Terjesszük ki a Green-függvényt a komplex félsíkon, hogy megkapjuk a gerjesztéseket! $i\omega_n \to \omega + i\varepsilon$

Hol divergál $G_{1,1}^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ függvény? Ahol a nevező 0 lesz. Ezek adják meg az elemi gerjesztéseket. Ezeknek a frekvenciái, vagyis ahol $D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)\Big|_{\omega=\hbar E_\mathbf{k}} = 0$: $0 = E_\mathbf{k}^2 - \hbar^{-2}\left(e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})\right)^2 + \hbar^{-2} n_0^2 v^2(\mathbf{k})$, ebből kifejezhető: $E_\mathbf{k} = \sqrt{e_\mathbf{k}\left(e_\mathbf{k} + 2n_0 v(\mathbf{k})\right)}$, mely kicsi $\mathbf{k}$ értékekre: $E_\mathbf{k} \approx \hbar c \cdot k$, ahol $e_\mathbf{k} = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ összefüggést helyettesítettünk be és $c = \sqrt{\dfrac{n_0 v(0)}{m}}$ a Bogoljubov hangsebesség.

$D(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left(i\omega_n - \hbar^{-1} E_k\right)\left(i\omega_n + \hbar^{-1} E_k\right)$, így $G_{1,1}^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ parciális törtek alakjában felírva:

$G_{1,1}^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \dfrac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_\mathbf{k}} - \dfrac{v_k^2}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_\mathbf{k}}$, ahol $u_k^2 = \dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_\mathbf{k}}\right]$ és $v_k^2 = \dfrac{1}{2}\left[-1 + \dfrac{e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_\mathbf{k}}\right]$. Az anomális Green-függvény pedig: $G_{1,2}^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -u_k v_k \cdot \left(\dfrac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_\mathbf{k}} - \dfrac{1}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_\mathbf{k}}\right)$.

Bogoljubov-Hartree közelítés

Csak a Hartree tagot vesszük figyelembe. Ez a legegyszerűbb közelítés a Bogoljubov közelítésen túl.

a) kondenzátum részecskeszám (sűrűség) és kémiai potenciál kapcsolata

1. ábra

Ekkor $\mu = v(0) \cdot (n_0 + n') = v(0) \cdot n$. Fontos, hogy itt $v(0)$-at már a teljes részecskeszám-sűrűséggel szorozzuk. A kondenzátumon kívüli részecskeszám sűrűsége:

$n' = N'/V = \int \dfrac{d^3 q}{(2\pi)^3} \dfrac{1}{e^{\beta e_\mathbf{q}} - 1} = \dfrac{1}{(2\pi)^3 \lambda^3} \Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) F\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$, ahol $F(s, \gamma) = \dfrac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^\infty dt \dfrac{t^{s-1}}{e^{t+\gamma} - 1} = Li_s\left(e^{-\gamma}\right)$,

ahol Li_s az ún. polilogaritmikus függvény, $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, és $\lambda = \dfrac{\hbar^2}{2mk_B T}$, valamint

$F(s, 0) = \zeta(s)$. $n' = n \cdot (T/T_c)^{3/2}$ és $n_0 = n - n' = n\left[1 - (T/T_c)^{3/2}\right]$ és $n = n'(T_c)$, mint ahogy azt már megszokhattuk.

b) sajátenergiák

2. ábra

$\hbar\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = (-\mu) + v(0) n_0 + v(\mathbf{k}) n_0 + v(0) n'$, az anomális sajátenergia pedig: $\hbar\Sigma_{1,2} = v(\mathbf{k}) \cdot n_0$.

Vegyük észre, hogy $\hbar\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ 1, 2. és 4. tagjának összege 0, így $\hbar\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = v(\mathbf{k}) \cdot n_0$.

A Green-függvények: $G_{1,1}^{(B-H)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \dfrac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_\mathbf{k}} - \dfrac{v_k^2}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_\mathbf{k}}$ és

$G_{1,2}^{(B-H)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -u_k v_k \cdot \left(\dfrac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1} E_\mathbf{k}} - \dfrac{1}{i\omega_n + \hbar^{-1} E_\mathbf{k}}\right)$, ahol $E_\mathbf{k} = \sqrt{e_\mathbf{k}\left(e_\mathbf{k} + 2n_0 v(\mathbf{k})\right)}$, valamint

$u_k^2 = \dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_\mathbf{k}}\right]$ és $v_k^2 = \dfrac{1}{2}\left[-1 + \dfrac{e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})}{E_\mathbf{k}}\right]$. Vagyis láthatjuk, hogy ugyanazt kapjuk, mint a Bogoljubov közelítésnél. A különbség az, hogy $n_0(T) = n\left(1 - (T/T_c)^{3/2}\right)$ hőmérséklet-függő. Ez akkor a Bogoljubov közelítés, ha $T = 0$. Ebben a közelítésben $c \to 0$ ha $T \to T_c$.

Kondenzátumon kívüli atomok száma

$n' = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n'(k)$, melyben $n'(k) = \frac{-1}{\beta\hbar}\sum_m e^{i\nu_m\eta}\cdot G_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{-1}{\beta\hbar}\sum_m e^{i\nu_m\eta}\cdot\left[\frac{u_k^2}{i\omega_n - \hbar^{-1}E_\mathbf{k}} - \frac{v_k^2}{i\omega_n + \hbar^{-1}E_\mathbf{k}}\right]$.

Végezzük el a frekvencia szerinti integrálást!

$n'(k) = \frac{u_k^2}{e^{\beta E_\mathbf{k}} - 1} - \frac{v_k^2}{e^{-\beta E_\mathbf{k}} - 1} = \frac{u_k^2 + e^{\beta E_\mathbf{k}}\cdot v_k^2}{e^{\beta E_\mathbf{k}} - 1} = v_k^2 + \left(u_k^2 + v_k^2\right)\cdot\frac{1}{e^{\beta E_k} - 1}$. Ezt visszaírva n'-be, az már csak az integrálást kell elvégezni. Ez nem mindig tehető meg analitikusan, csak speciális esetekben. Pl

a) $T = 0$ esetén: $n'(k) = v_k^2 \Rightarrow n'\big|_{T=0} = \frac{8}{3}n_0\left(\frac{n_0 a^3}{\pi}\right)^{1/2}$

b) $T = T_c$ esetén: $\left.\begin{array}{r} E_\mathbf{k} = e_\mathbf{k} \\ v_k^2 = 0 \\ u_k^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow n'(k) = n(k)$

c) $T \to 0$, de $T \neq 0$ esetén: $n'\big|_T - n'\big|_{T=0} = \frac{1}{12}\frac{m}{c\hbar^3}(k_B T)^2$, ahol c a Bogoljubov hangsebesség, $c^2 = nv(0)/m$.

Érdekesség:

Bogoljubov közelítésben nézzük meg, hogy

$G_{1,1}^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \hbar^{-1}\left(e_\mathbf{k} + n_0\cdot v(\mathbf{k})\right)}{\left[i\omega_n - \hbar^{-1}\left(e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})\right)\right]\cdot\left[i\omega_n + \hbar^{-1}\left(e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})\right)\right] + \hbar^{-2}n_0^2 v(\mathbf{k})^2}$ Green-függvény felírható-e

$G_{1,1}^{B}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}e_\mathbf{k} - \Sigma^*(\mathbf{k}, i\omega_n)}$ alakban, azaz létezik-e ilyen Σ^* ? A válasz az, hogy igen, és

mégpedig: $\Sigma^*(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{\hbar^{-1}n_0 v(\mathbf{k})}{1 - \frac{\hbar^{-1}n_0\cdot v(\mathbf{k})}{-i\omega_n - \hbar^{-1}e_\mathbf{k}}}$ 3. ábra

Hugenholtz-Pines tétel:

$\Sigma_{1,1}(0,0) - \Sigma_{1,2}(0,0) = 0$ igaz a perturbációszámítás minden rendjében. Láthatjuk néha $\Sigma_{1,1}(0,0) - \Sigma_{1,2}(0,0) = \mu$ alakban is, de mi a kémiai potenciált a normális sajátenergia részeként kezeljük.

Bizonyítás: 4. ábra. Mik lehetnek ezek a $\Phi_{i,j}^{(r)}$ diagramok? 5-ábra

$$\Sigma_{1,1}^{(r)}(0,0) - \Sigma_{1,2}^{(r)}(0,0) = \frac{1}{N_0}\sum_{i,j}\left(i\cdot j - i(i-1)\right)\Phi_{i,j}^{(r)} = \frac{1}{N_0}\sum_i\left(i^2 - i^2 + i\right)\Phi_{i,j}^{(r)} = \frac{1}{N_0}\sum_i i\Phi_{i,i}^{(r)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{N_0}}\frac{1}{\sqrt{N_0}}\sum_i i\Phi_{1,1}^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{N_0}}\Sigma_{1,0}^{(r)}(0,0) = 0$$

Hogyan igazolja ez a tételt? Gap nékküli gerjesztés: $E_{\mathbf{k}\to 0} \to 0$, azaz $E_\mathbf{k}$ a 0-ból indul $\Rightarrow D(0,0) = 0$.

Behelyettesítve $D(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \hbar^{-1}\left(e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})\right)\right]\left[i\omega_n + \hbar^{-1}\left(e_\mathbf{k} + n_0 v(\mathbf{k})\right)\right] + \left(\hbar^{-1}n_0 v(\mathbf{k})\right)^2$ egyenletbe,

$$D(0,0) = -\Sigma_{1,1}(0,0)\Sigma_{2,2}(0,0) + \Sigma_{1,2}(0,0)\Sigma_{2,2}(0,0) = -\Sigma_{1,1}^2(0,0) + \Sigma_{1,2}^2(0,0) =$$
$$= -\left[\Sigma_{1,1}(0,0) - \Sigma_{1,2}(0,0)\right] \cdot \left[\Sigma_{1,1}(0,0) + \Sigma_{1,2}(0,0)\right]$$

, ahol felhasználtuk, hogy $\Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma_{2,2}(-\mathbf{k}, -i\omega_n)$, illetve $\Sigma_{1,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma_{2,1}(-\mathbf{k}, i\omega_n)$.