Load Balance

1 Problema 1

Fie M1 si M2 lista job-urilor incarcate pe masina 1, respectiv masina 2

1.a

Pentru a demonstra ca afirmatia e posibila sa fie adevarata, trebuie sa gasim minim un caz pe care e adevarata:

Sa presupunem masinile cu job-urile:

$M_1 = \{80\}$

$M_2 = \{80, 40\}$

Observam ca $ALG = OPT \implies ALG \leq 1.1 * OPT$ deci afirmatia lui poate fi adevarata

1.b

Pentru a demonstra ca afirmatia e false, aratam ca nu e exista un caz pentru care ar putea fi adevarata

Considerand multimea job-urile J si stiind $\forall x_i \in J, x_i \leq 10$, observam ca diferenta maxima in OPT va fi 10, altfel o masina ar fi avut prea multa incarcatura, si ar exista o aranajare a job-urilor mai optima. Deci:

$OPT \leq \max\{95, 105\} \leq 105$ (105 e val maxima pt OPT)

Dar in cazul nostru:

$ALG = \max\{80, 120\} = 120 \implies 1.1{*}OPT = 1.1{*}105 \approx 116 \leq ALG = 120$
Ceea ce e fals, adica e imposibil ca algoritmul sa fie $1.1 * OPT$

2 Problema 3

Din curs stim:

Lema 1.

$$OPT \geq \max\{\frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} t_j, \max\{t_j \mid 1 \leq j \leq n\}\}$$

Si stim ca $ALG \leq \frac{3}{2} OPT$

Fie K indicele masinii cu load-ul maxim la finalul algoritmului.

Fie q ultimul job adaugat masinii K

Este evident ca algoritmul e optim in cazul in care sunt mai putine job-uri decat numarul masinilor, deci consideram cazul cand avem mai mult de m job-uri

Fie $load'(M)$ load-ul masinii dupa ce am adaugat primele $q-1$ job-uri dar nu si job-ul q

O observatie importanta este ca $load'(K)$ este minimul dintre toate masinile si $load(K) = load'(K) + t(q)$, deci:

$$ALG = load(K) = load'(K) + t_q \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} load'(i) + t_q = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{q-1} t_i + t_q$$

Observam ca $t_q \leq \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \leq OPT$ deoarece job-urile sunt sortate descrescator, deci ultimul job este mai mic sau egal cu media a 2 job-uri precedente. Deci:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{q-1} t_i + t_q \leq \frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{n} t_i - t_q) + \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2\cdot m}(t_m + t_{m+1}) + \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \leq$$

Inlocuim cu OPT

$$\implies \leq OPT - \frac{1}{2\cdot m}OPT + \frac{1}{2}OPT = \frac{3}{2}OPT - \frac{1}{2\cdot m}OPT = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot m})OPT$$

Deci avem ca:

$$ALG \leq (\frac{3}{2} - \frac{1}{2\cdot m})OPT$$