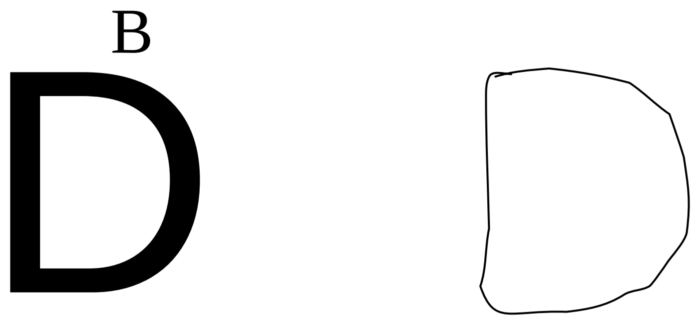
Filtro de Kalman

EGM0015 - INTRODUÇÃO À IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

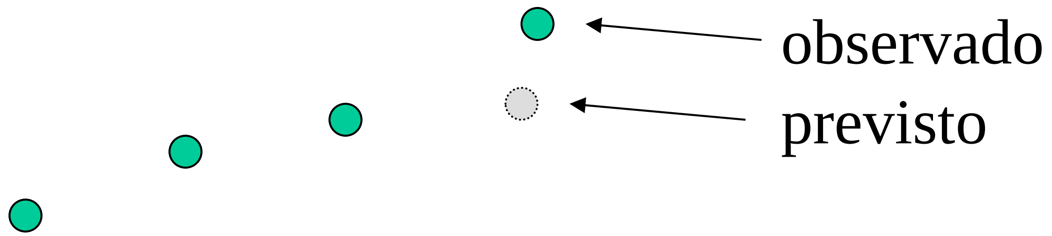
Motivação

- Acompanhamento de um fenômeno



Idéia Básica

- Combinar
  - **Predição**, a partir dos valores passados.
  - **Correção da predição**, utilizando medições provenientes da observação do fenômeno



Formulação do Problema

- Processo que obedece a uma lei de evolução linear, com a presença de erros aleatórios:

  $x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k u_k + \varepsilon_k$, onde $\varepsilon_k \sim N(0, Q_k)$
- Medidas relacionadas linearmente com o valor real, também com erros aleatórios:

  $y_k = H_k x_k + \mu_k$, onde $\mu_k \sim N(0, R_k)$

Elementos do modelo

$$\underset{n\times 1}{x_{k+1}} = \underset{n\times n}{\Phi_k}\,\underset{n\times 1}{x_k} + \underset{n\times l}{\Gamma_k}\,\underset{l\times 1}{u_k} + \underset{n\times 1}{\varepsilon_k}, \text{ onde } \varepsilon_k \sim \mathrm{N}(0, \underset{n\times n}{Q_k})$$

$$\underset{m\times 1}{y_k} = \underset{m\times n}{H_k}\,\underset{n\times 1}{x_k} + \underset{m\times 1}{\mu_k}, \text{ onde } \mu_k \sim \mathrm{N}(0, \underset{m\times m}{R_k})$$

Φ_k: matriz de transição

H_k: matriz de medição

Q_k , R_k: matrizes de covariância

O Problema

Dada a estimativa $\hat{x}_{k-1}$ do estado anterior, com a respectiva matriz de covariância $\hat{P}_{k-1}$, e a previsão para o estado atual, $\tilde{x}_k$, procurar uma solução da forma:

$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k(y_k - H_k\,\tilde{x}_k)$, K_k: ganho de Kalman

de tal modo que o valor esperado do erro quadrático [E $(\hat{x}_k - x_k)^2$] seja mínimo.

Filtro de Kalman

- Etapa de predição (ou propagação):

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k + \Gamma_k u_k$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \Phi_k \hat{P}_k \Phi_k^T + Q_k$$

- Etapa de correção (ou atualização):

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T [H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k]^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k [y_k - H_k \tilde{x}_k]$$

$$\hat{P}_k = [I - K_k H_k] \tilde{P}_k$$

Exemplo: acompanhando um ponto

- Variáveis: posição e velocidade
- Modelo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{k-1} + \varepsilon \qquad \begin{bmatrix} y_x \\ y_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \mu$$

onde $\varepsilon \sim N(0, Q)$ e $\mu \sim N(0, R)$

Caso não-linear

- Processo que obedece a uma lei de evolução não-linear:

  $x_{k+1} = f(x_k ,u_k) + \varepsilon_k$, onde ε_k ~N(0, Q_k)

- Medidas relacionadas de forma não-linear com o valor real:

  $y_k = h(x_k) + \mu_k$, onde μ_k ~N(0, R_k)

Filtro de Kalman Estendido

- Linearização da função f :

$$\overline{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\Phi}_k = \overline{\Phi}(\hat{x}_k)$$

Filtro de Kalman Estendido

- Linearização da função h :

$$\overline{H}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\overline{H}_k = \overline{H}(\hat{x}_k)$$

Filtro de Kalman Estendido

- Etapa de predição (ou propagação):

$$\tilde{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \overline{\Phi}_k \hat{P}_k \overline{\Phi}_k^T + Q_k$$

- Etapa de correção (ou atualização):

$$K_k = \tilde{P}_k \overline{H}_k^T [\overline{H}_k \tilde{P}_k \overline{H}_k^T + R_k]^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k [y_k - h(\tilde{x}_k)]$$

$$\hat{P}_k = [I - K_k \overline{H}_k] \tilde{P}_k$$