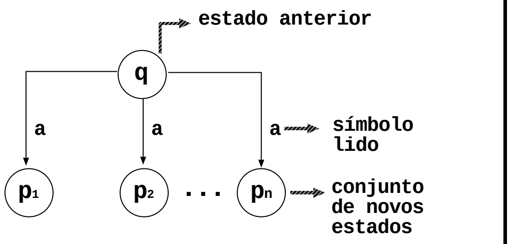
Equivalência entre AFD e AFN

Autômato Finito Não-Determinístico (AFN)



A função programa, ao processar um entrada (estado corrente e símbolo lido), tem como resultado um conjunto de novos estados.

O não determinismo é uma importante generalização dos modelos de máquinas, sendo de fundamental importância no estudo da teoria da computação e das linguagens formais. Qualquer AFN pode ser simulado por um AFD.

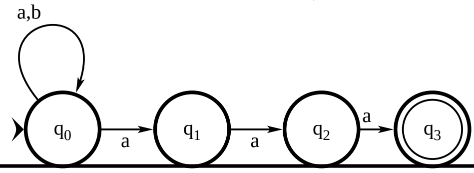
Pode-se entender que o AFN assume simultaneamente todas as alternativas de estados possíveis $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ a partir do estado atual (q) e do símbolo lido (a).

Exemplo

$L = \{w \mid w \in (\mathtt{a}^*|\mathtt{a}^+\mathtt{b}^*)\ \}$

$M\ =\ (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{q_0, q_1\}$
$F = \{q_0, q_1\}$

δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	-
q_1	-	$\{q_1\}$



- o ciclo em q_0 realiza uma varredura pela entrada de símbolos a's
- o caminho q_0/q_1 garante a ocorrência de a antes da ocorrência de b's

AFN - Definição

- $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
  - Σ – alfabeto de símbolos de entrada
  - Q – conj. de estados possíveis do autômato o qual é finito
  - δ – função de transição
  - q_0 – estado inicial ($q_0 \in Q$)
  - F – conjunto dos estados finais tal que F está contido em Q

A linguagem aceita por um autômato finito não-determinístico $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ denotada por ACEITA(M), ou L(M) é o conjunto de todas as palavras pertencentes a Σ^* tais que existe pelo menos um caminho alternativo que aceita a palavra.

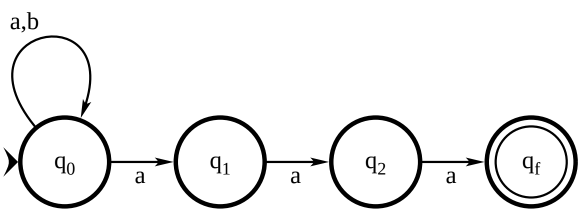
Analogamente, REJEITA(M) é o conjunto de todas as palavras pertencentes a Σ^* rejeitadas por todos os caminhos alternativos de M (a partir de q_0).

Exercício

$L = \{w \mid w$ possui aaa como sufixo$\}$

$M\ =\ (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_f\}$
$F = \{q_f\}$

δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	-
q_2	$\{q_f\}$	-
q_f	-	-



Exercícios

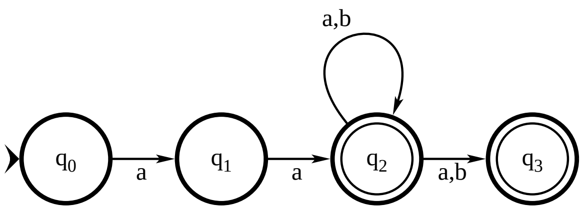
Desenvolver AFNs que reconheçam as seguintes linguagens sobre $\Sigma = \{a, b\}$

1. $L_1 = \{w \mid$ o prefixo de w é aa$\}$
2. $L_2 = \{w \mid w$ possui aa ou bb como subpalavra$\}$
3. $L_3 = \{w \mid w$ possui um número par de a e b$\}$
4. $L_4 = \{w|w$ possui um número ímpar de a$\}$

Possíveis soluções:

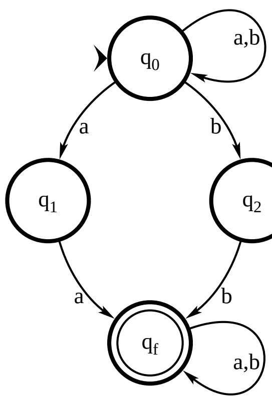
1. $M_1 = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
   $\Sigma = \{a, b\}$
   $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
   $F = \{q_2, q_3\}$

δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	-
q_1	$\{q_2\}$	-
q_2	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_3	-	-



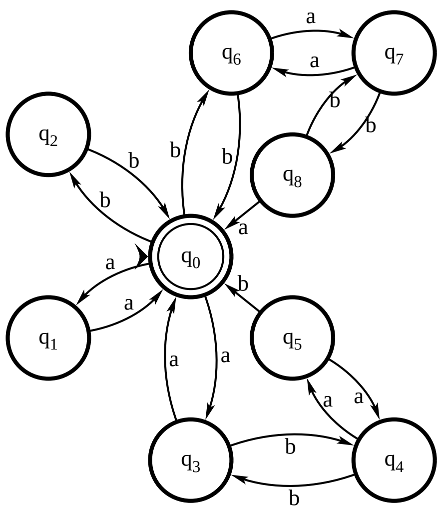
2. $M_2 = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
   $\Sigma = \{a, b\}$
   $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_f\}$
   $F = \{q_f\}$

δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_f\}$	-
q_2	-	$\{q_f\}$
q_f	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$



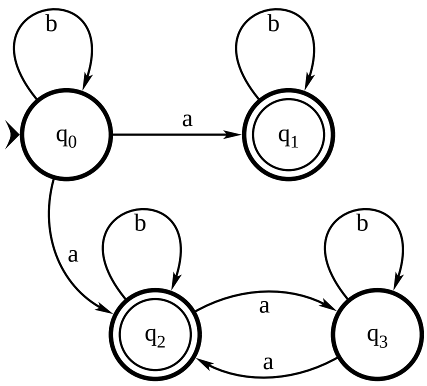
3. $M_3 = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
   $\Sigma = \{a, b\}$
   $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$
   $F = \{q_0\}$

δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_6\}$
q_1	$\{q_0\}$	-
q_2	-	$\{q_0\}$
q_3	$\{q_0\}$	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_5\}$	$\{q_3\}$
q_5	$\{q_4\}$	$\{q_0\}$
q_6	$\{q_7\}$	$\{q_0\}$
q_7	$\{q_6\}$	$\{q_8\}$
q_8	$\{q_0\}$	$\{q_7\}$



4. $M_4 = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$
   $\Sigma = \{a, b\}$
   $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
   $F = \{q_1, q_2\}$

δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	-	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_f	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$



Equivalência entre AFD e AFN

- Um autômato finito não-determinístico pode se transformar em um autômato finito determinístico equivalente.
- Dois autômatos são considerados equivalentes se aceitam a mesma linguagem.

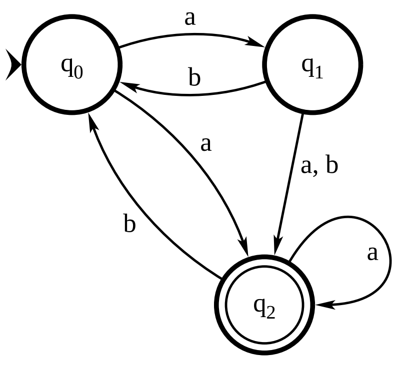
Embora a facilidade de não-determinismo seja, aparentemente, um significativo acréscimo ao Autômato Finito, na realidade não aumenta seu poder computacional. Assim, para cada AFN, é possível construir um AFD equivalente que realiza o mesmo processamento. O contrário também é verdadeiro.

Equivalência entre AFD e AFN

Para construir um AFD a partir de um AFN qualquer, devemos realizar os seguintes passos:

1. Construir a tabela de transições do AFN (φ).
2. Construir a tabela de transições do AFD (δ) através do produto cartesiano dos estados de φ, incluindo como último conjunto o vazio.
3. Mostrar todos os conjuntos que contém como elemento estados finais como novo estado final de δ.

Exemplo: Considere o AFN seguinte:



1. Construir a tabela de transições do AFN (φ):

φ	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	-
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$

2. Construir a tabela de transições do AFD (δ) através do produto cartesiano dos estados de φ, incluindo como último conjunto o vazio:

δ	a	b
$S_0 = \{q_0\}$		
$S_1 = \{q_1\}$		
$S_2 = \{q_2\}$		
$S_3 = \{q_0, q_1\}$		
$S_4 = \{q_0, q_2\}$		
$S_5 = \{q_1, q_2\}$		
$S_6 = \{q_0, q_1, q_2\}$		
$S_7 = \{\ \}$		

Obs.: Sempre existirá 2^k combinações, onde k é o número de estados do AFN.

3. Mostrar todos os conjuntos que contém como elemento estados finais como novo estado final de δ:

δ	a	b
$S_0 = \{q_0\}$		
$S_1 = \{q_1\}$		
$\mathbf{S_2 = \{q_2\}}$		
$S_3 = \{q_0, q_1\}$		
$\mathbf{S_4 = \{q_0, q_2\}}$		
$\mathbf{S_5 = \{q_1, q_2\}}$		
$\mathbf{S_6 = \{q_0, q_1, q_2\}}$		
$S_7 = \{\ \}$		

Equivalência entre AFD e AFN

4. Verificar a ocorrência de cada conjunto de δ em relação a um símbolo e colocar como resultado o conjunto correspondente que pertence a δ. Quando existir mais de um elemento no conjunto a ocorrência passa a ser a união das ocorrências de todas as transições.
5. Eliminar as linhas que possuem transições somente com saídas (não existe transição que chega até ela, isto é, estado inacessível).

4. Verificar a ocorrência de cada conjunto de δ em relação a um símbolo e colocar como resultado o conjunto correspondente que pertence a δ. Quando existir mais de um elemento no conjunto a ocorrência passa a ser a união das ocorrências de todas as transições:

δ	a	b
$S_0 = \{q_0\}$	S_5	S_7
$S_1 = \{q_1\}$	S_2	S_4
$\mathbf{S_2 = \{q_2\}}$	S_2	S_0
$S_3 = \{q_0, q_1\}$	S_5	S_4
$\mathbf{S_4 = \{q_0, q_2\}}$	S_5	S_0
$\mathbf{S_5 = \{q_1, q_2\}}$	S_2	S_4
$\mathbf{S_6 = \{q_0, q_1, q_2\}}$	S_5	S_4
$S_7 = \{\ \}$	S_7	S_7

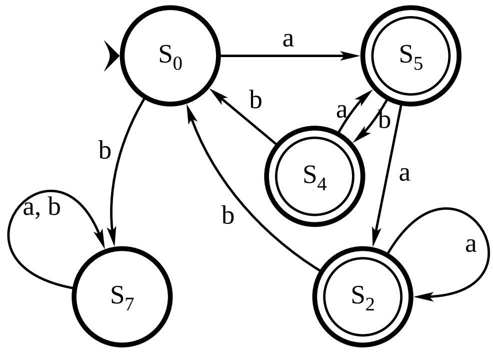
5. Eliminar as linhas que possuem transições somente com saídas, ou seja, não existe nenhuma transição que chega até ela (estado inacessível):

δ	a	b
$S_0 = \{q_0\}$	S_5	S_7
$\mathbf{S_2 = \{q_2\}}$	S_2	S_0
$\mathbf{S_4 = \{q_0, q_2\}}$	S_5	S_0
$\mathbf{S_5 = \{q_1, q_2\}}$	S_2	S_4
$S_7 = \{\ \}$	S_7	S_7

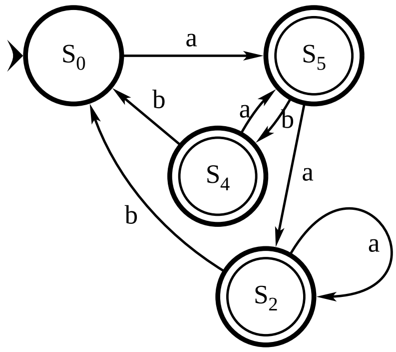
Equivalência entre AFD e AFN

6. Montar o AFD a partir de δ.
7. Eliminar os estados que não possuem saída para outro estado e não são finais.
8. Verificar se uma cadeia que pertencia ao AFN também pertence ao AFD gerado.

6. Montar o AFD a partir de δ:



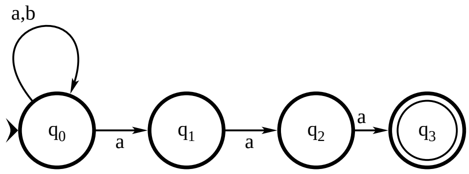
7. Eliminar os estados que não possuem saída para outro estado e não são finais:

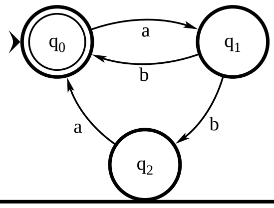


8. Verificar se uma cadeia abababaaba que pertencia ao AFN também pertence ao AFD gerado:

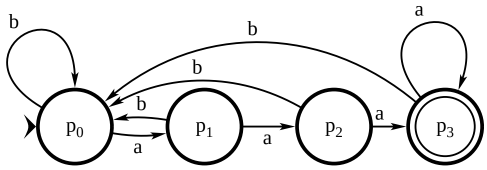
$S_0 \xrightarrow{a} S_5 \xrightarrow{b} S_4 \xrightarrow{a} S_5 \xrightarrow{b} S_4 \xrightarrow{a} S_5 \xrightarrow{a} S_2 \xrightarrow{b} S_0 \xrightarrow{a} S_5$

Transforme os AFNs em AFDs

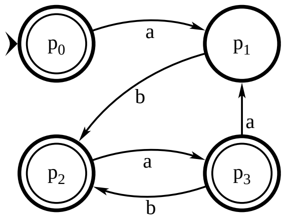




1. $p_0 = \{q_0\}$
   $p_1 = \{q_0, q_1\}$
   $p_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$
   $p_3 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$



2. $p_0 = \{q_0\}$
   $p_1 = \{q_1\}$
   $p_2 = \{q_0, q_2\}$
   $p_3 = \{q_0, q_1\}$



Sugestão de exercícios: você pode transformar os AFNs da aula 4 em AFDs.