Raisonnement par récurrence:

1. « $n^2 + n + 2$ est pair pour $n \in \mathbb{N}$ »

2. « $2^n \geq n^2$, $n \in \mathbb{N}$ »

3. « $\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$ »

4. « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$ »

5. « $(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a$ »

6. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0{,}4$ et pour tout entier $n \geq 1, u_{n+1} = 0{,}2 \cdot u_n + 0{,}4$.
   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

7. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{u_n+3}{4 \cdot u_n+4}$.
   On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[\cup]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x+3}{4x+4}$.
   1) Étudier les variations de f.
   2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$