Vertex Cover

1 Problema 1

Deci avem $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ multimea variabilelor de tip bool si $C = \{C_1, C_2 \dots C_m\}$ cele m clauze si algoritmul:

Greedy-3CNF(C, X)
1: $C = \{C_1 \dots C_m\}$ mulțimea de predicate, $X = \{x_1 \dots x_n\}$ - mulțime de variabile
2: cât timp $C \neq \emptyset$ execută
    3: Alegem aleator $C_j \in C$.
    4: Fie x_i una dintre variabilele din C_j .
    5: $x_i \leftarrow$ true.
    6: Eliminăm din C toate predicatele ce îl conțin pe x_i .
7: return X

1.a

In cazul algoritmului nostru consideram ca $\exists$ o var x_1 care se afla in toate $C_i, i = \overline{1, m}$ si in rest valori unice $x_{C_{i1}}$ si $x_{C_{i2}}$ pentru fiecare $C_i, i = \overline{1, m}$.

In acest caz algoritmul nostru poate sa selecteze toate variabilele ignorand x_1, deci problema care are $OPT = 1$, algoritmul nostru poate fi $ALG = 2m$, adica nu are o aproximare fixa, si poate lua valori foarte mari.

Deci factorul de aproximare worst case este $ALG = 2mOPT$

1.b

Pentru a obtine un algoritm 3-aproximativ trebuie sa modificam linia 4, sa faca toate valorile $x_i = 1, x_i \in C_j$

Greedy-3CNF(C, X)
1: $C = \{C_1 \dots C_m\}$ mulțimea de predicate, $X = \{x_1 \dots x_n\}$ - mulțime de variabile
2: cât timp $C \neq \emptyset$ execută
    3: Alegem aleator $C_j \in C$.
    4: Pentru fiecare $x_i \in C_j$.
        5: $x_i \leftarrow$ true.
        6: Eliminăm din C toate predicatele ce îl conțin pe x_i .
7: return X

Acum trebuie sa demonstram ca $ALG \leq 3OPT$

La fiecare pas al algoritmului retinem in P_i clauzele scoase din C. Sa presupunem ca sunt k pasi.

Deci $P_i = \{C_j \in C \mid C_j$ a fost scos la pasul i$\}$

Notam $P = \{P_i \mid i = \overline{1,k}\}$

Este evident ca P este o partitie peste C, adica $\nexists$ 2 clauze comune intre oricare P_i, P_j si $\bigcup_{i=1}^{k} P_i = C$.

Deci observam ca intre oricare 2 multimi $P_i, P_j; \exists C_a \in P_i$ si $C_b \in P_j$ astfel incat C_a si C_b nu au niciun x in comun.

Asadar, optimul $OPT \geq |P|$ deoarece in cel mai bun caz $\forall P_i \in P$ necesita doar un $x_i = 1$.

Evdent $ALG = 3 \cdot |P|$ (adica 3* numarul de pasi al algoritmului in care facem cate 3 variabile 1).

Asadar

$$ALG = 3 \cdot |P| \leq 3OPT \implies ALG \leq 3OPT$$

1.c

Ca sa traducem in programare liniara considerm urmatoarea situatie in programare liniara 0/1, care e chivalenta cu problema 3CNF:

minimizam $\sum_{i=1}^{n} x_i$
a.i. $x_a + x_b + x_c \geq 1$ unde $x_a, x_b, x_c \in C_i, i = \overline{1,m}$
$x_i \in \{0,1\}$

Notam $OPT_{lin_{0/1}}$ rezultatul acestei probleme de programare liniara 0/1 si fie OPT optimul pentru 3CNF. Observam ca:

$$OPT_{lin_{0/1}} = OPT$$

Dar problema de programare liniara 0/1 prezentata mai sus este NPC. Deci vom face o relaxare a problemei pentru a o duce in programare liniara cu numere reale. Notam cu x'_i valoarea lui x_i dusa in intervalul $[0,1]$, adica $x'_i \in [0,1]$

Deci acum avem:

minimizam $\sum_{i=1}^{n} x'_i$
a.i. $x'_a + x'_b + x'_c \geq 1$ unde $x_a, x_b, x_c \in C_i, i = \overline{1,m}$
$0 \leq x'_i \leq 1$

Fie OPT_{lin} valoarea sumei $\sum_{i=1}^{n} x'_i$ in urma rezolvarii problemei de programare liniara prezentata mai sus. Observam ca $OPT_{lin} \leq OPT_{lin_{0/1}}$ deoarece noi am facut o relaxare a constrangerilor variantei 0/1, adica este cel putin la fel de buna ca ea.

Adica cum $OPT_{lin_{0/1}} = OPT$, obtinem:

$$OPT_{lin} \leq OPT$$

Acum avem algoritmul pentru problema 3CNF:

Prog-liniara-3CNF(C, X)
1: $X = \{x_1 \ldots x_n\}$ - mulțime de variabile, $X' = \{x'_1 \ldots x'_n\}$ - variabilele $\in [0, 1]$
2: Rezolva urmatoarea problema de programare liniara:
3: minimizam $\sum_{i=1}^{n} x'_i$
a.i. $x'_a + x'_b + x'_c \geq 1$ unde $x_a, x_b, x_c \in C_i, i = \overline{1, m}$
$0 \leq x'_i \leq 1$
4: $X = \{x_i = 1 \mid x'_i \geq \frac{1}{3}\}$
5: return X

1.d

In primul rand trebuie sa demonstram ca toate clauzele $C_i \in C$ sunt satisfacute.

Acest lucru reiese din constrangerea $x'_a + x'_b + x'_c \geq 1$, adica cel putin o variabila este $\geq \frac{1}{3}$ adica ia o valoare finala 1, asta pentru fiecare $C_i \in C$. Deci algoritmul rezolva corect problema 3CNF.

Acum trebuie sa demonstram ca $ALG \leq 3OPT$

Este evident ca $ALG = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Deci avem ca

$$OPT_{lin} = \sum_{i=1}^{n} x'_i$$

Si stim ca $OPT_{lin} \leq OPT$ si $x'_i \geq \frac{1}{3}$ pentru orice x_i care are valoarea 1 la final. Deci:

$$ALG = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} x'_i \leq 3 \cdot OPT_{lin} \leq 3 \cdot OPT$$

Deci avem ca algoritmul nostru este 3-aproximativ:

$$ALG \leq 3OPT$$