Raisonnement par récurrence:

1. « $n^2 + n + 2$ est pair pour $n \in \mathbb{N}$ »

2. « $2^n \geq n^2$, $n \geq 4$ »

3. « $\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$ »

4. « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$ »

5. « $(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a$ »

6. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0{,}4$ et pour tout entier $n \geq 1, u_{n+1} = 0{,}2 \cdot u_n + 0{,}4$.
   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{u_n+3}{4 \cdot u_n+4}$.
   On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[\cup]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+3}{4x+4}$.
   1) Étudier les variations de f.
   2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$

⚠ Regarder le corrigé après avoir terminé tous les exercices.

1. Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « $n^2 + n + 2$ est pair avec $n \in \mathbb{N}$ ». Démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Tout d'abord, on démontre que cette propriété est valable pour $n = 0$.
Pour $n = 0 : 0^2 + 0 + 2 = 2 \ \rightarrow$ pair
$\mathcal{P}(0)$ est alors vrai.

Hérédité :

Soit un entier naturel quelconque p, tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(p+1)^2 + (p+1) + 2$ est pair.

$$(p+1)^2 + (p+1) + 2 = p^2 + 2p + 1 + p + 1 = \underbrace{p^2 + p + 2}_{} + \underbrace{2p + 2}_{}$$

La propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie, donc $p^2 + p + 2$ est pair.

$2p$ est pair car $p \in \mathbb{N}$, et 2 est également pair donc la somme est pair

La somme de 2 nombres pairs est paire.
$\mathcal{P}(p+1)$ est donc également vraie.

Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}$ est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vraie.

2. Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « $2^n \geq n^2, n \geq 4$ ». Démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Tout d'abord, on démontre que cette propriété est valable pour $n = 4$.
Pour $n = 3 : 2^3 = 8$ et $3^2 = 9 \rightarrow 8 < 9$
Pour $n = 4 : 2^2 = 16$ et $4^2 = 16 \rightarrow 16 \geq 16$
$\mathcal{P}(4)$ est alors vrai.

<u>Hérédité :</u>

Soit un entier naturel supérieur ou égal à 4 quelconque p, tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^{p+1} \geq (p+1)^2$.

On sait que :

$$\begin{aligned} 2^p &\geq p^2 \\ 2 \cdot 2^p &\geq 2 \cdot p^2 \\ 2^{p+1} &\geq 2p^2 \end{aligned}$$

Le sens reste pareil car on multiplie par 2

Si on démontre que $2p^2$ est plus grand que $(p+1)^2$ on aura alors démontré que $2^{p+1} \geq 2p^2 \geq (p+1)^2$. On calcule la différence :

$$2p^2 - (p+1)^2 = 2p^2 - p^2 - 2p - 1 = \underbrace{p^2 - 2p - 1}_{\text{Trinôme du second degré avec } p \in \mathbb{N}}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8 > 0$$

Il existe alors 2 solutions :

$$p_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2 \cdot 1} < 0$$

La racine est négative, elle nous intéresse pas

$$p_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2 \cdot 1} \approx 2{,}414$$

x	0		$2{,}414\ldots$		4		$+\infty$
Signe de la différence		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	

Pour $p \geq 4$, le trinôme est positif, donc $2p^2 \geq (p+1)^2$. On a alors $2^{p+1} \geq (p+1)^2$.

$\mathcal{P}(p+1)$ est donc également vraie.

<u>Conclusion :</u>

La propriété $\mathcal{P}$ est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vraie.

3. Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « $\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$ ». Démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Tout d'abord, on démontre que cette propriété est valable pour $n = 0$.

Pour $n = 0$: $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ et $\sum_{k=0}^{0} k = 0$

$\mathcal{P}(0)$ est alors vrai.

Hérédité :

Soit un entier naturel quelconque p, tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $1 + 2 + \cdots + p + (p+1) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + p} + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$$

La propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie donc $1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p + (p+1) = \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2}$$

$$= \frac{(p+2)(p+1)}{2}$$

$\mathcal{P}(p+1)$ est donc également vraie.

Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}$ est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vraie.

4. Soit $\mathcal{P}$ la propriété :

   « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$ ».

   Démontrons cette propriété par récurrence.

   Initialisation :

   Tout d'abord, on démontre que cette propriété est valable pour $n = 0$.

   Pour $n = 0$: $\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0$ et $\sum_{k=0}^{0} k^0 = 0$

   $\mathcal{P}(0)$ est alors vrai.

   Hérédité :

   Soit un entier naturel quelconque p, tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$.

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2}_{} + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$

La propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie donc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2 + (p+1)^2 &= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} \\ &= \frac{(p+1)[p(2p+1) + 6(p+1)]}{6} \\ &= \frac{(p+1)(2p^2 + 7p + 6)}{6} \\ &= \frac{(p+1)\left(2(p - \frac{3}{2})(p+2)\right)}{6} \\ &= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} \end{aligned}$$

Trinôme du second degré avec $p \in \mathbb{N}$

$\Delta = 1$

$p_1 = -2$

$p_2 = \frac{3}{2}$

On factorise le trinôme :

$\mathcal{P}(p+1)$ est donc également vraie.

Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}$ est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vraie.

5. Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « $(1+a)^n \geq 1 + an\,, n \in \mathbb{N}$ et $a \geq 0$ » connue comme *l'inégalité de Bernoulli*. Démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Tout d'abord, on démontre que cette propriété est valable pour $n = 0$.
Pour $n = 0$: $(1+a)^0 = 1$ et $1 + a \cdot 0 = 1 \to 1 \geq 1$
$\mathcal{P}(0)$ est alors vrai.

Hérédité :

Soit un entier naturel quelconque p, tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1+a)^{p+1} \geq 1 + (p+1)a$.
On sait que :

$$\begin{aligned} (1+a)^p &\geq 1 + pa \\ (1+a)\cdot(1+a)^p &\geq (1+a)\cdot(1+pa) \\ (1+a)^{p+1} &\geq 1 + (p+1)a + a^2 \end{aligned}$$

On ne change pas le signe de l'inégalité car $1 + a > 0$

Or $a^2 \geq 0$, alors $1 + (p+1)a + a^2 \geq 1 + (p+1)a$, donc :

$$(1+a)^{p+1} \geq 1 + (p+1)a$$

$\mathcal{P}(p+1)$ est donc également vraie.

Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}$ est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vraie.

6. Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « la suite (u_n) est croissante ou $u_{n+1} > u_n\,, n \geq 1$ ». Démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Tout d'abord, on démontre que cette propriété est valable pour $n = 1$.
Pour $n = 1$: $u_1 = 0{,}4$ et $u_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \to u_2 > u_1$
$\mathcal{P}(1)$ est alors vrai.

Hérédité :

Soit un entier naturel quelconque p, tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{p+2} > u_{p+1}$.

On sait que :

$$u_{p+1} > u_p$$

$$0{,}2 \cdot u_{p+1} > 0{,}2 \cdot u_p$$

On ne change pas le signe de l'inégalité car $0{,}2 > 0$

$$0{,}2 \cdot u_{p+1} + 0{,}4 > 0{,}2 \cdot u_p + 0{,}4$$

On ne change pas le signe de l'inégalité (somme)

$$u_{p+2} > u_{p+1}$$

$\mathcal{P}(p+1)$ est donc également vraie.

Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}$ est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vraie.

7. 1) La fonction est dérivable sur D_f :

$$f'(x) = \frac{(4x+4) - 4(x+3)}{(4x+4)^2} = \frac{-8}{(4x+4)^2}$$

Le dénominateur est toujours positif, cependant le numérateur est négatif, le signe de la dérivée est alors négatif et le sens de variation est décroissant sur D_f .

2) Soit $\mathcal{P}$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq 1 \,, n \in \mathbb{N}$ ». Démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation :

Tout d'abord, on démontre que cette propriété est valable pour $n = 0$.

Pour $n = 0 : u_0 = 0 \rightarrow 0 < u_0 < 1$

$\mathcal{P}(0)$ est alors vrai.

Hérédité :

Soit un entier naturel quelconque p, tel que $\mathcal{P}(p)$ vraie, démontrons alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_{p+1} \leq 1$.

On sait que :

$$0 \leq \quad u_p \quad \leq 1$$

$$f(0) \geq f\left(u_p\right) \geq f(1)$$

$$1 \geq \frac{3}{4} \geq \ u_{p+1} \ \geq \frac{1}{2} \geq 0$$

$$0 \leq \ u_{p+1} \leq 1$$

On change le signe de l'inégalité car f est décroissante

$\mathcal{P}(p+1)$ est donc également vraie.

Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}$ est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vraie.