Tema 1 Algoritmi Avansati

Sociu Daniel

March 21, 2021

Contents

Knapsack

1 Problema 1

1.a

E nevoie doar de un simplu algoritm similar cu knapsack pseudo-polinomial, doar ca valoarea si greutatea sunt egale.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define FOR(i,a,b)  for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define FORS(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)

int n, K;

int main()
{
    cin.tie(0);
    ios_base::sync_with_stdio(0);
    cin >> n >> K;
    vector<int> S(n);
    vector<int> dp(K + 1, 0);
    FORS (i, 0, n) {
        cin >> S[i];
    }
    FORS (i, 0, n) {
        for (int j = K; j >= S[i]; j--) {
            dp[j] = max(dp[j], S[i] + dp[j - S[i]]);
        }
    }
    cout << dp[K] << '\n';
}
```

1.b

Acest algoritm este cel putin 2*OPT in O(n) deoarece daca avem o suma care trece de K, suma pe care o avem pana acum sau elementul care incercam sa il adunam, este mai mare de K/2 si doar selectam elementul mai mare.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define FOR(i,a,b)  for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define FORS(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)

int K, x, answer = 0;

int main()
{
    cin.tie(0);
    ios_base::sync_with_stdio(0);
    freopen("data.txt","r",stdin);
    cin >> K >> K;
    while(cin >> x) {
        answer = answer + x;
        if (answer > K) {
            answer = answer - x;
            if (x > answer) { // the secret behind 1/2 optimal
                answer = x; // if the sum is > K then one
            }               // value is >= than half
        }
    }
    cout << answer << '\n';
}
```

Load Balance

1 Problema 1

Fie M1 si M2 lista job-urilor incarcate pe masina 1, respectiv masina 2

1.a

Pentru a demonstra ca afirmatia e posibila sa fie adevarata, trebuie sa gasim minim un caz pe care e adevarata:

Sa presupunem masinile cu job-urile:

$M_1 = \{80\}$

$M_2 = \{80, 40\}$

Observam ca $ALG = OPT \implies ALG \leq 1.1 * OPT$ deci afirmatia lui poate fi adevarata

1.b

Pentru a demonstra ca afirmatia e false, aratam ca nu e exista un caz pentru care ar putea fi adevarata

Considerand multimea job-urile J si stiind $\forall x_i \in J, x_i \leq 10$, observam ca diferenta maxima in OPT va fi 10, altfel o masina ar fi avut prea multa incarcatura, si ar exista o aranajare a job-urilor mai optima. Deci:

$OPT \leq \max\{95, 105\} \leq 105$ (105 e val maxima pt OPT)

Dar in cazul nostru:

$ALG = \max\{80, 120\} = 120 \implies 1.1{*}OPT = 1.1{*}105 \approx 116 \leq ALG = 120$
Ceea ce e fals, adica e imposibil ca algoritmul sa fie $1.1 * OPT$

2 Problema 3

Din curs stim:

Lema 1.

$$OPT \geq \max\{\frac{1}{m} \sum_{1 \leq i \leq n} t_j, \max\{t_j \mid 1 \leq j \leq n\}\}$$

Si stim ca $ALG \leq \frac{3}{2} OPT$

Fie K indicele masinii cu load-ul maxim la finalul algoritmului.

Fie q ultimul job adaugat masinii K

Este evident ca algoritmul e optim in cazul in care sunt mai putine job-uri decat numarul masinilor, deci consideram cazul cand avem mai mult de m job-uri

Fie $load'(M)$ load-ul masinii dupa ce am adaugat primele $q-1$ job-uri dar nu si job-ul q

O observatie importanta este ca $load'(K)$ este minimul dintre toate masinile si $load(K) = load'(K) + t(q)$, deci:

$$ALG = load(K) = load'(K) + t_q \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} load'(i) + t_q = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{q-1} t_i + t_q$$

Observam ca $t_q \leq \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \leq OPT$ deoarece job-urile sunt sortate descrescator, deci ultimul job este mai mic sau egal cu media a 2 job-uri precedente. Deci:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{q-1} t_i + t_q \leq \frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{n} t_i - t_q) + \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{1}{2 \cdot m}(t_m + t_{m+1}) + \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \leq$$

Inlocuim cu OPT

$$\implies \leq OPT - \frac{1}{2 \cdot m}OPT + \frac{1}{2}OPT = \frac{3}{2}OPT - \frac{1}{2 \cdot m}OPT = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot m})OPT$$

Deci avem ca:

$$ALG \leq (\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot m})OPT$$

TSP

1 Problema 1

TSP unde muchiile au ponderea 1 sau 2.

Sa pp. ca $\exists$ un algoritm polinomial si aproximativ $ALG \leq cOPT$ unde OPT e o rezolvare optima pentru TSP.

1.a

Fie G graful cu n noduri si ponderi 1 si 2 $\rightarrow$ observam ca OPT e maxim $2n$.

Stim ca problema determinarii unui HC in G este NPC.

Construim G' complet, muchiile comune intre G si G' isi pastreaza costul iar celelalte muchii vor avea costul $c \cdot 2n$. Acum avem 2 cazuri:

1. daca G are un HC $\implies ALG$ va oferi un traseu de cost cel mult $c \cdot 2n$
2. daca G nu are un HC $\implies ALG$ va oferi cel mai bun traseu posibil cu cel mult $n-1$ noduri de cost 1 si 2, iar restul de cost $c \cdot 2n$. Adica cel mai bun traseu va fi $ALG \geq (n-1) + c \cdot 2n$

Adica putem determina in timp polinomial daca G este sau nu Hamiltonian $\implies$ HC se poate rezolva in timp polinomial. Contradictie (HC e NPC)!

Deci aceasta varianta a TSP-ului este tot NP-hard.

1.b

Regula triunghiului $L_3 \geq L_2 \geq L_1 \implies L_3 \leq L_2 + L_1$

Deci pentru a demonstra ca regula triunghiului tine trebuie sa selectam L_3 maximul posibil si elementele L_2 si L_1 minime

Adica vom considera $L_3 = 2$ si $L_2 = 1, L_1 = 1 \implies 2 \leq 1 \leq 1$ si $2 \leq 1 + 1$ adevarate deci regula triunghiului tine in aceasta instanta.

1.c

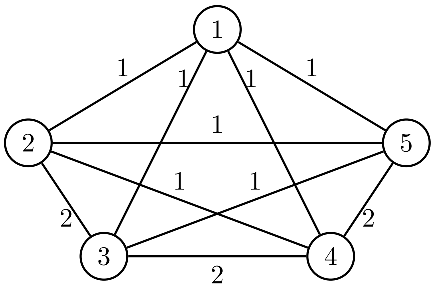
Am vazut din curs ca daca $len((u,v)) \leq len((u,w)) + len((w,v))$ atunci si relatia urmatoare are loc:

$$len((v_1, v_k)) \leq len(v_1, v_2 \dots v_k) \text{ unde } v_1, v_2 \dots v_k \text{ e un lant.}$$

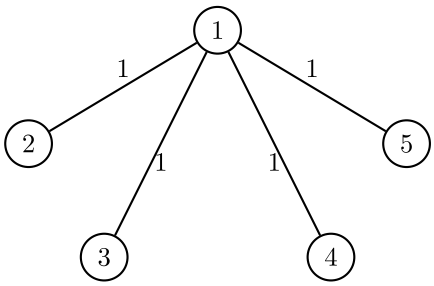
Mai stim din curs ca $OPT \geq MST$

Considerand acelasi algoritm descris in curs, care se bazeaza pe un MST, sa presupunem ca avem $ALG \leq \frac{3}{2}MST \leq \frac{3}{2}OPT$. Observam ca din cauza ca MST e un lower bound pentru OPT trebuie sa aratam direct ca $ALG > \frac{3}{2}OPT$

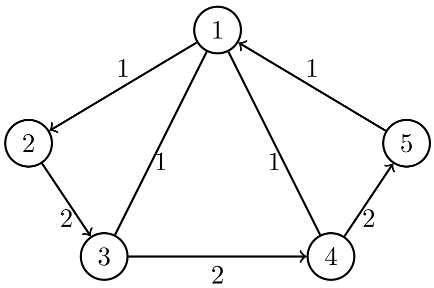
Fie graful G:



Presupunem ca algoritmul nostru va considera urmatorul MST

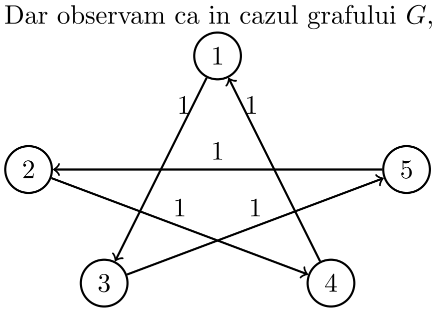


Considerand ca algoritmul din curs nu face nicio optimizare in ordinea in care selecteaza nodurile din MST, algoritmul nostru poate considera ca solutie pentru TSP urmatorul ciclu:



Deci $ALG = len(1, 2, 3, 4, 5, 1) = 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$

Dar observam ca in cazul grafului G, solutia OPT este:



Deci $OPT = len(1, 3, 5, 2, 4, 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

Deci avem ca:

$$ALG \leq \frac{3}{2}OPT \Leftrightarrow ALG = 8 \leq \frac{3}{2}OPT = \frac{3}{2}5 = 7.5 \Leftrightarrow 8 \leq 7.5$$

Deci avem ca $ALG \geq \frac{3}{2}OPT$, adica ALG nu este $\frac{3}{2}$ aproximativ.

Vertex Cover

1 Problema 1

Deci avem $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ multimea variabilelor de tip bool si $C = \{C_1, C_2 \dots C_m\}$ cele m clauze si algoritmul:

Greedy-3CNF(C, X)
1: $C = \{C_1 \dots C_m\}$ mulțimea de predicate, $X = \{x_1 \dots x_n\}$ - mulțime de variabile
2: cât timp $C \neq \emptyset$ execută
    3: Alegem aleator $C_j \in C$.
    4: Fie x_i una dintre variabilele din C_j .
    5: $x_i \leftarrow$ true.
    6: Eliminăm din C toate predicatele ce îl conțin pe x_i .
7: return X

1.a

In cazul algoritmului nostru consideram ca $\exists$ o var x_1 care se afla in toate $C_i, i = \overline{1, m}$ si in rest valori unice $x_{C_{i1}}$ si $x_{C_{i2}}$ pentru fiecare $C_i, i = \overline{1, m}$.

In acest caz algoritmul nostru poate sa selecteze toate variabilele ignorand x_1, deci problema care are $OPT = 1$, algoritmul nostru poate fi $ALG = 2m$, adica nu are o aproximare fixa, si poate lua valori foarte mari.

Deci factorul de aproximare worst case este $ALG = 2mOPT$

1.b

Pentur a obtine un algoritm 3-aproximativ trebuie sa modificam linia 4, sa faca toate valorile $x_i = 1, x_i \in C_j$

Greedy-3CNF(C, X)
1: $C = \{C_1 \dots C_m\}$ mulțimea de predicate, $X = \{x_1 \dots x_n\}$ - mulțime de variabile
2: cât timp $C \neq \emptyset$ execută
    3: Alegem aleator $C_j \in C$.
    4: Pentru fiecare $x_i \in C_j$.
        5: $x_i \leftarrow$ true.
        6: Eliminăm din C toate predicatele ce îl conțin pe x_i .
7: return X

Acum trebuie sa demonstram ca $ALG \leq 3OPT$

La fiecare pas al algoritmului retinem in P_i clauzele scoase din C. Sa presupunem ca sunt k pasi.

Deci $P_i = \{C_j \in C \mid C_j \text{ a fost scos la pasul i}\}$

Notam $P = \{P_i \mid i = \overline{1,k}\}$

Este evident ca P este o partitie peste C, adica $\nexists$ 2 clauze comune intre oricare P_i, P_j si $\bigcup_{i=1}^{k} P_i = C$.

Deci observam ca intre oricare 2 multimi $P_i, P_j; \exists C_a \in P_i$ si $C_b \in P_j$ astfel incat C_a si C_b nu au niciun x in comun.

Asadar, optimul $OPT \geq |P|$ deoarece in cel mai bun caz $\forall P_i \in P$ necesita doar un $x_i = 1$.

Evdent $ALG = 3 \cdot |P|$ (adica 3* numarul de pasi al algoritmului in care facem cate 3 variabile 1).

Asadar

$$ALG = 3 \cdot |P| \leq 3OPT \implies ALG \leq 3OPT$$

1.c

Ca sa traducem in programare liniara considerm urmatoarea situatie in programare liniara 0/1, care e chivalenta cu problema 3CNF:

minimizam $\sum_{i=1}^{n} x_i$
a.i. $x_a + x_b + x_c \geq 1$ unde $x_a, x_b, x_c \in C_i, i = \overline{1,m}$
$x_i \in \{0,1\}$

Notam $OPT_{lin_{0/1}}$ rezultatul acestei probleme de programare liniara 0/1 si fie OPT optimul pentru 3CNF. Observam ca:

$$OPT_{lin_{0/1}} = OPT$$

Dar problema de programare liniara 0/1 prezentata mai sus este NPC. Deci vom face o relaxare a problemei pentru a o duce in programare liniara cu numere reale. Notam cu x'_i valoarea lui x_i dusa in $\in [0,1]$

Deci acum avem:

minimizam $\sum_{i=1}^{n} x'_i$
a.i. $x'_a + x'_b + x'_c \geq 1$ unde $x_a, x_b, x_c \in C_i, i = \overline{1,m}$
$0 \leq x'_i \leq 1$

Fie OPT_{lin} valoarea sumei $\sum_{i=1}^{n} x'_i$ in urma rezolvarii problemei de programare liniara prezentata mai sus. Observam ca $OPT_{lin} \leq OPT_{lin_{0/1}}$ deoarece noi am facut o relaxare a variantei 0/1, adica este cel putin la fel de buna ca ea.

Adica cum $OPT_{lin_{0/1}} = OPT$, obtinem:

$$OPT_{lin} \leq OPT$$

Acum avem algoritmul pentru problema 3CNF:

Prog-liniara-3CNF(C, X)
1: $X = \{x_1 \ldots x_n\}$ - mulțime de variabile, $X' = \{x'_1 \ldots x'_n\}$ - variabilele $\in [0, 1]$
2: Rezolva urmatoarea problema de programare liniara:
3: minimizam $\sum_{i=1}^{n} x'_i$
a.i. $x'_a + x'_b + x'_c \geq 1$ unde $x_a, x_b, x_c \in C_i, i = \overline{1, m}$
$0 \leq x'_i \leq 1$
4: $X = \{x_i = 1 \mid x'_i \leq \frac{1}{3}\}$
5: return X

1.d

In primul rand trebuie sa demonstram ca toate clauzele $C_i \in C$ sunt satisfacute.

Acest lucru reiese din constrangerea $x'_a + x'_b + x'_c \geq 1$, adica cel putin o variabila este $\geq \frac{1}{3}$ adica ia o valoare finala 1, asta pentru fiecare $C_i \in C$. Deci algoritmul rezolva corect problema 3CNF.

Acum trebuie sa demonstram ca $ALG \leq 3OPT$

Este evident ca $ALG = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Deci avem ca

$$OPT_{lin} = \sum_{i=1}^{n} x'_i$$

Si stim ca $OPT_{lin} \leq OPT$ si $x'_i \geq \frac{1}{3}$ pentru orice x_i care are valoarea 1 la final. Deci:

$$ALG = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} x'_i \leq 3 \cdot OPT_{lin} \leq 3 \cdot OPT$$

Deci avem ca algoritmul nostru este 3-aproximativ:

$$ALG \leq 3OPT$$