalmente, temos:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$

# Máquinas Multi-Fitas

- ▶ A computação é dada por:

$$\delta(q_i, a_1, \dots, a_k) = (q_j, b_1, \dots, b_k, L, R, \dots, L)$$

- ▶ Ou seja, se a máquina encontra-se no estado  $q_i$  e as cabeças de 1 a  $k$  estão lendo os símbolos  $a_1, \dots, a_k$ , a máquina vai ao estado  $q_j$ , escreve os símbolos  $b_1, \dots, b_k$  em suas respectivas fitas e direciona cada cabeça para esquerda, direita ou parada.

# Máquinas Multi-Fitas

- ▶ Máquinas multi-fitas aparentam ser mais poderosas do que MT ordinárias.
- ▶ Mas na verdade são equivalentes em poder.
- ▶ Reconhecem absolutamente as mesmas linguagens.

# Máquinas Multi-Fitas

## Teorema (Equivalência entre $MT^k$ e $MT$ )

*Toda máquina de Turing multi-fita possui uma Máquina de Turing equivalente.*

# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Ideia da Prova

A ideia da prova é mostrar que podemos converter uma máquina multi-fita em uma máquina de Turing usual. Para isso procuraremos simular a máquina multi-fita  $M$  através da máquina comum  $S$ .

# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Prova

Suponha  $M$  uma máquina multi-fita com  $k$  fitas.

Uma máquina de Turing  $S$  pode simular  $M$  ao armazenar a informação de todas as fitas desta máquina em sua única fita.

Ela utiliza um novo símbolo  $\#$  como delimitador do conteúdo de diferentes fitas.

Além disso ela marca as posições das cabeças virtuais ao substituir um símbolo  $c$ , em que a cabeça está posicionada sobre, por um símbolo novo  $\hat{c}$

# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Prova

Suponha  $M$  uma máquina multi-fita com  $k$  fitas.

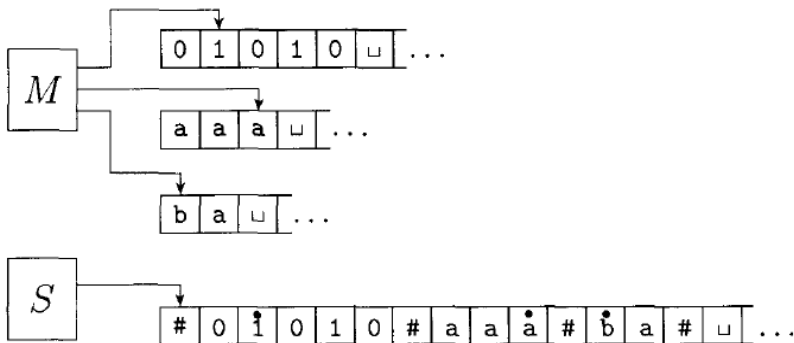
Uma máquina de Turing  $S$  pode simular  $M$  ao armazenar a informação de todas as fitas desta máquina em sua única fita.

Ela utiliza um novo símbolo  $\#$  como delimitador do conteúdo de diferentes fitas.

Além disso ela marca as posições das cabeças virtuais ao substituir um símbolo  $c$ , em que a cabeça está posicionada sobre, por um símbolo novo  $\hat{c}$

# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Prova





# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Prova

Seja a máquina  $S$  sobre a entrada  $w = w_1 \dots w_n$ :

- ▶ Primeiro ela coloca  $w$  na fita na codificação proposta, isto é:

$$\#w_1w_2\dots w_n\#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\#\dots\#$$

- ▶ Primeiramente a máquina verifica cada cabeça virtual para definir qual a transição a ser aplicada.
- ▶ Para simular um movimento,  $S$ , para cada cabeça virtual, basta movimentar a cabeça da leitura para a direita e depois para a esquerda sem alterar o conteúdo da fita.

# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Prova

Seja a máquina  $S$  sobre a entrada  $w = w_1 \dots w_n$ :

- ▶ Se em algum momento, alguma cabeça virtual fica sobre o  $i$ -ésimo  $\#$ , significa que a cabeça da virtual fita está sobre uma posição  $\sqcup$  da fita  $i$  de  $M$ .
- ▶ Então,  $S$  move todo o conteúdo a partir do  $i$ -ésimo  $\#$  para a direita até o último  $\#$  e escreve  $\sqcup$  no lugar original do  $i$ -ésimo  $\#$ .

# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Corolário

*Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se alguma máquina de Turing multi-fita a reconhece.*

# Equivalência entre $MT^k$ e $MT$

## Prova

$\Rightarrow$ ) Se uma linguagem é reconhecível em uma Máquina de Turing, ela é reconhecível em uma Máquina de Turing multi-fita usando uma única fita.

$\Leftarrow$ ) Uma linguagem reconhecível em uma máquina de Turing multi-fita também é Turing-reconhecível, uma vez que uma máquina de Turing consegue simulá-la.

# Sumário

Introdução

Máquinas Multi-fitas

**Máquinas Não-determinísticas**

Máquinas Enumeradoras

Equivalência

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

- ▶ Em uma máquina de Turing não-determinística, uma computação pode proceder de várias maneiras.
- ▶ Computação não determinística:

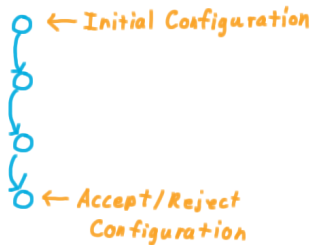
$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

- ▶ Dado um estado e um símbolo de lido, podemos ir para vários outros estados, escrever outros símbolos e mover para diferentes direções.

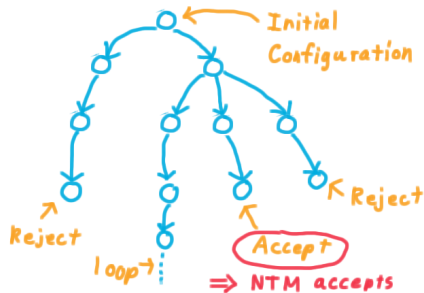
# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Non deterministic TMs

### Deterministic TM Computation



### Non deterministic TM Computation



# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Teorema

*Toda máquina de Turing não-determinística possui uma equivalente determinística.*



# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Semântica

- ▶ Uma  $MT_{nd}$  aceita uma palavra quando, ao aplicar a função de transição não determinística, alcança-se o estado de aceitação em pelo menos um ramo de computação.
- ▶ Uma  $MT_{nd}$  rejeita uma palavra quando, ao aplicar a função de transição não determinística, alcança-se o estado de rejeição em todos os ramos de computação.
- ▶ Se a máquina não determinística não alcança o estado de aceitação em nenhum ramo e existe algum ramo com infinitas configurações, consideramos que a máquina entra em *loop*.

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Ideia da Prova

- ▶ A ideia da prova é mostrar que é possível simular qualquer  $MT_{nd} N$  a partir de uma  $MT D$ .
- ▶ O objetivo é fazer com que  $D$  tente todas as opções não determinísticas serialmente.

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

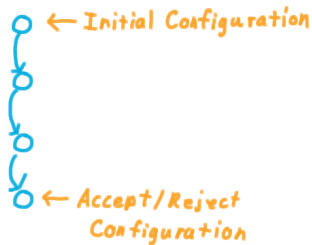
## Ideia da Prova

- ▶ Se encaramos a computação de  $N$  sobre uma entrada  $w$  como uma árvore, cada subárvore representa um ramo não-determinístico.
- ▶ Cada nó é uma configuração de  $N$ .
- ▶ A raiz é a configuração de início.

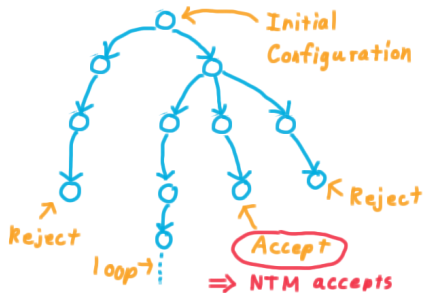
# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Non deterministic TMs

### Deterministic TM Computation



### Non deterministic TM Computation



# Máquinas de Turing Não-determinísticas

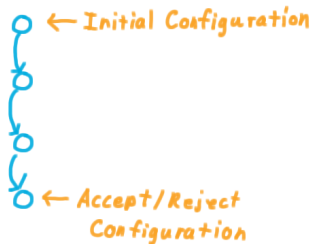
## Ideia da Prova

- ▶  $D$  deve fazer um percurso nesta árvore em busca de um estado de aceitação.
- ▶ A busca deve ser feita de maneira cuidadosa no entanto.
- ▶ Uma busca em profundidade funcionaria?
- ▶ A busca em profundidade vai até o final de cada ramo para então explorar o próximo.

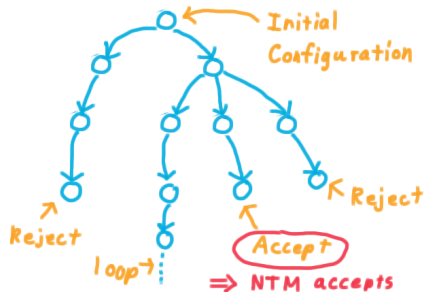
# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Non deterministic TMs

### Deterministic TM Computation



### Non deterministic TM Computation



# Máquinas de Turing Não-determinísticas

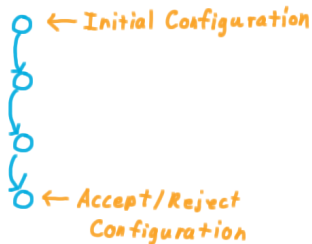
## Ideia da Prova

- ▶ De jeito maneira.
- ▶ Se explorarmos desta forma, e a busca estiver sendo em um ramo que entra em loop, nunca poderemos concluir que a máquina aceita  $w$  em outro ramo não-determinístico.
- ▶ Utilizaremos busca em largura!
- ▶ Explorarmos todas as configurações de um mesmo nível antes de ir para o próximo.

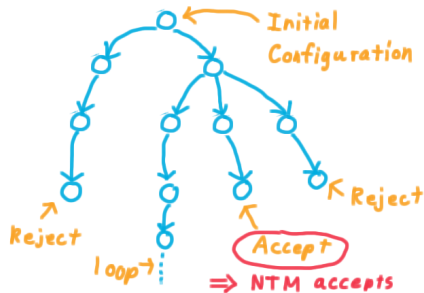
# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Non deterministic TMs

### Deterministic TM Computation



### Non deterministic TM Computation





# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Ideia da Prova

- ▶ Este método garante que, se  $N$  chegar ao estado de aceitação,  $D$  eventualmente também alcançará este estado na simulação.
- ▶ Agora vamos para a prova de verdade.

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- ▶ A máquina determinística  $D$  tem 3 fitas.
- ▶ Se provarmos o resultado para uma máquina multi-fita provamos para uma máquina com uma só fita.

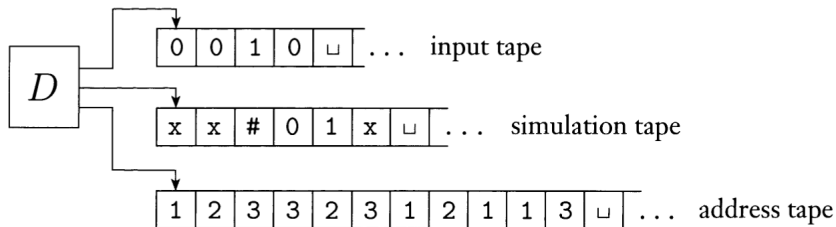
# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- ▶ Fita 1: contém a palavra  $w$  de entrada. Fita *read-only*, nunca é alterada.
- ▶ Fita 2: é a fita de simulação, mantém uma cópia da fita de  $N$  em uma computação de um ramo não-determinístico.
- ▶ Fita 3: guarda a posição de  $D$  na árvore de computação não-determinística.

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova



# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- ▶ Vamos entender melhor a fita 3.
- ▶ Cada nó da árvore de computação tem  $b$  filhos, em que  $b$  é o tamanho do maior conjunto de escolhas não determinísticas durante a computação de  $N$ .
- ▶ Cada nó vai ter um endereço na árvore de computação que corresponde a uma palavra sobre o alfabeto  $\Sigma_b = \{1, 2, \dots, b\}$ .

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- ▶ Por exemplo, o endereço 231 corresponde ao nó alcançável a partir do percurso a partir raiz, pelos nós  $u$ ,  $v$  e  $w$ .
  - ▶  $u$  é o segundo filho da raiz.
  - ▶  $v$  é o terceiro filho de  $u$ .
  - ▶  $w$  é o primeiro filho de  $v$ .
- ▶ Obviamente, o endereço da raiz é a palavra  $\epsilon$ .

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- ▶ Cada símbolo fala qual a próxima escolha a fazer quando estamos simulando um passo de computação em um ramo não determinístico de  $N$ .
- ▶ Às vezes um símbolo pode não corresponder à escolha alguma.
- ▶ Neste caso o endereço é inválido e não corresponde a nó algum.

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- ▶ Agora podemos descrever como  $D$  opera.



# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- 1 Inicialmente, a fita 1 contém  $w$  e as fitas 2 e 3 estão vazias.
- 2 Copie o conteúdo da fita 1 para a fita 2.
- 3 Use a fita 2 para simular  $N$  com a entrada  $w$  em um ramo não determinístico. Antes de cada passo de  $N$ , devemos consultar o próximo símbolo na fita 3 para determinar qual escolha fazer dentre as possíveis escolhas não determinísticas.

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

- 3.1 Se não temos mais símbolos restantes na fita 3 ou se essa escolha não determinística é inválida, abortamos este ramo de computação e vamos para o passo 4.
- 3.2 Se o estado de rejeição é encontrado, também vá para o passo 4.
- 3.3 Se o estado de aceitação é encontrado, aceite  $w$ .

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

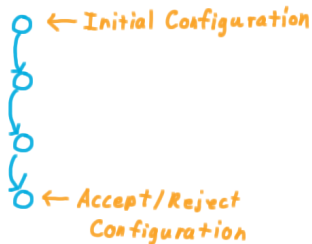
## Prova

- 4 Troque a palavra na fita 3 pela próxima palavra na ordem lexicográfica. (Estamos efetivamente testando  $(\epsilon, 1, 2, 3, \dots, b, 11, 12, \dots, bb, \dots)$ .  
Simule o próximo ramo da computação de  $N$  voltando para o passo 2.

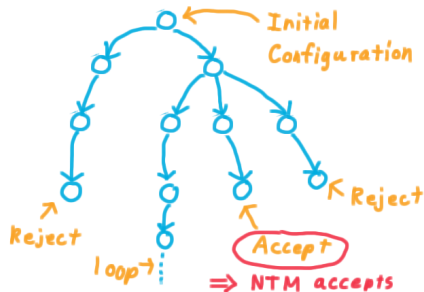
# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Non deterministic TMs

### Deterministic TM Computation



### Non deterministic TM Computation



# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Corolário

*Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se alguma máquina de Turing não-determinística a reconhece.*

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Prova

$\Rightarrow$ ) Toda máquina de Turing determinística também é uma não determinística.

$\Leftarrow$ )

Decorre imediatamente do teorema anterior.

# Máquinas de Turing Não-determinísticas

## Corolário

*Uma linguagem é Turing-decidível se, e somente se alguma máquina de Turing não-determinística a decide, isto é, para em todos os ramos de computação não determinística ( $q_{aceita}$  ou  $q_{rejeita}$ ).*

- ▶ Para aceitação, basta um ramo atingir o estado  $q_{aceita}$ .
- ▶ Para rejeição, todos os ramos devem alcançar  $q_{rejeita}$ .

# Sumário

Introdução

Máquinas Multi-fitas

Máquinas Não-determinísticas

**Máquinas Enumeradoras**

Equivalência



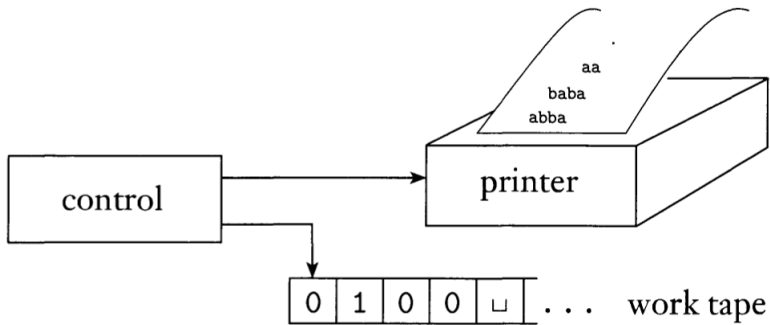
# Máquinas Enumeradoras

- ▶ A classe das linguagens recursivamente enumeráveis são utilizadas como sinônimo para a classe das linguagens Turing-reconhecíveis.
- ▶ O nome recursivamente enumerável veio de uma variante de máquina de Turing, denominada **enumeradora**.

# Máquinas Enumeradoras

- ▶ Uma máquina enumeradora é basicamente uma máquina de Turing com uma impressora com estoque ilimitado de papel e tinta.
- ▶ A máquina de Turing pode utilizar essa impressora para uma lista de palavras.
- ▶ Toda vez que a máquina de Turing deseja adicionar a palavra a lista, ela envia tal palavra para a impressora.

# Máquinas Enumeradoras



# Máquinas Enumeradoras

- ▶ Uma máquina Enumeradora  $E$  começa com uma fita vazia.
- ▶ Se a enumeradora não para, pode imprimir uma lista infinita de palavras.
- ▶ A linguagem enumerada por  $E$  é a coleção de todas as palavras impressas.
- ▶  $E$  pode gerar as palavras em qualquer ordem e com repetições.

# Máquinas Enumeradoras

## Teorema

*Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se uma máquina enumeradora a enumera.*

# Máquinas Enumeradoras

## Prova

$\Leftarrow$ )

Primeiramente mostraremos que, se temos uma máquina enumeradora  $E$  que enumera a linguagem  $A$ , existe uma máquina de Turing  $M$ , que reconhece  $A$ .

# Máquinas Enumeradoras

## Prova

A construção de  $M$  é a seguinte.

Com a entrada  $w$ ,  $M$ :

- 1 Roda  $E$ . Toda vez que  $E$  imprime uma palavra  $w'$ ,  $M$  compara esta palavra com  $w$ .

- 1.1 Caso  $w' = w$ ,  $M$  aceita  $w$ .

Eventualmente, se uma palavra  $w$  é impressa por  $E$ , ela será aceita por  $M$ .

# Máquinas Enumeradoras

## Prova

$\Rightarrow$ )

Agora mostraremos que se  $M$  reconhece uma linguagem  $A$ , podemos construir uma enumeradora  $E$  para  $A$ .



# Máquinas Enumeradoras

## Prova

Suponha que  $s_1, s_2, \dots$  é a lista de todas as possíveis palavras sobre  $\Sigma^*$ .

$E$  faz o seguinte:

- 1 Para  $i = 1, 2, 3, \dots$ 
  - 1.1 Rode  $M$  por  $i$  passos para cada entrada  $s_1, s_2, \dots, s_i$ .
  - 1.2 Se alguma computação é aceita, imprima o  $s_j$  correspondente.

# Máquinas Enumeradoras

## Prova

Se  $M$  aceita uma palavra em particular  $s$ , eventualmente ela aparecerá na lista de  $E$ .

Podemos dizer até que ela aparecerá infinitas vezes, pois  $M$  roda todas as entradas para cada elemento em  $[1, i]$ .

Basicamente estamos obtendo o efeito de rodar  $M$  em paralelo sobre todas as entradas possíveis.

# Sumário

Introdução

Máquinas Multi-fitas

Máquinas Não-determinísticas

Máquinas Enumeradoras

Equivalência