FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

CDS311

Computational and Data Science im Spitzensport

Prof. Dr. Martin Bünner

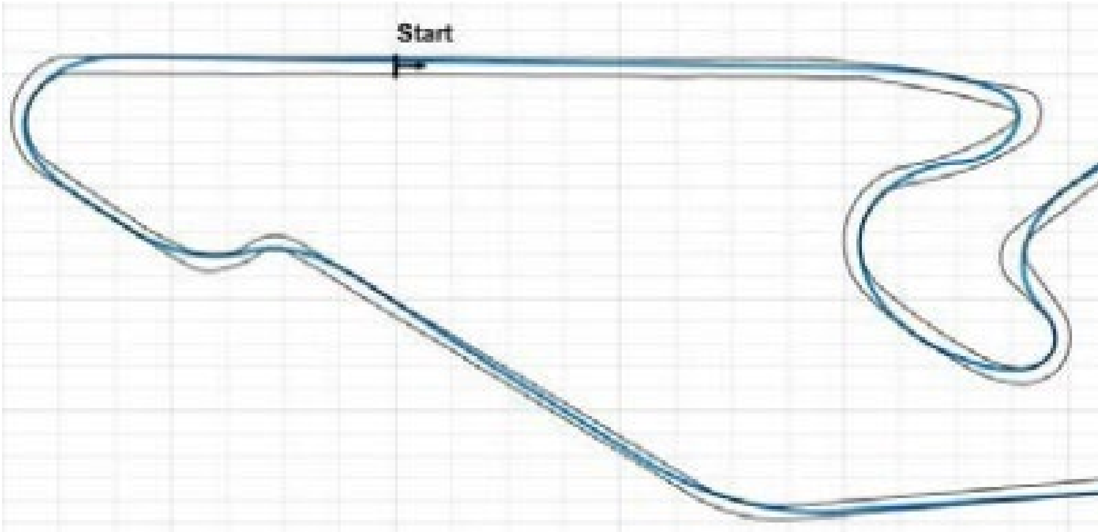
Optimal Control

Theoretische Grundlage für:

- ✓ Optimal Racing Line im Motorsport
- ✓ Optimal Racing Line im Alpin-Ski (Projekt m Swiss-Ski → BA)
- ✓ Optimal Racing Line Im Segelsport (Projekt m Swiss-Sailing → BA)
- ✓ Optimal Pacing im Radsport (Projekt m Swiss-Cycling → BA)
- ✓ Optimal Pacing im Trailrunning (Projekt m Swiss-Athletics → BA)
- ✓ Optimal Pacing im Motorsport
- ✓ Optimale Bewegungsformen im Turnen (internationales Projekt in Planung → BA)
- ✓ Optimale Bewegungsformen im Turmspringen
- ✓ Optimale Bewegungsformen Ski-Aerials
- ✓ u.v.m.

ABER:

komplex & aufwändig



Optimale Fahrlinie, Hockenheimring

Bivariate NLP

→ Skript, → «Bivariate_NLP.pdf»

→ graphische Lösung, Lagrange-Parameter, Karush-Kuhn-Tucker-(KKT)-Bedingungen

Bsp 1:	$f^* = \text{Min}\ (x_1 + x_2)$	Zielfunktion
	$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$	Nebenbedingung 1
	$x_2 \geq 0.5$	Nebenbedingung 2

Bsp 2:	$f^* = \text{Max}\ (x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \text{Min}\ (-x_1^2 - x_2^2)$	Zielfunktion
	$x_2 \geq -x_1 - 2$	Nebenbedingung 1
	$x_2 \geq 1$	Nebenbedingung 2

→ Grafische Lösung

→ Bestimmung der Lagrange-Multiplikatoren

→ KKT-Bedingungen

N-dim NLP

Problemformulierung (X: Vektor der Design-Variablen, g(X) vektorielle Funktion)

$$\begin{aligned} &\min \quad f(X) \\ &\text{s.t.} \quad g(X) \leq 0 \end{aligned}$$

lokal optimale Lösung erfüllt Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung (KKT) mit nicht-negativen Langrage-Multiplikatoren

$$\nabla f(X^*) + \lambda \nabla g(X^*) = 0 \quad (1)$$

$$\lambda g(X^*) = 0 \quad (2)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3)$$

$$g(X^*) \leq 0 \quad (4)$$

Lösung von N-dim NLP

- ✓ SQP-Verfahren (Han-Powell, Schittkowski, ca. 1985 -1995)
- ✓ Inner-Point-Verfahren (IPOPT, Wächter 2006)
- ✓ in Python (Welcome to cyipopt's documentation! — cyipopt 1.5.0 documentation)

$f^* = \text{Min } f(x), \quad x \text{ in } R^N$

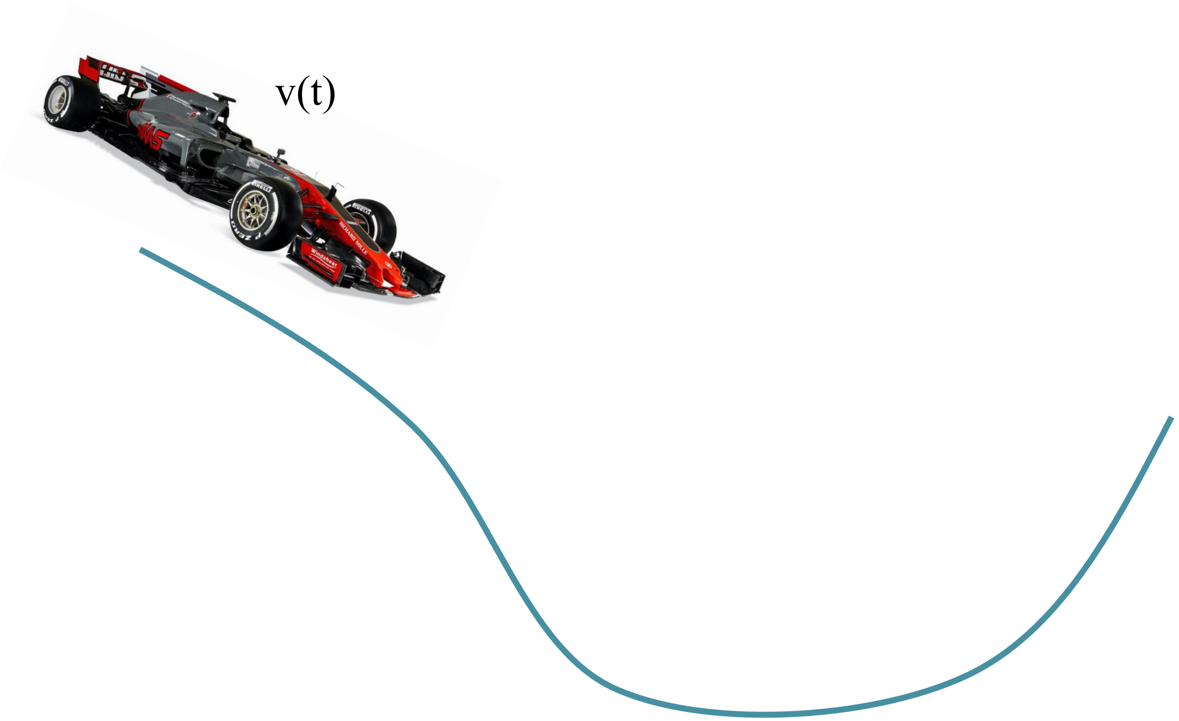
$g_L \leq g(x) \leq g_U$	2M Nebenbedingungen mittels M-dim Vektor-Funktion g
$x_L \leq x \leq x_U$	2N Box-Constraints

Solver liefert lokal optimale Lösung x* des restringierten Optimierungsproblem und den Vektor der Lagrange-Multiplikatoren.

KIP Projekt Autopilot in 2D (z=Const)

Ihr Fahrzeug ist ein Formel-1-Rennwagen mit den Parametern:

m	$= 790$ kg
F_MotorMax	$= 10.41$ kN
α	$= 0.001872$ 1/m
<u>Neue Reifen</u>	
F_HaftMax	$= 12.27$ kN
<u>Alte Reifen</u>	
F_HaftMax	$= 9.88$ kN



Bewegung wird durch DGL beschrieben:

$$m*[a(t) + \alpha *v(t)^2] = F\_Brems\_Motor(t)$$

$a(t) = dv(t)/dt$: Betrag der Beschleunigung

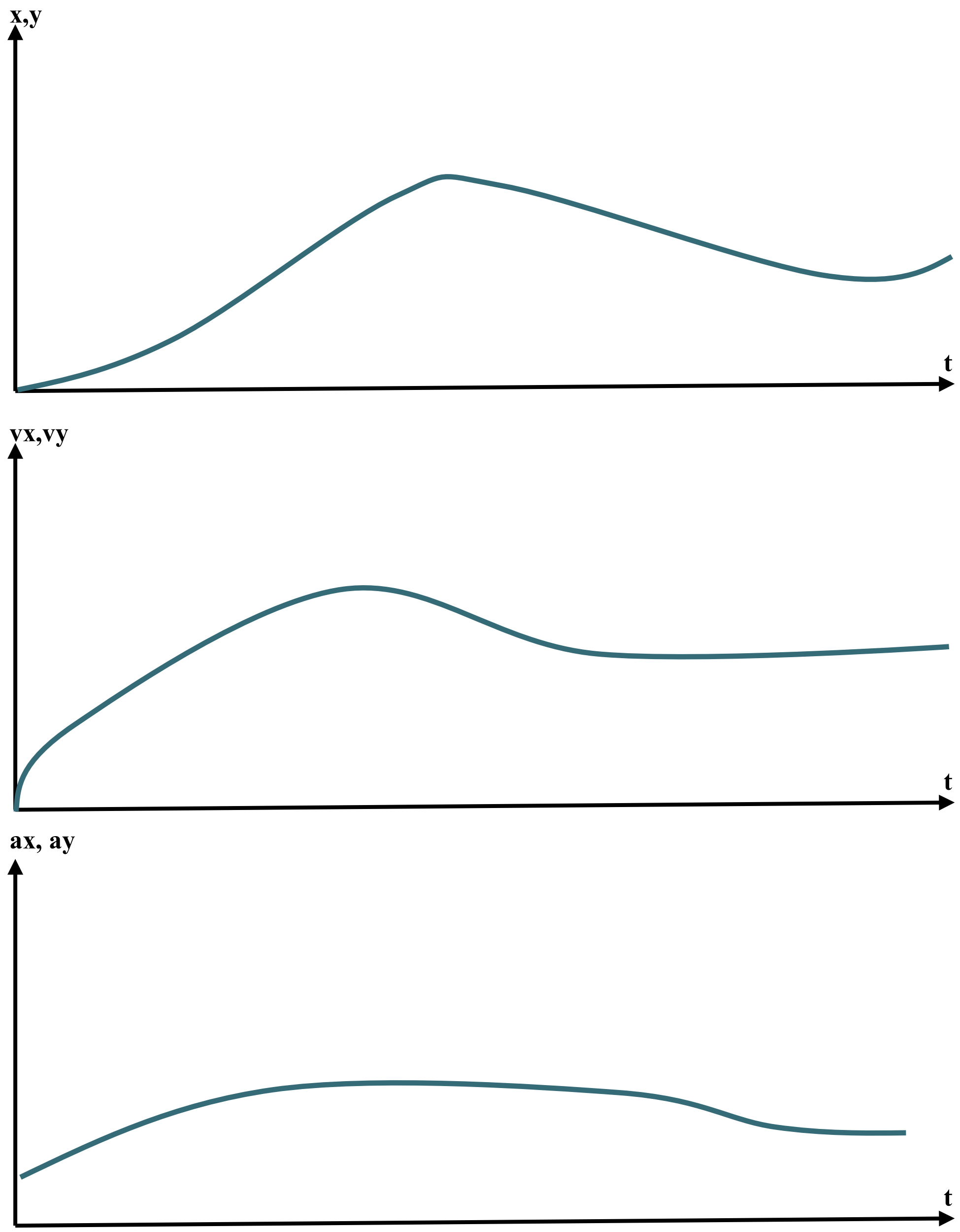
$v(t)$: Betrag der Geschwindigkeit

Gas-Geben: $0 \leq F\_Brems\_Motor(t) \leq F\_MotorMax$

Bremsen: $F\_Brems\_Motor(t) \leq 0$

Kein Durchdrehen der Reifen: $F\_Reifen = m*a(t)$

$$F\_Reifen^2 \leq F\_HaftMax^2 .$$



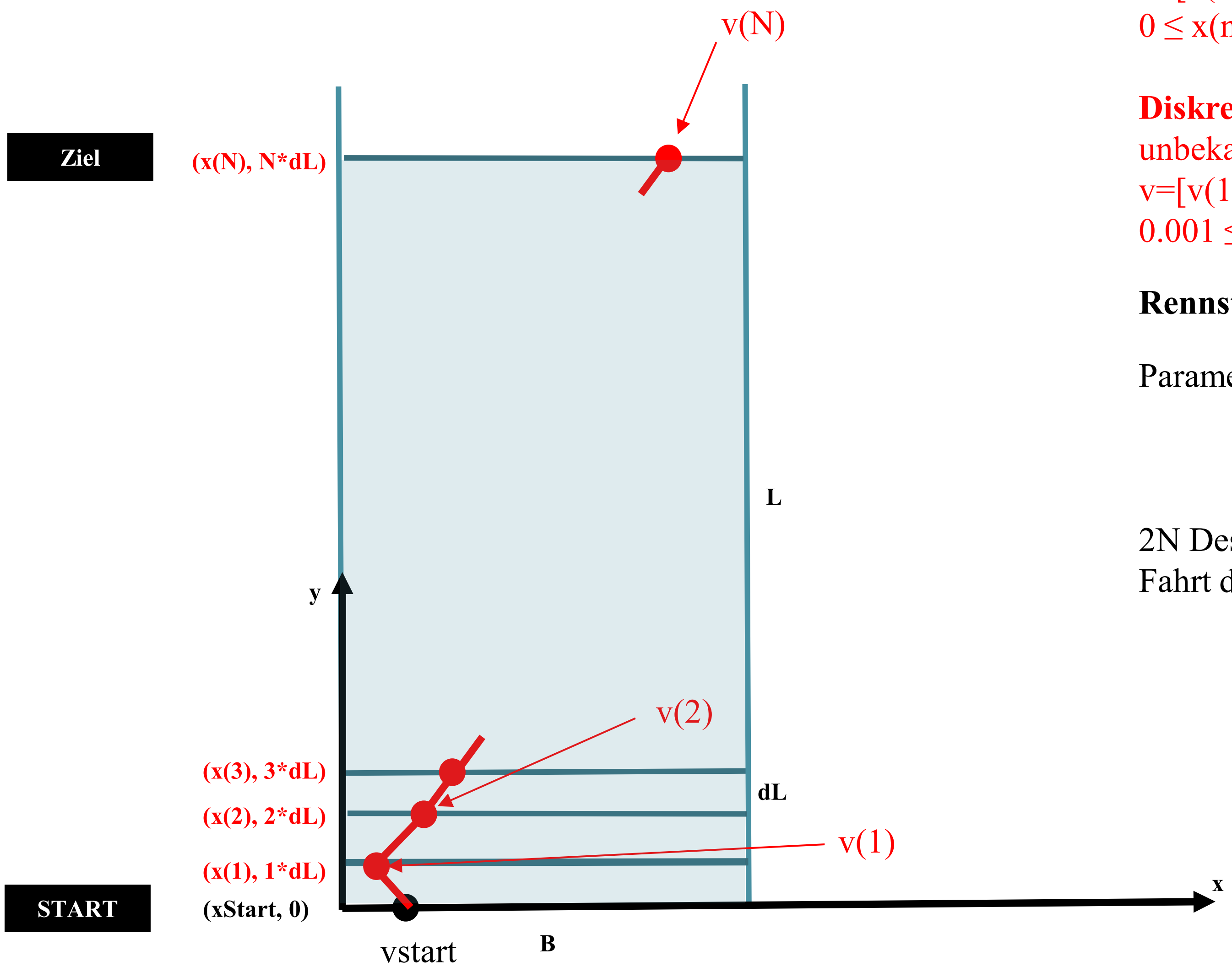
Bewegung durch kontinuierliche Grössen in der Ebene (z=konst) beschrieben

$x(t),\ 0 \leq t \leq T$
$y(t),\ 0 \leq t \leq T$

Davon abgeleitet
$v_x(t) = d/dt\ x(t)$
$v_y(t) = d/dt\ y(t)$
$v = \mathrm{sqrt}(v_x^2 + v_y^2)$

$a_x(t) = d/dt\ v_x(t)$
$a_y(t) = d/dt\ v_y(t)$
$a = \mathrm{sqrt}(a_x^2 + a_y^2)$

Diskretisierte Beschreibung der Bewegung
Diskretisierung im Raum



Diskretisierte Bahn (sehr einfache Piste)
unbekannte Bahnpunkte
x=[x(1),x(2),....x(N)]
$0 \leq x(n) \leq B$

Diskretisierte Geschwindigkeit
unbekannte Geschwindigkeiten
v=[v(1),v(2),....v(N)]
$0.001 \leq v(i) \leq$ infty

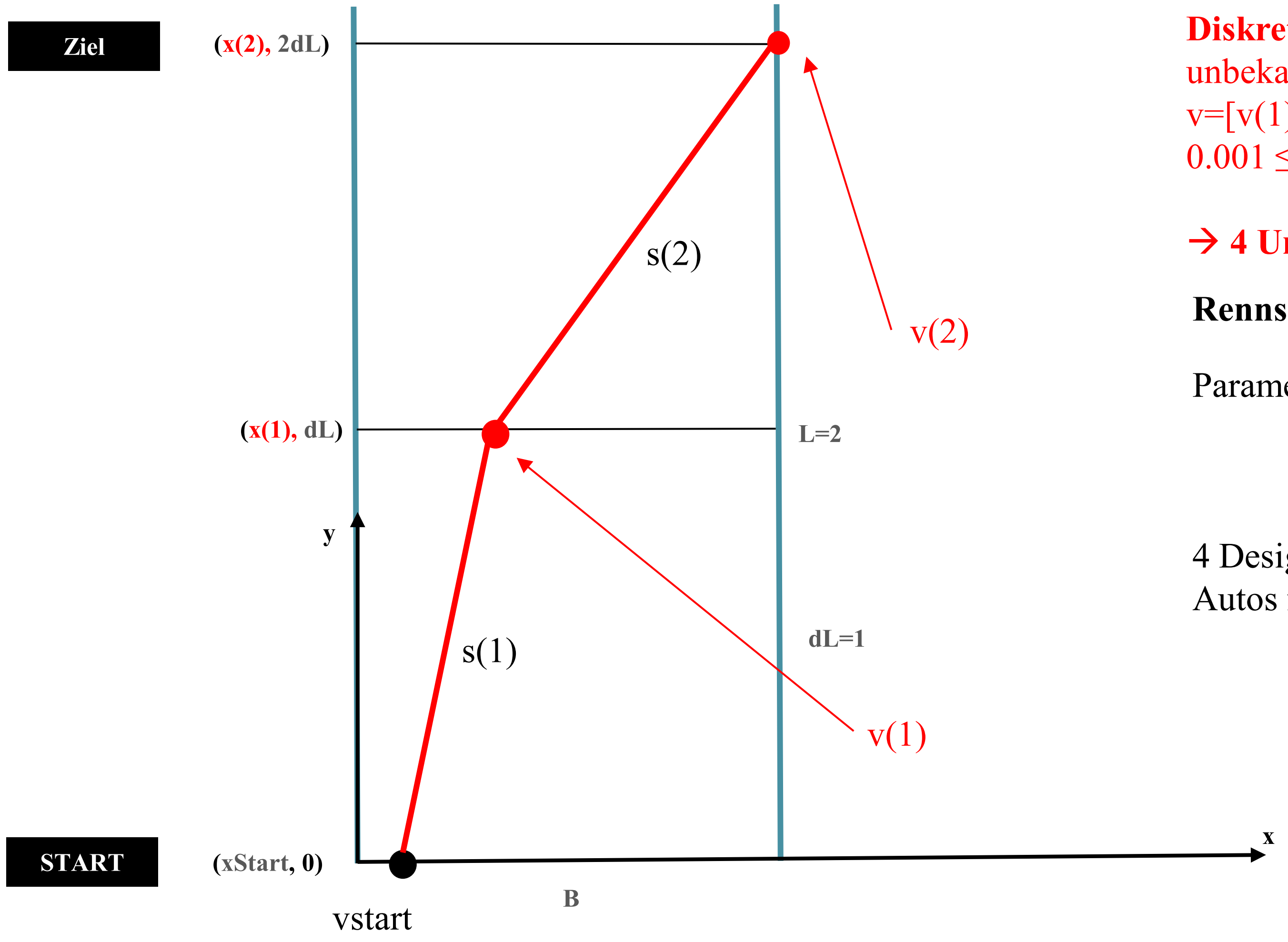
Rennstrecke

Parameter: L, B, dL,xStart, vStart
damit : N=L/dL

2N Design-Variablen u=[x(1) ..... x(N) v(1) .... v(N)] legen die Fahrt des Autos fest (inkl. Lenkung, Gas-Geben und Bremsen).

Sonderfall : N=1

... an der Tafel entwickeln ...



Diskretisierte Bahn
unbekannte Bahnpunkte
x=[x(1), x(2)]
$0 \leq x(i) \leq B$

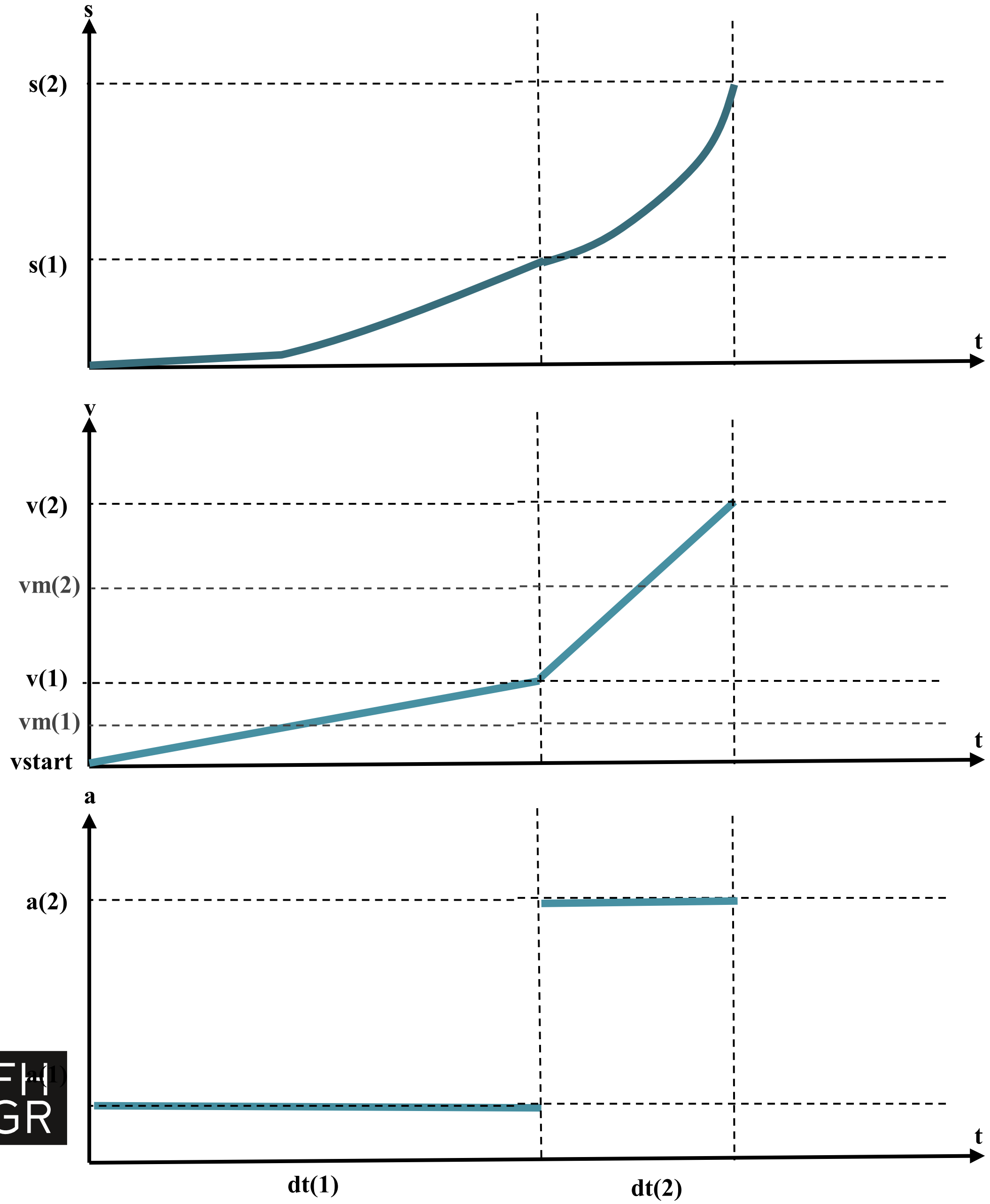
Diskretisierte Geschwindigkeit
unbekannte Geschwindigkeiten
v=[v(1), v(2)]
$0.001 \leq v(i) \leq$ infty

→ 4 Unbekannte

Rennstrecke

Parameter: L=2, B=1, dL=1, xStart=0, vStart=0
damit : N=2

4 Design-Variablen u=[x(1) x(2) v(1) v(2)] legen die Fahrt des Autos fest (inkl. Lenkung, Gas-Geben und Bremsen).



Diskretes Modell: Das Auto erfährt eine konstante Beschleunigung in jedem Abschnitt

Abgeleitete Grössen

s(1) = sqrt(dL^2+[x(1) - xStart]^2)
s(2) = sqrt(dL^2+[x(2) - x(1)]^2)

vm(1) = ½ (v(1)+vstart)
vm(2) = ½ (v(2)+v(1))
mit v=x/t und t = x/v
→ dt(1) = s(1)/vm(1)
→ dt(2) = s(2)/vm(2)

mit a = dv/dt
a(1) = [v(1) - vStart]/dt(1)
a(2) = [v(2) - v(1)]/dt(2)

Sonderfall : N=2 und ohne Krümmung und Zentrifugalkräfte

Optimierungs-Problem

T* = min [dt(1) + dt(2)]

unter nichtlinearen Nebenbedingungen

(NB1) -Infty ≤ **F_Brems_Motor(1)** ≤ F_MotorMax
(NB2) -Infty ≤ **F_Brems_Motor(2)** ≤ F_MotorMax
(NB3) 0 ≤ **F_Reifen(1)**^2 ≤ F_HaftMax^2
(NB4) 0 ≤ **F_Reifen(2)**^2 ≤ F_HaftMax^2

Box Constraints

(NB5) 0 ≤ x(i) ≤ B
(NB6) 0.001 ≤ v(i) ≤ Infty

mit den Funktionen in Abh. von Design-Variablen und Parametern

s(1) = sqrt(dL^2+(xStart-x(1))^2)
s(2) = sqrt(dL^2+(x(2)-x(1))^2)
vm(1) = (v(1)+vStart)/2
vm(2) = (v(2)+v(1))/2
dt(1) = s(1)/vm(1)
dt(2) = s(2)/vm(2)
a(1) = [v(1) -vStart] /dt(1)
a(2) = [v(2) -v(1)]/dt(2)
F_Brems_Motor(1) = m*(a(1) + α* vm(1)^2)
F_Brems_Motor(2) = m*(a(2) + α* vm(2)^2)
F_Reifen(1) = m* a(1)
F_Reifen(2) = m* a(2)

Klassifikation
Es handelt sich um ein reelwertiges Optimierungsproblem mit 4 Design-Variablen, 4 nichtlinearen Ungleichheits-Nebenbedingungen und Box-Constraints.

FH GR