TSP

1 Problema 1

TSP unde muchiile au ponderea 1 sau 2.

Sa pp. ca $\exists$ un algoritm polinomial si aproximativ $ALG \leq cOPT$ unde OPT e o rezolvare optima pentru TSP.

1.a

Fie G graful cu n noduri si ponderi 1 si 2 $\rightarrow$ observam ca OPT e maxim $2n$.

Stim ca problema determinarii unui HC in G este NPC.

Construim G' complet, muchiile comune intre G si G' isi pastreaza costul iar celelalte muchii vor avea costul $c \cdot 2n$. Acum avem 2 cazuri:

1. daca G are un HC $\implies$ ALG va oferi un traseu de cost cel mult $c \cdot 2n$
2. daca G nu are un HC $\implies$ ALG va oferi cel mai bun traseu posibil cu cel mult $n-1$ noduri de cost 1 si 2, iar restul de cost $c \cdot 2n$. Adica cel mai bun traseu va fi $ALG \geq (n-1) + c \cdot 2n$

Adica putem determina in timp polinomial daca G este sau nu Hamiltonian $\implies$ HC se poate rezolva in timp polinomial. Contradictie (HC e NPC)!

Deci aceasta varianta a TSP-ului este tot NP-hard.

1.b

Regula triunghiului $L_3 \geq L_2 \geq L_1 \implies L_3 \leq L_2 + L_1$

Deci pentru a demonstra ca regula triunghiului tine trebuie sa selectam L_3 maximul posibil si elementele L_2 si L_1 minime

Adica vom considera $L_3 = 2$ si $L_2 = 1, L_1 = 1 \implies 2 \leq 1 \leq 1$ si $2 \leq 1 + 1$ adevarate deci regula triunghiului tine in aceasta instanta.

1.c

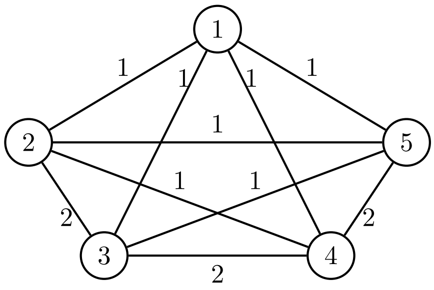
Am vazut din curs ca daca $len((u,v)) \leq len((u,w)) + len((w,v))$ atunci si relatia urmatoare are loc:

$$len((v_1, v_k)) \leq len(v_1, v_2 \ldots v_k) \text{ unde } v_1, v_2 \ldots v_k \text{ e un lant.}$$

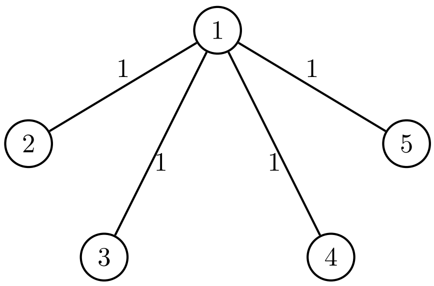
Mai stim din curs ca $OPT \geq MST$

Considerand acelasi algoritm descris in curs, care se bazeaza pe un MST, sa presupunem ca avem $ALG \leq \frac{3}{2}MST \leq \frac{3}{2}OPT$. Observam ca din cauza ca MST e un lower bound pentru OPT trebuie sa aratam direct ca $ALG > \frac{3}{2}OPT$

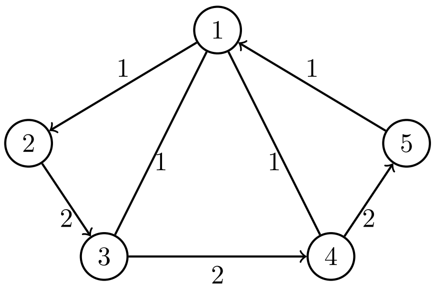
Fie graful G:



Presupunem ca algoritmul nostru va considera urmatorul MST

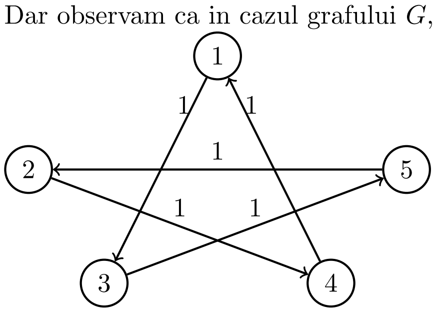


Considerand ca algoritmul din curs nu face nicio optimizare in ordinea in care selecteaza nodurile din MST, algoritmul nostru poate considera ca solutie pentru TSP urmatorul ciclu:



Deci $ALG = len(1, 2, 3, 4, 5, 1) = 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$

Dar observam ca in cazul grafului G, solutia OPT este:



Deci $OPT = len(1, 3, 5, 2, 4, 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

Deci avem ca:

$$ALG \leq \frac{3}{2}OPT \Leftrightarrow ALG = 8 \leq \frac{3}{2}OPT = \frac{3}{2}5 = 7.5 \Leftrightarrow 8 \leq 7.5$$

Deci avem ca $ALG > \frac{3}{2}OPT$, adica ALG nu este $\frac{3}{2}$ aproximativ.