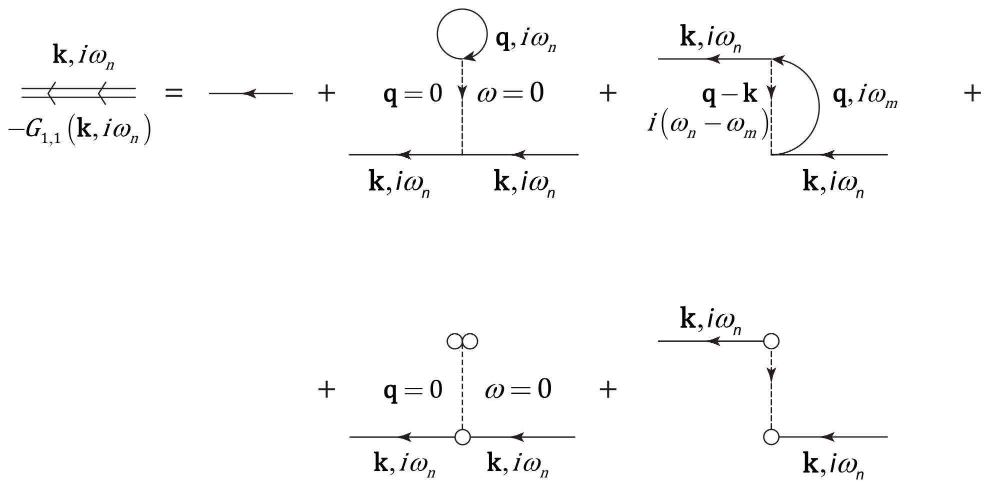
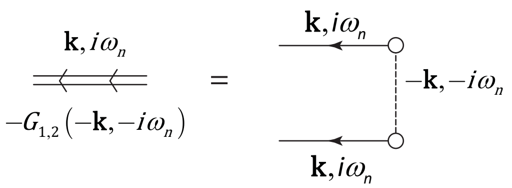
A kölcsönható rendszer Green-függvénye:





$$-G_{1,1}(\mathbf{k},i\omega_n) = -G_{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n) + \left(-\hbar^{-1}\right) v(0) \left[-G_{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n)\right]^2 \frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} \left[-G_{(0)}(\mathbf{q},i\omega_n)\right] e^{i\omega_n\eta} +$$

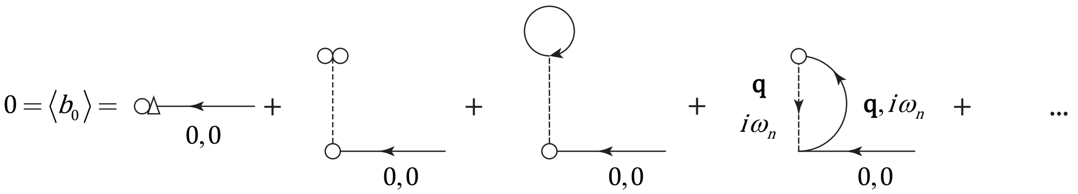
$$+\left(-\hbar^{-1}\right)\left[-G_{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n)\right]^2 \frac{1}{\beta\hbar}\sum_m \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} v(\mathbf{q}-\mathbf{k})\left[-G_{(0)}(\mathbf{q},i\omega_n)\right] e^{i\omega_n\eta} +$$

$$+\left(-\hbar^{-1}\right)\left[-G_{(0)}(k,i\omega_n)\right]^2 v(0)\frac{N_0}{V} + \left(-\hbar^{-1}\right)\left[G_0(\mathbf{k},i\omega_n)\right]^2 \frac{N_0}{V} v(-\mathbf{k})$$

$-G_{1,2}(\mathbf{k},i\omega_n) = \left(-\hbar^{-1}\right)\left[-G_0(\mathbf{k},i\omega_n)\right]\left[-G_0(-\mathbf{k},-i\omega_n)\right]\cdot\frac{N_0}{V}v(-\mathbf{k})$, ebből láthatjuk, hogy az anomális Green-függvénynek nincs 0. rendje, azaz ha $N_0 \Rightarrow G_{1.2} = 0$. $G_{1,2}$ akkor is eltűnik, ha nincs kölcsönhatás.

N_0 meghatározása

N_0-t eddig paraméterként használtuk a $b_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} - \sqrt{N_0}\,\delta_{\mathbf{k},0}$ egyenletben, ahol $\langle a_0^+ a_0\rangle \overset{Bogo.}{\approx} \langle a_0\rangle^2 = N_0$, így $\langle a_0\rangle = \sqrt{N_0} \Rightarrow \langle b_0\rangle = 0$. Most erre szeretnénk felírni perturbációs sort:



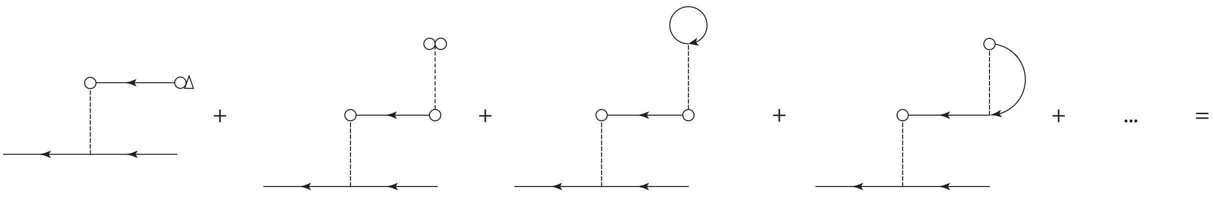
$$0=\left(-\hbar^{-1}\right)\left[\sqrt{N_0}\,(-\mu)+N_0^{3/2}v(0)+\frac{\sqrt{N_0}}{V}\sum_{\mathbf{q}}\left(v(0)+v(\mathbf{q})\right)\underbrace{\frac{-1}{\beta\hbar}\sum_m G_{(0)}\left(\mathbf{q},i\omega_n\right)}_{n'_{\mathbf{q}}=1/\left(e^{\beta\left(e_{\mathbf{q}}-\mu\right)}-1\right)}\right]$$

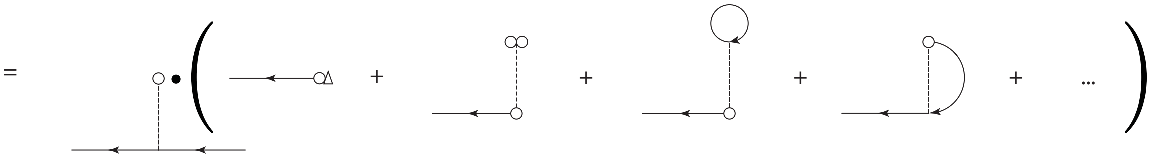
$$\mu=\frac{N_0}{V}v(0)+\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}\left[v(0)+v(\mathbf{q})\right]n'_{\mathbf{q}}+\dots$$

0 hőmérsékleten, ha n' elhanyagolható, ekkor a Bogoljubov kémiai potenciál: $\mu^{(B)}=n_0 v(0)$, ahol $n_0=N_0/V$.

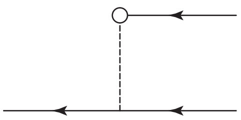
Megjegyzés:

1: $\langle b_0\rangle=0$, $\langle b_0^+\rangle=0$, vagyis az összes olyan Feynman diagram összege, amibe csak 1 vonal fut be, 0.





Az ábráról látható következmény, hogy sose kell 3 keltő vagy eltüntető operátort tartalmazó diagramot számolni, mert azok összege 0. (Kiemelve azokból azt a részt, amibe csak 1 vonal fut be, azok összege 0.) Azaz az alábbi diagramokat nem kell számolni:



2: ha $v(0)>0$ (stabil rendszer, taszítás esetén ???de egy rendszer lehet akkor is stabil, ha $v(0)<0$, nem???), ekkor $\mu>0$. $\mu=n_0 v(0)+\dots$. Ez miért furcsa?

$G_{(0)}\left(\mathbf{k},i\omega_n\right)=\dfrac{1}{i\omega_n-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}}-\mu\right)}\Rightarrow n'_{\mathbf{k}}=\dfrac{-1}{\beta\hbar}\sum_m G_{(0)}\left(\mathbf{k},i\omega_n\right)e^{i\omega_n\eta}=\dfrac{1}{e^{\beta\left(e_{\mathbf{k}}-\mu\right)}-1}$, és ha ebbe behelyettesítjük a pozitív kémiai potenciált, akkor $n'_{\mathbf{k}}$ negatív értéket is felvehet, és a szabad Green-függvény pedig divergál, és ez a kezelhetetlenné teszi a szabad Green-függvényt.

$K_0=\sum_{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}}-\mu)b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}=\underbrace{\sum_{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}}-\mu_0)b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}}_{K_0'}+\underbrace{\sum_{\mathbf{k}}(\mu_0-\mu)b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}}_{K_2'}$. Utóbbi tag diagramja:

,

vagyis μ-t perturbációnak vesszük. Így a szabad Green-függvényünk:

$$G_{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{i\omega_n-\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{-i\omega_n-\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}$$

Dyson-Beljajev (Beljajev) egyenlet

$G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},i\omega_n)=G_{(0);\alpha,\beta}(\mathbf{k},i\omega_n)+G_{(0);\alpha,\gamma}(\mathbf{k},i\omega_n)\Sigma_{\gamma,\delta}(\mathbf{k},i\omega_n)G_{\delta,\beta}(\mathbf{k},i\omega_n)$, mátrixos írásmódban ezt kiírva:

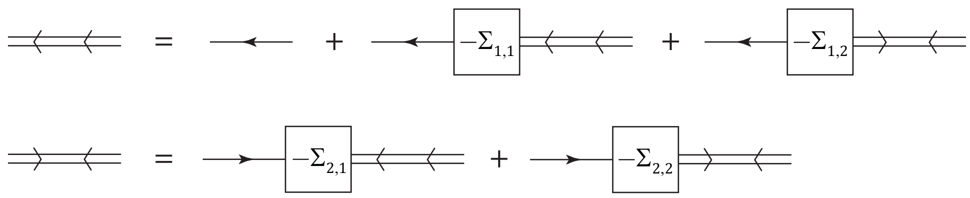
$\mathbf{G}(\mathbf{k},i\omega_n)=\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n)+\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{k},i\omega_n)\mathbf{G}(\mathbf{k},i\omega_n)$, melyből szeretnénk $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k},i\omega_n)$-t kifejezni. A kifejezéshez invertálni kell egy 2×2-es mátrixot, ami nem akadály:

$$G_{1,1}(\mathbf{k},i\omega_n)=\frac{i\omega_n+\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}+\Sigma_{2,2}(\mathbf{k},i\omega_n)}{D(\mathbf{k},i\omega_n)}$$

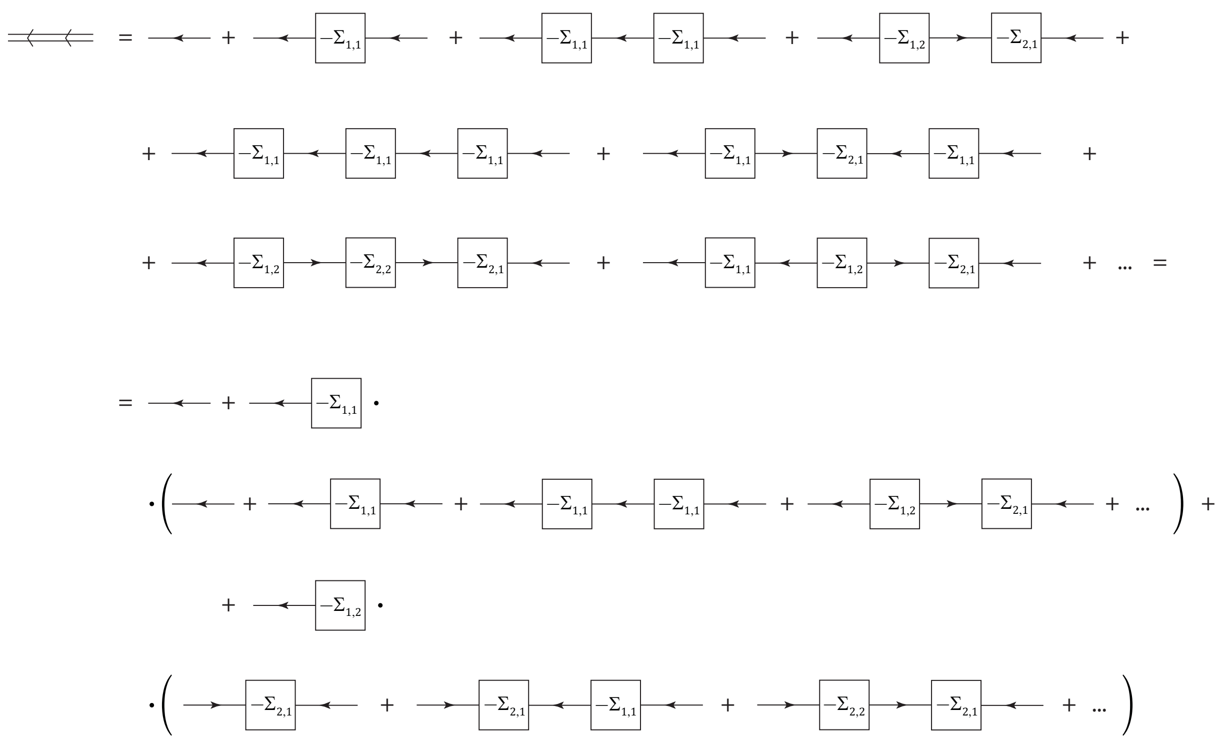
$G_{2,1}(\mathbf{k},i\omega_n)=\dfrac{-\Sigma_{2,1}(\mathbf{k},i\omega_n)}{D(\mathbf{k},i\omega_n)}$, ahol $D(\mathbf{k},i\omega_n)$ a determináns:

$$D(\mathbf{k},i\omega_n)=\left[i\omega_n-\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}-\Sigma_{1,1}(\mathbf{k},i\omega_n)\right]\left[i\omega_n+\hbar^{-1}e_{\mathbf{k}}+\Sigma_{2,2}(\mathbf{k},i\omega_n)\right]+\Sigma_{1,2}(\mathbf{k},i\omega_n)\Sigma_{2,1}(\mathbf{k},i\omega_n)$$

Grafikusan szemléltetve a következőt láthatjuk:



A felső sor, $G_{1,1}(\mathbf{k},i\omega_n)$-hoz tartozó eredmény grafikus bizonygatása:

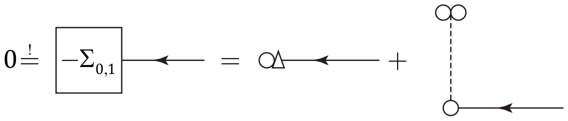


Vegyük ugyanis észre a zárójelezésben a Green-függvényeket! Behelyettesítve őket adódik az eredmény.

Bogoljubov-közelítés

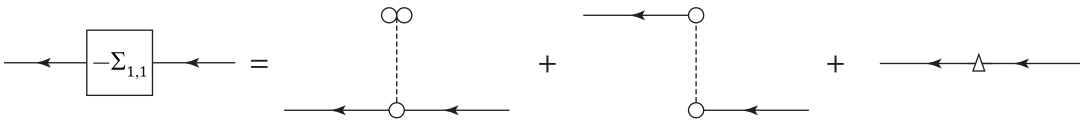
Kémiai potenciál és n_0 kapcsolata

$\Sigma_{0,1}$ annak a sajátenergiája, amibe csak 1 vonal fut be:

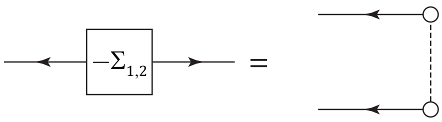


vagyis $-\mu^B + v(0)n_0 = 0 \Leftrightarrow \mu^B = n_0 v(0)$

$\Sigma_{1,1}^B(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar^{-1} n_0 v(\mathbf{k})$



$\Sigma_{1,2}^B(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar^{-1} n_0 v(\mathbf{k})$



$\Sigma_{2,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma_{11}(-\mathbf{k}, i\omega_n)$

$\Sigma_{2,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma_{1,2}(-\mathbf{k}, -i\omega_n)$

$D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k})\right)\right]\left[i\omega_n + \hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k})\right)\right] + \left(\hbar^{-1} n_0 v(\mathbf{k})\right)^2$

$$G_{1,1}^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n \hbar^{-1}\left(e_k + n_0 v(\mathbf{k})\right)}{D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)}$$

$$G_{2,1}^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{-\hbar^{-1} n_0 v(\mathbf{k})}{D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)}$$

???Nem lenne jó mindenhol konzekvensen kitenni a Bogo. közelítésre vonatkozó (B) indexet???