

Algoritmi Aproximativi (1p oficiu)

deadline - saptamana 6

Knapsack (2p):

- 1) Fie un șir de numere naturale $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ și un număr natural K , cu $K \geq s_i$ pentru orice i între 1 și n .
 - a) Să se scrie un algoritm pseudo-polinomial care găsește suma maximă, dar care să fie $\leq K$, ce poate fi formată din elemente din S (numere întregi, pozitive, luate cel mult o singură dată). (1p)
 - b) Să se găsească un algoritm aproximativ care calculează o sumă cel puțin pe jumătate de mare ca cea optimă dar rulează în timp $O(n)$ și complexitate spațiu $O(1)$. Mai exact: aveți voie să parcurgeți fiecare element din S cel mult o singură dată, respectiv aveți memorie alocată doar pentru 3 variabile de tip int (dintre care una este K) + variabile de tip stream (1p)

Load Balance (max 3p):

- 1) Fie o iterație a problemei Load Balancing (Cursul 2, slide-ul 16) pentru 2 mașini. La seminarul de algoritmi aproximativi unul dintre studenți propune un algoritm de rezolvare și susține că acesta este 1.1 aproximativ. El rulează algoritmul pe un set de n activități și obține o încărcătură de 80 pe una dintre mașini, respectiv 120 pe cealaltă. Este posibil ca factorul lui de aproximare să fie corect?
 - a) ținând cont că rezultatul obținut anterior a fost făcut pe un set de activități, fiecare cu timpul de lucru cel mult 100 (0.5p)
 - b) ținând cont că rezultatul obținut anterior a fost făcut pe un set de activități, fiecare cu timpul de lucru cel mult 10 (0.5p)
- 2) Fie ALG1 și ALG2 - doi algoritmi de rezolvare pentru aceeași problemă de **minimizare**. ALG1 este un algoritm 2-aproximativ, respectiv ALG2 este un algoritm 4-aproximativ. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții, dând și o scurtă justificare.
 - a) Există cu siguranță un input I pentru care $ALG2(I) \geq 2 \cdot ALG1(I)$ (0,5p)
 - b) Nu există niciun input I pentru care $ALG1(I) > 2 \cdot ALG2(I)$ (0,5p)
- 3) Fie algoritmul Ordered-Scheduling Algorithm (Cursul 2, slide-ul 42) care implică algoritmul descris anterior (slide 19) la care adăugăm o preprocesare cu care sortăm descrescător activitățile după timpul de desfășurare. Th. 2 afirmă că acest algoritm este $3/2$ aproximativ. Arătați că acest factor de aproximare poate fi îmbunătățit la $3/2 - 1/(2m)$. (2p)

TSP (max 2p):

- 1) Fie varianta TSP unde toate muchiile au ponderea 1 sau 2.
 - a) arătați că problema rămâne NP-hard pentru aceste instanțe (1p)
 - b) arătați că aceste ponderi satisfac în continuare inegalitatea triunghiului. (0p)

- c) Algoritmul descris în curs (c3, slides 18-19) oferă o aproximare de ordin 2 pentru forma generală a TSP (cu regula triunghiului). **Verificați dacă în aceasta instanța a problemei, algoritmul din curs este 3/2 aproximativ!** (1p)
- 2) Fie P o mulțime de puncte în plan. Din cursurile anterioare știm să construim un MST pe baza punctelor din P . Numim acest arbore T . Uneori, adăugând și alte puncte pe lângă cele din P , putem obține un MST cu cost mai mic. Un asemenea arbore, construit prin adăugare de noduri se numește Steiner Tree. Algoritmii pt calcularea de ST-uri sunt (cel mai adesea) NP-hard.
- Arătați că există cazuri în care alegând un punct $q \notin P$ MST-ul pentru mulțimea de puncte $P \cup \{q\}$ are un cost mai mic decât T (1)
 - Fie Q o mulțime de puncte în plan, disjuncte față de P . Arătați că T este de cel mult de 2 ori ca și cost MST-ului pentru punctele $P \cup Q$. Altfel spus, odată ce avem un MST pentru P , putem îmbunătăți rezultatul adăugând alte puncte, dar niciodată cu mai mult de un factor de 2. (1p)

Vertex Cover (max 2p):

Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o mulțime de variabile de tip bool. Numim formulă booleană peste mulțimea X o formulă CNF (conjunctive normal form) o expresie de forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ unde fiecare predicat (clause) C_i este o disjuncție a unui număr de variabile (e alcătuit din mai multe variabile cu simbolul v - logical or - între ele).

Exemplu de astfel de expresie:

$$(x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_7) \wedge (x_1 \vee x_5 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_7).$$

Evident că orice expresie de acest tip va fi evaluată cu "true" dacă toate elementele lui X iau valoarea true. Ne interesează în schimb, să aflăm un număr minim de elemente din X care trebuie să aibă valoarea *true* astfel încât toată expresia să fie *true*.

Fie următorul algoritm pentru problema în forma 3CNF

Greedy-3CNF(C, X)

1: $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ mulțimea de predicate, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - mulțime de variabile

2: cât timp $C \neq \emptyset$ execută

3: Alegeți aleator $C_j \in C$.

4: Fie x_i una dintre variabilele din C_j .

5: $x_i \leftarrow \text{true}$.

6: Eliminați din C toate predicatele ce îl conțin pe x_i .

7: return X

- Analizați factorul de aproximare (worst case) al algoritmului (0,5 p)
- Modificați algoritmul de mai sus, astfel încât acesta să fie un algoritm 3-aproximativ pentru problema inițială (și justificați) (0,5p)
- Reformulați problema de mai sus sub forma unei probleme de programare liniară (0,5p)
- Dați o soluție 3-aproximativă pentru problema de programare liniară (0,5p)