Analízis III

Simon László előadása alapján

ELTE, 2009. December

Előadó e-mail címe: simonl a ludens.elte.hu-nál

Ez a jegyzet **nem** szakirodalom s nem garantált, hogy az órai anyagot teljesen lefedi, az előadásokra bejárni ajánlott.

Ha a jegyzetben helyesírási, tartalmi vagy formai hibát találsz, kérlek jelezd az előadónak vagy a tuzesdaniel@gmail.com e-mail címen!

Differenciálegyenletek

09.07

(Simon Péter helyettesít) Mi a differenciálegyenlet?

Pl

1. $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$
2. $\ddot{x}(t) = F(t)/m$
3. $\partial_t u = \Delta u$
4. $\dot{x}(t) = x(t-1)$

Ezeket lehet rendszerezni: ODE (ordenary differential equation, azaz közönséges differenciál-egyenlet, 1-es és 2-es), PDE (partial differential equation, 3-as), FDE (functional differential equation, 4-es).

Most az ODE-val foglalkozunk. Mi a közönséges differenciál-egyenlet?

Definíció: legyen $F:\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, n-edrendű közönséges differenciálegyenlet: $\forall t$ -re $0 = F\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t),\dots,x^{(n)}(t)\right)$

Megjegyzés: egy ilyen n-edrendű egyenlet átírató elsőrendű rendszerré. Pl: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ egyenletet átírjuk: $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = \dot{x}(t)$. Ekkor y-ra az alábbi elsőrendű, kétismeretlenes rendszer áll fenn:

$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$

$\dot{y}_2(t) = -\omega^2 \cdot y_1(t)$

n-edrendűnél: $y_1 = x,\ y_2 = \dot{x},\ \dots,\ y_n = x^{(n-1)}$. Ekkor $(y_1,\dots,y_n)$ -re elsőrendű rendszert kapunk.

Definíció: legyen $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ elsőrendű (explicit) közönséges differenciálegyenlet-rendszer. Ismeretlen az $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ függvény. Koordinátánként kiírva:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t),\dots,x_n(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t),\dots,x_n(t))$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t),\dots,x_n(t))$$

Mivel foglalkozik a közönséges differenciálelmélet?

1. Mi a megoldás? Azaz számítsuk ki a megoldást. (Ezt már tanultuk.) Vannak:
    a. képlettel megoldhatók
    b. képlettel nem megoldhatók (de numerikusan közelíthetők)
2. Megoldás létezésének, egyértelműségének keresése, függése a paraméterektől
3. Milyen a megoldás? Pl periodikus-e, korlátos-e… A megoldást szeretnénk jellemezni annak kiszámítása nélkül. Pl $\dot{x} = x$ és $x(0) > 0$. Ekkor egyből látjuk, hogy x szigmon nő, akkor is, amikor még nem tudtuk, hogy konkrétan mi a megoldás.

Közönséges differenciálegyenlet megoldásának létezése és egyértelműsége

Pl: $\dot{x}(t) = x(t)$, ennek egy jó megoldása $x(t) = c\cdot e^t$, $c\in\mathbb{R}$, azaz végtelen sok megoldás van. Legyen kezdeti feltétel: $x(0) = a \in \mathbb{R}$ adott. Ekkor már csak 1 megoldás van az ilyen fajtákból: $c\cdot e^0 = a \Rightarrow c = a$, vagyis a megoldás $x(t) = a\cdot e^t$. De más fajtából lehetne még megoldás? Nem, ugyanis:

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

$$\dot{x}(t)\cdot e^{-t} - x(t)e^{-t} = 0$$

$$\left(x(t)\cdot e^{-t}\right)' = 0 \Rightarrow x(t)\cdot e^{-t} = c$$

Az implikáció csak akkor igaz, ha $D(x)$ (azaz a differenciáloperátor) egy intervallumon van értelmezve. Tehát $\exists k\in\mathbb{R}: x(t)e^{-t} = k \Leftrightarrow x(t) = k\cdot e^t$. A megoldás egyértelmű, mert bármilyen kezdőfeltételt adok meg, lesz pontosan 1 megoldás.

Másik példa: $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$. Mi a megoldás $x > 0$ -ra? $\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x(t)} = t + c \Rightarrow x(t) = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$. Hamis gyökök a parabolák „bal oldalai". $x < 0$ esetén a megoldás „lefelé fordított parabolák bal oldalai", hamis megoldás a parabolák „jobb oldalai". $x = 0$ esetén mindkét fajta megoldás jó. Így adott kezdeti feltétel mellett végtelen sok megoldás létezik. Ha $x(t_0) = a$ a kezdeti feltétel, akkor $a > 0$ esetén a megoldás csak lokálisan egyértelmű, de globálisan nem.

Mitől lesz a megoldás egyértelmű?

Tétel: ha $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ közönséges diffegyenletben az f függvény az x változóban teljesíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor a megoldás egyértelmű. Vagyis ha minden pont egy alkalmas környezetéhez $\exists L \in \mathbb{R}^+ : |f(t, p) - f(t, q)| \leq L \cdot |p - q|$, akkor a megoldás egyértelmű.

Pl: $g(x) = 5x$, vagy $g(x) = x^2$ teljesítik a lokális Lipschitz feltételt, de a $g(x) = \sqrt{|x|}$ már nem. Ez utóbbi 0-ban nem lok. Lip, csak 1-ben pl.

Észrevétel: ha a derivált létezik, és korlátos minden pont környezetében, akkor lok. Lip.

A tétel bizonyítása az alábbi lemmán alapszik: Gronwall lemma (egyszerű eset): legyen $u: [a, b] \to \mathbb{R}$ diffható, melyhez $\exists k \in \mathbb{R}^+ : \dot{u}(t) \leq k \cdot u(t)\ \forall t \in [a, b]$. Ekkor $u(t) \leq u(a) \cdot e^{k(t-a)}\ \forall t \in [a, b]$.

Bizonyítás: beszorzunk e^{-kt} -vel:

$\dot{u}(t) \cdot e^{-kt} - k \cdot u(t) \cdot e^{-kt} \leq 0$

$\left(u(t)e^{-kt}\right)' \leq 0$

$u(t)e^{-kt} \leq u(a)e^{-ka}$

$u(t) \leq u(a)e^{k(t-a)}$

Tétel bizonyítása: legyen x és y két megoldás, amelyekhez $\exists \tau \in \mathbb{R} : x(\tau) = y(\tau)$. Belátjuk, hogy $x(t) = y(t)\ \forall t$.

Bizonyítás $n = 1$ esetre: $u(t) = (x(t) - y(t))^2$,

$\dot{u}(t) = 2(x(t) - y(t)) \cdot (\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = 2(x(t) - y(t))(f(t, x(t)) - f(t, y(t)))$.

$\dot{u}(t) \leq |\dot{u}(t)| = 2|x(t) - y(t)| \cdot |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq 2|x(t) - y(t)| \cdot L \cdot |x(t) - y(t)| = 2L \cdot u(t)$ Gronwall alkalmazása:

$u(t) \leq u(a) \cdot e^{2L(t-a)}$, $u(\tau) = 0 \Rightarrow u(t) = (x(t) - y(t))^2 \leq 0 \Rightarrow x(t) = y(t)\ \forall t \geq \tau$. Hasonlóan igaz a $t \leq \tau$ -ra is.

A Hilbert tér geometriája, Fourier sorfejtés

09.14

Kiegésztés: fogalmaink használatához be kell vezetni a komplex Euklideszi tér fogalmát.

Komplex vektortér: a definíció analóg a valós vektortér definíciójával, kivéve: komplex számmal való szorzás is értelmezve van, a műveleti tulajdonságok ugyanazok.

Komplex Euklideszi tér: komplex vektortér (az alaptest a komplex számok halmaza, $\mathbb{C}$), plusz 2 elem skalárszorzata is értelmezve van, értéke komplex szám. A műveleti tulajdonságok analógok, eltérés: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (a felülhúzás a komplex konjugálás), ekkor amúgy $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ és $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$. (Vegyük észre, hogy a komplex vektortereken értelmezett skaláris szorzás kétféleképp definiálható. Itt - és a matematikában általában - a skaláris szorzás az első változójában lineáris és a másodikban konjugált lineáris. Fizikában fordítva, azaz az első változójában lineáris, a másodikban konjugált lineáris:$\langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$, illetve $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.)

Megjegyzés, példák komplex euklideszi térre:

- $\mathbb{C}^n$ esetén $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_j \in \mathbb{C}$, akkor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$, $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$
- $L^2(M)$ tér (komplex esetben), ha $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz: legyen $f: M \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + i \cdot f_2$. Legyen továbbá f_1, f_2 valós függvények. f mérhetősége azt jelenti, hogy f_1, f_2 mérhető $\Rightarrow \int_M f := \int_M f_1 + i\int_M f_2$.
  $f: M \to \mathbb{C}$ integrálható $\Leftrightarrow |f|$ integrálható, $|f|: M \to \mathbb{R}$ mérhető.
  Definíció: jelölje $L^2(M)$ az olyan $f: M \to \mathbb{C}$ mérhető függvények összességét, amelyekre $|f|^2$ integrálható. Könnyen belátható, hogy $L^2(M)$ komplex vektortér. Vezessük be ebben a következő skalárszorzatot: $\langle f, g\rangle := \int_M f\overline{g}$. Így egy Euklideszi teret kapunk. Sőt, a tér teljes, vagyis $L^2(M)$ Hilbert tér.
- Komplex l^2 tér, $x := (x_1, x_2, ..., x_j, ...)$, $x_j \in \mathbb{C}$, l^2 komplex euklideszi tér, ebben a skaláris szorzás $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$. Bizonyítható, hogy teljes is.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció: legyen X Hilbert tér (vagy akár Banach is). Egy $Y \subset X$ halmazt altérnek nevezzük, ha az összeadás és számmal való szorzás nem vezet ki belőle és zárt részhalmaz (a konvergencia nem vezet ki).

Definíció: legyen X Hilbert tér, s két eleme x és y. Ezek merőlegesek, vagyis $x \perp y$, ha $\langle x, y\rangle = 0$.

Definíció: legyen X Hilbert tér, $Y \subset X$ altér. Azt mondjuk, hogy az $x \in X$ elem Y ortogonális, ha $\forall y \in Y$ -ra $\langle x, y\rangle = 0$.

Definíció: legyen X Hilbert tér, $Y \subset X$ altér. Az Y altér ortogonális kiegészítő altérét, $Y^{\perp}$ -t így értelmezzük: $Y^{\perp} := \{x \in X : x \perp Y\}$.

Állítás: $Y^{\perp} \subset X$ is altér.

Bizonyítás: az összeadás és számmal való szorzás nem vezet ki belőle, ugyanis tfh $y_1, y_2 \in Y^{\perp}$, $x \in Y$ tetszőleges. Ekkor $\langle \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, x\rangle = \lambda_1\langle y_1, x\rangle + \lambda_2\langle y_2, x\rangle = 0$. $Y^{\perp}$ zárt halmaz, ugyanis legyen $y_j \in Y^{\perp}$,

$\lim(y_j) = y \in X$. Tudjuk, hogy $\langle y_j, x\rangle = 0\ \forall x \in Y$. $y_j \to y \Rightarrow \langle y_j, x\rangle \to \langle y, x\rangle$ minden rögzített x-re, ugyanis a skalárszorzat a tényezőktől folytonosan függ, tehát $\langle y, x\rangle = 0,\ \forall x \in X$ -re, vagyis $y \in Y^\perp$.

Megjegyzés: komplex Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, azaz $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ bizonyítása:

$0 \le \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle$

$0 \le \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \overline{\lambda}[\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, y\rangle]$

A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot válasszuk meg úgy, hogy $\overline{\lambda}$ együtthatója 0 legyen. Ez teljesül, ha $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ ($y = 0$ triviális eset, így feltesszük, hogy $y \neq 0$), behelyettesítve: $0 \le \langle x, x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y, x\rangle = \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \Rightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

Riesz-féle felbontási tétel: legyen X Hilbert tér, Y egy altere, $Y^\perp$ az Y-nak ortogonális kiegészítő altere! Ekkor $\forall x \in X$ elemre $x = y + z$, ahol $y \in Y$, $z \in Y^\perp$ és a felbontás egyértelmű.

Lemma (paralelogramma egyenlőség): legyen X egy Hilbert tér. Ekkor $\forall a, b \in X$ esetén $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.

Bizonyítás (lemmáé): $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = \langle a + b, a + b\rangle + \langle a - b, a - b\rangle =$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \|a\|^2 + \|b\|^2 - \langle a, b\rangle - \langle b, a\rangle = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.

Bizonyítás (tételé): legyen $d := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} \ge 0$ (d véges). Belátjuk, hogy $\exists y_0 \in Y : \|x - y_0\| = d$. Az infimum definíciója miatt $\exists y_j \in Y : d^2 \le \|x - y_j\|^2 < d^2 + 1/j \quad j \in \mathbb{N}$. Tekintsük az (y_j) sorozatot!

Állítás: (y_j) Cauchy sorozat. Ehhez felhasználjuk a paralelogramma egyenlőséget: $a := x - y_j$, $b := x - y_k$.

$\left\|(x - y_j) + (x - y_k)\right\|^2 + \left\|(x - y_j) - (x - y_k)\right\|^2 = 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2$,

$\|y_k - y_j\|^2 = 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - \underbrace{\left\|2x - (y_j + y_k)\right\|^2}_{4\left\|x - \frac{y_j + y_k}{2}\right\|^2} \le \ \le 2(d^2 + 1/j) + 2(d^2 + 1/k) - 4d^2 = \frac{2}{j} + \frac{2}{k} < \varepsilon$,

ha $j, k \ge j_0$.

Mivel X tér teljes $\Rightarrow \exists y_0 \in X : \lim\limits_{j\to\infty}\|y_j - y_0\| = 0$. Mivel Y altér zár halmaz $\Rightarrow y_0 = \lim(y_j) \in Y$.

Másrészt $d = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$, $d^2 \le \|x - y_j\|^2 < d^2 + \frac{1}{j}$ és $\lim(y_j) = y_0 \Rightarrow \|x - y_0\|^2 = d^2$, mivel $\|x - y_0\| = \lim\|x - y_j\|$. Legyen $z_0 = x - y_0$. Be kellene még látni, hogy $z_0 \perp Y$, vagyis $x = y_0 + z_0$, ahol $y_0 \in Y, z_0 \in Y^\perp$.

Legyen $y \in Y$! Mivel d a fenti infimum, ezért tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $d^2 = \|x - y_0\|^2 \le \|x - y_0 - \lambda y\|^2 =$

$= \|z_0 - \lambda y\|^2 = \langle z_0 - \lambda y, z_0 - \lambda y\rangle = \|z_0\|^2 - \lambda\langle y, z_0\rangle - \overline{\lambda}\left[\langle z_0, y\rangle - \lambda\|y\|^2\right]$. Most λ -t megint úgy választjuk, hogy $\overline{\lambda}$ együtthatója 0 legyen, vagyis legyen $\lambda = \frac{\langle z_0, y\rangle}{\|y\|^2}$ (megint feltehetjük, hogy $y \neq 0$). Tehát

$d^2 \leq d^2 - \lambda\langle y, z_0\rangle = d^2 - \frac{\langle z_0, y\rangle}{\|y\|^2}\langle y, z_0\rangle = d^2 - \frac{|\langle z_0, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$, 0. Tehát z_0, vagyis valóban lehetséges ilyen felbontás. Indirekt bizonyítjuk, hogy a felbontás egyértelmű. Tfh két alakban is felírható x: $x = y_0 + z_0 = y_1 + z_1$, ahol $y_1, y_2 \in Y$ és $z_1, z_2 \in Y^\perp$. $Y \ni (y_0 - y_1) := a = (z_1 - z_0) \in Y^\perp$.

$\langle y_0 - y_1, z_1 - z_0\rangle = \|a\|^2 = 0 \Rightarrow y_0 - y_1 = z_0 - z_1 = 0 \Rightarrow y_0 = y_1, z_0 = z_1$

Ortogonális rendszerek

09.21

Definíció: egy X vektortérben az M halmaz elemei lineárisan függetlenek, ha bármely véges sok lineárisan független.

Definíció: legyen X normált tér! X dimenziója az olyan lineárisan független elemek maximális száma, amelyek véges lineárkombinációi mindenütt sűrűn vannak X-ben (egy $A \subset X$ sűrű X-ben, ha $\overline{A} = X$, ahol a halmaz felülvonása a lezárást jelenti, ez amúgy ekvivalens azzal, hogy $\forall x \in X$ -nek minden környezetében van A-beli elem). Másképp fogalmazva: jelöljük $\mathscr{L}(x_1, x_2, \ldots)$ -val azt a lineáris teret, amely az $x_1, x_2, \ldots$ elemek véges lineárkombinációjaként előáll. (Az előálló lineáris tér egyértelmű, de egy teret több ilyen vektorrendszer is előállíthat.) Ekkor X tér dimenziója az olyan lineárisan független elemek maximális száma, melyekre $\overline{\mathscr{L}(x_1, x_2, \ldots)} = X$. A D dimenziószám egyértelmű, $0 \leq D \leq \infty$.

Definíció: egy X normált teret szeparábilisnak nevezünk, ha benne megadható megszámlálhatóan sok (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok) lineárisan független elem, amelyek véges lineárkombinációi sűrűn vannak X-ben.

Definíció: legyen X Hilbert-tér! Azt mondjuk, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ elemek ortogonális rendszert alkotnak, ha $\forall x_j, x_k \neq 0$ esetén $\langle x_j, x_k\rangle = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \text{nem}0 & j = k \end{cases}$. A rendszer ortonormált, ha $\forall x \in X$ esetén $\|x\| = 1$.

Kérdés: ha az X Hilbert-térben $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ lineárisan függetlenek, akkor lehet-e ezekből ortonormált rendszert konstruálni, és ha igen, hogyan? Válasz: lehet, az ún. Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással.

Tétel: az $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ lineárisan független elemekhez megkonstruálhatók az $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ elemek úgy, hogy az utóbbiak ortonormált rendszert alkossanak, mégpedig úgy, hogy $\forall k$ -ra $\mathscr{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \mathscr{L}(y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

Bizonyítás:

1. legyen $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$, ekkor $\|x_1\| = 1$. $y_1 \neq 0$, mert $y_1, y_2, \ldots$ lineárisan függetlenek.

2. $z_2 := y_2 - \lambda_1 x_1$, ahol $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Ezt hogy válasszuk meg, hogy $z_2 \perp x_1$ teljesüljön?
   $0 = \langle z_2, x_1 \rangle = \langle y_2 - \lambda_1 x_1, x_1 \rangle = \langle y_2, x_1 \rangle - \lambda_1 \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle}_{=1} \Rightarrow \lambda_1 = \langle y_2, x_1 \rangle$. Ekkor $z_2 \neq 0$, mert y_1, y_2 lineárisan függetlenek. $x_2 := \frac{z_2}{\|z_2\|}$, ekkor $\|x_2\| = 1$ és $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.
3. $z_3 := y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2$, ahol $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Ezeket hogy válasszuk meg, hogy $z_3 \perp x_1, x_2$ teljesüljenek?
   $0 = \langle y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2, x_1 \rangle = \langle y_3, x_1 \rangle - \mu_1 - 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \langle y_3, x_1 \rangle$
   $0 = \langle y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2, x_2 \rangle = \langle y_3, x_2 \rangle - 0 - \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 = \langle y_3, x_2 \rangle$. $z_3 \neq 0$ y_1, y_2, y_3 lineáris függetlensége miatt, ezért $x_3 := \frac{z_3}{\|z_3\|}$ jó választás, így $\|x_3\| = 1$ és $x_3 \perp x_1, x_2$.

Nem nehéz belátni, hogy az eljárás folytatható $\forall k$ -ra és $\mathscr{L}(y_1, y_2, ..., y_k) = \mathscr{L}(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Ortogonális sorok, Fourier-sorok

A továbbiakban legyen X szeparábilis Hilbert-tér, véges vagy végtelen dimenziós! Tudjuk, hogy ekkor X-ben megadható $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ ortonormált rendszer. Egy $\sum_k c_k x_k$ alakú sort (összeget) – ahol $c_k \in \mathbb{K}$ – ortogonális sornak nevezünk.

Tételek:

1. egy $\sum_k c_k x_k$ sor konvergens $\Leftrightarrow \sum_k |c_k|^2 < \infty$
2. ha $x = \sum_k c_k x_k$, akkor $c_l = \langle x, x_l \rangle$
3. $\|x\|^2 = \sum_k |c_k|^2$ (végtelen dimenziós Pitagorasz tétel).

Bizonyítás:

1. Véges dimenzióban triviális, így tegyük fel, hogy végtelen sok elemű az ortonormált rendszer! Legyen $s_j := \sum_{k=1}^{j} c_k x_k$! A sor konvergenciája azt jelenti, hogy (s_j) sorozat konvergens $\Leftrightarrow$ (s_j) Cauchy sorozat.

   $\|s_j - s_l\|^2 = \langle s_j - s_l, s_j - s_l \rangle = \langle \sum_{k=l+1}^{j} c_k x_k, \sum_{k=l+1}^{j} c_k x_k \rangle = \sum_{k=l+1}^{j} c_k \overline{c_k} \underbrace{\langle x_k, x_k \rangle}_{=1} = \sum_{k=l+1}^{j} |c_k|^2$. Ez a $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sor egy „szelete”. Tehát (s_j) X-beli sorozatra teljesül a Cauchy-kritérium $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sorra teljesül a Cauchy-kritérium $\Leftrightarrow (s_j)$ X-beli sorozat konvergens $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sor konvergens.

2. tfh $x = \sum_k c_k x_k$, x_l -lel szorozzuk skalárisan (jobbról) az egyenlőséget (ezt megtehetjük, hisz nem nehéz belátni, hogy egy konvergens sor tagonként szorozható skalárisan),
$\langle x, x_l \rangle = \langle \sum_k c_k x_k, x_l \rangle = \sum_k c_k \langle x_k, x_l \rangle = c_l$
3. $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle \sum_k c_k x_k, x \rangle = \sum_k c_k \underbrace{\langle x_k, x \rangle}_{\bar{c}_k} = \sum_k |c_k|^2$

Definíció: legyen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ortonormált rendszer, $x \in X$ adott elem! Értelmezzük az x elem k-adik Fourier-együtthatóját: $c_k := \langle x, x_k \rangle$. Az így adódó $\sum_k c_k x_k$ „sort” az x elem Fourier-sorának nevezzük.

Kérdés: egy x elem Fourier-sora konvergens-e? Ha igen, mi az összege?

Tétel: egy $x \in X$ elem Fourier sora mindig konvergens, ugyanis teljesül az ún. Bessel-egyenlőtlenség: $\sum_k |c_k|^2 \le \|x\|^2$. A sor összege pontosan akkor x, ha teljesül az ún Parseval egyenlőség, azaz $\sum_k |c_k|^2 = \|x\|^2$.

Bizonyítás: $s_j := \sum_{k=1}^{j} c_k x_k$, ekkor $0 \le \|x - s_j\|^2 = \langle x - s_j, x - s_j \rangle = \|x\|^2 - \langle s_j, x \rangle - \langle x, s_j \rangle + \|s_j\|^2 =$

$= \|x\|^2 - \langle \sum_{k=1}^{j} c_k x_k, x \rangle - \langle x, \sum_{k=1}^{j} c_k x_k \rangle + \langle \sum_{k=1}^{j} c_k x_k, \sum_{k=1}^{j} c_k x_k \rangle =$

$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{j} c_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^{j} \bar{c}_k c_k + \sum_{k=1}^{j} c_k \bar{c}_k = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{j} |c_k|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{j} |c_k|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2$, másrészt a fentiek szerint $\|x - s_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{j} |c_k|^2$. Ebből láthatjuk, hogy $s_j \to x \Leftrightarrow \|x\|^2 - \sum_k |c_k|^2 = 0$, vagyis a sor összege pontosan akkor x, ha $\|x\|^2 - \sum_k |c_k|^2 = 0$.

Tétel: legyen $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ ortonormált rendszer. Ekkor egy $x \in X$ elem Fourier-sorának összege az x elemnek az $X_0 := \overline{\mathscr{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)} \subset X$ alterén vett merőleges vetülete.

Bizonyítás: jelölje $x^* := \sum_k c_k x_k$, ahol $c_k := \langle x, x_k \rangle$. Azt kellene belátni, hogy $x^* \in X_0$ és $(x - x^*) \perp X_0$.

$x^* \in X_0$, ugyanis $\sum_{k=1}^{j} c_k x_k \in \mathscr{L}(x_1, x_2, \ldots, x_j)$, így $\sum_k c_k x_k \in X_0$. $(x - x^*) \perp X_0$ ugyanis először legyen

$y \in \mathscr{L}(x_1, x_2,...,x_l)$ tetszőleges! Belátjuk, hogy $\langle x - x^*, y\rangle = 0$. $y = \sum_{j=1}^{l} d_j x_j$,

$$\langle x - x^*, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x^*, y\rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{l} d_j x_j\rangle - \langle \sum_k c_k x_k, \sum_{j=1}^{l} d_j x_j\rangle = \sum_{j=1}^{l} \bar{d}_j \underbrace{\langle x, x_j\rangle}_{c_j} - \sum_{j=1}^{l} \bar{d}_j \underbrace{\langle \sum_k c_k x_k, x_j\rangle}_{c_j} = 0.$$

Most legyen $y \in X_0 = \overline{\mathscr{L}(x_1, x_2,...)}$, szeretnénk, ha ekkor $\langle x - x^*, y\rangle = 0$ is igaz lenne. Ehhez vegyünk egy (y_ν), $\mathscr{L}(x_1, x_2,...)$ -beli konvergens sorozatot, melyre $y_\nu \to y$. Ekkor $\langle x - x^*, y_\nu\rangle = 0$. Így, mivel $y_\nu \to y$, $\langle x - x^*, y\rangle = 0$, ugyanis $|\langle x - x^*, y\rangle| = |\langle x - x^*, y\rangle - \langle x - x^*, y_\nu\rangle| = |\langle x - x^*, y - y_\nu\rangle| \le \|x - x^*\| \cdot \underbrace{\|y - y_\nu\|}_{\to 0} \to 0$.

Definíció: az $x_1, x_2,...$ ortonormált rendszert zártnak nevezzük, ha $\overline{\mathscr{L}(x_1, x_2,...)} = X$.

Következmény: ha az $x_1, x_2,...$ ortonormált rendszer zárt, akkor $\forall x \in X$ elem Fourier-sorának összege x.

Definíció: egy $x_1, x_2,...$ ortonormált rendszert teljesnek nevezzük, ha $x \perp x_k\ \forall k \Rightarrow x = 0$.

Tétel (bizonyítás nélkül): egy $x_1, x_2,...$ ortonormált rendszer teljes $\Leftrightarrow$ zárt.

09.28

Példák zárt (teljes) ortonormált rendszerekre

Észrevétel: ha $y_1, y_2,...,y_k,...$ lineárisan független olyan rendszer, hogy $\overline{\mathscr{L}(y_1, y_2,...)} = X$ (X Hilbert-tér, a lineárisan független rendszer zárt), akkor ebből a Schmidt ortogonalizálási eljárással zárt (teljes) ortonormált rendszert kapunk.

1. **Konkrét pl:** $X := L^2(a, b)$, **ahol** (a, b) **véges intervallum.**

Tétel: ebben az $t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2,..., t \mapsto t^k,...$ lineárisan független függvények zárt rendszert alkotnak.

Bizonyítás (vázlat): egyrészt a függvényrendszer lineárisan független: $\sum_{j=0}^{k} a_j t^j = 0 \Leftrightarrow a_j = 0$. (Egy valós k-ad fokú polinomnak legfeljebb k db gyöke lehet $k \ge 1$.) Az, hogy a rendszer zárt, következik a Weierstrass approximációs tételéből. Eszerint tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez $\exists P_k$ polinom sorozat, amely egyenletesen tart f-hez. Legyen $g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $g \in L^2(a, b)$. A Lebesgue integrál felépítéséből kiolvasható, hogy $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények sűrűn vannak $L^2(a, b)$ -n. A g folytonos függvényt Weierstrass approximációs tétele szerint tetszőleges előírt pontossággal meg lehet közelíteni polinomokkal, a szuprémum normában $\Rightarrow$ ezek közelítik g-t L^2 normában is.

2. **Komplex trigonometrikus rendszer** $X := L^2(0,2\pi)$, $\phi_k(t) := e^{ikt}, t \in (0,2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Tétel: a fenti függvények egy zárt ortogonális rendszert alkotnak (biz. nélkül). Belátjuk, hogy $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortogonális. $\int_0^{2\pi} \phi_k(t)\overline{\phi_l(t)}dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} = \left[\frac{e^{i(k-l)t}}{i(k-l)}\right]_{t=0}^{2\pi} = 0$ ha $k \neq l$. $\psi_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi_k$ már ortonormált rendszer.

3. **valós trigonometrikus rendszerek.**

Legyen az X alaphalmaz a valós $L^2(0,2\pi)$. $e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$, $\cos(kt) = \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$, $\sin(kt) = \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}$. Egyszerű számolással adódik, hogy $1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), ..., \cos(kt), \sin(kt), ...$ függvények páronként merőlegesek. Tehát ezek ortogonális rendszert alkotnak a valós $L^2(0,2\pi)$ -ben. Abból, hogy a komplex trigonometrikus rendszer zárt $\Rightarrow$ a fenti rendszer valós ortogonális zárt rendszer.

A fentiekből következik, hogy egy tetszőleges $f \in L^2(0,2\pi)$ függvénynek akár a komplex, akár a valós trigonometrikus rendszer szerint Fourier sora előállítja a függvényt L^2 normában.

4. Az $1, \cos t, \cos(2t), ..., \cos(kt), ...$ függvényrendszer zárt és ortogonális a $L^2(0,\pi)$ -ben. A szinuszos ugyanígy.

Lineáris és korlátos operátorok

Állítás: legyen X, Y normált terek! Korábban bizonyítottuk, hogy $A: X \to Y$ linerális operátor folytonos $\Leftrightarrow$ A korlátos.

Definíció: egy $A: X \to Y$ lineáris operátort korlátosnak nevezzük, ha $\exists c \geq 0: \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \ \forall x \in X$.

Tétel: legyen X normált tér, Y teljes normált tér (Banach tér), $A: M \to Y$ korlátos lineáris operátor, ahol $M \subset X$ lineáris altér, de nem kell zártnak lennie. Ekkor az A-nak egyértelműen létezik korlátos lineáris kiterjesztése az $\overline{M}$ -ra (M lezárására). Más szóval: $\exists !\widetilde{A}: \overline{M} \to Y$ korlátos lineáris operátor, amelyre $\widetilde{A}x = Ax$, $\forall x \in M$. Spec eset, mikor $\overline{M} = X$.

Bizonyítás (vázlatos): legyen $x \in \overline{M}$. Ehhez $\exists x_k \in M: \lim(x_k) = x$. Tekintsük az $(Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot Y-ban! Belátjuk, hogy ez Cauchy sorozat. $\|Ax_k - Ax_l\|_Y = \|A(x_k - x_l)\|_Y \leq c \cdot \|x_k - x_l\|_X$. Legyen $\varepsilon > 0$, $\exists k_0: \forall k, l > k_0$ esetén $\|x_k - x_l\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax_k - Ax_l\| \leq c \cdot \varepsilon$. Y teljes $\Rightarrow$ $\exists y \in Y: \lim(Ax_k) = y$. y csak x-től függ, nem függ (x_k) -tól és egyértelmű. $\widetilde{A}(x) := y$, $\widetilde{A}$ lineáris, korlátos (és folytonos).

Hahn-Banach tétel: legyen X Banach tér, $X_0 \subset X$ valódi (zárt lineáris) altér, $f: X_0 \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionál (azaz számértékű operátor). Ekkor $\exists \widetilde{f}: X \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris kiterjesztés, és $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

Korlátos lineáris funkcionálok, duális tér (Hilbert tér esetén)

Észrevétel: legyen X Hilbert tér, $y \in X$ tetszőleges rögzített elem. Értelmezzük az $f: X \to \mathbb{K}, f(x) := \langle x, y \rangle$ funkcionált.

Állítás: ekkor f korlátos lineáris funkcionál. f linearitása triviális, és korlátos is, ugyanis $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

Tétel (Riesz): legyen X Hilbert tér (valós vagy komplex), f egy korlátos lineáris funkcionál X-en. Ekkor létezik egyetlen $y \in X$, hogy $f(x) = \langle x, y \rangle \ \forall x \in X$.

Bizonyítás: jelölje $X_0 := \{x \in X : f(x) = 0\}$ -vel f magterét. X_0 altér X-ben, azaz az algebrai műveletek nem vezetnek ki X_0 -ból, és zárt részhalmaz X-ben. Utóbbi azért igaz, mivel f folytonos, azaz ha $x_k \in X_0$, $(x_k) \to x \Rightarrow x \in X_0$. $f(x_k) \to f(x) \Rightarrow f(x) = 0$, mivel jelen esetben $f(x_k) = 0$.

1. Ha $X_0 = X$, $f(x) = 0 \ \forall x \in X$, triviális eset. Ekkor legyen $y = 0$.
2. X_0 valódi altér $\Rightarrow$ (Riesz-féle felbontási tétel) $\exists x_1 \ne 0 : x_1 \in X_0^{\perp}$. Legyen $x \in X$ tetszőleges, tekintsük az $X \ni y_1 := f(x)x_1 - f(x_1)x$ elemet. Ekkor $f(y_1) = f(x)f(x_1) - f(x_1)f(x) = 0 \Rightarrow y_1 \in X_0 \Rightarrow \langle y_1, x_1 \rangle = 0$.
   Más szóval $0 = \langle y_1, x_1 \rangle = \langle f(x)x_1 - f(x_1)x, x_1 \rangle = f(x)\|x_1\|^2 - f(x_1)\langle x, x_1 \rangle \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(x) = \frac{f(x_1)\langle x, x_1 \rangle}{\|x_1\|^2} = \langle x, \frac{\overline{f(x_1)}x_1}{\|x_1\|^2} \rangle \Rightarrow \exists y$, nevezetesen $y = \frac{\overline{f(x_1)}}{\|x_1\|^2} x_1$.
3. y egyértelmű. Tfh $\langle x, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \ \forall x \in X \Rightarrow \langle x, y - y^* \rangle = 0 \forall x \in X \Rightarrow y - y^* = 0 \Rightarrow y = y^*$.

Korlátos lineáris funkcionálok 10.05

Legyen X Hilbert tér $y \in X$ egy rögzített eleme, $f(x) := \langle x, y \rangle$. Ekkor a CS-ből következik: $\|f\| \le \|y\|$.

Megjegyzés: $\|f\| = \|y\|$, ugyanis egyrészt $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|f\| \le \|y\|$. Másrészt $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Válasszuk $x := \frac{y}{\|y\|}$ ($y \ne 0$, máskülönben triviális), ekkor $\|x\| = 1$, $|f(x)| = \left|\langle \frac{y}{\|y\|}, y \rangle\right| = \|y\|$. Tehát $\|f\| = \|y\|$.

Spec eset: $X := L^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz. Ekkor egy tetszőleges f korlátos lineáris funkcionál ilyen alakú: $f(\phi) := \langle \phi, \psi \rangle = \int_M \phi \overline{\psi}$, ahol $\psi \in L^2(M)$ rögzített. $\psi_0 := \overline{\psi} \in L^2(M)$ jelöléssel $f(\phi) = \int_M \phi \psi_0, \forall \phi \in L^2(M)$.

Korlátos lineáris funkcionálok $L^p(M)$ -en, ahol $1 < p < \infty$ (azaz $L^\infty(M)$ teret nem tárgyaljuk)

Legyen $\psi \in L^q(M)$ tetszőleges rögzített, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$! Értelmezzük az f funkcionált: $f(\phi) := \int_M \phi\psi$, ahol $\phi \in L^p(M)$.

Állítás: f korlátos lineáris funkcionál $L^p(M)$ -en.

Bizonyítás: tudjuk, hogy $\phi \in L^p(M), \psi \in L^q(M) \Rightarrow \phi\psi \in L^1(M)$, tehát a funkcionál értelmezve van az egész $L^p(M)$ -n, nyilván lineáris. A Hölder egyenlőtlenség szerint $\left|\int_M \phi\psi\right| \le \|\phi\|_{L^p(M)} \cdot \|\psi\|_{L^q(M)} \Rightarrow \|f\| \le \|\psi\|_{L^q(M)}$, vagyis korlátos is és normája $\le \|\psi\|_{L^q(M)}$

Tétel: $\|f\| = \|\psi\|_{L^q(M)}$.

Tétel: legyen $1 < p < \infty$. Ekkor tetszőleges $f: L^p(M) \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionálhoz $\exists !\psi \in L^q(M): f(\phi) = \int_M \psi\phi$.

Duális (konjugált) tér

Definíció: legyen X normált tér! Az X-en értelmezett korlátos lineáris funkcionálok terét X duálisának nevezzük és X'-vel jelöljük (van, ahol *-gal jelölik).

Megjegyzés: $X' = L(X, \mathbb{K})$. Tudjuk, hogy $X' = L(X, \mathbb{K})$ normált tér (norma az operátor normája), X' tér teljes, mivel $\mathbb{K}$ alaptest teljes, így X' Banach tér.

Értelmezzük az előbbieket ezen fogalom rögzítésével!

X Hilbert tér. Tudjuk, hogy $\forall f \in X' \exists y \in X: f(x) = \langle x, y\rangle$, $\|f\| = \|y\|$. Fordítva, $y \in X$ esetén $f(x) := \langle x, y\rangle, x \in X$! Tehát ha X Hilbert tér, bijekció létesíthető X' és X között. Jelöljük: $\Phi(y) := f$, $f(x) := \langle x, y\rangle$. $\Phi: X \to X'$ bijekció. Ennek tulajdonságai:

- $\Phi(y_1 + y_2) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2)$. $f_1(x) = \langle x, y_1\rangle$, $f_2(x) = \langle x, y_2\rangle$.
  $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle = \langle x, y_1 + y_2\rangle$, vagyis $f_1 + f_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\Phi(\lambda y) = \overline{\lambda}\Phi(y)$. $f(x) = \langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle = \overline{\lambda} f(x) = \left(\overline{\lambda} f\right)x$, vagyis $\lambda y \leftrightarrow \overline{\lambda} f$, tehát Φ konjugált lineáris.

$X = L^p(M)$ esete, mikor $1 \le p \le \infty$ és $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Tudjuk, hogy tetszőleges $\psi \in L^q(M)$ esetén $f(\phi) := \int_M \phi\psi$, $\phi \in X$ mellett $f \in (L^p(M))'$, $\|f\| = \|\psi\|$. Továbbá

$(L^p(M))'$ minden eleme ilyen alakú $p < \infty$ esetén.

$L^q(M) \ni \psi \leftrightarrow f \in (L^p(M))'$. Könnyen belátható, hogy az eddigiek alapján Φ bijekció, sőt, Φ lineáris. $L^p(M)$ izomorf és izometrikus (normatartó) $L^q(M)$ -vel, ha $p < \infty$.

X'' tér, más szóval biduális, reflexív tér

<u>**Definíció**</u>: legyen X normált tér. Ekkor definíció szerint $X'' := (X')'$.

<u>Állítás</u>: ha X Hilbert tér, akkor X'' izomorf, izometrikus az X térrel.

<u>**Definíció**</u>: legyen X Banach tér! Ha X'' izomorf és izometrikus X-szel, akkor X''-t reflexívnek nevezzük.

<u>Állítás</u>: legyen $X = L^p(M)$, ahol $1 < p < \infty$! Ekkor $L^p(M)$ reflexív.

Vizsgáljuk X''-t általános esetben, mikor X Banach tér! Tekintsük egy tetszőleges, rögzített $x \in X$ elemet, ehhez rendeljük hozzá a következő, $F_x \in X''$ elemet! $F_x(f) := f(x)$, $\forall f \in X'$. Ekkor F_X jól definiált funkcionál X'-n, nyilván lineáris, korlátos is. $|F_x(f)| = |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|_X$, $\forall f \in X'$. $\Rightarrow \|F_x\| \le \|x\|$.

<u>Állítás</u>: $\|F_x\| = \|x\|$.

Bizonyítás: (definíció szerint $\|F_x\| = \sup\limits_{f \in X'} \{|F_x(f)| = |f(x)| : \|f\| = 1\}$) azt kellene belátni, hogy $\exists f \in X' : \|f\| = 1$, melyre igaz, hogy $|F_x(f)| = \|x\|$ bármely rögzített x esetén. Tekintsük a következő f_0 funkcionált X következő, 1 dimenziós alterén: $X_0 := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$, ahol $x \in X$ rögzített. Legyen $f_0(\lambda x) := \lambda\|x\|$. f_0 korlátos is, $|f_0(\lambda x)| = |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| \cdot 1 \Rightarrow \|f_0\| = 1$. A Hahn-Banach tétel szerint az X_0 altéren definiált f_0 korlátos lineáris funkcionál kiterjeszthető a korlátosság és linearitás megtartásával az egész X térre úgy, hogy $\|f\| = \|f_0\|$ (ezt persze nem bizonyítottuk). Jelölje ezt f! $f \in X'$, $\|f\| = \|f_0\| = 1$. Erre
$|F_x(f)| = |f(x)| = |f(1 \cdot x)| = f_0(1 \cdot x) = 1 \cdot \|x\| = \|x\|$.

Általános esetben X'' egy részhalmaza izomorf és izometrikus X-szel. X''-nek lehetnek más elemei is (ha nem reflexív).

Gyenge konvergencia

<u>**Definíció**</u>: legyenek X, Y normált terek, és tfh $A_j \in L(X,Y)$, $j \in \mathbb{N}$ (A_j korlátos lineáris operátor X-n). Azt mondjuk, hogy ez az A_j sorozat gyengén konvergál az A operátorhoz, ha $\forall x \in X$ elemre $(A_j x)_{j \in \mathbb{N}} \to Ax$ (pontonkénti konvergencia). (Y-beli norma szerinti konvergencia).

Állítás: ha $\lim\|A_j - A\| = 0$, azaz $(A_j) \to A$ az $L(X,Y)$ norma szerint, akkor $(A_j) \to A$ gyengén, de fordítva nem mindig igaz.

Bizonyítás: tfh $\lim\|A_j - A\| = 0$. Ekkor $\|A_j x - Ax\|_Y = \|(A_j - A)x\| \le \underbrace{\|A_j - A\|}_{\to 0} \cdot \|x\| \to 0$.

Speciális eset: $Y = \mathbb{K}$, $L(X,Y) = X'$. $(f_j) \to f$ gyengén X' -ben, ha bármely rögzített $x \in X$ esetén $(f_j(x)) \to f(x)$.

Példa X'-beli gyengén konvergens sorozatra, amely norma szerint nem konvergens. Legyen X szeparábilis, végtelen dimenziós Hilbert tér! Legyen ebben egy $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots$ ortonormált, teljes rendszer! $f_j(x) := \langle x, y_j \rangle$. Ekkor $\langle x, y_j \rangle$ az $x \in X$ elem j-edik Fourier-együtthatója y_j ortonormált rendszer szerint, $c_j := \langle x, y_j \rangle$. Tudjuk, hogy

$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \Rightarrow \lim(c_j) = 0$, azaz $\lim_{j \to \infty} f_j(x) = 0$, $\forall x \in X$. Más szóval (f_j) X'-beli sorozat gyengén tart $f = 0$

funkcionálhoz. Másrészt $\|f_j\| = \|y_j\|_X = 1$, így (f_j) nem tart a norma szerint az $f = 0$ funkcionálhoz. (Bebizonyítható, hogy véges dimenzióban a gyenge konvergencia egybeesik a norma szerinti konvergencia fogalmával.)

Tétel: tfh $A_j \in L(X,Y)$, ahol X, Y Banach terek, $(A_j) \to A$ gyengén. Ekkor $(\|A_j\|)_{j \in \mathbb{N}}$ korlátos. Ez a tétel következik az alábbi tételből.

Egyenletes korlátosság tétele (Banach-Steinhaus tétel, bizonyítás nélkül): legyenek X, Y Banach terek, $A_j \in L(X,Y)$. Ha az A_j operátor sorozat pontonként korlátos, azaz ha $\forall x \in X$ esetén $\sup_{j \in \mathbb{N}} \{\|A_j x\|\} < \infty \Rightarrow (\|A_j\|)$ korlátos.

Megjegyzés (gyenge kompaktsági kritérium): tekintsük a $X' = L(X, \mathbb{K})$ speciális esetet az egyszerűség kedvéért. Ha $f_j \in X'$ korlátos sorozatot alkot (X most Banach tér), akkor (f_j) -ból kiválasztható egy gyengén konvergens részsorozat.

Gyenge konvergencia X-ben 10.12

Definíció: legyen X normált tér! Azt mondjuk, hogy egy $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ X-beli sorozat gyengén konvergál egy $x \in X$ ponthoz, ha $\forall f \in X'$ funkcionálra $(f(x_j))_{j \in \mathbb{N}} \to f(x)$.

Megjegyzés: ha X reflexív Banach-tér, akkor minden korlátos X-beli sorozatnak létezik gyengén konvergens részsorozata. Ugyanis ekkor $X = X'' = (X')'$.

Inverz operátor

Emlékeztető: egy függvénynek létezik inverze, ha injektív. Tudjuk továbbá, hogy egy $A:X \to Y$ lineáris operátornak létezik inverze (azaz injektív) $\Leftrightarrow$ a magtér csak a 0-ból áll, azaz $Ax = 0_Y \Leftrightarrow x = 0_X$. Továbbá, ha A^{-1} létezik, akkor A^{-1} lineáris operátor. Egy A operátor folytonos x_0 -ban, ha
$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho > 0: \|x - x_0\|_X < \rho \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

Kérdés: ha X, Y normált terek, $A:X \to Y$ lineáris és injektív $\overset{?}{\Rightarrow}$ A^{-1} korlátos is? Általában nem, akkor sem, ha A korlátos.

Nyílt leképezések tétele (bizonyítás nélkül): legyenek X, Y Banach terek, $A:X \to Y$ korlátos lineáris operátor és $R_A = Y$, vagyis ráképezés. Ekkor A operátor X minden nyílt halmazát Y nyílt halmazába képezi. Ebből következik:

Tétel (Banach): legyenek X, Y Banach terek, $A:X \to Y$ korlátos és lineáris, $R_A = Y$ és A injektív! Ekkor A^{-1} korlátos (azaz folytonos).

Bizonyítás: legyen tetszőleges $y_0 \in Y = R_A = D_{A^{-1}}$. $x_0 := A^{-1} y_0$. Belátjuk, hogy az A^{-1} folytonos y_0 -ban. Tekintsük $x_0 = A^{-1} y_0$ egy tetszőleges $B_r(x_0)$ nyílt környezetét! Ennek képe is nyílt az Y-ban az előbbi tétel szerint. Mivel $y_0 \in A(B_r(x_0))$, ami nyílt, ezért y_0 -nak van olyan környezete, melyre $B_\rho(y_0) \subset A(B_r(x_0))$. Ez azt jelenti, hogy ha $y \in B_\rho(y_0) \Rightarrow A^{-1} y \in B_r(x_0)$. Eszerint A^{-1} folytonos y_0 -ban.

Zárt gráf (grafikon) tétel

Definíció: legyenek X, Y normált terek, $A:M \to Y$ lineáris operátor, $M \subset X$. Ekkor A operátor gráfja, grafikonja az alábbi halmaz: $G_A := \{(x, Ax) : x \in M = D_A\}$.

Definíció: egy $A:M \to Y$ lineáris operátort zártnak nevezünk, ha a $G_A \subset X \times Y$ zárt halmaz $X \times Y$ -ban.
$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Megjegyzés: a szorzattéren értelmezett műveletek:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$
- $\|(x, y)\|_{X \times Y} := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, $X \times Y$ normált tér tehát.

Legyenek X, Y normált terek, $A:M \to Y$ lineáris operátor, $D_A = M \subset X$. A zárt $\Leftrightarrow$ ha minden $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ M-beli sorozatra, melyre $\lim(x_j) = x \in X$ és $\exists \lim(Ax_j) = y \in Y$, akkor $x \in M$ és $y = Ax$. Ezért ha A folytonos, akkor zárt is.

Példa zárt, lineáris, de nem folytonos (nem korlátos) operátorra: $X := C[0,1]$, $M = D_A = C^1[0,1]$, $A\phi := \phi'$, vagyis a differenciáloperátor. $(\phi_j) \to \phi$ egyenletesen ($C[0,1]$-beli konvergencia) és $(\phi'_j) \to \psi$ egyenletesen $\Rightarrow \psi = \phi'$, tehát A valóban zárt, lineáris (de nem korlátos, így nem is folytonos, ezt láttuk korábban).

Zárt gráf tétel: legyenek X, Y Banach terek, $A: X \to Y$ zárt, lineáris operátor (tehát $D_A = X$). Ekkor A folytonos (korlátos).

Bizonyítás: $G_A := \{(x, Ax): x \in D_A = X\} \subset X \times Y$ (utóbbi Banach-tér), ugyanis G_A zárt halmaz $X \times Y$-ban, az $X \times Y$ vektortenérnek altere: $(x_1, Ax_1) + (x_2, Ax_2) = (x_1 + x_2, A(x_1 + x_2)) \in G_A$, $\lambda(x, Ax) = (\lambda x, A(\lambda x)) \in G_A$. G_A az $X \times Y$ Banach tér zárt lineáris altere $\Rightarrow$ G_A Banach-tér. Tekintsük a következő két operátort: $U(x, Ax) := x$, $V(x, Ax) := Ax$, ahol $(x, Ax) \in G_A$. Ekkor $U: G_A \to X$, $R_U = X$, $V: G_A \to Y$. Most U-ra alkalmazható a Banach tétel (az inverz operátor korlátosságáról): $D_U = G_A$, $R_U = X$, U korlátos és injektív $\Rightarrow U^{-1}: X \to G_A$ korlátos (folytonos), $A = VU^{-1}$, mert $U^{-1}x = (x, Ax)$, $V(U^{-1}(x)) = V(x, Ax) = Ax$. $V: G_A \to Y$ korlátos $\Rightarrow A = VU^{-1}$ is korlátos.

Sajátérték, reguláris érték, spektrum

Legyenek X, Y normált terek, $A: M \to Y$ lineáris operátor, $M \subset X$, $b \in Y$ adott elem.

1. Elsőfajú egyenlet: melyik az a $x \in M = D_A: Ax = b$?
2. Másodfajú egyenlet: legyen $Y = X$. Melyik az a $x \in X$, melyre $(\lambda I - A)x = b$, ahol $\lambda \in \mathbb{K}$, I az identitás. Ha $(\lambda I - A)$ nem injektív, azaz nem létezik az inverzre, akkor λ-t az A operátor sajátértékének nevezzük. Ez azt jelenti, hogy $\exists x_0 \neq 0: (\lambda I - A)x_0 = 0 \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda x_0$.

Definíció: ha $\exists (\lambda I - A)^{-1}$, ez korlátos és $R_{\lambda I - A}$ értelmezési tartománya sűrű halmaz X-ben, akkor λ-t reguláris értéknek nevezzük.

Állítás: ha A zárt operátor, akkor reguláris érték esetén $D_{(\lambda I - A)^{-1}} = X$, azaz $R_{\lambda I - A} = X$.

Megjegyzés: ekkor reguláris értéke esetén $(\lambda I - A)x = b$ egyenletnek $\forall b \in X$-hez $\exists !x$ megoldás, és x folytonosan függ b-től, azaz $x = \underbrace{(\lambda I - A)^{-1}}_{\text{folytonos}} b$

Definíció: az A operátor spektruma a reguláris értékek halmazának a komplementere az alaptestben. A sajátértékek halmaza része a spektrumnak.

Korlátos lineáris operátorok reguláris értékei

Tétel: legyen X Banach tér! Legyen $A: X \to X$ korlátos lineáris operátor. Ekkor $r_\sigma(A) := \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$, ez létezik és véges. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ számra teljesül, hogy $|\lambda| > r_\sigma(A)$, akkor λ reguláris érték (A-ra nézve).

Definíció: $r_\sigma(A)$ számot az A korlátos lineáris operátor spektrálsugarának nevezzük.

Megjegyzések:

- $A, B \in L(X, X)$ esetén $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, ugyanis $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$ minden x-re, $\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
- $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. $\|A^k\|^{1/k} \leq \left(\|A\|^k\right)^{1/k} = \|A\| \Rightarrow r_\sigma(A) \leq \|A\|$. Következmény: ha $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda$ reguláris érték.

Lemma 1: legyen Z Banach-tér, $z_k \in Z$. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergens Z Banach-téren.

Bizonyítás: legyen $s_j := \sum_{k=1}^{j} z_k$ részlet összeg! $\|s_j - s_l\| = \left\| \sum_{k=l+1}^{j} z_k \right\| \leq \sum_{k=l+1}^{j} \|z_k\| < \varepsilon$, ha $l, j > j_0$, tehát teljesül a Cauchy kritérium. Mivel Z Banach-tér, azaz teljes normált tér, ezért minden Cauchy-sorozatnak van határértéke Z-ben.

Lemma 2: tfh $B_k \in L(X, X)$, $\sum_{k=1}^{\infty} B_k$ konvergens $L(X, X)$ -en. Ekkor $\forall C \in L(X, X)$ operátorra $C \sum_{k=1}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^{\infty} CB_k$.

A bizonyítás egyszerű a részletösszegek segítségével.

Tétel: legyen X Banach-tér, $A: X \to X$ korlátos, lineáris operátor. Ekkor létezik és véges: 10.19
$r_\sigma(A) := \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$. Továbbá $|\lambda| > r_\sigma(A) \Rightarrow \lambda$ reguláris érték,
$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k$. Ez a sor – a Neumann-sor – $L(X, X)$ normában konvergens.

Bizonyítás:

1. jelöljük: $r := \inf\left\{ \|A^k\|^{1/k} : k \in \mathbb{N} \right\} \geq 0$, ez véges. Belátjuk, hogy $r_\sigma(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = r = \inf\left\{ \|A^k\|^{1/k} : k \in \mathbb{N} \right\} \geq 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az alsó határ definíciójából következik, hogy $\exists m \in \mathbb{N} : r \leq \|A^m\|^{1/m} < r + \varepsilon$. Ezen m mellett válasszunk egy $k > m$ számot, melyre $k = pm + q$, ahol $p \in \mathbb{N}$ és $0 \leq q < m$ (ez k-nak m-vel vett maradékos osztása, q a maradéktag). Ekkor $A^k = A^{pm+q} = (A^p)^m \cdot A^q$, így $\|A^k\| \leq \|A^m\|^p \cdot \|A\|^q \Rightarrow \|A^k\|^{1/k} \leq \|A^m\|^{p/k} \cdot \|A\|^{q/k} \leq (r+\varepsilon)^{mp/k}\|A\|^{q/k}$. Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{mp}{k} = 1$, mert $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{q}{k} = 0$, így a fenti egyenlőtlenség jobb oldala $\to r + \varepsilon$. Ebből következik, hogy $\exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow r \leq \|A^k\|^{1/k} \leq r + 2\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = r$.
2. Belátjuk, hogy a Neumann-sor $L(X,X)$ -ben konvergens. Az 1. lemma szerint ehhez elég bizonyítani, hogy a sor tagjainak normáiból alkotott sor konvergens, azaz $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|\lambda^{-k-1}A^k\| < \infty$. Válasszunk egy olyan r_1 számot, melyre $|\lambda| > r_1 > r_\sigma(A)$! Mivel $r_\sigma(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$ és $r_1 > r_\sigma(A)$, ezért $\exists k_1 \in \mathbb{N} : k > k_1 \Rightarrow r_1 > \|A^k\|^{1/k}$, így $\|\lambda^{-k-1}A^k\| = \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} \|A^k\| < \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} r_1^k = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{r_1}{|\lambda|}\right)^k$. Ezeket összegezve k szerint egy mértani sort kapunk, melynek kvóciense $0 < \frac{r_1}{|\lambda|} < 1$, így a sor konvergens, azaz
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{r_k}{|\lambda|}\right)^k < \infty.$$
3. jelöljük $B := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k \in L(X,X)$. Előbb láttuk, hogy ez konvergens. Ebből következni fog, hogy $(\lambda I - A)^{-1}$ létezik és egyenlő B-vel. A 2. lemmát felhasználva:
$$(\lambda I - A)B = \lambda B - AB = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k - A\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}A^k - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^{k+1} = I.$$
Hasonlóképpen, $B(\lambda I - A) = I$. Következtetésképpen $(\lambda I - A)^{-1}$ létezik és egyenlő B-vel.

Következmény: $|\lambda| > r_\sigma(A)$ esetén a $(\lambda I - A)x = b$ másodfajú egyenletnek létezik egyetlen x megoldása, mégpedig $x = (\lambda I - A)^{-1}b = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k\right)b = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\lambda^{-k-1}A^k\right)b = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}\left(A^k b\right)$, ez a sor pedig X normában konvergens. A sor összege így is írható: $\frac{1}{\lambda}b + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k b$. A fentiek még inkább érvényesek, ha $|\lambda| > \|A\|$.

Bizonyítható (de nem tesszük) tétel: $r_\sigma(A) = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in A_{spektrum}\right\}$.

Alkalmazás, példák.

1. példa: négyzetesen integrálható magú integráloperátorok.

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ egy Lebesgue szerint mérhető halmaz, $X := L^2(M)$, ez ugye Hilbert tér. Legyen $\mathscr{K} \in L^2(M \times M)$ az úgynevezett magfüggvény, s $\phi \in L^2(M)$. Definiáljuk: $\psi(x) := \int_M \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy$.

Állítás: $\psi \in L^2(M)$, továbbá a $K(\phi) := \psi$ képlettel értelmezett $K : L^2(M) \to L^2(M)$ operátor lineáris, korlátos. A K operátort négyzetesen integrálató magú integráloperátornak nevezzük.

Bizonyítás: a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség szerint majdnem minden x-re
$|\psi(x)| \leq \int_M |\mathscr{K}(x,y)| \cdot |\phi(y)| dy \leq \left\{ \int_M |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_M |\phi(y)|^2 dy \right\}^{1/2}$. Mivel
$\mathscr{K} \in L^2(M \times M) \Rightarrow \int_{M\times M} |\mathscr{K}(x,y)|^2 dxdy < \infty$. Fubini tételt használva $\int_M \underbrace{\int_M |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy}_{\text{véges m. m. } x\text{-re}} dx < \infty$, így
$|\psi(x)|^2 \leq \int_M |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy \cdot \left[\int_M |\phi(y)|^2 dy \right] < \infty$. Integrálva:
$\int_M |\psi(x)|^2 dx \leq \left[\int_M \int_M |\mathscr{K}(x,y)|^2 dydx \right] \cdot \left[\int_M |\phi(y)|^2 dy \right] < \infty \Rightarrow \psi \in L^2(M)$. K linearitása triviális. K korlátos, ugyanis $\|K\phi\|^2{}_{L^2(M)} = \|\psi\|^2{}_{L^2(M)} \leq \left\{ \int_{M\times M} |\mathscr{K}(x,y)|^2 dxdy \right\} \cdot \|\phi\|^2 \Rightarrow K$ korlátos, sőt:
$\|K\| \leq \left\{ \int_{M\times M} |\mathscr{K}(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} = \|\mathscr{K}\|_{L^2(M\times M)}$.

Következmény: $|\lambda| > \|\mathscr{K}\|_{L^2(M\times M)}$ esetén λ reguláris érték. Tudjuk, hogy $|\lambda| > r_\sigma(K)$ esetén λ reguláris érték és $(\lambda I - K)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-1-k} K^k$.

Kérdés: K integrál operátor hatványai hogyan számolhatók?

Állítás: legyen $\mathscr{K}, \mathscr{L} \in L^2(M \times M)$ és K, L a megfelelő integráloperátorok. Ekkor $P := KL$ szintén négyzetesen integrálható magú operátor, amelynek magfüggvénye $\mathscr{P}(x,y) := \int_M \mathscr{K}(x,t)\mathscr{L}(t,y)dt$.

Bizonyítás: $\phi \in L^2(M)$ esetén $(P\phi)(x) = [K(L\phi)](x) = \int_M \mathscr{K}(x,t) \left[\int_M \mathscr{L}(t,y)\phi(y)dy \right] dt =$
$= \int_M \underbrace{\left[\int_M \mathscr{K}(x,t)\mathscr{L}(t,y)dt \right]}_{\mathscr{P}(x,y)} \phi(y)dy$, ahol Fubini-tételt ismét alkalmaztuk. $\mathscr{P} \in L^2(M \times M)$, merthogy
$|\mathscr{P}(x,y)| \leq \left\{ \int_M |\mathscr{K}(x,t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_M |\mathscr{L}(t,y)|^2 dy \right\}^{1/2}$, így integrálva:

$$\int_{M\times M}|\mathscr{P}(x,y)|^2\,dxdy \le \underbrace{\int_M\left[\int_M|\mathscr{K}(x,t)|^2\,dt\right]dx}_{<\infty}\cdot\underbrace{\int_M\left[\int_M|\mathscr{L}(t,y)|^2\,dt\right]dy}_{<\infty}<\infty.$$

Következmény: $\left(K^j\phi\right)(x)=\int_M\mathscr{K}_j(x,y)\phi(y)dy,\ j=1,2,...,$ ahol $\mathscr{K}_1:=\mathscr{K},\ \mathscr{K}_2(x,y)=\int_M\mathscr{K}(x,t)\mathscr{K}_1(t,y)dt.$

$\mathscr{K}_j(x,y)=\int_M\mathscr{K}(x,t)\mathscr{K}_{j-1}(t,y)dt.$ Ebből következik, hogy $(\lambda I-K)^{-1}b=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{-j-1}K^jb.$

$$\left[(\lambda I-K)^{-1}b\right](x)=\left[\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{-j-1}K^jb\right](x)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{-j-1}\left(K^jb\right)(x)=\tfrac{b(x)}{\lambda}+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j-1}\int_M\mathscr{K}_j(x,y)b(y)dy\overset{?}{=}$$

$\overset{?}{=}\tfrac{b(x)}{\lambda}+\int_M\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j-1}\mathscr{K}_j(x,y)\right]}_{\in L^2(M\times M)}b(y)dy.$ A sor $L^2(M)$ normában konvergál. Az egyenlőséget a következő órán látjuk be.

A korábbiak szerint $(\lambda I-A)x=b$ egyenletnek van egyértelmű megoldása x-re és $x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k-1}\left(A^kb\right)$, ha λ regularis érték, ugyanis ekkor a jobb oldal konvergens $X\ni x$ -ben. 11.02

Az előző példában $X:=L^2(M)$ volt, (ahol $M\subset\mathbb{R}^n$ mérhető halmaz), $\mathscr{K}\in L^2(M\times M)$,

$\psi(x):=(K\phi)(x)=\int_M\mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy$ ahol $K:L^2(M)\to L^2(M)$ korlátos lineáris operátor és

$r_\sigma(K)\le\|K\|\le\|\mathscr{K}\|_{L^2(M\times M)}.$

$(\lambda I-K)\phi=b,\ b\in L^2(M)$ adott esetén mi a megoldás $\phi\in L^2(M)$ -re? Az egyenlet ekvivalens:

$\lambda\phi(x)-\int_M\mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy=b(x)$ majdnem minden $x\in M$ -re. Ha

$|\lambda|>r_\sigma(K)\Rightarrow\phi=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{-j-1}K^jb=\tfrac{b}{\lambda}+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j-1}K^jb.\ \left(K^jb\right)(x)=\int_M\mathscr{K}_j(x,y)b(y)dy,$

$\mathscr{K}_j(x,y)=\int_M\mathscr{K}_{j-1}(x,t)\mathscr{K}(t,y)dt$ és $\mathscr{K}_1=\mathscr{K}$. Így

$\phi(x)=\tfrac{b(x)}{x}+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j-1}\int_M\mathscr{K}_j(x,y)b(y)dy=\dfrac{b(x)}{\lambda}+\int_M\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j-1}\mathscr{K}_j(x,y)\right]}_{R_\lambda(x,y)\in L^2(M\times M)\text{ rezolv. op magfgve}}b(y)dy.$ A sor $L^2(M\times M)$ -ben konvergens, ha $|\lambda|>r_\sigma(\mathscr{K})$.

A bizonyítás alapja: $\mathscr{K}_j(x,y) = \int_M \mathscr{K}_{j-1}(x,t)\mathscr{K}(t,y)dt \Rightarrow K^{j-1}$ operátor alkalmazva $t \mapsto \mathscr{K}(t,y)$ függvényre (y rögzített):

$$\left\{\int_M |\mathscr{K}_j(x,y)|^2 dx\right\}^{1/2} \leq \|\mathscr{K}^{j-1}\| \left\{\int_M |\mathscr{K}(t,y)|^2 dt\right\}^{1/2} \Rightarrow \int_M |\mathscr{K}_j(x,y)|^2 dx \leq \|K^{j-1}\|^2 \int_M |\mathscr{K}(t,y)|^2 dt.$$

Integrálva y szerint: $\int_{M\times M} |\mathscr{K}_j(x,y)|^2 dxdy \leq \|K^{j-1}\|^2 \int_{M\times M} |\mathscr{K}(t,y)|^2 dtdy.$

$\int_{M\times M} \frac{1}{|\lambda|^{2(j+1)}} |\mathscr{K}_j(x,y)|^2 dxdy \leq \underbrace{\frac{1}{|\lambda^{2(j+1)}|} \|K^{j-1}\|^2}_{\sum_{j=1}^{\infty} \text{sor konv. ha } |\lambda| > r_\sigma(K)} \cdot \|\mathscr{K}\|^2_{L^2(M\times M)}$, így a bal oldalból képzett számsor (ami ≥ 0) is konvergens.

2. példa: folytonos magú integráloperátorok.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány (azaz nyílt és összefüggő), $X := C(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} \to \mathbb{K}$ folytonos függvények (a felülvonás a lezárást jelenti), tehát $C(\overline{\Omega})$ az Ω korlátos tartomány lezárásán értelmezett folytonos függvények tere a $\|\phi\| = \sup_{\Omega} |\phi|$ normával. Legyen $\mathscr{K} \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $\psi(x) := (K\phi)(x) := \int_{\overline{\Omega}} \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy.$

Állítás: $K : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ korlátos, lineáris operátor.

Bizonyítás: $|\psi(x)| = \left|\int_{\overline{\Omega}} \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy\right| \leq \int_{\overline{\Omega}} |\mathscr{K}(x,y)| \cdot |\phi(y)| dy \leq \|\phi\| \int_{\overline{\Omega}} |\mathscr{K}(x,y)| dy \leq \|\phi\| \sup_{x \in \overline{\Omega}} \int_{\overline{\Omega}} |\mathscr{K}(x,y)| dy$. Itt is igaz: $(K^j\phi)(x) = \int_{\overline{\Omega}} \mathscr{K}_j(x,y)\phi(y)dy$. $\mathscr{K}_j(x,y) = \int_{\overline{\Omega}} \mathscr{K}_{j-1}(x,t)\mathscr{K}(t,y)dt$, K_j folytonos.

3. példa

Az előbbi spec esete: $\overline{\Omega} = [a,b] \subset \mathbb{R}$, ekkor $\mathscr{K} \in C([a,b] \times [a,b])$, továbbá $\mathscr{K}(x,y) = 0$, ha $y > x$.

$(K\phi)(x) := \int_a^b \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy = \int_a^x \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy$ Voltera típusú operátor. Erre is igaz, hogy $\mathscr{K} : C[a,b] \to C[a,b]$ folytonos lineáris operátor.

Állítás: $r_\sigma(K) = 0$, így $\lambda \neq 0$ esetén λ reguláris érték, azaz létezik egyértelmű megoldása a

$\lambda\phi(x) - \int_a^x \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy = b(x)$ másodfajú egyenletlnek bármely folytonos $b(x)$ esetén.

Bizonyítás: $\mathscr{K}_j(x,y)=\int\limits_a^b \mathscr{K}_{j-1}(x,t)\mathscr{K}(t,y)dt$, speciálisan $\mathscr{K}_2(x,y)=\int\limits_a^b \underbrace{\mathscr{K}(x,t)}_{0 \text{ ha } t>x}\underbrace{\mathscr{K}(t,y)}_{0 \text{ ha } y>t}dt=\int\limits_y^x \mathscr{K}(x,t)\mathscr{K}(t,y)dt$,

mert csak $y \le t \le x$ esetén nem 0 az integrandus. Így $\mathscr{K}_2(x,y)=0$, ha $y>x$. $\mathscr{K}_3(x,y)=\int\limits_y^x \mathscr{K}_2(x,t)\mathscr{K}(t,y)dt=0$

ha $y>x$. Ekkor $\|K\| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^b |\mathscr{K}(x,y)|dy \le \alpha(b-a)$, ugyanis $\mathscr{K}\in C([a,b]\times[a,b]) \Rightarrow \mathscr{K}$ korlátos és így

$|\mathscr{K}(x,y)| \le \alpha, \quad \forall x,y\in[a,b]$.

$\|K^2\| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^b |\mathscr{K}_2(x,y)|dy = \sup\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^x |\mathscr{K}_2(x,y)|dy$. Az integrandusra

$|\mathscr{K}_2(x,y)| = \left|\int\limits_y^x \mathscr{K}(x,t)\mathscr{K}(t,y)dt\right| \le \int\limits_y^x \underbrace{|\mathscr{K}(x,t)|}_{<\alpha}\underbrace{|\mathscr{K}(t,y)|}_{\le\alpha}dt \le \alpha^2(x-y)$ ha $x>y$. Így

$\|K^2\| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^x |\mathscr{K}_2(x,y)|dy \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^x \alpha^2(x-y)dy =$

$=\alpha^2 \sup\limits_{x\in[a,b]}\left[-\frac{(x-y)^2}{2}\right]_{y=a}^x = \alpha^2 \sup\limits_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)^2}{2} = \alpha^2\,\frac{(b-a)^2}{2}$.

$\|K^3\|$ -re hasonló módon járunk el. Ekkor $|\mathscr{K}_3(x,y)| = \left|\int\limits_y^x \mathscr{K}(x,t)\mathscr{K}_2(t,y)dt\right| \le \int\limits_y^x \underbrace{|\mathscr{K}(x,t)|}_{\le\alpha}\underbrace{|\mathscr{K}_2(t,y)|}_{\le\alpha^2(t-y)}dt \le \alpha^3\,\frac{(x-y)^2}{2}$.

Így $\|K^3\| \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^x |\mathscr{K}_3(x,y)|dy \le \sup\limits_{x\in[a,b]}\int\limits_a^x \alpha^3\,\frac{(x-y)^2}{2}\,dy = \alpha^3 \sup\limits_{x\in[a,b]}\frac{(x-a)^3}{3!} \le \alpha^3\,\frac{(b-a)^3}{3!}$. Teljes indukcióval

bizonyítható, hogy $\|K^j\| \le \alpha^j\,\frac{(b-a)^j}{j!} \Rightarrow \|K^j\|^{1/j} = \alpha\,\frac{b-a}{(j!)^{1/j}} \to 0$, ha $j\to\infty$.

Hilbert tér operátorai

Az adjungált operátor

Legyen X Hilbert tér, $A\colon D_A \to X$ lineáris operátor, ahol D_A az A-nak az értelmezési tartománya, $D_A \subset X$, $y\in X$ elem.

Kérdés: létezik-e illetve hány $y^* \in X$ létezik, melyre $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, $\forall x \in D_A$ esetén? Mi az egyértelműség feltétele?

Állítás: legfeljebb egy y^* létezik $\Leftrightarrow \overline{D_A} = X$, vagyis ha az értelmezési tartomány sűrű X-ben.

Bizonyítás: legfeljebb egy y^* létezik $\Leftrightarrow$ hogy ha $\langle x, y^*\rangle = \langle x, \widetilde{y}\rangle$, $\forall x \in D_A$ -ból következik, hogy $y^* = \widetilde{y}$. $\langle x, y^*\rangle = \langle x, \widetilde{y}\rangle$, $\forall x \in D_A$ pontosan azt jelenti, hogy $\langle x, y^* - \widetilde{y}\rangle = 0$, $\forall x \in D_A$. Ebből következik: $y^* = \widetilde{y} \Leftrightarrow \overline{D_A} = X$. (Felhasználjuk, hogy a skalárszorzat folytonosan függ a tényezőktől.)

Definíció: legyen X Hilbert tér, $A: D_A \to X$ lineáris operátor, $\overline{D_A} = X$. Ekkor A operátor adjungáltját, A^* operátort így értelmezzük: $D_{A^*} := \{y \in X: \exists y^* \in X: \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle\ \forall x \in D_A\}$ és $A^*(y) := y^*$.

Megjegyzés: $0 \in D_{A^*}$, ugyanis $\langle Ax, 0\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$, $\forall x \in D_A$.

Állítás: A^* lineáris operátor.

Bizonyítás: legyen $y_1, y_2 \in D_{A^*}$! Ekkor $\langle Ax, y_1\rangle = \langle x, A^*(y_1)\rangle$, $\forall x \in D_A$ és $\langle Ax, y_2\rangle = \langle x, A^*(y_2)\rangle$, $\forall x \in D_A$. Így $\langle Ax, y_1\rangle + \langle Ax, y_2\rangle = \langle x, A^*(y_1)\rangle + \langle x, A^*(y_2)\rangle$. $\langle Ax, y_1 + y_2\rangle = \langle x, A^*(y_1) + A^*(y_2)\rangle$, $\forall x \in D_A$. Ebből következik, hogy $A^*(y_1 + y_2) = A^*(y_1) + A^*(y_2)$. Hasonlóan igazolható $A^*(\lambda g) = \lambda A^*(g)$.

Tétel: legyen $A: X \to X$ korlátos lineáris operátor. Ekkor $A^*: X \to X$ korlátos lineáris operátor és $\|A^*\| = \|A\|$.

Bizonyítás: tekintsünk tetszőleges, rögzített $y \in X$ elemet! Ekkor $f(x) := \langle Ax, y\rangle$, f lineáris funkcionál korlátos is: $|f(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \le \|Ax\| \cdot \|y\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = (\|A\|\|y\|) \cdot \|x\|$, így $\|f\| \le \|A\| \cdot \|y\|$. A Riesz-tételből most következik, hogy $\exists! y^* \in X: f(x) = \langle x, y^*\rangle$, azaz $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, $\forall x \in X$ -re. Így $D_{A^*} = X$, $A^* y = y^*$. Továbbá $\|A^* y\| = \|y^*\| = \|f\| \le \|A\| \cdot \|y\|$, ezért A^* korlátos és $\|A^*\| \le \|A\|$. Az egyenlőség abból fog következni, hogy $(A^*)^* = A \Rightarrow \|A\| = \|(A^*)^*\| \le \|A^*\|$.

Legyen $A: X \to X$ korlátos lineáris operátor! Láttuk már, hogy $A^*: X \to X$ operátor korlátos és lineáris, és $\|A^*\| \le \|A\|$. 11.09

Tétel: legyenek $A, B: X \to X$ korlátos lineáris operátor! Ekkor

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
3. $(A^*)^* = A$
4. $I = I^*, 0^* = 0$

5. $(AB)^* = B^* A^*$.

Bizonyítás: legyenek $x, y \in X$!

1. $\langle (A+B)x, y\rangle = \langle Ax + Bx, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle + \langle x, B^* y\rangle =$
   $= \langle x, A^* y + B^* y\rangle = \langle x, (A^* + B^*)y\rangle$
3. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \overline{\langle A^* y, x\rangle} = \overline{\langle y, (A^*)^* x\rangle} = \langle (A^*)^* x, y\rangle$,tehát $Ax = (A^*)^* x,\ \forall x \in X \Rightarrow A = (A^*)^*$,így $\|A^*\| \le \|(A^*)^*\| = \|A\|$,így az előző tétellel együtt: $\|A\| = \|A^*\|$.
5. $\langle x, (AB)^* y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^* y\rangle = \langle x, B^* A^* y\rangle$

Megjegyzés: mi a helyezet a lineáris operátorok esetén (ha nem korlátos)? $D_A, D_B \subset X$, $\overline{D_A} = \overline{D_B} = X$.

Jelölés: ha $A^* x = Ax,\ \forall x \in D_A,\ D_A \subset D_{A^*}$, akkor A^* kiterjesztése A-nak s ezt így jelöljük: $A \subset A^*$. Ezzel a jelöléssel: $(A+B)^* \supset A^* + B^*$ és $D_{A^*+B^*} = D_{A^*} \cap D_{B^*}$. Ugyanis $\forall y \in (D_{A^*} \cap D_{B^*})$ esetén $\langle (A+B)x, y\rangle = \langle x, (A^* + B^*)y\rangle,\ \forall x \in (D_A \cap D_B)$.

Továbbá $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, $(AB)^* \supset B^* A^*$, $(A^*)^* \supset A$ és 1 $A \subset B \Rightarrow A^* \supset B^*$.

Példák:

$X := \mathbb{K}^n$. Tudjuk, hogy ekkor minden lineáris operátor korlátos. $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris korlátos operátor. Tudjuk, hogy A reprezentálható egy $\mathscr{A}$ (valós vagy komplex elemekből alkotott), $n \times n$ -es mátrixszal úgy, hogy $\mathscr{A}x = Ax$. Ekkor $A^*: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ korlátos lineáris operátor. Kérdés: mi a lesz ennek a mátrixa?

$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{jk} \in \mathbb{K}$. Ekkor $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k\right] \overline{y_j} = \sum_{k=1}^{n} x_k \left[\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \overline{y_j}\right] = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{\left[\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{jk}} y_j\right]} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{\left[\sum_{j=1}^{n} a^*_{kj} y_j\right]} = \langle x, \mathscr{A}^* y\rangle, \text{ vagyis}$$

$$a^*_{kj} = \overline{a_{jk}}, \text{ vagyis } \mathscr{A}^* = \begin{pmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{n1} & \cdots & a^*_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Négyzetesen integrálható magú integrál operátorok valós vagy komplex függvényeken

Legyen $X := L^2(M), M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz, $\mathscr{K} \in L^2(M \times M)$, $(K\phi)(x) := \int_M \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy$. Tudjuk, hogy $K: L^2(M) \to L^2(M)$ lineáris operátor, node mi K^*? Legyen $\phi, \psi \in L^2(M)$, ekkor

$\langle K\phi, \psi\rangle = \int_M (K\phi)(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_M \left[\int_M \mathscr{K}(x,y)\phi(y)dy\right]\overline{\psi(x)}dx$, ami a Fubini-tétel alkalmazásával

$= \int_M \phi(y)\left[\int_M \mathscr{K}(x,y)\overline{\psi(x)}dx\right]dy = \int_M \phi(y)\overline{\left[\int_M \overline{\mathscr{K}(x,y)}\psi(x)dx\right]}dy =$ (felcserélve x-t és y-t)

$= \int_M \phi(x)\overline{\left[\int_M \underbrace{\overline{\mathscr{K}(y,x)}}_{:=\mathscr{K}^*(x,y)}\psi(y)dy\right]}dx = \int_M \phi(x)\overline{\left[\int_M \mathscr{K}^*(x,y)\psi(y)dx\right]}dy$. A bevezetett jelöléssel konzekvensen

$(K^*\psi)(x) := \int_M \mathscr{K}^*(x,y)\psi(y)dy$, így az korábbiakkal együtt: $\langle K\phi, \psi\rangle = \int_M \phi(x)\overline{(K^*\psi)(x)}dx = \langle \phi, K^*\psi\rangle$.

Állítás: tetszőleges A lineáris operátor esetén (melyre $D_A \subset X$, $\overline{D_A} = X$) A^* zárt operátor.

Bizonyítás: azt kellene belátni, hogy ha $y_j \in D_{A^*}$, $\left(y_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \to y$ X-ben, továbbá $\left(A^* y_j\right) \to z$ X-ben $\Rightarrow y \in D_{A^*}$ és $A^* y = z$. Tudtuk, hogy $\langle Ax, y_j\rangle = \langle x, A^* y_j\rangle$, $\forall x \in D_A$, $\forall j$, így $j \to \infty$ esetén $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$, $\forall x \in D_A$. Ez azt jelenti, hogy $y \in D_{A^*}$ és $z = A^* y$.

Tétel: legyen X Hilbert tér, $A: X \to X$ korlátos lineáris operátor és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $\overline{R_{(\lambda I - A)}}^{\perp} = S_{\bar\lambda}(A^*) := \left\{x \in X : \left(\bar\lambda I - A^*\right)x = 0\right\}$, ahol R az értékkészletet jelöli.

Bizonyítás: világos, hogy $R_{(\lambda I - A)}$ lineáris altér, ezért $\overline{R_{(\lambda I - A)}}$ zárt altér. Másrészt $S_{\bar\lambda}(A^*)$ is zárt altér. Az $S_{\bar\lambda}(A^*)$ halmaz azért zárt, mert A^* folytonos lineáris operátor.

- Először tfh $y \in \overline{R_{\lambda I - A}}^{\perp}$,ekkor $0 = \langle \underbrace{(\lambda I - A)x}_{\in R_{\lambda I - A} \subset \overline{R_{\lambda I - A}}}, y\rangle = \langle x, (\lambda I - A)^* y\rangle$,ez igaz $\forall x \in X \Rightarrow \underbrace{(\lambda I - A)^*}_{=\bar\lambda I - A^*} y = 0$,vagyis $y \in S_{\bar\lambda}(A^*)$.
- tfh $y \in S_{\bar\lambda}(A^*)$,azaz $\left(\bar\lambda I - A^*\right)y = 0$, $\forall x \in X$,így $\langle(\lambda I - A)x, y\rangle = \langle x, (\lambda I - A)^* y\rangle = 0$,vagyis $y \perp R_{\lambda I - A}$ minden elemére $\Rightarrow y \perp \overline{R_{\lambda I - A}}$ minden elemére.

Megjegyzés: spec eset, mikor $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz, azaz $R_{\lambda I - A} = \overline{R_{\lambda I - A}}$. Ekkor a fenti tételből következik: $(\lambda I - A)x = b$ másodfajú egyenletnek létezik $x \in X$ megoldása pontosan akkor, ha $b \in R_{\lambda I - A} = S_{\bar\lambda}(A^*)^{\perp}$, azaz $\langle b, y\rangle = 0$ a $(\lambda I - A)^* y = 0$ egyenlet $\forall y \in X$ megoldására. Később látni fogjuk, hogy ha A ún. kompakt lineáris operátor, akkor $\lambda \neq 0$ esetén az $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz.

Szimmetrikus és önadjungált operátorok

Definíció: legyen X Hilbert tér, $D_A \subset X$ és $\overline{D_A} = X$ és $A: D_A \to X$ lineáris operátor. Ekkor A-t önadjungáltnak nevezzük, ha $A^* = A$ (ekkor ugyanott vannak értelmezve, $D_{A^*} = D_A$).

Definíció: legyen X Hilbert tér, $D_A \subset X$ és $\overline{D_A} = X$ és $A: D_A \to X$ lineáris operátor. Ekkor A-t szimmetrikusnak nevezzük, ha $A \subset A^*$. Tehát minden önadjungált operátor egyúttal szimmetrikus is.

Megjegyzés: ekvivalens definíció: A szimmetrikus, ha $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, $\forall x, y \in D_A$.

Példa: ha $X = \mathbb{K}^n$, akkor $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ -nak megfelel egy $\mathscr{A}$ mátrix. Tudjuk, hogy A^* mátrixa $\mathscr{A}^*$, melynek elemei $a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$. Ekkor A önadjungált $\Leftrightarrow a^*_{jk} = a_{jk}$, azaz $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$.

Példa: legyen $X := L^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz, $(K\phi)(x) := \int_M \mathscr{K}(x, y)\phi(y)dy$ korlátos operátor, ahol $\mathscr{K} \in L^2(M \times M)$. Ekkor $(K^*\phi)(x) = \int_M \mathscr{K}^*(x, y)\phi(y)dy$, vagyis $\mathscr{K}^*(x, y) = \overline{\mathscr{K}(y, x)}$. K önadjugnált pontosan akkor, ha $\mathscr{K}(x, y) = \overline{\mathscr{K}(y, x)}$ majdnem minden $x, y \in M$.

Példa: legyen $X := L^2(0,1)$, $(A\phi)(t) := \phi''(t)$, midőn $t \in [0,1]$, vagyis legyen A a második derivált operátor (ami lineáris)! $D_A := \{\phi \in C^2[0,1] : \phi(0) = 0, \phi(1) = 0\}$, erre belátható, hogy $\overline{D_A} = L^2(0,1)$.

Állítás: A szimmetrikus operátor (de nem önadjungált). Ennek igazolásához tekintsünk $\phi, \psi \in D_A$ tetszőleges függvényeket, ekkor parciális integrálással:

$$\langle A\phi, \psi\rangle = \int_0^1 (A\phi(t))\psi(t)dt = \int_0^1 \phi''(t)\psi(t)dt = \left[\phi'(t)\psi(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \phi'(t)\psi'(t)dt =$$

$$= -\left[\phi(y)\psi'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \phi(t)\psi''(t)dt = \langle \phi, A\psi\rangle$$

Állítás: legyen X komplex Hilbert tér! Ha $D_A \subset X$, $A: D_A \to X$ szimmetrikus operátor, akkor $\langle Ax, x\rangle$ értéke valós $\forall x \in \mathbb{D}_A$ esetén. 11.16

Bizonyítás: mivel A szimmetrikus, ezért $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$, $\forall x \in D_A$, másrészt a skaláris szorzat tulajdonságából következően: $\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle$ valós, így $\langle Ax, x\rangle$ is valós.

Megjegyzés: bebizonyítható, hogy ha X komplex Hilbert tér és $\langle Ax, x\rangle$ valós $\forall x \in D_A \Rightarrow A$ szimmetrikus.

Tétel: legyen X Hilbert tér (lehet valós is). Ha $D_A \subset X$, $A: D_A \to X$ szimmetrikus operátor, akkor A minden sajátértéke valós és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátelemek ortogonálisak.

Bizonyítás:

- tfh $Ax = \lambda x$ valamely $0 \neq x \in D_A$ elemre, $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $\Rightarrow \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\text{valós}} = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$. A norma értéke valós, így a sajátérték is az, mert szorzatuk valós.
- tfh $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós sajátértékek. Szorozzuk skalárisan jobbról előbbit x_2 -vel! $\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle$, illetve $\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle$, vagyis $\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$, így mivel $\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0$.

Tétel: legyen X Hilbert tér, $A: X \to X$ korlátos önadjungált operátor. Ekkor $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, \|x\| = 1\}$.

Bizonyítás: az operátor norma definíciója szerint $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| = 1\}$. Ezért egyrészt a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|$, ha $\|x\| = 1$. Jelöljük:

$\alpha := \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, \|x\| = 1\}$. Az előbbiek szerint $\alpha \leq \|A\|$. Belátjuk a fordított egyenlőtlenséget.

Tetszőleges $x, y \in X$ elemekre

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax + Ay, x+y\rangle = \langle Ax, x\rangle + \underbrace{\langle Ay, x\rangle}_{=\langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}} + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, y\rangle =$$

$$= \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle + 2\mathfrak{R}\langle Ax, y\rangle$$

Hasonlóképpen: $\langle A(x-y), x-y\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - 2\mathfrak{R}\langle Ax, y\rangle$. A kapott 1. egyenlőségből a 2-at kivonva:

$$4\mathfrak{R}\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \leq |\langle A(x+y), x+y\rangle| + |\langle A(x-y), x-y\rangle| \leq$$

$$\leq \alpha\|x+y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2 = \alpha\left(\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle^2 + \|y\|^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{R}\langle Ax, y\rangle \leq \tfrac{\alpha}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Tetszőleges $\lambda > 0$ számra: $\underbrace{\|Ax\|^2}_{\in\mathbb{R}_0^+} = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A(\underbrace{\lambda x}_{:=f}), \underbrace{Ax/\lambda}_{:=g}\rangle = \underbrace{\langle Af, g\rangle}_{\geq 0} = \mathfrak{R}\langle Af, g\rangle \leq \frac{\alpha}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2\right] =$

$= \frac{\alpha}{2}\left[\|\lambda x\|^2 + \left\|\frac{Ax}{\lambda}\right\|^2\right] = \frac{\alpha}{2}\left[\lambda^2\|x\|^2 + \frac{\|Ax\|^2}{\lambda^2}\right]$. Válasszuk: $\lambda^2 := \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, ekkor $\lambda > 0$ teljesül (feltéve, hogy $Ax \neq 0$),

és $\|Ax\|^2 \leq \frac{\alpha}{2}\left[\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2\right] = \frac{\alpha}{2}\left[\|Ax\| \cdot \|x\| + \|x\| \cdot \|Ax\|\right] = \alpha\|Ax\| \cdot \|x\|$. $\|Ax\| = 0$ triviális esetet kivéve osztva $\|Ax\| > 0$ -val: $\|Ax\| \leq \alpha \cdot \|x\|$. Ez igaz $\|Ax\| = 0$ esetén is persze. Tehát $\|A\| \leq \alpha$. Előbb azt kaptuk, hogy $\alpha \leq \|A\|$, így a mostanival együtt: $\|A\| = \alpha$.

Tétel (bizonyítás nélkül): vezessük be $M := \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\}$ és $m := \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\}$. (Ekkor a fentiek miatt $[m, M] \subset [-\|A\|, \|A\|]$, és $\max\{|m|, M\} = \|A\|$). Az A önadjungált korlátos operátor spektruma $\subset [m, M]$, más szóval, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ -ra $\lambda \notin [m, M] \Rightarrow \lambda$ reguláris érték A-ra.

Megjegyzés: azt eddig is tudtuk, hogy $|\lambda| > \|A\|$ esetén λ reguláris érték (ha A korlátos). Azt is tudtuk, hogy ha A szimmetrikus és $\mathfrak{I}\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda$ nem lehet sajátérték.

Definíció: legyen $A: D_A \to X$ lineáris operátor, $D_A \subset X$, $\overline{\mathbb{D}_A} = X$. Ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in D_A$, akkor A-t pozitív operátornak nevezzük (konzekvensen pozitív szemidefinitnek kéne nevezni).

Állítás: ha A pozitív, akkor A minden sajátértéke ≥ 0.

Bizonyítás: $Ax = \lambda x \Rightarrow 0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$, ha $\|x\|^2 \neq 0$.

Izometrikus és unitér operátorok

Definíció: legyen X Hilbert tér! Az $A\colon X \to X$ operátort izometrikusnak nevezzük, ha $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. Ekkor látható, hogy A korlátos és $\|A\| = 1$.

Állítás: ha A izometrikus, akkor távolság és skalárszorzattartó (szögtartó).

Bizonyítás:

- $\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| = \|x - y\|$.
- Belátjuk a skalárszorzattartást valós X Hilbert tér esetén. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$. Ezeket egymásból kivonva: $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$. Így $\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}\left(\|Ax+Ay\|^2 - \|Ax-Ay\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$.
- Komplex esetben $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]$, így kicsit hosszabb a bizonyítás.

Következemény: ha $A\colon X \to X$ izometrikus operátor és $(x_1, x_2, ...)$ ortonormált rendszer, akkor $(Ax_1, Ax_2, ...)$ is ortonormált rendszer.

Kérdés: ha $(x_1, x_2, ...)$ teljes ortonormált rendszer, akkor következik-e, hogy $(Ax_1, Ax_2, ...)$ is teljes ortonormált rendszer? Általában sajnos nem.

Példa: legyen X végtelen dimenziós, szeparábilis Hilbert tér és $(x_1, x_2, ..., x_k, ...)$ teljes ortonormált rendszer. Értelmezzük A-t! Egy $x \in X$ elemet fejtsük Fourier-sorba! $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ...$,

$Ax := \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{k+1} = c_1 x_2 + c_2 x_3 + ...$ Ez egy jól definiált lineáris operátor. Tudjuk, hogy

$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$, tehát A izometrikus. Láthatjuk, hogy így $(Ax_1 = x_2, Ax_2 = x_3, \dots)$ nem teljes. Az is kiolvasható A definíciójából, hogy $R_A = \overline{\mathscr{L}(x_2, x_3, \dots)}$ az X-nek valódi altere, így $R_A \neq X$.

Definíció: $A: X \to X$ izometrikus operátort unitérnek nevezzük, ha $R_A = X$.

Tétel: egy $A: X \to X$ korlátos operátor unitér $\Leftrightarrow \exists A^{-1} = A^*$.

Bizonyítás:

- $\Rightarrow$ irányba: tfh A unitér. Ekkor A korlátossága lévén A^* értelmezve van X-n, továbbá $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in X \Rightarrow A$ injektív $\Rightarrow A^{-1}$ is létezik. Belátjuk, hogy $A^* = A^{-1}$. Egyrészt $D_{A^{-1}} = R_A = X$, mivel A unitér. Ekkor $\forall x, y \in X$ elemre $\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^*Ay\rangle \Rightarrow y = A^*Ay$, $\forall y \in X \Rightarrow A^*A = I \Rightarrow A^*AA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A^* = A^{-1}$
- $\Leftarrow$ irányba: tfh $A^* = A^{-1}$. Ekkor mivel $D_{A^*} = X \Rightarrow R_A = D_{A^{-1}} = X$, továbbá $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2$, tehát A izometrikus is.

Állítás: ha A unitér, akkor teljes ortonormált rendszer képe szintén teljes ortonormált rendszer. 11.23

Példák unitér operátorokra:

1. Triviális példa az identitás
2. $X := \mathbb{K}^n$. Tudjuk, hogy egy $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris korlátos operátor megadható egy $\mathscr{A}$ négyzetes mátrixszal,
$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}, \mathscr{A}^* = \left(\bar{\mathbf{a}}_1^T, \bar{\mathbf{a}}_2^T, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n^T\right).$$
A leképzés unitér $\Leftrightarrow A^* = A^{-1} \Leftrightarrow AA^* = I = A^*A \Leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{I} = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$. $\mathscr{A}\mathscr{A}^*$ elemei:
$$\mathbf{a}_j\bar{\mathbf{a}}_k^T = \langle a_j, a_k\rangle_{\mathbb{K}^n} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ ha } j = k \\ 0 \text{ ha } j \neq k \end{cases}$$
A sorvektorok tehát ortonormáltak, belátható az $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{I}$ egyenletből, hogy az oszlopvektorok is. Az ilyen – unitér operátorokat megadó – mátrixokat ortogonális mátrixoknak is nevezzük.
3. Fourier-operátor (Fourier-transzformáció): $X := L^2(\mathbb{R})$ Hilbert tér! Az $\mathscr{F}$ fourier operátort így értelmezzük az $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ függvényeken: $[\mathscr{F}(\phi)](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\phi(y)dy$. Látható, hogy ennek csak akkor van értelme, ha $\phi(y)$ integrálható. Tudjuk, hogy $|e^{-ixy}\phi(y)| = |\phi(y)|$, mert $|e^{-ixy}| = 1$. $\phi \in L^2(\mathbb{R})$

esetén $[\mathscr{F}(\phi)](x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ixy}\phi(y)dy$ az $L^2(\mathbb{R})$ normával.

Tétel: az $\mathscr{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ operátor unitér, $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^*$ a következő képlettel adható meg:

$\left[\mathscr{F}^{-1}(\psi)\right](y) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{ixy}\psi(x)dx$, ahol a limesz $L^2(\mathbb{R})$ norma szerinti.

Bizonyítás (vázlatos):

1. először értelmezzük $\mathscr{F}$ -et a következő spec. alakú lépcsős függvényeken:
   $\phi_\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ 0 és } \alpha \text{ között van} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$.
   Egyszerű számolással $(\mathscr{F}\phi_\alpha)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-e^{-i\alpha x}}{ix}$. Bevezetjük a $\mathscr{G}$ operátort $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ függvényekre:
   $(\mathscr{G}\phi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\phi(y)dy$. Hasonlóan adódik: $(\mathscr{G}\phi_\alpha)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha x}-1}{x}$. Állítás: tetszőleges ϕ_α, ϕ_β
   esetén $\langle \mathscr{F}\phi_\alpha, \mathscr{F}\phi_\beta \rangle = \langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle$, $\langle \mathscr{G}\phi_\alpha, \mathscr{G}\phi_\beta \rangle = \langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle$ és $\langle \mathscr{F}\phi_\alpha, \phi_\beta \rangle = \langle \phi_\alpha, \mathscr{G}\phi_\beta \rangle$ is igaz.
2. Kiterjesztjük az állítást lépcsős függvényekre, amik láthatóan ilyen függvények lineárkombinációi.
3. A lépcsős függvények sűrűn vannak $L^2(\mathbb{R})$ -ben. Hasonló állítást kapok ezen lépcsős függvényekre. $\mathscr{F}$ és $\mathscr{G}$ -t a linearitás és korlátosság megtartásával egyértelműen kiterjeszthetjük $L^2(\mathbb{R})$ -re.
4. $\mathscr{F}$ és $\mathscr{G}$ képlete $L^2(\mathbb{R})$ -en megadandó.

Megjegyzés: $\mathscr{F}$ operátor $\mathbb{R}^n$ -ben: $(\mathscr{F}\phi)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle}\phi(y)dy$, ha $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R})$, ekkor $\mathscr{F}$ unitér.

Véges rendű operátorok

Definíció: legyen X Hilbert tér! Egy $A: X \to X$ korlátos operátort véges rendűnek nevezünk, ha R_A véges dimenziós.

Példa: legyenek $\phi_1,...,\phi_m$ lineárisan függetlenek, akárcsak $\psi_1, \psi_2,...,\psi_m$, mind X-beli elemek! Az A operátort így értelmezzük: $A: X \to X$, $A(f) := \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j$. Látható, hogy ez véges rendű. Világos, hogy A operátor lineáris,

$R_A = \mathscr{L}(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m)$ véges dimenziós. A korlátos is: $\|Af\|_X \leq \sum_{j=1}^{m} \|\langle f, \psi_j \rangle \phi_j\| = \sum_{j=1}^{m} |\langle f, \psi_j \rangle| \cdot \|\phi_j\|$, melyre a

Cauchy-Schwarz szerint $\leq \sum_{j=1}^{m} \|f\|_X \cdot \|\psi_j\|_X \cdot \|\phi_j\|_X = \|f\| \cdot \sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|_X \cdot \|\phi_j\|_X$.

Állítás: legyen X Hilbert tér, $A: X \to X$ véges rendű operátor. Ekkor $\exists \phi_1, \phi_2, ..., \phi_m \in X$ lineárisan függetlenek és $\exists \psi_1, \psi_2, ..., \psi_m \in X$ lineárisan függetlenek a fentiek szerint, és A a fenti alakú.

Bizonyítás: R_A véges, m dimenziós lineáris altér. Legyenek $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$ lineárisan független elemek, $\mathscr{L}(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m) = R_A$. Ezek választhatók úgy, hogy ortonormáltak legyenek (a Schmidt eljárással). Ekkor, ha $f \in X$, $Af = \sum_{j=1}^{m} c_j(f)\phi_j$.Ebben a c_j együtthatók egyértelműek, $c_j(f) = \langle Af, \phi_j \rangle$. Látjuk, hogy c_j lineáris

funkcionál, továbbá korlátos is, és $|c_j(f)| = |\langle Af, \phi_j \rangle| \leq \|Af\| \cdot \underbrace{\|\phi_j\|}_{=1} \leq \|A\| \cdot \|f\|$. Riesz-tétel segítségével

$\exists ! \psi_j \in X : c_j(f) = \langle f, \psi_j \rangle \Rightarrow Af = \sum_{j=1}^{m} c_j(f)\phi_j = \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j$. Nem nehéz belátni, hogy $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$ is lineárisan

függetlenek.

A másodfajú egyenlet véges rendű operátorokra

Legyen X Hilbert tér (véges vagy végtelen dimenziós), $A: X \to X$ véges rendű operátor. Tekintsük az A operátornak a másodfajú egyenletét: $(\lambda I - A)f = b$, ahol $b \in X$ adott és $f \in X$ keresett. Ezt az előbbiek szerint így írhatjuk: $\lambda f - \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j = b$. Belátjuk, hogy $\lambda \neq 0$ esetén ez az egyenlet ekvivalens egy lineáris algebrai

egyenletrendszerrel.

Az előző egyenletet jobbról ψ_k -val skalárisan szorozva: $\lambda \langle f, \psi_k \rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \langle \phi_j, \psi_k \rangle = \langle b, \psi_k \rangle$, $k \in \{1, 2, ..., m\}$.

Keressük $\xi_j := \langle f, \psi_j \rangle$ -t, adottak $a_{kj} := \langle \phi_j, \psi_k \rangle$, $\beta_k := \langle b, \psi_k \rangle$. Ezzel a jelöléssel: $\lambda \xi_k - \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \xi_j = \beta_k$,

$k \in \{1,2,...,m\}$. Ez egy lineáris egyenletrendszer ξ_k együtthatókra. $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}, \beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \mathscr{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$,

így $(\lambda\mathscr{I} - \mathscr{A})\xi = \beta$. Ha f kielégíti a másodfajú egyenletet $\Rightarrow \xi$ kielégíti a kapott lineáris algebrai egyenletrendszert $\lambda = 0$ esetén is!

Állítás: legyen $\lambda \neq 0$ és tfh ξ kielégíti a lineáris algebrai egyenletrendszert! Ekkor $f := \frac{1}{\lambda} b + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{m} \xi_j \phi_j$ kielégíti a véges rendű operátorra vonatkozó másodafajú egyenletet.

Bizonyítás: behelyettesítünk a másodfajú egyenletbe, s kihasználjuk, hogy ξ kielégíti a lineáris algebrai egyenletrendszert.

Tétel: egy $f \in X$ elem kielégíti a véges rendű opertárra vonatkozó másodfajú egyenletet $\lambda \neq 0$ esetén $\Leftrightarrow \xi_j = \langle f, \psi_j \rangle$ képlettel értelmezett koordinátákból álló ξ kielégíti a fenti lineáris algebrai egyenletrendszert. Ennek alapján a véges rendű operátorokra vonatkozó másodfajú egyenlet megoldhatóságának elmélete következik a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldhatóságának elméletéből. Két eset lehetséges:

1. ha $\lambda \neq 0$ szám az $\mathscr{A}$ mátrixnak nem sajátértéke $\Leftrightarrow \det|\lambda\mathscr{I} - \mathscr{A}| \neq 0$, ekkor $(\lambda\mathscr{I} - \mathscr{A})\xi = \beta$ egyenletben $\forall \beta \in \mathbb{K}^n \; \exists ! \xi$ megoldás $\Rightarrow \exists ! f$ megoldás a $(\lambda I - A)f = b$ egyenletre. Nem nehéz belátni, hogy f folytonosan függ b-től. Ekkor $\lambda \neq 0$ reguláris érték A-ra.
2. ha $\lambda \neq 0$ az $\mathscr{A}$ mátrixnak sajátértéke $\Rightarrow \lambda$ az A sajátéréke, s a kétféle rang egyenlő. $\lambda = 0$ végtelen rangú sajátértéke A-nak (ha X végtelen dimenziós).

Állítás: ha X végtelen dimenziós vektortér, akkor $\lambda = 0$ végtelen rangú sajátértéke az operátornak. 11.30

$A\phi := \sum_{j=1}^{m} \langle \phi, \psi_j \rangle \phi_j$. $\lambda = 0$ sajátérték azt jelenti, hogy $A\phi = 0\phi = 0$ biztosan teljesül. Mivel ϕ_j -k lineárisan függetlenek, $\langle \phi, \psi_j \rangle = 0$, $\forall j \in \{1,2,...,m\} \Leftrightarrow \phi \perp \mathscr{L}(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m)$.

Összefoglalva: legyen X végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert tér! Ekkor egy A véges rendű operátor spektruma csak sajátértékekből áll, mégpedig a 0-tól különböző (véges sok) sajátérték véges rangú (ezek megegyeznek az $\mathscr{A}$ mátrix sajátértékeivel, s ranguk is megegyezik), a 0 pedig végtelen rangú sajátérték. Minden más λ reguláris érték.

Példa véges rangú operátorokra (elfajult magú integrálegyenletek)

$X := L^2(M)$, ahol M mérhető halmaz. $\mathcal{K}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\psi_j(y)$, ahol $\phi_j, \psi_j \in L^2(M) \Rightarrow \mathcal{K} \in L^2(M \times M)$.

$(K\phi)(x) = \int_M \mathcal{K}(x,y)\phi(y)dy = \int_M \left[\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\psi_j(y)\right]\phi(y)dy = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\int_M \psi_j(y)\phi(y)dy$. Röviden:

$K\phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \langle \phi, \psi_j \rangle$.

Az előbbiek alapján egy elfajult magú (elsőfajú) integrálegyenlet megoldása kiszámolható egy lineáirs algebrai egyenletrendszer megoldásával.

Kompakt (teljesen folytonos) operátorok

Definíció: egy $M \subset Y$ halmazt feltételesen (vagy relatíve) sorozatkompaktnak nevezünk, ha lezárása sorozatkompakt.

Megjegyzés: M feltételesen sorozatkompakt, ha tetszőleges M-beli sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. $\mathbb{R}^n$ -ben a feltételesen sorozatkompakt halmazok a korlátos halmazok.

Definíció: legyenek X, Y Banach terek! Egy $A: X \to Y$ lineáris operátort teljesen folytonosnak, avagy kompaktnak nevezünk, ha X tetszőleges korlátos halmazát feltételesen (avagy relatíve) sorozatkompakt halmazba képezi.

Megjegyzés: Ekkor A korlátos is, továbbá két kompakt operátor összege és számszorosa is kompakt.

Állítás: egy $A: X \to Y$ operátor kompakt $\Leftrightarrow \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in X$ korlátos sorozatra $(Ax_k)_{k \in \mathbb{N}}$ -ból kiválasztható konvergens részsorozat.

Állítás: legyen X Hilbert tér, $A: X \to X$ véges rendű operátor. Ekkor A kompakt.

Tétel: legyenek X, Y Banach terek, $A_j \in L(X,Y)$ operátorok kompaktak, és $\exists A \in L(X,Y)$: $\lim_{j \to \infty} A_j = A \Rightarrow A$ is kompakt operátor.

Bizonyítás: legyen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ egy X-beli korlátos sorozat. Bizonyítani akarjuk, hogy $(Ax_k)_{k \in \mathbb{N}}$ -nek van konvergens részsorozata Y-ban. Tudjuk, hogy $A \in L(X,Y)$. Mivel A_1 kompakt, ezért az $(A_1 x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatból kiválasztható Y-ban konvergens részsorozat, legyen ez $(A_1 x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$! $(A_2 x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$ -ből kiválasztható konvergens részsorozat, legyen ez $(A_2 x_{k2})_{k \in \mathbb{N}}$. $(A_3 x_{k2})_{k \in \mathbb{N}}$ -ből megint kiválasztható…

$$\begin{array}{lllllll} & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & \\ A_1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_1 x_{k1})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\ A_2 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_2 x_{k2})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_j & x_{1j} & x_{2j} & \cdots & x_{kj} & \cdots & \text{részsorozatra } \left(A_j x_{kj}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Tekintsük az $(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ átlós sorozatot. Belátjuk, hogy $(Ax_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens Y-ban. $(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ az eredeti $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak olyan részsorozata, amely bármelyik sorban levő részsorozatnak a részsorozata, bizonyos indextől kezdve.

$$\|Ax_{kk} - Ax_{mm}\|_Y = \left\|\left[Ax_{kk} - A_j x_{kk}\right] + \left[A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\right] + \left[A_j x_{mm} - Ax_{mm}\right]\right\|_Y \leq$$

$$\leq \left\|\left(A - A_j\right)x_{kk}\right\|_Y + \|A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\|_Y + \left\|\left(A_j - A\right)x_{mm}\right\|_Y \leq$$

$$\leq \|A - A_j\|_{L(X,Y)}\|x_{kk}\|_X + \|A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\|_Y + \|A_j - A\|_{L(X,Y)}\|x_{mm}\|_X.$$

$(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat, ehhez $\exists c > 0 : \|x_{kk}\| \leq c$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim\limits_{j\to\infty}\|A_j - A\| = 0$, ezért $\exists j_0 : j \geq j_0 \Rightarrow \|A_j - A\| \leq \varepsilon$. Válasszuk pl: $j = j_0$. Mivel $\left(A_{j_0} x_{kk}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens, ezért $\exists k_0 : k, l \geq k_0 \Rightarrow \left\|A_{j_0} x_{kk} - A_{j_0} x_{ll}\right\| \leq \varepsilon$. Tehát $k, l \geq k_0$ esetén $\|Ax_{kk} - Ax_{ll}\|_Y \leq c\varepsilon + \varepsilon + c\varepsilon = (2c+1)\varepsilon \Rightarrow (Ax_{kk})$ Cauchy sorozat.

Következmény: kompakt operátorok alteret képeznek $L(X, Y)$ -ban.

Tétel: (bizonyítás nélkül) legyen X szeparábilis Hilbert tér. Ha $A : X \to X$ kompakt operátor, akkor $\exists A_j : X \to X$ véges rendű operátorok, hogy $\lim\limits_{j\to\infty}\|A_j - A\|_{L(X,X)} = 0$.

Összefoglalva: ha X szeparábilis Hilbert tér, akkor az $A : X \to X$ korlátos operátor kompakt $\Leftrightarrow$ előáll véges rendű operátorok sorozatának norma szerinti limeszeként.

Példa: legyen $X = L^2(M)$ Hilbert tér, $K : L^2(M) \to L^2(M)$ négyzetesen integrálható magú integráloperátor, $(K\phi)(x) := \int_M \mathcal{K}(x, y)\phi(y)dy$. Ez a K operátor kompakt. Ennek igazolásának alapgondolata: tudjuk, hogy $L^2(M)$ szeparábilis Hilbert tér (végtelen dimenziós). Legyenek ebben teljes ortonormált rendszerek $\psi_1, \psi_2, \ldots$ illetve $\phi_1, \phi_2, \ldots$. Ekkor $\mathcal{K}(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j,k\leq m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y)\right)$, $\mathcal{K}_N(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{N}\sum\limits_{j,k\leq m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y)$,

$\lim\limits_{N\to\infty}\|\mathcal{K}_N - \mathcal{K}\|_{L^2(M\times M)} = 0$. $\mathcal{K}_N$ -nek véges rendű operátorok felelnek meg. $\|K_N - K\|_{L\left(L^2(M), L^2(M)\right)} \to 0$, ha

$N \to \infty$.

Másodfajú egyenlet kompakt operátorokra

Legyen X szeparábilis Hilbert tér, $A: X \to X$ kompakt operátor. Tekintsük a $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenletet, melyben $\lambda \neq 0$ rögzített. Tudjuk, hogy A kompakt operátor tetszőleges előírt pontossággal megközelíthető egy B véges rendű operátorral. $\exists A_0 : X \to X$ véges rendű operátor, hogy $\|A - A_0\| < |\lambda|$. $B_0 := A - A_0 \Leftrightarrow A = A_0 + B_0$, ahol A_0 véges rendű, és $\|B_0\| < |\lambda|$. Tehát a másodfajú egyenlet így írható:

$[\lambda I - (A_0 + B_0)]f = b \Leftrightarrow (\lambda I - B_0)f = b + A_0 f$.

$|\lambda| > \|B_0\| \Rightarrow |\lambda| > B_0$ korlátos operátor spektrálsugara $\Rightarrow \lambda$ reguláris érték B_0 operátorra nézve $\Rightarrow$ a legutóbbi egyenlet ekvivalens: $f = (\lambda I - B_0)^{-1}(b + A_0 f) = \underbrace{(\lambda I - B_0)^{-1} b}_{\text{adott}} + (\lambda I - B_0)^{-1} A_0 f$. λ -val beszorozva, átrendezve:

$\lambda f - \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1} A_0}_{:=B:=B_\lambda} f = \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1} b}_{:=g}$. A bevezetett jelöléssel $(\lambda I - B_\lambda)f = g$. Észrevétel: B_λ véges rendű operátor, mert A_0 véges rendű operátor. Legyen $\delta > 0$ rögtített szám, és válasszuk A_0-t úgy, hogy $\|A - A_0\| < \delta$ legyen. Ekkor az előbbi gondolatmenet érvényes $\forall \lambda$ -ra, A_0 nem függ λ -tól, ha $\lambda \geq \delta$ (de δ -tól igen). A_0 véges rendű operátor $\lambda \geq \delta$ esetén, és $A_0 f = \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j$ alakban írható.

$Bf = B_\lambda f = \lambda(\lambda I - B_0)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j$. A másodfajú egyenlet:

$$\lambda f - \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j = g = g_\lambda.$$

12.07

Tehát kaptuk, hogy $\lambda f - \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j = g = g_\lambda$. Ez megfelel egy lineáris algebrai egyenletrendszernek: $\lambda \mathcal{I} \xi - \mathcal{B}_\lambda \xi = \beta_\lambda$. Ekkor $\det(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{B}_\lambda) = 0$ egyenlet gyökei a sajátértékek. A mátrix ($\mathcal{B}_\lambda$) és az operátor (B_λ) sajátértékei azonosak az eredeti operátor (A) sajátértékeivel, és rangjuk is azonos. Belátható, hogy a mátrix elemei a λ változónak holomorf függvényei! Így a determináns is holomorf függvénye λ -nak. Tudjuk, hogy egy holomorf függvény gyökei nem torlódhatnak egy véges pontban, hacsak nem az azonosan 0 függvény. Mivel $\lambda < \|A\|$, ezért csak véges sok gyök van. Tehát tetszőleges rögzített δ esetén A operátornak véges sok δ -nál nagyobb abszolút értékű sajátértéke van, s ezek véges rangúak.

Tétel: ha A kompakt operátor, akkor A-nak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke van, a 0-tól különböző sajátértékek véges rangúak, s a sajátértékek csak a 0-ban torlódhatnak. (Gondoljunk csak a $\delta:=1/k$, $k \in \mathbb{N}$ esetre!)

Tétel (biz. nélkül): minden $\lambda \neq 0$, ami nem sajátérték, az reguláris érték A (kompakt operátorra) nézve.

Következmény: ha $\lambda \neq 0$ nem sajátérték, $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenletnek $\forall b$ -re létezik egyetlen f megoldás, és ez folytonosan függ b-től.

Mi a helyzet, ha λ sajátérték?

Emlékeztető: tetszőleges korlátos lineáris operátor esetén $\overline{R_{\lambda I-A}}^{\perp} = S_{\overline{\lambda}}(A^*) \Leftrightarrow \overline{R_{\lambda I-A}} = S_{\overline{\lambda}}(A^*)^{\perp}$. Ha $R_{\lambda I-A}$ zárt altér, akkor $R_{\lambda I-A} = \overline{R_{\lambda I-A}} = S_{\overline{\lambda}}(A^*)^{\perp}$.

Tétel: ha A kompakt operátor, akkor $\lambda \neq 0$ esetén $R_{\lambda I-A}$ zárt altér.

Bizonyítás: látható, hogy $R_{\lambda I-A}$ lineáris altér. Azt kell bizonyítani, hogy $R_{\lambda I-A}$ zárt halmaz. Legyen tetszőleges $\psi_j \in R_{\lambda I-A}$ és $\exists \lim \psi_j = \psi$, ekkor $\psi \in R_{\lambda I-A}$? Mivel $\psi_j \in R_{\lambda I-A} \Rightarrow \exists \phi_j \in X:(\lambda I - A)\phi_j = \psi_j$. Jelöljük: $S_\lambda(A):=\{\phi \in X:(\lambda I - A)=0\}$. Ekkor $S_\lambda(A)$ zárt lineáris altér (A folytonos). A Riesz tétel következtében $X:=S_\lambda(A) \oplus S_\lambda(A)^{\perp} \Leftrightarrow \forall x \in X \exists ! x_1, x_2 : x_1 \in S_\lambda(A), x_2 \in S_\lambda(A)^{\perp}, x = x_1 + x_2$. Ennek megfelelően $X \ni \phi_j = f_j + g_j$, ahol $f_j \in S_\lambda(A)$. $g_j \in S_\lambda(A)^{\perp}$, $\psi_j = (\lambda I - A)\phi_j = \underbrace{(\lambda I - A)f_j}_{=0} + (\lambda I - A)g_j \Rightarrow (\lambda I - A)g_j = \psi_j$. Kis állítás: $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ korlátos sorozat X-ben.

> Bizonyítás (a tétel bizonyításán belül): indirekt feltesszük, hogy $\exists (g_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $\lim_{k \to \infty} \|g_{j_k}\|_X = \infty$. Legyen $h_{j_k} = \frac{g_{j_k}}{\|g_{j_k}\|_X}$, ekkor $\|h_{j_k}\|_X = 1$. $(\lambda I - A)g_{j_k} = \psi_{j_k}$ egyenletet osztva $\|g_{j_k}\|$ -val: $(\lambda I - A)h_{j_k} = \frac{\psi_{j_k}}{\|g_{j_k}\|_X} \to 0_X$, ugyanis ψ_j konvergens $\Rightarrow$ korlátos. $\lim_{k \to \infty} (\lambda h_{j_k} - A h_{j_k}) = 0_X$. (h_{j_k}) korlátos sorozat (mert $\|h_{j_k}\| = 1$), A kompakt operátor, ezért $\exists (\widetilde{h}_{j_k})$ részsorozat, amelyre $(A\widetilde{h}_{j_k})$ konvergens $\Leftrightarrow (\lambda \widetilde{h}_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ is konvergens. $\lambda \neq 0 \Rightarrow (\widetilde{h}_{j_k})$ konvergens,
> $(\widetilde{h}_{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \to h_0 \Rightarrow (\lambda I - A)\widetilde{h}_{j_k} \to 0 \Rightarrow (\lambda I - A)h_0 = 0$. Ebből következik, hogy $h_0 \in S_\lambda(A)$. Másrészt $h_{j_k} = \frac{g_{jk}}{\|g_{jk}\|}$, $g_{j_k} \in S_\lambda(A)^{\perp} \Rightarrow h_{j_k} \in S_\lambda(A)^{\perp} \Rightarrow$ limeszben $h_0 \in S_\lambda(A)^{\perp}$. Másrészt $h_0 \in S_\lambda(A)$, így $h_0 = 0$, de ez meg nem lehet, mert $\|\widetilde{h}_{j_k}\| = 1 \Rightarrow \|h_0\| = 1$ kéne lennie.

Tehát $(\lambda I - A)g_j = \psi_j$, $\lim(\psi_j) = \psi$, $\|g_j\|_X$ korlátos. Mivel A kompakt és g_j korlátos $\Rightarrow \exists \tilde{g}_{j_k}$ részsorozat, hogy $A\tilde{g}_{j_k}$ konvergens. ψ_{j_k} is konvergens $\Rightarrow \lambda g_{j_k}$ is konvergens, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \left(g_{j_k}\right)$ konvergens. $g_{j_k} \to g_0$ X-ben, $g_0 \in X$. $(\lambda I - A)g_0 = \psi \Rightarrow \psi \in R_{\lambda I - A}$.

Tétel (bizonyítás nélkül): legyen $A: X \to X$ kompakt operátor. Ekkor A^* is kompakt. Továbbá $\lambda \neq 0$ az A-nak sajátértéke $\Leftrightarrow \overline{\lambda}$ sajátértéke A^* -nak, és ekkor a rangok egyenlők.

Összefoglalás (Fredholm alternatíva): legyen $A: X \to X$ kompakt operátor, $\lambda \neq 0$ tetszőleges szám s $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenlet. Ekkor két eset lehetséges:

1. ha $\lambda \neq 0$ az A-nak nem sajátértéke (legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok, véges rangú, 0-ban torlódó sajátértékek), akkor a másodfajú egyenletnek $\forall b \in X$ esetén $\exists ! f$ megoldása és ez folytonosan függ b-től ($(\lambda I - A)^{-1}$ folytonos)
2. ha $\lambda \neq 0$ sajátérték, akkor a másodfajú egyenletnek a megoldása nem egyértelmű, a homogén egyenletnek véges sok lineárisan független megoldása van. A megoldás pontosan létezik, ha $b \perp S_{\overline{\lambda}}(A^*)$ minden elemére. Ez annyi db ortogonalitási feltétel, amennyi a λ sajátérték rangja.

Önadjungált kompakt operátorok

Tétel: legyen X szeparábilis Hilbert tér, $A: X \to X$ kompakt és önadjungált operátor, $A \neq 0$. Ekkor $\exists \lambda_1$ sajátérték: $|\lambda_1| = \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\|_X = 1\}$.

Megjegyzés: ha λ_1 az A operátor olyan sajátértéke, amelyre $|\lambda_1| = \|A\|$ és x_1 olyan sajátelem, hogy $\|x_1\| = 1$, azaz $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $\|x_1\| = 1$, akkor $|\langle Ax_1, x_1\rangle| = |\langle \lambda_1 x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1 \langle x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1| = \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle : \|x\|_X = 1|\}$. Más szóval, az $x \mapsto |\langle Ax, x\rangle|$, ahol $\|x\| = 1$, ez a függvény felveszi a suprémumot az $x = x_1$ sajátelemen, a maximum (ami most a suprémum is) értéke $= |\lambda_1|$. Fordítva: ha x^* olyan, hogy $\|x^*\| = 1$, és arra $|\langle Ax, x\rangle|$ maximális, akkor ez sajátelem és a maximum egyenlő a sajátérték abszolút értékével. Ugyanis $|\langle Ax^*, x^*\rangle| \leq \|Ax^*\| \cdot \|x^*\| \leq \|A\| \cdot \|x^*\|^2 = \|A\|$, a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor $Ax^* \parallel x^*$, azaz $Ax^* = const \cdot x^*$.

További sajátértékek, sajátelemek keresése.

Legyen $X_1 := \{x \in X : x \perp x_1\}$, ahol $A_1 := A|_{X_1}$, a leszűkítés, és $Ax_1 = \lambda_1 x_1$.

Állítás: X_1 invariáns altér, azaz $x \in X_1 \Rightarrow Ax \in X_1$.

Bizonyítás: tfh $x \in X_1$! $\langle Ax, x_1\rangle = \langle x, Ax_1\rangle = \langle x, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1 \langle x, x_1\rangle = 0$, tehát $Ax \in X_1$. Az előbbi tételt alkalmazhatjuk az A_1 operátorra X_1 Hilbert térben. Ekkor $\exists \lambda_2$ sajátérték, hogy $|\lambda_2| = \|A_1\| = \sup\{\langle A_1 x, x\rangle : \|x\|_X = 1, x \in X_1\}$. A maximum helye x_2 sajátelem helyén van, $\lambda_2 x_2 = Ax_2$, $x_2 \perp x_1$. Így egymás után megkaphatjuk az A operátor sajátértékeit és sajátelemeit, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$. Ha A véges rendű, akkor az eljárás véges sok lépés után befejeződik.

Tétel: legyenek az A önadjungált operátor sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ és sajátelemei $x_1, x_2, \dots$ A sajátelemekről feltehető, hogy ortonormált rendszert alkotnak. Ekkor $\forall x \in X$ elemre $Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k$. Az (x_k) ortonormált rendszert kibővítve a $\lambda = 0$ -hoz tartozó sajátelemek ortonormált rendszerével, akkor ezek egy teljes ortonormált rendszert alkotnak.