Analízis I

Előadásjegyzet fizikusoknak matematikusoktól

Simon László Tüzes Dániel Izsák Ferenc

Tartalomjegyzék

Metrikus tér **2**
Topológiai alapfogalmak a metrikus térben 4
Pont és halmaz viszonya 4
Nyílt és zárt halmazok 5
Sorozatok határértéke a metrikus térben 7
A limesz tulajdonságai 7
A limesz műveleti tulajdonságai normált terekben 8
Összeadás 8
Szorzás 9
Osztás 9
Zárt halmazok jellemzése sorozatokkal 9
Korlátos és zárt halmazok, illetve sorozatkompakt halmazok 10

Ajánlott irodalom:

1. Komornik Vilmos: Valós analízis előadások
2. W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976. (angol nyelvű)
3. Mezei István, Faragó István, Simon Péter: Bevezetés az analízisbe

Ez a jegyzet **nem** szakirodalom és nem garantált, hogy az órai anyagot teljesen lefedi, az előadásokra bejárni ajánlott. Az eredeti jegyzet Simon László előadásai alapján Tüzes Dániel készítette, és lektorálta 2009-ben Simon László, majd frissítette 2016-2017-ben Izsák Ferenc.

Ha a jegyzetben helyesírási, tartalmi, vagy formai hibát találsz, kérlek jelezd az előadónak vagy a tuzesdaniel@gmail.com e-mail címen! Ha a jegyzet nem jelenik meg helyesen, olvasd el az útmutatót, vagy egyszerűen használd a Firefox legújabb böngészőjét!

A jegyzet korábbi, nem következetes jelölésétől eltérően a következőkben törekszünk arra, hogy egy függvényt $f : X \to Y$ alakban adunk meg, akkor az azt jelenti, hogy az értelmezési tartománya X, nem pedig annak csak egy része. Ez utóbbira használjuk majd az $f : X \rightarrowtail Y$ jelölést.

Metrikus tér

A korábban (középiskolában) tanultakból általánosítunk. $\mathbb{R}^n$-ben éltünk eddig, ahol vektor alatt ezt értettük: $\mathbf{v} = (v_1, v_2 ... v_n)$ ahol $v_j \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Ezen vektorfogalmat fogjuk általánosítani úgy, hogy a már korábban tanult vektorok némely tulajdonságait kiválasztjuk, s egy halmaz ($\mathbb{V}$) elemeit (a, b és c) akkor fogjuk vektoroknak nevezni, ha az alább kiválaszott - és korábban (középiskolában) már tanult - tulajdonságokat (a műveletekkel) teljesítik.

- összeadás $+$
  $\mathbb{R}^n$-ben azt mondtuk, hogy

  $$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1, v_2 ... v_n) + (u_1, u_2 ... u_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2 ... v_n + u_n)$$

  Ezek tulajdonságaiból az alábbiakat általánosítjuk:

  1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)
  2. $\exists! 0 \in \mathbb{V} : a + 0 = 0 + a = a$ (egység, semleges elem létezése)
  3. $\forall a \in \mathbb{V} \exists! (-a) \in \mathbb{V} : a + (-a) = 0$ (inverz elem létezése)
  4. $a + b = b + a$ (kommutativitás)

  Az első három tulajdonsággal rendelkező struktúrát csoportnak, a negyedikkel is rendelkezőt Abel-csoportnak vagy kommutatív csoportnak nevezzük.
- Skalárral való szorzás $\cdot$
  Legyen $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$! $\mathbb{R}^n$-ben azt mondtuk, hogy $\lambda \mathbf{v} = \lambda (v_1, v_2 ... v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2 ... \lambda v_n)$, ezek tulajdonságaiból az alábbiakat általánosítjuk:

  1. $\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b, (\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ (disztributivitás)
  2. $\lambda (\beta a) = (\lambda \beta) a$
  3. $1a = a$

> Definíció:
> Ha egy halmazon értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás a fentiek szerint, akkor azt vektortérnek (avagy lineáris térnek) nevezzük.

Ismert művelet volt $\mathbb{R}^n$-ben a skaláris szorzás, ezt értettük alatta: $\mathbf{v}, \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} v_j u_j$. Erre érvényesek az alábbi tulajdonságok:

- $a, b + c = a, b + a, c$
- $a, b = b, a$
- $\lambda a, b = \lambda a, b$
- $a, a \geq 0$ és $a, a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

> Definíció:
> Legyen X vektortér, amelynek elemei között értelmezve van a skaláris szorzat (két elem skaláris szorzata egy $\mathbb{R}$-beli szám) a fenti tulajdonságokkal. Ekkor X-t valós euklideszi (eukleidészi) térnek nevezzük.

Példa
A $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények összessége (röviden $C\,[0,1]$) a szokásos összeadással, számmal való szorzással, ha a skaláris szorzat definíciója: $f, g := \int_0^1 f \cdot g$.

Definíció:
Legyen X valós euklideszi tér! Ekkor egy $a \in X$ elem normáját így határozhatjuk meg: $\|a\| := \sqrt{a, a}$

A norma tulajdonságai:

1. $\|a\| \geq 0$ és $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (háromszög egyenlőtlenség), mert $a + b, a + b = a, a + b, a + a, b + b, b = = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2a, b \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\,\|a\| \cdot \|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2$. Itt felhasználtuk az ún Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget, mely szerint:

Tétel (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, CS):
Legyen X valós euklideszi tér! Ekkor $\forall a, b \in X$ esetén $|a, b| \leq \|a\| \cdot \|b\|$.

Bizonyítás:
$0 \leq a + \lambda b, a + \lambda b = a, a + \lambda b, a + a, \lambda b + \lambda b, \lambda b = a, a + 2\lambda a, b + \lambda^2 b, b$, ez teljesül minden λ értékre, így $4a, b^2 - 4a, ab, b \leq 0$, vagyis

$$\langle a, b\rangle^2 \leq \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle \Rightarrow |\langle a, b\rangle| \leq \sqrt{\langle a, a\rangle}\sqrt{\langle b, b\rangle} = \|a\| \cdot \|b\|.$$

$\square$

Definíció:
Legyen X vektortér, amelyen értelmezve van egy norma a fenti tulajdonságokkal, ekkor X-t normált térnek nevezzük.

Példa:
$X = C\,[0,1]$, a függvény normája pedig $\|f\| := \sup |f|$.

Egy normált térben mindig értelmezhető az elemek ρ távolsága, $\rho\,(a, b) := \|a - b\|$. A távolság (metrika) tulajdonságai:

1. $\rho\,(a, b) \geq 0$ és $\rho\,(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho\,(a, b) = \rho\,(b, a)$
3. $\rho\,(a, c) \leq \rho\,(a, b) + \rho\,(b, c)$ (háromszög egyenlőtlenség)

Definíció:
Legyen X valamilyen halmaz és tfh értelmezve van $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény (metrika, távolság) a fenti tulajdonságokkal! Ekkor X-t metrikus térnek nevezzük.

Topológiai alapfogalmak a metrikus térben

Definíció:
Legyen X metrikus tér! Egy $a \in X$ pont r sugarú környezete azon pontok összessége, amelyek a-tól r-nél kisebb távolságra vannak: $B_r(a) := \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$.

Pont és halmaz viszonya

Legyen $a \in X, M \subset X$!

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az a pont az M halmaznak belső pontja, ha létezik a-nak olyan r sugarú környezete, hogy $B_r(a) \subset M$. Jele: $a \in int(M)$.

Definíció:
Az a pont az M halmaznak külső pontja, ha létezik a-nak olyan r sugarú környezete, hogy $B_r(a) \cap M = \varnothing$. Jele: $a \in ext(M)$.

Definíció:
Az a pont M-nek határpontja, ha a minden r sugarú környezete esetén $B_r(a) \cap M \neq \varnothing$ és $B_r(a) \cap M^C \neq \varnothing$. Jele: $a \in \partial(M) = front(M)$.

Állítás:
$\partial(M), ext(M), int(M)$ halmazok diszjunktak, uniójuk kiadja X-et.

Definíció:
Egy $a \in X$ pontot az M halmaz torlódási pontjának nevezünk, ha az a pont minden környezetében van M-beli, de a-tól különböző pont, formailag: a torlódási pont, ha $\{B_r(a) \setminus \{a\}\} \cap M \neq \varnothing$. Az M halmaz torlódási pontjainak halmazát M '-vel jelöljük.

Megjegyzés:
Ha az a pont M-nek torlódási pontja, akkor a-nak minden környezete végtelen sok pontot tartalmaz az M halmazból.

Definíció:
Az M halmaz belső és határpontjainak összességét az M halmaz lezárásának nevezzük, $\overline{M} = intM \cup \partial M$.

Példák:

- $X = \mathbb{R}, M = (0,1) \Rightarrow M' = [0,1], \partial M = \{0,1\}, intM = (0,1), \overline{M} = [0,1]$
- $X = \mathbb{R}, M = \mathbb{Z} \Rightarrow M' = \varnothing$, $\partial M = \mathbb{Z}, intM = \varnothing, \overline{M} = \mathbb{Z}$
- $X = \mathbb{R}, M = [0,1] \Rightarrow M' = [0,1]$, $\partial M = \{0,1\}, intM = (0,1), \overline{M} = [0,1]$

Nyílt és zárt halmazok

Definíció:
Egy $M \subset X$ halmazt nyíltnak nevezünk, ha $\forall x \in M$ esetén

$$x \in int\,(M) \Leftrightarrow M \subset int\,(M) \Leftrightarrow M \cap \partial M = \varnothing.$$

Definíció:
Egy M halmazt zártnak nevezünk, ha tartalmazza az összes határpontját $\Leftrightarrow \partial M \subset M$.

Példák:
Legyen $X := \mathbb{R}$, ekkor:

- $M = [0,1]$ zárt halmaz
- $M = (0,1)$ nyílt halmaz
- $M = (0,1]$ se nem nyílt, se nem zárt halmaz
- $M = \mathbb{Z}$ zárt halmaz

Állítás:
Egy $M \subset X$ halmaz zárt $\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow M' \subset M$.

Tétel:
Tetszőleges M halmaz esetén $int\,(M)$ és $ext\,(M)$ nyílt halmaz.

Bizonyítás
($int\,(M)$ nyílt halmaz): legyen $a \in intM$. Azt kellene megmutatni, hogy $\exists B_r\,(a) \subset intM$. $a \in int\,(M) \Rightarrow \exists B_R\,(a) \subset M$. Legyen $r := R/2$, ekkor $B_r\,(a) \subset int\,(M)$, ugyanis ha $b \in B_r\,(a)$, akkor a háromszög egyenlőtlenség miatt $B_r\,(b) \subset B_R\,(a) \subset M, b \in int\,(M) \Rightarrow B_r\,(a) \subset int\,(M)$. □

Állítás:
$\partial M, \overline{M}, M'$ zárt halmazok.

Tétel:
Ha $M \subset X$ nyílt, akkor $M^C = X \backslash M$ zárt halmaz.

Bizonyítás:
Tfh M nyílt halmaz, ekkor $\partial M \cap M = \varnothing$, $\partial M = \partial\,(M^c)$, ezért

$$\partial M^C \cap M = \varnothing \Rightarrow \partial M^C \subset M^C\ ,$$

vagyis M^C zárt. □

Tétel:
Akárhány nyílt halmaz uniója nyílt halmaz, és véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

Bizonyítás:
Legyenek $M_{\gamma \in I}$ nyílt halmazok (I indexhalmaz)! Belátjuk, hogy $M := \bigcup\limits_{\gamma \in I} M_\gamma$ nyílt.
Legyen $a \in M \Rightarrow \exists \gamma : a \in M_\gamma$. Mivel M_γ nyílt, ezért

$$\exists B_r(a) \subset M_\gamma \Rightarrow B_r(a) \subset M \ .$$

Legyenek $M_{j \in I}$ nyílt halmazok (I indexhalmaz)! Belátjuk, hogy $M := \bigcap\limits_{j=1}^{p} M_j$ nyílt halmaz. Legyen $a \in M \Rightarrow a \in M_j, \forall j = 1, 2...p$. Mivel M_j nyílt, ezért $\exists r_j :$ $B_{r_j}(a) \subset M_j$. Legyen $r = \min\{r_1, r_2, .., r_p\} \Rightarrow B_r(a) \subset \bigcap\limits_{j=1}^{p} M_j$. □

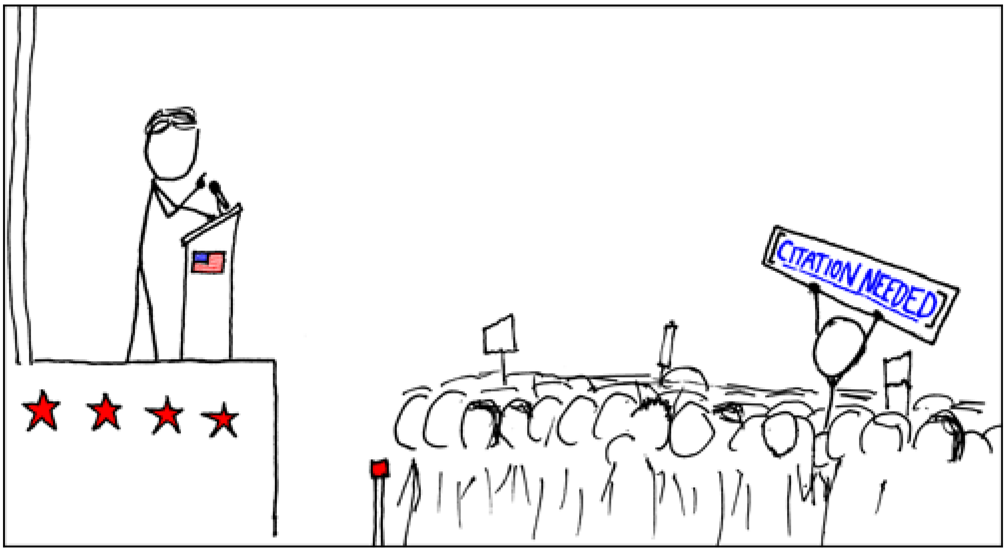
Tétel:
Akárhány zárt halmaz metszete zárt halmaz, és véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

Bizonyítás:
(Belátjuk, hogy metszetük zárt.) Tfh M_γ zárt! Ekkor M_γ^C nyílt halmaz. Ezért

$$\bigcap_{\gamma \in I} M_\gamma = \left(\bigcup\limits_{\gamma \in I} M_\gamma^C\right)^C$$

zárt. Az unió esete hasonlóan bizonyítható. □

Megjegyzés: végtelen sok nyílt halmaz metszete általában nem nyílt, az alaphalmaz és az üres halmaz nyílt és zárt egyszerre.



xkcd, sometimes styled ***XKCD***,[‡ 1] is a webcomic created by Randall Munroe. The comic's tagline describes it as "A webcomic of romance, sarcasm, math, and language".[‡ 2][3] Munroe states on the comic's website that the name of the comic is not an acronym but "just a word with no phonetic pronunciation".

The subject matter of the comic varies from statements on life and love to mathematical and scientific in-jokes. Some strips feature simple humor or pop-culture references. Although it has a cast of stick figures,[4][5] the comic occasionally features landscapes and intricate mathematical patterns such as fractals, graphs and charts.[6] New comics are added three times a week, on Mondays, Wednesdays, and Fridays,[‡ 1][7] although on some occasions they have been added every weekday.

Sorozatok határértéke a metrikus térben

Definíció:
Egy $f : \mathbb{N} \to X$ (X metrikus tér) függvényt X-beli sorozatnak nevezünk. Jelölés: a sorozat k-adik tagja $a_k := f(k)$-nek, a sorozat $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} := f\ (a_k) = f$.

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az (a_k) sorozat határértéke (limesze) $a \in X$, ha az a pont tetszőleges ε sugarú környezetéhez létezik olyan $k_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $k > k_0, k \in \mathbb{N}$ esetén $a_k \in B_\varepsilon(a)$. Másképp: $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \varepsilon$, ezt így jelöljük: $\lim(a_k) \equiv \lim\limits_{k \to \infty} a_k = a$.

A limesz tulajdonságai

1. Ha $a_k = a$ (minden k-ra), akkor $\lim(a_k) = a$
2. Tfh $\lim(a_k) = a$, akkor (a_k) minden részsorozatának határértéke létezik és értékük a.

Részsorozat: (a_k) véges vagy végtelen sok elemét elhagyom úgy, hogy még mindig végtelen sok maradjon, és a sorrenden nem változtatok. Másképpen: (a_k) részsorozata (a_{g_k}), ahol $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő.

Bizonyítás:
$\lim (a_k) := a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho (a_k, a) < \varepsilon$. Mivel $g_k \geq k \Rightarrow k > k_0$-ra $\rho (a_{g_k}, a) < \varepsilon$, hisz ekkor $g_k > k_0$.

3. A határérték egyértelmű.

Bizonyítás:
Tfh (a_k) határértékei a és b (X elemei). Belátandó, hogy $a = b$. Ekkor egyrészt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho (a_k, a) < \varepsilon \ ,$$

másrészt $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 : k > k_1, \rho (a_k, b) < \varepsilon \Rightarrow k > \max \{k_0, k_1\}$ esetén $\rho (a_k, a) < \varepsilon, \rho (a_k, b) < \varepsilon$, így a háromszög egyenlőtlenség alapján $\rho (a, b) \leq \rho (a, a_k) + \rho (a_k, b) < 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \rho (a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

4. Ha $\lim (a_k) = a \Rightarrow (a_k)$ minden átrendezésének a határértéke szintén a
Egy (a_k) átrendezése: veszek egy $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót, az átrendezett sorozat: (a_{g_k}).

5. Sorozatok összefésülése:
$(a_k), (b_k)$ X-beli sorozatok összefésülése olyan (c_k) X-beli sorozat, melynek elemei $a_1, b_1, a_2, b_2 ....$ Ha $\lim (a_k) = a = \lim (b_k) \Rightarrow \lim (c_k) = a$

6. Ha egy sorozatnak létezik a limesze, akkor korlátos is. (Korlátos: létezik olyan n dimenziós gömb, mely tartalmazza a sorozat összes elemét.)

Bizonyítás:
$\lim (a_k) = a \Rightarrow \varepsilon = 1 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho (a_k, a) < 1$, így

$$r := \max \{\rho (a, a_1), \rho (a, a_2), ..., \rho (a, a_{k_0})\}$$

esetén $a_k \in B_{r+1} (a) \forall k$.

A limesz műveleti tulajdonságai normált terekben

A következőkben X mindig egy normált teret jelöl, (a_k) , illetve (b_k) pedig egy-egy X-beli sorozatot.

A bizonyítások során az egész félévben külön hivatkozás nélkül használjuk azt a tényt, hogy ha egy $x_n \subset X$ sorozatra $\lim \|x_n\| \leq 0$, akkor $x_n \to 0$.

Összeadás

Tétel:
Ha $\lim (a_k) = a, \lim (b_k) = b \Rightarrow \lim (a_k + b_k) = a + b$.

Bizonyítás:
mivel $\lim(a_k) = a$, ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a, a_k) = \| a_k - a \| < \varepsilon$ és mivel $\lim(b_k) = b$, ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow \rho(b, b_k) = \| b_k - b \| < \varepsilon$, így

$$\rho(a_k + b_k, a + b) = \|(a_k + b_k) - (a + b)\| =$$
$$\|(a_k - a) + (b_k - b)\| \leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| < 2\varepsilon,$$

ha $k > \max\{k_0, k_1\}$. $\square$

Szorzás

Állítás:
Legyen X normált tér! Ha $\lim(\lambda_k) = 0$ és (a_k) korlátos, $\Rightarrow \lim(\lambda_k a_k) = 0$.

Tétel:
Tfh $\lim(a_k) = a$ és $\lim(\lambda_k) = \lambda$ ($\lambda_k \in \mathbb{R}$). Ekkor $\lim(\lambda_k a_k) = \lambda a$.

Bizonyítás:
Mivel $\lim(a_k) = a$ ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \| a_k - a \| < \varepsilon$. Mivel $\lim(\lambda_k) = k$ ezért $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow |\lambda_k - \lambda| < \varepsilon$. Tehát $k > \max\{k_0, k_1\}$ esetén $\| \lambda_k a_k - \lambda a \| = \|(\lambda_k a_k - \lambda a_k) + (\lambda a_k - \lambda a) \| \leq \| \lambda_k a_k - \lambda a_k \| + \| \lambda a_k - \lambda a \| = = \|(\lambda_k - \lambda) a_k \| + \| \lambda (a_k - a) \| = \underbrace{|\lambda_k - \lambda|}_{<\varepsilon} \|a_k\| + \underbrace{|\lambda|}_{\text{rögz.}} \underbrace{\|a_k - a\|}_{<\varepsilon}$. Mivel (a_k) korlátos, $\exists M > 0 : \| a_k \| < M \forall k \in \mathbb{N}$-re, tehát $k > \max\{k_0, k_1\}$ esetén $\| \lambda_k a_k - \lambda a \| < \varepsilon M + |\lambda| \varepsilon = (M + |\lambda|) \varepsilon$. $\square$

Osztás

Tétel:
Legyen (a_k) egy valós vagy komplex sorozat. Ha $a = \lim(a_k) \neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a}$.

Bizonyítás:
Mivel $\lim(a_k) = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon$, így

$$\exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon |a|^2 / 2 .$$

Legyen $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$, ekkor $\exists k_2 : k > k_2 \Rightarrow |a_k| > \frac{|a|}{2}$. Legyen $k > \max\{k_1, k_2\}$, ekkor

$$\left| \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - a_k|}{|a_k a|} < \frac{\varepsilon |a|^2 / 2}{|a_k| |a|} = \frac{\varepsilon |a| / 2}{|a| / 2} = \varepsilon.$$

$\square$

Zárt halmazok jellemzése sorozatokkal

Emlékeztető: X metrikus térben egy M halmazt zártnak neveztünk, ha

$$\partial M \subset M \Leftrightarrow \overline{M} \subset M \Leftrightarrow \overline{M} = M ,$$

ahol $\overline{M} = int\,(M) \cup \partial M$, továbbá $a \in \overline{M} \Leftrightarrow$ ha a bármely környezete tartalmaz M beli pontot is. Ezek szerint M zárt halmaz pontosan akkor, ha minden olyan pont, amelynek bármely környezetében van M beli pont, az M-hez tartozik.

Tétel:
Egy $M \subset X$ halmaz zárt pontosan akkor, ha tetszőleges konvergens sorozatot nézve, melynek tagjai $a_k \in M$ $\lim(a_k) \in M$.

Bizonyítás:
Az előbbiek szerint M halmaz zárt pontosan akkor, ha minden olyan pont, amelynek bármely környezetében van M beli pont, az M-hez tartozik.
$\Rightarrow$ irányban: tfh M zárt! Ha $a_k \in M$ és $\lim(a_k) = a$, akkor $a \in M$, mert a minden környezetében van M beli pont is (nevezetesen a_k).
$\Leftarrow$ irányban: fordítva is igaz, ha a minden környezete tartalmaz M beli pontot, akkor $\exists\,(a_k) \in M : \lim(a_k) = a$. Vagyis minden olyan pont (a), amelynek minden környezetében van M-beli pont (az a_k-k), az M-nek eleme, és a fentiek szerint ebből következik, hogy M zárt. □

Korlátos és zárt halmazok, illetve sorozatkompakt halmazok

Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^n$ -ben) :
Legyen (a_k) korlátos sorozat $\mathbb{R}^n$-ben! Ekkor (a_k) sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás:
Először $n = 1$ esetre, ekkor $(a_k \in \mathbb{R})$ korlátos $\Rightarrow \exists\,[c,d]\, a_k, \forall k$. Felezzük $[c,d]$ intervallumot! Ekkor a két zárt fél intervallum közül legalább az egyik végtelen sok tagot tartalmaz a sorozatból. Ez legyen $[c_1, d_1]$. Ezt megint felezzük, melyek közül legalább az egyik végtelen sok tagot tartalmaz a sorozatból, ez legyen $[c_2, d_2]$ ...Így a_k-ból kiválasztható egy a_{k_l} részsorozat úgy, hogy $a_{k_l} \in [c_l, d_l]$. Belátjuk, hogy a_{k_l} részsorozat konvergens.
$[c,d] \supset [c_1,d_1] \supset [c_2,d_2] \supset ... \supset [c_l,d_l]$, $\lim\limits_{l\to\infty} |c_l - d_l| = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{c-d}{2^l} = 0$. Tudjuk, hogy $\{c_l : l \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos $\Rightarrow \exists \sup\{c_l : l \in \mathbb{N}\}$ és azt is, hogy $\{d_l : l \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos $\Rightarrow \exists \inf\{d_l : l \in \mathbb{N}\}$. Mivel

$$\lim_{l\to\infty} |c_l - d_l| = 0 \Rightarrow \sup\{c_l : l \in \mathbb{N}\} = \inf\{d_l : l \in \mathbb{N}\} := \alpha\ ,$$

továbbá $a_{k_l} \in [c_l, d_l] \Rightarrow \lim(a_{k_l}) = \alpha$ („rendőr-elv").
$n = 2$ esetre, ekkor $a_k = \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}\right)$. Mivel a_k korlátos sorozat $\mathbb{R}^2$-ben, így $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$ korlátos sorozatok $\mathbb{R}$-ben. Az előzőek szerint az előbbiből kiválasztható ebből egy konvergens részsorozat, $\left(a_{k_l}^{(1)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$. Tekintsük az $a_k^{(2)}$ ugyanilyen indexű elemekből álló $\left(a_{k_l}^{(2)}\right)$ részsorozatát (mely korlátos $\mathbb{R}$-ben). Az előzőek szerint ennek létezik konvergens részsorozata, $\left(a_{k_{l_m}}^{(2)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$. $\left(a_{k_l}^{(1)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergens, így $\left(a_{k_{l_m}}^{(1)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ is az, így $\left(a_{k_{l_m}}\right) := \left(a_{k_{l_m}}^{(1)}, a_{k_{l_m}}^{(2)}\right)$ részsorozat konvergens.

$n = 3$ esetén hasonló módon, mint $n = 1$-ről váltottunk $n = 2$ -re, itt is igazolható (tkp teljes indukció). $\square$

Megjegyzés:
Hasonló jellegű állítások általában nem igazak tetszőleges normált terekben, csak véges dimenzióban!

Ne feledjétek, ebből a tárgyól vizsga lesz! Ha hétről hétre tanulsz, és a kérdéseket időben felteszed a tanárnak, sokkal könnyebb felkészülni a vizsgára.