Analízis jegyzetek I-III.

Izsák Ferenc, Tarcsay Zsigmond, Tüzes Dániel

A kötet az Eötvös Loránd Tudományegyetem tankönyv- és jegyzetpályázatán elnyert forrás felhasználásával jelent meg.

Szakmai lektor: Titkos Tamás

ISBN: 978-963-489-089-8

A kézirat lezárva: 2018.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a háromrészes jegyzet az ELTE TTK Fizika alapszak fizikus szakirányon tartott három féléves Analízis előadás anyagának írott változata.

Az előadás anyagát eredetileg Simon László egyetemi tanár állította össze; az ő előadásai alapján jegyzetelte, majd gépelte be a harmadik szerző. Ehhez képest főként a mértékelmélet és a funkcionálanalízis témakörében történetek lényeges változtatások.

Az anyag felépítése tükrözi azt, hogy előzetesen a Kalkulus (de még inkább az Emelt szintű kalkulus) tárgy keretein belül az egyváltozós valós analízis jónéhány olyan fogalmát elsajátítják a hallgatók, amelyek ismeretét az előadásban feltételezzük.

Ezen ismeretek közvetlen általánosítása az első rész tárgya: a környezet, távolság, határérték, folytonosság és differenciálhatóság fogalmát tárgyaljuk megfelelő terekben.

A második részben a Riemann-, majd a Lebesgue-integrált ismertetjük először a klasszikus mértékelméleti fogalmakkal együtt. A valós vonalintegrálokra vonatkozó ismeretek birtokában a komplex függvénytan klasszikus elméletének fontosabb állításait ismertetjük.

A harmadik rész anyaga funkcionálanalízis, ahol a Banach- és Hilbert-terek lineáris operátorainak alaptételeit tárgyaljuk. Röviden betekintést nyújtunk a nemkorlátos operátorok elméletébe is, amely a kvantummechanika nélkülözhetetlen eszköze.

Budapest, 2018. május

a szerzők

Analízis I.

1. FEJEZET

Általános struktúrák az analízishez

1.1. Vektorterek és normált terek

A korábban tanult tárgyak keretében megismert vektorfogalmat fogjuk általánosítani. Sőt, nem is a vektor fogalmán van a hangsúly, hiszen az csupán egy kitüntetett tulajdonságú halmaz egy eleme.

1.1. Definíció. A V halmazt a $+$ és $\cdot$ műveletekkel ellátva kapott, $(V, +, \cdot)$ szimbólummal jelölt struktúrát *vektortérnek* nevezzük, ha az alábbi tulajdonságokat teljesíti:

Az összeadásra nézve V kommutatív csoport, azaz

- tetszőleges $a, b \in V$ esetén $a + b \in V$ is teljesül;
- tetszőleges $a, b, c \in V$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ teljesül (asszociativitás);
- létezik egy 0-val jelölt egységelem, amelyre minden $a \in V$ esetén $a+0 = 0+a = a$;
- minden $a \in V$ elemhez van olyan $-a \in V$ elem, amelyre $a + (-a) = 0$;
- tetszőleges $a, b \in V$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás).

A szorzás $\mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) és V elemei között van értelmezve úgy, hogy

- tetszőleges $a \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) esetén $\lambda \cdot a \in V$ is teljesül;
- tetszőleges $a, b \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) esetén $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$ teljesül;
- tetszőleges $a \in V$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) esetén $\lambda\mu \cdot a = \lambda \cdot (\mu a)$ teljesül;
- tetszőleges $a \in V$ esetén $1 \cdot a = a$ teljesül;
- tetszőleges $a \in V$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) esetén $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$ teljesül.

1.2. Megjegyzések. (1) Ha nyilvánvaló, melyek a fenti műveletek, vagy nem kell használnunk ezeket, akkor gyakran egyszerűen az alaphalmazzal jelöljük majd a vektorteret.

(2) A szorzás műveletének jelölésekor a pontot gyakran elhagyjuk.

Használjuk még a *skalárszorzás* műveletét is, de csak $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ -ben, ezért ennek általános definícióját nem részletezzük.

1.3. Példa. A $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények halmaza (amelyet röviden $C\,[0, 1]$)-vel fogunk jelölni) a szokásos összeadással, számmal való szorzással vektorteret alkot. Az ehhez szükséges állítások a kalkulus előadásról ismertek, általános formában a jegyzet későbbi részében tárgyaljuk őket. Megjegyezzük azonban, hogy az (összeadásra nézve) egységelem az azonosan nulla függvény, amelyet szintén 0-val jelölünk.

Vektortereken gyakran szükséges valamilyen hossz-fogalom használata, amelynek általános formájához a következő struktúrát definiáljuk.

1.4. Definíció. Az X vektorteret a $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ függvénnyel ellátva kapott, $(X, \|\cdot\|)$ szimbólummal jelölt struktúrát *normált térnek* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:

- tetszőleges $x \in X$ esetén $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$;
- tetszőleges $x \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- tetszőleges $x, y \in X$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, amelyet háromszög-egyenlőtlenségnek nevezünk.

1.5. Megjegyzés. Ha nincs jelentősége a norma választásának, vagy nem okoz félreértést, akkor egy normált teret is egyszerűen X-szel jelöljük.

1.6. Példa. A legegyszerűbb esetben $X = \mathbb{R}^d$, továbbá

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, \ldots, x_d)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2},$$

amelyet euklideszi normának is neveznek, és az egy-, két-, illetve háromdimenziós hossz nyilvánvaló általánosítása.

1.7. Példa. Adott vektortérhez többféleképp is értelmezhető norma. A $C[0,1]$ vektortéren egy lehetséges norma a következő:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|,$$

vagy akár az alábbi:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Ez utóbbi a „szokásos” norma, amelyre belátjuk az 1.4 Definícióban szereplő tulajdonságokat. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a norma-függvény (akár az előző esetben) értelmes; ezt általánosan csak a jegyzet későbbi részében igazoljuk.

1. Ha $\|f\|_\infty = 0$, akkor minden $t \in [0,1]$ esetén $|f(t)| \leq 0$, azaz csakis $f(t) = 0$ lehet. Fordítva, az azonosan nulla függvény normája definíció szerint nulla.
2. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda f \in C[0,1]$ függvény, valamint a fenti norma definíciója miatt
$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_\infty &= \sup\{|\lambda f(t)| : t \in [0,1]\} = \sup\{|\lambda|\,|f(t)| : t \in [0,1]\}\\ &= |\lambda| \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty .\end{aligned}$$
3. Tetszőleges $f, g \in C[0,1]$ függvények esetén a norma definíciója miatt
$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup\{|(f+g)(t)| : t \in [0,1]\} \leq \sup\{|f(t)| + |g(t)| : t \in [0,1]\}\\ &\leq \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} + \sup\{|g(t)| : t \in [0,1]\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .\end{aligned}$$

1.2. Metrikus terek és speciális részhalmazaik

A fenti, hossznak megfelelő normafogalom nyilvánvalóan alkalmas arra, hogy a vektortér elmeinek távolságát értelmezzük a következő módon:
Legyen $x, y \in X$ távolsága az $\|x - y\|$ szám. Figyeljük meg, hogy ez nemnegatív, pontosan akkor nulla, ha $x = y$. Másrészt ez szimmetrikus abban az értelemben, hogy y és x távolsága is ugyanennyi, emellett a normára érvényes háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $z \in X$ elemre

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

érvényes.

Ezt a három tulajdonságot megkövetelve általános távolságfogalmat kaphatunk, amelyhez még az sem szükséges, hogy vektortér elemei közt értelmezzük.

1.8. Definíció. Az X halmazt a $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ függvénnyel ellátva kapott, (X, ϱ) szimbólummal jelölt struktúrát *metrikus térnek* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:

- minden $a, b \in X$ esetén $\varrho(a,b) \geq 0$ és $\varrho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
- minden $a, b \in X$ esetén $\varrho(a,b) = \varrho(b,a)$;
- minden $a, b, c \in X$ esetén $\varrho(a,c) \leq \varrho(a,b) + \varrho(b,c)$, amelyet itt is háromszög-egyenlőtlenségnek nevezünk.

1.2.1. Topológiai alapfogalmak metrikus terekben A metrikus terekben használt környezetfogalom alapvető fontosságú az analízisben. Ez a nyílt gömb (körlap) fogalmát általánosítja.

1.9. Definíció. Egy (X, ϱ) egy metrikus valamely $a \in X$ pontjának r *sugarú környezete* - amelyet $B_r(a)$-val jelölünk - azon pontok összessége, amelyek a-tól r-nél kisebb távolságra vannak, azaz

$$B_r(a) := \{x \in X : \varrho(x,a) < r\}.$$

A fenti jelölésben az X teret nem tüntettük fel. Mindig ezt tesszük, ha nem okoz félreértést.

Ennek segítségével általánosíthatjuk a korlátos halmaz fogalmát.

1.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (X, ϱ) egy metrikus tér egy K részhalmaza korlátos, ha létezik olyan $B_r(a)$ gömb, amely tartalmazza a K halmazt.

Az alábbi definíciók mindegyikében is (X, ϱ) egy metrikus teret jelöl.

1.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (X, ϱ) metrikus tér $a \in X$ pontja az $M \subset X$ halmaznak

- *belső pontja*, ha létezik a-nak olyan $B_r(a)$ környezete, hogy $B_r(a) \subset M$.
  Jelölés: $a \in \operatorname{int}(M)$.
- *külső pontja*, ha létezik a-nak olyan $B_r(a)$ környezete, hogy $B_r(a) \subset M^c$.
  Jelölés: $a \in \operatorname{ext}(M)$.
- *határpontja*, ha a minden $B_r(a)$ környezetére $B_r(a) \cap M \neq \emptyset$ és $B_r(a) \cap M^c \neq \emptyset$.
  Jelölés: $a \in \partial M$.

1.12. Megjegyzés. A definícióból nyilvánvalóan adódik az $\operatorname{int}(M) \subset M$ reláció, amelyet a továbbiakban minden külön hivatkozás nélkül használunk.

1.13. Állítás. *A $\partial M, \operatorname{ext}(M), \operatorname{int}(M)$ halmazok diszjunktak, úniójuk kiadja X-et.*

Bizonyítás. Azt kell tehát igazolnunk, hogy tetszőleges $x \in X$ elem pontosan a három fenti halmaz egyikében van benne.
Ha $x \in \operatorname{int}(M)$, akkor nyilván a másik kettőben nem lehet benne.
Ha $x \notin \operatorname{int}(M)$, akkor két eset lehet. Vagy van olyan $B_r(a)$ környezete, amely maga is M^c-beli; ekkor $x \in \operatorname{ext}(M)$, de határpont nem lehet.
Vagy x minden környezete tartalmaz M-beli pontot, és M^c-belit is; ekkor definíció szerint $x \in \partial M$, és ekkor x sem $\operatorname{ext}(M)$-ben, sem $\operatorname{int}(M)$-ben nem lehet, amivel az állítást beláttuk.

□

1.14. Definíció. Egy $a \in X$ pontot az M halmaz *torlódási pontjának* nevezünk, ha az a pont minden $B_r(a)$ környezetében van M-beli, de a-tól különböző pont. Az M halmaz torlódási pontjainak halmazát M '-vel jelöljük.

1.15. Megjegyzés. Ha az a pont M-nek torlódási pontja, akkor a-nak minden környezete végtelen sok pontot tartalmaz az M halmazból.

1.16. Definíció. Az M halmaz belső és határpontjainak összességét az M halmaz *lezárásának* nevezzük, és erre az $\overline{M} = \text{int}\,(M) \cup \partial M$ jelölést használjuk.

1.17. Példa. Az alábbi négy példában $X \subset \mathbb{R}$, a ϱ távolságfüggvény pedig az euklideszi metrika által adott, azaz $\varrho(a, b) = |a - b|$. Ha nem mondunk mást, az $\mathbb{R}$ halmazon (és annak részhalmazain) mindig ezt használjuk.

(1) Legyen $X = \mathbb{R}$ és $M = (0, 1)$; ekkor $\partial M = \{0, 1\}$, továbbá $\text{int}\,(M) = (0, 1)$, végül $\overline{M} = [0, 1]$.

(2) Legyen $X = \mathbb{R}$ és $M = \mathbb{Z}$; ekkor $\partial M = \mathbb{Z}$, továbbá $\text{int}\,(M) = \varnothing$, végül $\overline{M} = \mathbb{Z}$.

(3) Legyen $X = \mathbb{R}$ és $M = [0, 1] \Rightarrow$; ekkor $\partial M = \{0, 1\}$, továbbá $\text{int}\,(M) = (0, 1)$, végül $\overline{M} = [0, 1]$.

(4) Legyen most $X = (-2, 0]$ és $M = (-1, 0]$; ekkor $\partial M = \emptyset$, továbbá $\text{int}\,(M) = (-1, 0]$, végül $\overline{M} = (-1, 0]$.

1.2.2. Nyílt és zárt halmazok

1.18. Definíció. Az (X, ϱ) metrikus tér egy $M \subset X$ halmazát

- *nyíltnak* nevezzük, ha minden pontja belső pont, azaz ha $M \subset \text{int}(M)$, vagyis ha $M = \text{int}(M)$.
- *zártnak* nevezzük, ha tartalmazza az összes határpontját, azaz ha $\partial M \subset M$.

1.19. Példák. (1) Legyen $X := \mathbb{R}$, ekkor

- $M = [0, 1]$ zárt halmaz,
- $M = (0, 1)$ nyílt halmaz,
- $M = (0, 1]$ se nem nyílt, se nem zárt halmaz,
- $M = \mathbb{Z}$ zárt halmaz.

(2) Legyen $X := (-1, 1]$, ekkor

- $M = (0, 1]$ nyílt halmaz,
- $M = (-1, 0]$ zárt halmaz.

1.20. Állítás. *Az (X, ϱ) metrikus tér tetszőleges $M \subset X$ részhalmazára az alábbi ekvivalencia teljesül:*

$$M \text{ zárt } \Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow M^c \text{ nyílt.}$$

Bizonyítás. Az 1.13 Állítás szerint $X = \text{int}(M) \cup \partial M \cup \text{ext}(M) = \overline{M} \cup \text{ext}(M)$.
Ha M zárt, azaz az összes határpontját tartalmazza, akkor nyilván $M \supset \text{int}(M) \cup \partial M = \overline{M}$.
Fordítva, ha ez a tartalmazás igaz, akkor persze $\partial M \subset M$, vagyis M zárt.
Végül, definíció szerint $\text{ext}(M) = \text{int}(M^c)$, amely pontosan akkor egyezik meg a fenti felbontásban M^c-vel, azaz $\text{int}(M^c)$ pontosan akkor nyílt, ha $M = \text{int}(M) \cup \partial M = \overline{M}$. $\square$

1.21. Tétel. *Tetszőleges M halmaz esetén $\text{int}\,(M)$ és $\text{ext}\,(M)$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\text{int}\,(M)$ nyílt halmaz.
Legyen $a \in \text{int}(M)$. Azt kellene megmutatni, hogy van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r\,(a) \subset \text{int}\,(M)$.
Tudjuk, hogy $a \in \text{int}\,(M)$ esetén van olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_R\,(a) \subset M$. Legyen $r := R/2$;

ekkor tetszőleges $x \in B_r(a)$ esetén minden $y \in B_r(x)$-re

$$\varrho(a,y) \leq \varrho(a,x) + \varrho(x,y) < r + r = R,$$

azaz $B_r(x) \subset M$, vagyis valóban $B_r(a)$ bármely pontja belső pont.

Mivel $\operatorname{ext}(M) = \operatorname{int}(M^c)$, azért a fentiek miatt $\operatorname{ext}(M)$ maga is nyílt halmaz.

□

1.22. Tétel. *Akárhány nyílt halmaz úniója nyílt halmaz, és véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.*

Bizonyítás. Legyenek $\{M\}_{\gamma \in I}$ nyílt halmazok (ahol I egy indexhalmaz). Ha ezek úniójában van egy a elem, akkor valamelyik M_γ halmazban benne is van. De mivel M_γ nyílt, így egy $B_r(a)$ környezete is része a M_γ halmaznak, ami így a fenti halmazok úniójában is benne van. Az únió tehát nyílt.

Legyenek $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nyílt halmazok. Belátjuk, hogy metszetük is az. Ha $a \in \bigcap\limits_{j=1}^{k} M_j$, akkor van olyan $r_1, r_2, .., r_k$, hogy $B_{r_j}(a) \subset M_j$ teljesül $j = 1, 2, \ldots, k$ esetén. Ekkor $r = \min\{r_1, r_2, .., r_k\}$ esetén $B_r(a) \subset \bigcap\limits_{j=1}^{k} M_j$, azaz $\bigcap_{j=1}^{k} M_j$ valóban nyílt. □

1.23. Tétel. *Akárhány zárt halmaz metszete zárt halmaz, és véges sok zárt halmaz uniója is zárt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy M_γ zárt! Ekkor M_γ^c nyílt halmaz. Ezért a De Morgan-azonosságot felhasználva kapjuk, hogy

$$\bigcap_{\gamma \in I} M_\gamma = \left(\bigcup_{\gamma \in I} M_\gamma^c \right)^c.$$

Az előző tétel miatt $\bigcup\limits_{\gamma \in I} M_\gamma^c$ nyílt, ezért ennek komplementere, a $\bigcap\limits_{\gamma \in I} M_\gamma$ halmaz valóban zárt. A véges únió esete hasonlóan bizonyítható.

□

1.24. Megjegyzések. (1) Végtelen sok nyílt halmaz metszete általában nem nyílt, hiszen $M_j = (-1, \frac{1}{j})$ esetén $\bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} M_j = (-1, 0]$.

(2) Hasonlóan, végtelen sok zárt halmaz úniója általában nem zárt, hiszen $M_j = [\frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j}]$ esetén $\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} M_j = (0, 1)$.

(3) Az X alaphalmaz és az üres halmaz minden esetben nyílt és zárt is egyszerre.

2. FEJEZET

Határérték és folytonosság

2.1. Sorozatok határértéke metrikus terekben

2.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{N} \to X$ függvényt X-beli *sorozatnak* nevezünk, ahol X egy metrikus tér.
Jelölések: a sorozat k-adik tagját $a_k := f(k)$-val, a sorozatot magát $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$-val (azaz az értékkészlet megadásával) jelöljük.

Ha a_k egy X-beli sorozat k-adik tagja, akkor a k számot (az a_k-hoz tartozó) indexnek nevezzük.

2.2. Megjegyzés. A fenti jelölés szerint az indexeket nullától kezdjük. Megállapodunk abban, hogy ha a nulla indexű tag nem értelmes, akkor automatikusan az első tagtól kezdjük az indexeket.

2.3. Definíció. Adott $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat és $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton növő függvény esetén az $a_{g(1)}, a_{g(2)}, a_{g(3)}, \ldots$ tagokból álló (azaz $f \circ g$ hozzárendeléssel adott) sorozatot az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat *részsorozatának* nevezzük. Ezt gyakran $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$-nel (azaz szintén az értékkészlet megadásával) jelöljük.

2.4. Definíció. Adott $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat és $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció esetén az $a_{h(1)}, a_{h(2)}, a_{h(3)}, \ldots$ tagokból álló (azaz $f \circ h$ hozzárendeléssel adott) sorozatot az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat *átrendezésének* nevezzük.

2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat *határértéke* (limesze) $a \in X$, ha az a pont tetszőleges ε sugarú környezetéhez létezik olyan $k_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $k > k_0, k \in \mathbb{N}$ esetén $a_k \in B_\varepsilon(a)$.
Jelölés: $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$ vagy $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ vagy $a_k \to a$. A fenti tulajdonságú sorozatot X-ben konvergensnek vagy röviden *konvergensnek* nevezzük.

2.6. Megjegyzés. A konvergencia fogalma függ tehát magától az (X, ϱ) metrikus tértől is. Ha például $X = (0, 1)$ az euklideszi metrikával, akkor az $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat nem konvergens.

2.1.1. A limesz tulajdonságai

2.7. Állítás. *A határérték egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_k) határértékei a és b (X elemei). Belátjuk, hogy $a = b$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan k_a, hogy $k > k_a$ esetén $\varrho(a_k, a) < \varepsilon$. Hasonlóan van olyan k_b, hogy $k > k_b$ esetén $\varrho(a_k, b) < \varepsilon$.

Azaz $k > \max\{k_a, k_b\}$ esetén $\varrho(a_k, a) < \varepsilon$ és $\varrho(a_k, b) < \varepsilon$ egyaránt igaz, vagyis a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\varrho(a, b) \leq \varrho(a, a_k) + \varrho(a_k, b) < 2\varepsilon,$$

amely tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén teljesül. Ezért $\varrho(a, b) = 0$, vagyis $a = b$, ahogy állítottuk. $\square$

2.8. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$. *Ekkor* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *minden részsorozatának határértéke létezik és értékük* a.

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$-hoz mutatunk olyan n_0 indexet, hogy $n > n_0$ esetén $\varrho(a_{k_n}, a) < \varepsilon$. Mivel $\lim (a_k) = a$, ezért a van olyan k_0 index, hogy $k > k_0$ esetén $\varrho(a_k, a) < \varepsilon$. De mivel $k_n \geq n$, ezért ekkor $\varrho(a_{k_n}, a) < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $n_0 = k_0$ alkalmas küszöbindex. □

A következő állítás kijelentései könnyen igazolhatók, de a bizonyítást nem részletezzük.

2.9. Állítás. *Fennállnak a következők.*

1. *Ha* $a_k = a$ *(azaz az* a *értékű konstans sorozatról van szó), akkor* $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$.
2. *A határérték szempontjából mindegy, hogy egy sorozatnak mi az első* j *eleme, ahol* $j \in \mathbb{N}$ *tetszőleges.*
3. *Ha* $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$, *akkor* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *minden átrendezésének a határértéke szintén* a.
4. *Ha az* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sorozatok limesze azonos, akkor az ezek* összefésülésével *kapott,* $a_1, b_1, a_2, b_2...$ *elemekből álló sorozat határértéke is létezik, és az a közös limesz.*

2.10. Állítás. *Ha egy sorozatnak létezik a limesze, akkor a sorozat korlátos, azaz létezik olyan korlátos* $K \subset X$ *halmaz, amely tartalmazza a sorozat összes elemét.*

Bizonyítás. Ha $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$, akkor az $\varepsilon = 1$ értékhez is létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $k > k_0$ esetén $\varrho(a_k, a) < 1$. Ezért az

$$r := \max \{\varrho(a, a_1), \varrho(a, a_2), ..., \varrho(a, a_{k_0})\}$$

sugarat választva minden $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy $a_k \in B_{r+1}(a)$, tehát az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat valóban korlátos. □

A következőkben X mindig egy normált teret jelöl, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, illetve $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pedig egy-egy X-beli sorozatot. Sorozatok összegét, számmal való szorzatát úgy értelmezzük, mint a nekik megfelelő függvényekét, azaz például a fenti két sorozat összegének k-adik tagja $a_k + b_k$. Az így kapott sorozatot $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$-val jelöljük.

A bizonyítások során az egész jegyzetben külön hivatkozás nélkül használjuk a következő egyszerű állítást.

2.11. Állítás. *Tetszőleges* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ *sorozat esetén fennáll a következő ekvivalencia:*

$$\lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \lim (\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}} = 0 \Leftrightarrow \lim (\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}} \leq 0.$$

2.12. Tétel. *Ha* $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a, \lim (b_k)_{k\in\mathbb{N}} = b$, *akkor* $\lim (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}} = a + b$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Mivel $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$, ezért az $\varepsilon/2$ számhoz is létezik k_1 index, hogy $k > k_1$ esetén

$$\varrho(a, a_k) = \|a_k - a\| < \varepsilon/2. \tag{2.1}$$

Hasonlóan, létezik k_2 index, hogy $k > k_2$ esetén

$$\varrho(b, b_k) = \|b_k - b\| < \varepsilon/2. \tag{2.2}$$

Ekkor $k > \max \{k_0, k_1\}$ esetén a fenti (2.1) és (2.2) egyenlőtlenségek, valamint a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|(a_k + b_k) - (a + b)\| = \|a_k - a + b_k - b\| \leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| < 2\varepsilon/2 = \varepsilon,$$

azaz definíció szerint $\lim\left(a_k+b_k\right)_{k\in\mathbb{N}}=a+b$.

□

2.13. Tétel. *Tetszőleges $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset X$ korlátos sorozat és $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ nullához tartó sorozat esetén $\lim\left(\lambda_k a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}=0$ teljesül.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha $\|a_k\|\le K$ teljesül minden k indexre, akkor

$$\|\lambda_k a_k\|=|\lambda_k|\,\|a_k\|\le K\cdot|\lambda_k|\,.$$

Mivel a jobb oldal határértéke nulla, azért a rendőr-elv miatt a bal oldalé is nulla, ami éppen a tétel állítását adja. □

2.14. Tétel. *Tetszőleges $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset X$ és $\lim\left(\lambda_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ sorozatokra $\lim\left(a_k\right)=a$ és $\lim\left(\lambda_k\right)=\lambda$ esetén teljesül, hogy $\lim\left(\lambda_k a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}=\lambda a$.*

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenséget, valamint az összeadásra vonatkozó állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|\lambda a-\lambda_k a_k\|\leqslant\|\lambda a-\lambda a_k\|+\|\lambda a_k-\lambda_k a_k\|=|\lambda|\cdot\|a-a_k\|+|\lambda-\lambda_k|\cdot\|a_k\|\,.$$

Itt az utolsó összeg első tagjának határértéke definíció szerint nulla, a második határértéke pedig az előző állítás miatt nulla. Innen ismét a rendőr-elv miatt következik, hogy $\lim\left(\lambda_k a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}=\lambda a$.

□

2.1.2. Zárt halmazok jellemzése sorozatokkal Gyakran van szükség annak eldöntésére, hogy egy adott normált (vagy metrikus) tér valamilyen részhalmaza zárt-e. Erre nézve ad jól használható szükséges és elégséges kritériumot az alábbi tétel.

2.15. Tétel. *Egy $M\subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha tetszőleges konvergens $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset M$ sorozat esetén $\lim\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\in M$.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy az 1.20 Állítás szerint az M halmaz pontosan akkor zárt, ha minden olyan pont, amelynek bármely környezetében van M beli pont, az M-hez tartozik.

Tegyük fel először, hogy M zárt! Ha $a_k\in M$ és $\lim\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}=a$, akkor $a\in M$, mert a minden környezetében van M beli pont is (nevezetesen a_k).

A fordított irányú következtetés igazolásához legyen most a olyan, hogy minden környezete tartalmaz M-beli pontot. Ekkor van olyan $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset M$ sorozat, amelyre $a_k\in B_{\frac{1}{k}}(a)$. Erre definíció szerint teljesül, hogy $\lim\left(a_k\right)=a$, azaz a feltétel szerint $a\in M$, így a fent említett 1.20 Állítás szerint M zárt.

□

2.16. Tétel. *(Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^d$-ben):*
Legyen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^d$-ben! Ekkor az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Az állítást a dimenzióra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Először a $d=1$ esetre igazoljuk a tételt.
Mivel $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ korlátos, feltehető, hogy $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset[c,d]\subset\mathbb{R}$. Felezzük meg a $[c,d]$ intervallumot! Ekkor a két zárt fél intervallum közül legalább az egyik végtelen sok tagot

tartalmaz a sorozatból. Ez legyen $[c_1, d_1]$. Ezt megint felezzük, és amelyik fél végtelen sok tagot tartalmaz a sorozatból, az legyen $[c_2, d_2]$. Ezt az eljárást folytatva kapjuk a bal végpontok monoton növő $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és a jobb végpontok monoton csökkenő $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatát, illetve az eredeti sorozat egy $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozatát úgy, hogy $a_{k_l} \in [c_l, d_l]$. Belátjuk, hogy az $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozat konvergens.
Tudjuk még, hogy az összes végpontok halmaza korlátos, mert az része a $[c, d]$ halmaznak. Így a monotonitás miatt a $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatok konvergensek; továbbá, mivel $d_k - c_k$ minden lépésben feleződik, ezért $\lim (d_k - c_k)_{k\in\mathbb{N}} = 0$, vagyis $\lim (c_k)_{k\in\mathbb{N}} = \lim (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ekkor viszont a rendőr-elv miatt ez lesz az $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozat limesze is, vagyis találtunk egy konvergens részsorozatot.

Ha d dimenzió esetére igazoltuk az állítást, akkor tekintsük az $\mathbf{a}_k = \left(\mathbf{a}_k^d, a_k^{d+1}\right)$ elemekből álló $\mathbb{R}^{d+1}$-beli sorozatot, ahol az elemek első d koordinátáját $\mathbf{a}_k^d$, az utolsót pedig a_k^{d+1} jelöli. Nyilván, ha az $(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, akkor $\left(\mathbf{a}_k^d\right)_{k\in\mathbb{N}}$ is az, vagyis az indukciós feltétel miatt ennek van $\left(\mathbf{a}_{k_l}^d\right)_{l\in\mathbb{N}} \subset \left(\mathbf{a}_k^d\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozata.
Ekkor az $\left(a_{k_l}^{d+1}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ sorozatból egy konvergens $\left(a_{k_{l_j}}^{d+1}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ részsorozatot választva olyan $\left(k_{l_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ indexsorozatot nyerünk, amellyel $\left(\mathbf{a}_{k_{l_j}}^d\right)_{j\in\mathbb{N}}$ is konvergens, és így az eredeti $(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ezen indexekkel kapott $\left(\mathbf{a}_{k_{l_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ részsorozata olyan, hogy annak első d koordinátája, és a $d+1$-edik is konvergens, vagyis maga a részsorozat is konvergens. □

A fenti állítás egy fontos következménye a következő tétel.

2.17. Tétel. *Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz. Ha $(a_k \in M)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat, akkor létezik olyan $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely konvergens és $\lim (a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \in M$.*

Bizonyítás. Mivel M korlátos, azért $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^n$-ben. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint ennek létezik konvergens részsorozata $a_{k_l} \in M$. Másrészt M zárt, ezért a 2.15 Tétel miatt $\lim (a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \in M$, amivel az állítást beláttuk. □

A fenti tulajdonságú halmazok osztályát definiáljuk metrikus terekben.

2.18. Definíció. Egy (X, ϱ) tetszőleges metrikus tér $M \subset X$ részhalmazát *sorozatkompaktnak* nevezzük, ha tetszőleges M-beli sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek limesze M-beli.

2.19. Megjegyzés. A fenti 2.17 Tétel szerint $\mathbb{R}^n$-ben minden korlátos és zárt halmaz sorozatkompakt.

A következő tétel arra ad választ, hogy igaz-e hasonló állítás, illetve ezen tulajdonság megfordítása tetszőleges metrikus térben.

2.20. Állítás. *Tetszőleges X metrikus tér minden sorozatkompakt halmaza korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Legyen $M \subset X$ sorozatkompakt halmaz. Először belátjuk, hogy M korlátos. Indirekt módon tegyük fel, hogy M nem korlátos. Legyen $a \in X$ rögzített pont. Ha M nem korlátos, akkor van olyan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ sorozat, amelynek tagjaira $x_1 \notin B_1(a), x_2 \notin B_2(a), \ldots$. Ekkor az $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nincs konvergens részsorozata, ugyanis a 2.10

Állítás értelmében ennek korlátosnak kellene lennie, de a konstrukció miatt ez nem lesz korlátos.

Most belátjuk, hogy M zárt. Tekintsünk tetszőleges, az X -ben konvergens $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ sorozatot! Mivel M sorozatkompakt, ezért ennek létezik $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely konvergens és határértéke M-ben van. A 2.8 Állítás értelmében ez a határérték ugyanaz, mint az eredeti sorozaté. Ekkor a 2.15 Tétel miatt M valóban zárt.

□

Sajnos, a 2.17 Tétel nem általánosítható tetszőleges terekre, amint a következő állítás rámutat.

2.21. Állítás. *Ha egy metrikus térben egy halmaz korlátos és zárt, abból még nem következik, hogy sorozatkompakt is.*

Bizonyítás. Legyen (X, ϱ) egy olyan metrikus tér, amely (egymástól különböző) $p_1, p_2, \dots$ pontokból áll, továbbá $k \neq j$ esetén $\varrho(p_j, p_k) = 1$. Ha most volna olyan $p \in X$, hogy $p = \lim (p_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ teljesülne a fenti sorozat egy részsorozatára, akkor egy l index esetén

$$\varrho\left(p, p_{k_{l+1}}\right) < 1/2 \quad \text{és} \quad \varrho\left(p, p_{k_{l+2}}\right) < 1/2$$

egyaránt teljesülnek. De ekkor

$$\varrho\left(p_{k_{l+1}}, p_{k_{l+2}}\right) \leq \varrho\left(p, p_{k_{l+1}}\right) + \varrho\left(p, p_{k_{l+2}}\right) < 1,$$

ami ellentmondás. □

2.22. Megjegyzés. A fenti gondolatmenet minden olyan (X, ϱ) metrikus térben alkalmazható, ahol tudunk $p_1, p_2, \dots$ (végtelen) pontsorozatot mutatni úgy, hogy $k \neq j$ esetén $\varrho(p_j, p_k) = 1$.

2.23. Tétel. *Legyen X metrikus tér! Ha $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergens sorozat,akkor ez ún.* Cauchy-tulajdonságú sorozat*, azaz:*
minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $k, l > k_0$ esetén $\varrho(a_k, a_l) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Mivel $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $k, l > k_0$ esetén $\varrho(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\varrho(a_l, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor

$$\varrho(a_k, a_l) \leq \varrho(a_k, a) + \varrho(a, a_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

amivel beláttuk, hogy az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-tulajdonságú.

□

Fontos kérdés, hogy igaz-e a fenti tétel megfordítása. Általában nem, amint a következő példa mutatja.

2.24. Példák. (1) Legyen $X = \mathbb{Q}$ a szokásos távolsággal! Legyen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ olyan, hogy $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = \sqrt{2}$. Ekkor $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-tulajdonságú, de nincs határértéke X-ben.

(2) $X := (0, 1)$, a szokásos távolsággal, és tekintsük az $a_k := \frac{1}{k}$ tagokból álló sorozatot! Ez megint Cauchy-tulajdonságú, mégsincs határértéke X-ben.

2.25. Definíció. Egy X metrikus teret *teljes metrikus térnek* nevezünk, ha minden X-beli Cauchy-tulajdonságú sorozatnak van limesze X-ben.

2.26. Tétel. $\mathbb{R}^n$ *teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ Cauchy-tulajdonságú sorozat! Először belátjuk, hogy $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos.

Legyen $\varepsilon := 1$; ekkor létezik $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $k, l > k_0$ esetén $\|a_k - a_l\| < \varepsilon = 1$. Legyen $l = k_0 + 1$ rögzített!
Legyen továbbá

$$r = \max\{1, |a_0 - a_{k_0}|, |a_1 - a_{k_0}|, \dots, |a_{k_0-1} - a_{k_0}|\}$$

Ekkor láthatjuk, hogy

$$\{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \dots\} \subset B_1(a_{k_0}) \quad \text{és} \quad \{a_0, a_1, \dots, a_{k_0-1}\} \subset B_{r+1}(a_{k_0}),$$

tehát $\{a_0, a_1, \dots\} \subset B_{r+1}(a_{k_0})$, azaz a fenti sorozat valóban korlátos.

Most belátjuk, hogy konvergens is. Alkalmazzuk a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt! Eszerint az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ sorozatnak van konvergens részsorozata: $\lim (a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} = a \in \mathbb{R}^n$. Belátandó még, hogy az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat is ehhez tart. Legyen $\varepsilon/2 > 0$ tetszőleges. Ekkor egyrészt létezik $l_0 \in \mathbb{N}$, hogy $l > l_0$ esetén $\|a_{k_l} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Másrészt, mivel $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat is, ezért van olyan $l_1 \in \mathbb{N}$, hogy $k, l > l_1$ esetén $\|a_k - a_l\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $l_{\max} = \max\{k_{l_0}, l_1\}$ esetén $k > l_{\max}$ indexekre

$$\|a_k - a\| \le \|a_k - a_{k_l}\| + \|a_{k_l} - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$, ahogy állítottuk.

□

2.2. Függvények határértéke és folytonossága

Ebben a szakaszban X és Y metrikus terek, és használjuk az $f : X \rightarrowtail Y$ jelölést abban az esetben, ha $D_f \subset X$ és $R_f \subset Y$.
Amennyiben $D_f = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk.
Ha $X = Y = \mathbb{R}$, akkor mindkét fenti esetben *valós függvényről* beszélünk.

2.27. Definíció. Legyen $a \in X$ az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! Azt mondjuk, hogy az f függvény a *határértéke (limesze)* az a pontban $b \in Y$, ha b bármely (kicsi) $B_\varepsilon(b)$ környezetéhez létezik a-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy ha $x \in B_\delta(a) \cap D_f, x \neq a$, akkor $f(x) \in B_\varepsilon(b)$.
Jelölés: $\lim\limits_a f = b$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

2.28. Megjegyzések.
(1) Mivel a torlódási pontja D_f-nek, ezért bármely $\delta > 0$ esetén van olyan $x \neq a$, amelyre $x \in B_\delta(a) \cap D_f$.
(2) Egy f függvény határértéke szempontjából mindegy, hogy f értelmezve van-e a-ban vagy sem és az is, hogy $f(a)$ mivel egyenlő.

2.29. Állítás. *Az $f : X \to Y$ függvény limesze egy pontban egyértelmű.*

2.30. Definíció. Legyen $a \in D_f$. Ekkor az f függvényt *az a pontban folytonosnak* nevezzük, ha az $f(a) \in Y$ bármely $B_\varepsilon(f(a))$ környezetéhez található az a-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a) \cap D_f$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.
Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos az $M \subset D_f$ halmazon*, ha minden $x \in M$ pontban folytonos.
Azt mondjuk, hogy f *folytonos*, ha folytonos a D_f halmazon.

2.31. Megjegyzések.
(1) Ha a torlódási pontja D_f-nek, akkor f pontosan akkor folytonos a-ban, ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(2) Legyen f valós függvény! Ekkor f-nek az a pontban vett *baloldali határértékét* így értelmezzük: $\lim\limits_{x\to a} f|_{(-\infty,a)}(x)$, ha ez létezik. Hasonlóan f-nek az a pontban vett *jobboldali határértéke* a következő: $\lim\limits_{x\to a} f|_{(a,\infty)}(x)$, ha ez létezik.

(3) Az $f(x) = \frac{1}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény folytonos, mert mindenhol folytonos, ahol értelmezve van (0-ban nincs értelmezve).

2.32. Példa.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Ez a függvény 1-ben nem folytonos, de létezik határértéke 1-ben, és az nulla.

Függvények adott pontbeli határértékének létezésére és folytonosságának ellenőrzésére akarunk egyszerűen ellenőrizhető kritériumot kapni úgy, hogy mindehhez csak sorozatokat kelljen vizsgálni.

2.33. Tétel. *(átviteli elv határértékekre):*
Legyen a torlódási pontja D_f-nek. Ekkor $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ pontosan akkor áll fenn, ha minden olyan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_f \setminus \{a\}$ sorozatra, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k) = a$ érvényes, egyúttal $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ is teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) \equiv \lim\limits_{a} f = b$; legyen továbbá $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat, melyre $x_k \in D_f \setminus \{a\}$ és $\lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$ teljesül. Be kell látnunk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ áll fenn.

Legyen ε tetszőleges! Ekkor a határérték definíciója miatt ehhez is van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \cap D_f \setminus \{a\}$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(b)$. Azaz ha a k_0 index olyan, hogy $k > k_0$ esetén $x_k \in B_\delta(a)$, akkor $k > k_0$ esetén $f(x_k) \in B_\varepsilon(b)$, amivel a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ konvergenciát igazoltuk.

Most tegyük fel, hogy minden $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_f \setminus \{a\}, \lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$ tulajdonságú sorozatra $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ teljesül. A határérték definíciója alapján azt kell igazolni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy $x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \setminus \{a\}$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(b)$.

Ha ez nem lenne igaz, akkor valamilyen $\varepsilon_0 > 0$ szám esetén minden $\delta > 0$-hoz volna olyan $x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \setminus \{a\}$, amelyre $f(x) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$ teljesül. Ekkor $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ esetén is van olyan $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(a), x_k \in D_f \setminus \{a\}$ elem, amelyre $f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$. Most $\lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$, ugyanakkor $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq b$, mert minden $k \in \mathbb{N}$-re $f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$, ami ellentmond a feltevésünknek.

□

2.34. Tétel. *(átviteli elv folytonosságra):*
Az f függvény az $a \in D_f$ pontban pontosan akkor folytonos, ha minden olyan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_f$ sorozatra, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k) = a$ érvényes, egyúttal $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ is teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f folytonos a-ban, legyen továbbá $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_f$ olyan sorozat, melyre $\lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$ teljesül! Be kell látnunk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ teljesül.

Legyen ε tetszőleges! Ekkor a folytonosság definíciója miatt ehhez is van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in B_\delta(a) \cap D_f$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$. Azaz ha a k_0 index olyan, hogy $k > k_0$ esetén $x_k \in B_\delta(a)$, akkor $k > k_0$ esetén $f(x_k) \in B_\varepsilon(f(a))$, amivel a $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ konvergenciát igazoltuk.

Most tegyük fel, hogy minden olyan $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D_f$ sorozatra, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ érvényes, fennáll, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ teljesül. A folytonosság definíciója alapján azt kell igazolni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy $x \in B_\delta(a) \cap D_f$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.

Ha ez nem lenne igaz, akkor valamilyen $\varepsilon_0 > 0$ szám esetén minden $\delta > 0$-hoz volna olyan $x \in B_\delta(a) \cap D_f$, amelyre $f(x) \notin B_{\varepsilon_0}(f(a))$ teljesül. Ekkor $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ esetén is van olyan $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(a), x_k \in D_f$ elem, amelyre $f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(f(a))$. Most $\lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$, ugyanakkor $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq f(a)$, mert minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(f(a))$, ami ellentmond a feltevésünknek.

□

2.2.1. A határértékre és a folytonosságra vonatkozó műveleti szabályok

2.35. Tétel. *Legyen X metrikus, Y pedig normált tér! Legyenek $f, g : X \rightarrowtail Y$ és $a \in (D_f \cap D_g)'$. Ha $\lim\limits_a f = b, \lim\limits_a g = c$, akkor $\lim\limits_a (f+g) = b + c$.*

Bizonyítás. Legyen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelyre teljesül, hogy $x_k \in \{D_f \cap D_g\} \setminus \{a\}$ és $\lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$. Azt kell megmutatni, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} (f+g)(x_k) = b + c$.

A 2.33 Tételben szereplő átviteli elv szerint a fenti feltételekkel

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_a f$$

és hasonlóan $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k) = \lim\limits_a g$, így ezekből

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_k) + g(x_k)) = \lim_a f + \lim_a g,$$

amely ismét a 2.33 Tétel alapján épp azt jelenti, hogy $f+g$ határértéke a -ban $\lim\limits_a f+g$. □

2.36. Tétel. *Legyen X metrikus, Y normált tér, $f, g : X \rightarrowtail Y$. Ha f, g folytonos a-ban, akkor $f + g$ is folytonos a-ban.*

Bizonyítás. Legyen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelyre teljesül, hogy $x_k \in \{D_f \cap D_g\}$ és $\lim (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = a$. Azt kell megmutatni, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} (f+g)(x_k) = f(a) + g(a)$.

A 2.34 Tételben szereplő átviteli elv szerint a fenti feltételekkel $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ és hasonlóan $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k) = g(a)$, így ezekből

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_k) + g(x_k)) = f(a) + g(a),$$

amely ismét a 2.34 Tétel alapján épp azt jelenti, hogy $f + g$ folytonos a-ban. □

A szorzásra és valós függvényekkel való osztásra vonatkozó következő állításokat bizonyítás nélkül adjuk meg.

2.37. Tétel. *Legyen X metrikus, Y normált tér, $f : X \rightarrowtail Y, \lambda : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Legyen $a \in \{D_f \cap D_\lambda\}'$! Ha $\lim\limits_a f = b \in Y, \lim\limits_a \lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, akkor $\lim\limits_a (\lambda f) = \lambda_0 b \in Y$.*

2.38. Tétel. *Legyen X metrikus, Y normált tér, továbbá $f : X \rightarrowtail Y, h : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosak a-ban. Ekkor hf is folytonos a-ban.*

2.39. Tétel. *Legyen X metrikus tér, $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Ha $\lim\limits_a f = b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.*

2.40. Tétel. *Legyen X metrikus tér, $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Ha f folytonos a-ban és $f(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{f}$ is folytonos a-ban.*

2.41. Tétel. *Legyenek X, Y, Z metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y, g : Y \rightarrowtail Z$. Ha f folytonos $a \in X$-ben, g pedig $b = f(a) \in Y$-ban, akkor $g \circ f$ is folytonos a-ban.*

Bizonyítás. Mivel g folytonos $b = f(a)$-ban, így g értelmezve van $f(a)$-ban, ezért $g \circ f$ értelmezve van a-ban, és $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
Az átviteli elvvel belátjuk, hogy $g \circ f$ folytonos a-ban. Legyen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat, melyre $\lim (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = a, x_k \in D_{g \circ f}$. Az utóbbi azt jelenti, hogy $x_k \in D_f$, másrészt $f(x_k) \in D_g$. Mivel f folytonos a-ban, ezért $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$. Másrészt g folytonos $f(a)$-ban, így g-re alkalmazva az átviteli elvet, kapjuk, hogy

$$\lim_{k \to \infty} g(f(x_k)) = g(f(a)),$$

amely az átviteli elv szerint pontosan azt jelenti, $g \circ f$ folytonos a-ban.

□

Jogosan merül fel a kérdés, hogy igaz-e hasonló állítás a határértékekre, azaz teljesül-e az alábbi következtetés:

$$\lim_a f = b, \lim_b g = c \Longrightarrow \lim_a (g \circ f) = c.$$

Ez általában nem igaz, amint az alábbi példa mutatja.

2.42. Példa.

$$g(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y = 0 \\ 1, & \text{ha } y \neq 0, \end{cases}$$

valamint f a konstans nulla függvény, továbbá $a = b = 0$.
Ekkor $\lim\limits_0 g = 1$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $(g \circ f)(x) = 0$, vagyis $\lim\limits_0 g \circ f = 0$.

A fenti helyett a következő állítás teljesül, amelyet azonban nem bizonyítunk.

2.43. Állítás. *Legyenek X, Y, Z metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y, g : Y \rightarrowtail Z$. Ha $\lim\limits_a f = b$ és g folytonos b-ben, akkor $\lim\limits_a (g \circ f) = g(b)$.*

2.2.2. Az inverz függvény folytonossága Egy tetszőleges f függvény inverzét akkor tudjuk értelmezni, ha a függvény *injektív,* azaz $x_1, x_2 \in D_f$ esetén teljesül az alábbi következtetés:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Egy injektivitásra vonatkozó egyszerű feltételt ad meg a következő állítás.

2.44. Állítás. *Ha az f valós függvény szigorúan monoton, akkor injektív.*

2.45. Definíció. Ha f injektív, akkor annak f^{-1}-gyel jelölt *inverze* a következő függvény:

$$f^{-1} : R_f \to D_f, y \in R_f, \qquad f^{-1}(y) = x, \text{ ahol } x \in D_f, f(x) = y.$$

Felmerül kérdés, hogy ha f folytonos és injektív, akkor inverze is? Habár a folytonosság gyakran használt szemléltetése alapján ezt hihetnénk, általában mégsem igaz. Erre mtatunk példát az alábbiakban.

2.46. Példa. Az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x < 1 \\ x - 1, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

hozzárendeléssel adott $f : \mathbb{R} \setminus [1, 2) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, de inverze

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{ha } x < 1 \\ y + 1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

nem folytonos 1-ben.

2.47. Állítás. *Ha az f valós függvény szigorúan monoton, akkor az inverze is.*

Bizonyítás. Legyenek $y_1 < y_2 \in D_{f^{-1}}$; ekkor $y_1 = f(x_1)$ és $y_2 = f(x_2)$ valamilyen $x_1, x_2 \in D_f$ számokra. f szigorú monotonitása miatt ekkor csak $x_1 < x_2$ teljesülhet. Ekkor viszont $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$, ami épp a bizonyítandó állítás. □

2.48. Tétel. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ valamilyen intervallum, akkor f^{-1} folytonos.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy elegendő szigorúan monoton növő függvényekre igazolni az állítást, hiszen $-(-f)^{-1} = f^{-1}$, így egy szigorúan monoton csökkenő f függvény esetén annak inverze is folytonos.

Legyen $y_0 \in D_{f^{-1}} = R_f$, továbbá $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Először tegyük fel, hogy $x_0 \in \operatorname{int}(I)$. Azt szeretnénk belátni, hogy f^{-1} folytonos y_0-ban.
Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $B_\varepsilon(x_0) \subset I$ teljesül! Ekkor $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, mivel f szigorúan monoton növő. Ha $y \in (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, akkor f^{-1} szigorú monotonitása miatt (ld. 2.47 Állítás) kapjuk, hogy

$$f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)),$$

vagyis

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon,$$

azaz f^{-1} valóban folytonos y_0-ban. Az $x_0 \in \partial I$ eset tárgyalása hasonló, azt nem is részletezzük.

□

2.49. Példák.
(1) $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, x \geq 0, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, ekkor f szigorúan monoton nő, $D_f = [0, \infty)$, f^{-1} folytonos az $y \in R_f$ pontokban és $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. (Később látjuk a Bolzano-tétellel, hogy $R_f = [0, \infty)$.) Így értelmezhetjük az n-edik gyökvonás függvényét (műveletét), és egyszersmind látjuk, hogy az is folytonos.
(2) $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x$, ekkor f szigorúan monoton nő, $D_f = \mathbb{R}$, f^{-1} folytonos. (Később látjuk a Bolzano-tétellel, hogy $D_{f^{-1}} = R_f = (0, \infty)$.) Ezzel a meggondolással értelmezzük a természetes alapú logaritmusfüggvényt.

2.50. Tétel. *Legyenek X, Y metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y$, f folytonos, D_f sorozatkompakt, f pedig injektív. Ekkor f^{-1} is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $y_0 \in D_{f^{-1}} = R_f$. Belátjuk, hogy f^{-1} folytonos y_0-ban. Alkalmazzuk az átviteli elvet! Legyen $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_{f^{-1}} = R_f$ olyan, amelyre $\lim (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = y_0$. Legyen továbbá $k \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_k := f^{-1}(y_k)$, azaz $y_k = f(x_k)$. Azt kell tehát belátni, hogy $\lim (x_k)_{k \in \mathbb{N}} = x_0$.

Indirekt bizonyítunk: ha ez nem lenne igaz, akkor létezne $\varepsilon_0 > 0$, hogy $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ valamilyen $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ részsorozatának elmeire $\varrho(x_{k_l}, x_0) \geq \varepsilon_0$. Mivel D_f sorozatkompakt, $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ valamilyen $\left(x_{k_{l_j}}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ részsorozatának van limesze, jelölje ezt $x_* \in D_f$. A fenti feltételek miatt persze $\varrho\left(x_{k_l}, x_*\right) \geq \varepsilon_0$. Az $y_k = f\left(x_k\right)$ egyenlőséget, valamint f-nek az x_*-beli folytonosságát használva

$$\lim_{j\to\infty} y_{k_{l_j}} = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_{l_j}}) = f(x_*) \in D_f$$

teljesül. De mivel $\lim\limits_{j\to\infty} y_{k_{l_j}} = y_0$, ezért f injektivitása miatt $x_* = x_0$, ami ellentmond a $\varrho\left(x_{k_l}, x_*\right) \geq \varepsilon_0$ egyenlőtlenségnek.

□

2.3. Folytonos függvények tulajdonságai

2.51. Tétel. *Legyenek X és Y metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y$ folytonos. Ha emellett D_f sorozatkompakt, akkor R_f is sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen $(y_k) \subset R_f$ tetszőleges sorozat! Azt kell megmutatni, hogy ennek létezik olyan $\left(y_{k_l}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely konvergens és $\lim\left(y_{k_l}\right) \in R_f$. A feltétel szerint minden $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik $x_k \in D_f : f\left(x_k\right) = y_k$. Mivel D_f sorozatkompakt, azért az $\left(x_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezik D_f-ben konvergens részsorozata: $\lim_{l\to\infty}\left(x_{k_l}\right)_{l\in\mathbb{N}} = x_0 \in D_f$. Mivel f folytonos x_0-ban, ezért

$$f(x_0) = \lim_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = \lim_{l\to\infty} y_{k_l},$$

amely nyilván R_f-beli, és pont ezt akartuk belátni.

□

A fenti tétel leggyakrabban használt következménye a következő.

2.52. Tétel. *(Weierstrass-maximumelv)*
Legyen X metrikus tér, $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ olyan, hogy f folytonos a $K \subset D_f$ sorozatkompakt halmazon. Ekkor létezik olyan $x_* \in K$, hogy $\max\limits_K f = f(x_*)$. Vagy röviden: kompakt halmazon folytonos függvény felveszi a maximumát.

Bizonyítás. Tekintsük az $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$, $D_f = K$ függvényt, amely a 2.51 Tétel feltételeinek megfelel. Ekkor tehát az R_f képtér sorozatkompakt, azaz a 2.20 Állítás szerint korlátos és zárt, tehát van maximális eleme (mert $\sup R_f \in R_f$), ami a tételben szereplő $f(x_*)$ lesz éppen. □

A fenti tételben maximum helyett minimum is írható.

A Weierstrass-maximumelvben még valós függvények esetén sem hagyható el D_f sorozatkompakt tulajdonsága, amint a következő példákkal rámutatunk.

2.53. Példák.
(1) $D_f = [0, \infty)$ zárt, de nem korlátos, $f\left(x\right) = x$, ekkor $R_f = [0, \infty)$ nem korlátos.
(2) $D_f = (0, 1]\,, f\left(x\right) = \frac{1}{x}$, ekkor D_f korlátos, de nem zárt, R_f pedig nem korlátos.

A következőkben a folytonosság tulajdonságának egy erősebb, speciális esetét tárgyaljuk.

2.54. Definíció. Azt mondjuk, hogy az X, Y metrikus terek esetén egy $f : X \rightarrowtail Y$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden $x_1, x_2 \in D_f, \varrho\left(x_1, x_2\right) < \delta$ esetén

$$\varrho\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) < \varepsilon.$$

2.55. Megjegyzés. Az egyenletes folytonosság definíciójában δ csak ε-tól függ, míg a folytonosság definíciójában attól is függhet, hogy azt milyen (vagy melyik) pontban vesszük.

2.56. Tétel. *(Heine tétele) Ha X, Y metrikus terek esetén $f : X \rightarrowtail Y$ folytonos és D_f sorozatkompakt, akkor f egyenletesen is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen tehát f folytonos, D_f pedig sorozatkompakt. Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ esetén valamilyen $x_1, x_2 \in D_f$ pontokra $\varrho(x_1, x_2) < \delta$, de $\varrho(f(x_1), f(x_2)) \geq \varepsilon$.

Legyen a fenti feltevésben $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, továbbá $x_k, \widetilde{x_k} \in D_f$ olyanok, hogy $\varrho(x_k, \widetilde{x_k}) < \frac{1}{k}$, de $\varrho(f(x_k), f(\widetilde{x_k})) \geq \varepsilon$.
Mivel D_f sorozatkompakt, ezért $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ egy $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ részsorozatára $\lim (x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} = x_0 \in D_f$ teljesül. Továbbá $\varrho(x_{k_l}, \widetilde{x_{k_l}}) < \frac{1}{k}$ miatt $\lim (\widetilde{x_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} = \lim (x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} = x_0 \in D_f$, ahol a bal oldali limesz ismét a D_f sorozatkompakt tulajdonsága miatt létezik. Az átviteli elv alapján

$$\lim_{l \to \infty} f(x_{k_l}) = f(x_0), \lim_{l \to \infty} f(\widetilde{x_{k_l}}) = f(x_0),$$

amely ellentmond azon feltevésünknek, miszerint $\varrho(f(x_k), f(\widetilde{x_k})) \geq \varepsilon$. □

A tételben szereplő feltevések általában nem hagyhatók el, amint a következő példák mutatják.

2.57. Példák. (1) Legyen $D_f = [0, \infty)$, amely zárt, de nem korlátos. Belátható, hogy $f(x) := x^2$ nem egyenletesen folytonos.
(2) Legyen $D_f = (0, 1]$, amely korlátos, de nem zárt. Belátható, hogy $f(x) := \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos.

2.58. Tétel. *(Bolzano-tétel) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos úgy, hogy $f(a) \neq f(b)$. Ekkor tetszőleges $\eta \in (f(a), f(b))$ számhoz létezik $\xi \in (a, b)$ úgy, hogy $f(\xi) = \eta$.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő halmazt:

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) < \eta\} \subset [a, b],$$

amely korlátos és nem üres. Legyen $\xi := \sup M$. Belátjuk, hogy $f(\xi) = \eta$.
Indirekt bizonyítunk: belátjuk, hogy $f(\xi) < \eta$ vagy $f(\xi) > \eta$ nem lehetséges.

Ha $f(\xi) < \eta < f(b)$ lenne, akkor f folytonossága miatt ξ -nek megadható olyan jobboldali környezete, ahol a függvényértékek η -nál kisebbek. Azaz valamilyen $\delta > 0$ számra $x \in [\xi, \xi + \delta]$ esetén $f(x) < \eta$, ami ellentmond annak, hogy $\xi = \sup M$.

Ha $f(\xi) > \eta$ volna, akkor hasonlóan valamilyen $\delta > 0$ számra $x \in [\xi - \delta, \xi]$ esetén $f(x) > \eta$ lenne. Ez is ellentmond annak, hogy $\xi = \sup M = \sup \{x \in [a, b] : f(x) < \eta\}$.

Összefoglalva tehát csakis $f(\xi) = \eta$ lehetséges.

□

Következmény: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ valamilyen intervallum (akár véges végtelen, nyílt vagy zárt), és tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor minden $x_1, x_2 \in I$ és $y \in (f(x_1), f(x_2))$ esetén létezik $x_0 \in (x_1, x_2)$ úgy, hogy $f(x_0) = y$.

2.59. Megjegyzés. Az ilyen tulajdonságú függvényeket Darboux-tulajdonságúaknak nevezzük. A Bolzano-tétel kimondja, hogy minden $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Darboux-tulajdonságú.

2.60. Példák. (1) Minden $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots a_1 x + a_0$ hozzárendeléssel adott páratlan fokú polinomfüggvénynek létezik valós gyöke.
Ha kell, a $p(x) = 0$ egyenlőséget -1-gyel szorozva feltehetjük, hogy $a_k > 0$; ekkor $\lim\limits_{\pm\infty} p = \pm\infty$ teljesül. Vagyis létezik olyan $x_1 \in \mathbb{R}$ és $x_2 \in \mathbb{R}$, hogy $p(x_1) < 0$

és $p(x_2) > 0$ érvényes. Ekkor a fenti következmény alapján valóban van olyan $x_0 \in (x_1, x_2)$, hogy $p(x_0) = 0$ teljesül.

(2) Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

hozzárendeléssel adott függvényt! Ez a függvény Darboux-tulajdonságú (ezt külön kell igazolni nullát tartalmazó és nullát nem tartalmazó intervallumokra), de nem folytonos 0-ban.

A következő tételhez megemlítjük azt az egyszerű tényt, hogy egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor intervallum, ha minden $x_1, x_2 \in A$ és $x \in (x_1, x_2)$ esetén $x \in A$.

Ennek segítségével, a Bolzano-tétel így is megfogalmazható:

2.61. Tétel. *Ha I intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor R_f is intervallum.*

Sőt, a 2.52 Tétel segítségével ennél konkrétabban is megfogalmazhatjuk az előző tétel állítását.

2.62. Tétel. *Ha I zárt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $R_f = [\min_I f, \max_I f]$.*

A fenti tétel alkalmazásához a következő eseteket tekintjük.

2.63. Példák. (1) Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $D_f = [0, \infty)$, $f(x) = x^n$.
Ekkor a tétel szerint mivel f folytonos, R_f valamilyen intervallum. Továbbá $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ is érvényes, amiből f szigorú monotonitását használva kapjuk, hogy

$$R_f = [0, \infty) \quad \text{és} \quad D_{f^{-1}} = [0, \infty).$$

(2) Legyen $I = \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
Ekkor f folytonos, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, továbbá f szigorúan monoton nő. Ezért

$$R_f = (0, \infty), \; D_{f^{-1}} = D_{\ln} = (0, \infty).$$

A Bolzano-tétel 2.61 Tételben szereplő alakját akarjuk általánosítani, amihez az intervallum fogalmának valamilyen absztrakt alakját kell megadnunk. Erre szolgál a következő definíció.

2.64. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *ívszerűen összefüggő*, ha az A halmaz bármely két pontja összeköthető az A-ban haladó folytonos ívvel, vagyis minden $a, b \in A$ esetén létezik olyan $\varphi : [0, 1] \to X$ folytonos függvény, hogy

$$\varphi(0) = a, \varphi(1) = b \quad \text{és} \quad \{\varphi(t) : t \in [0, 1]\} \subset A.$$

A fentiekben a $[0, 1]$ intervallum helyett gyakran egy $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ intervallumot vesznek, ami magát a definíciót nem befolyásolja, hiszen ha $s : [\alpha, \beta] \to [0, 1]$ folytonos szigorúan monoton növő, akkor $\varphi \circ s : [\alpha, \beta] \to X$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$(\varphi \circ s)(\alpha) = a, \; (\varphi \circ s)(\beta) = b,$$

továbbá $R_{\varphi\circ s} = R_\varphi$.

2.65. Tétel. *Legyenek X, Y metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y$, f pedig folytonos! Ha D_f ívszerűen összefüggő, akkor R_f is.*

Bizonyítás. Legyenek $y_1, y_2 \in R_f$. Belátjuk, hogy y_1 és y_2 összeköthetők R_f-ben haladó folytonos ívvel. Tudjuk, hogy léteznek $x_1, x_2 \in D_f$ úgy, hogy

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2.$$

Mivel D_f ívszerűen összefüggő, ezért létezik $\varphi : [0,1] \to X$ folytonos függvény, úgy, hogy

$$\varphi(0) = x, \varphi(1) = x_2, \text{ és } R_\varphi \subset D_f.$$

Ekkor a $\psi : [0,1] \to Y, \psi := f \circ \varphi$ definícióval adott függvény folytonos (mert ilyenek kompozíciója), továbbá $R_\psi = R_{f\circ\varphi} \subset R_f$, végül nyilvánvalóan

$$\psi(1) = f(\varphi(1)) = f(x_1) = y_1, \psi(2) = f(\varphi(2)) = f(x_2) = y_2,$$

azaz Ψ megfelel a 2.64 Definíció feltételeinek, ami éppen a bizonyítandó állítás. □

2.66. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz *összefüggő* (topológiai értelemben), ha nem adható meg G_1 és G_2 diszjunkt nyílt halmaz úgy, hogy $G_1 \cup G_2 \supset A, A \cap G_1 \neq \varnothing, A \cap G_2 \neq \varnothing$.

2.67. Megjegyzés. Belátható, hogy ha A ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

Bizonyítás nélkül említjük meg az alábbi fontos tételt.

2.68. Tétel. *(Bolzano-tétel metrikus terekben)*
Legyenek X, Y metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y$ folytonos függvény! Ha D_f összefüggő, akkor R_f is az.

2.4. Függvénysorozatok és függvénysorok konvergenciája

Ebben a szakaszban a metrikát az egyszerűség kedvéért minden metrikus tér esetében ϱ-val jelöljük.

2.69. Definíció. Legyenek X, Y metrikus terek, $M \subset X$, és minden $j \in \mathbb{N}$-re $f_j : M \to Y$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f_j függvények *függvénysorozatot* alkotnak; jelölése $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

2.70. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f_j : M \to Y$ függvényekből álló sorozat *pontonként tart* egy $f : M \to Y$ függvényhez, ha minden $x \in M$ esetén $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Kérdés: Feltéve, hogy f_j folytonos minden j-re, igaz-e, a fenti definícióban, hogy f is folytonos? Ez sajnos, általában nem teljesül, ahogy arra a következő példa rámutat.

2.71. Példa. Legyen $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_j : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_j(x) = x^j.$$

Ekkor minden $j \in \mathbb{N}$ esetén $f_j \in C[0,1]$, ugyanakkor $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pontonként az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

hozzárendeléssel adott f függvényhez tart, amely az 1-ben nem folytonos.

2.72. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f_j : M \to Y$ függvényekből álló sorozat *egyenletesen tart* az $f : M \to Y$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $j_0 \in \mathbb{N}$, hogy $j > j_0$ esetén minden $x \in M$-ra $\varrho(f_j(x), f(x)) < \varepsilon$ teljesül.

2.73. Megjegyzés. Itt - a pontonkénti konvergenciával ellentétben - a j_0 küszöbindex csak ε-tól függ, x értékétől nem. Ezért a definícióban említett feltétel helyett gyakran $\sup\limits_{x\in M} \varrho\left(f_j(x), f(x)\right)$ szerepel.

2.74. Példa. A fenti példához hasonlóan legyen $j \in \mathbb{N}$ és $a \in (0,1)$ esetén

$$f_j : [0,a] \to \mathbb{R},\ f_j\left(x\right) = x^j.$$

Most $\left(f_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ egyenletesen tart a $[0,a]$ intervallumon értelmezett 0 függvényhez, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $0 \leq a^{j_0} < \varepsilon$-nek megfelelő j_0 választásával $j > j_0$ esetén

$$\left|f_j\left(x\right) - 0\right| = \left|f_j\left(x\right)\right| = \left|x^j\right| \leq a^j < \varepsilon.$$

2.75. Tétel. *Legyenek X és Y metrikus terek, $M \subset X$ tetszőleges, továbbá minden $j \in \mathbb{N}$ esetén $f_j : M \to Y$ folytonos. Ha az $\left(f_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen tart egy $f : M \to Y$ függvényhez, akkor f is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in M$. Belátjuk, hogy f folytonos x_0-ban.

Felhasználjuk, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $x \in M$ esetén fennáll a következő:

$$\varrho\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) \leq \varrho\left(f\left(x\right), f_j\left(x\right)\right) + \varrho\left(f_j\left(x\right), f_j\left(x_0\right)\right) + \varrho\left(f_j\left(x_0\right), f\left(x_0\right)\right). \tag{2.3}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\left(f_j\right)$ egyenletesen tart f-hez, létezik olyan $j_0 \in \mathbb{N}$, hogy $j > j_0$ esetén, azaz $j = j_0 + 1$ -re is

$$\varrho\left(f(x), f_j(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{és} \quad \varrho\left(f\left(x_0\right), f_j\left(x_0\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.4}$$

egyaránt teljesülnek. Továbbá tudjuk, hogy f_j folytonos x_0-ban, azaz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\varrho\left(x, x_0\right) < \delta$ esetén $\varrho\left(f_j(x), f_j\left(x_0\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$. Tehát ezt a δ értéket választva a (2.3) egyenlőtlenségbe a (2.4) becsléseket helyettesítve nyerjük, hogy

$$\varrho\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ami épp az f függvény x_0-beli folytonosságát jelenti. □

2.76. Megjegyzés. Az $f_j\left(t\right) := t^j, 0 \leq t \leq 1$ hozzárendeléssel adott függvények esetén az $\left(f_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat nem tart egyenletesen az f függvényhez; ezért fordulhat elő, hogy míg a függvénysorozat tagjai folytonosak, a limeszfüggvény nem az.

2.77. Definíció. Legyen X metrikus tér, $Y = \mathbb{R}, M \subset X, g_k : M \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ helyett lehetne $\mathbb{C}$ is). Ekkor tekintsük a következő függvénysorozatot: $f_j := \sum\limits_{k=1}^{j} g_k$. Az ilyen módon értelmezett $\left(f_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozatot a g_k tagokból álló *függvénysornak* nevezzük.

2.78. Definíció. Azt mondjuk, hogy a g_k tagokból álló *függvénysor pontonként konvergens* és összege az $f : M \to \mathbb{R}$ függvény, ha minden $x \in M$ esetén a $g_k\left(x\right)$ tagokból álló számsor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és a sor összege $f\left(x\right)$, azaz: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k\left(x\right) = f\left(x\right)$.

2.79. Definíció. Azt mondjuk, hogy a g_k tagokból álló *függvénysor egyenletesen konvergál* egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha $f_j = \sum\limits_{k=1}^{j} g_k$ esetén az $\left(f_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen tart f-hez.

2.80. Megjegyzés. Gyakran a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ jelölést használjuk, de ehhez mindig hozzá kell tenni, hogy a konvergencia milyen értelemben értendő.

2.81. Tétel. *Tegyük fel, hogy $g_k : M \to \mathbb{R}$ folytonos és a g_k tagokból álló sor egyenletesen konvergál egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor f is folytonos.*

Bizonyítás. Minden $j \in \mathbb{N}$ esetén az $f_j = \sum\limits_{k=1}^{j} g_k$ függvény folytonos, emellett $\lim (f_j)_{j\in\mathbb{N}} = f$ egyenletesen. Ekkor a 2.75 Tétel miatt valóban f is folytonos.

□

Hogyan látható egy függvénysor alakjából, hogy az egyenletesen konvergens? Egy erre vonatkozó, könnyen alkalmazható elégséges kritériumot ad a következő nevezetes tétel.

2.82. Tétel. *(Weierstrass-kritérium)*
Tegyük fel, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $g_k : M \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy

$$\sup_M |g_k| \le a_k, \text{ ahol } \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

Ekkor a (g_k) tagokból álló függvénysor egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in M$ tetszőleges. Először belátjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| < \infty$. Legyen $f_j(x) := \sum\limits_{k=1}^{j} g_k(x)$.

Megjegyezzük még, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $l \in \mathbb{N}$, hogy $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j - \sum\limits_{j=1}^{l} a_j < \varepsilon$.

Erre az l indexre teljesül az is, hogy $j > l$ esetén

$$|f_j(x) - f_l(x)| = \left| \sum_{k=l+1}^{j} g_k(x) \right| \le \sum_{k=l+1}^{j} |g_k(x)| \le \sum_{k=l+1}^{j} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \sum_{j=1}^{l} a_j < \varepsilon, \tag{2.5}$$

vagyis az $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ számsorozat Cauchy-tulajdonságú. Mivel $\mathbb{R}$ teljes tér, ezért az $f(x) := \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ hozzárendeléssel adott függvény értelmes. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy a $|g_k(x)|$ és a $g_k(x)$ tagokból álló függvénysor konvergens.

Most belátjuk, hogy a sor, illetve a vele ekvivalens $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f -hez. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a $j \to \infty$ határátmenetet véve a (2.5) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy az x értéktől függetlenül

$$|f(x) - f_l(x)| \le \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \forall x \in M,$$

ha $l > j_0$. Ez pontosan azt jelenti, hogy f_k egyenletesen tart f -hez. □

2.83. Példa. A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^2}$ sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, ugyanis teljesül, hogy $\left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$, ahol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty$.

2.4.1. Hatványsorok

2.84. Definíció. Egy $c_j x^j, x \in \mathbb{R}, c_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2...$ tagokból álló függvénysort *hatványsornak* nevezünk.

2.85. Megjegyzés. A hatványsor tagjai folytonos függvények.

Fontos kérdés, hogy egy hatványsor mely x értékekre konvergens, illetve egyenletesen konvergens. Ennek tisztázásához vezetjük be a következő fogalmat.

2.86. Definíció. Az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat *limesz szuperiorján* azt a legnagyobb valós számot (vagy végtelent) értjük, amelyhez az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valamilyen részsorozata konvergál. Ezt $\limsup a_k$-val jelöljük.
Hasonlóan, az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat *limesz inferiorján* azt a legkisebb valós számot (vagy végtelent) értjük, amelyhez az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valamilyen részsorozata konvergál. Ezt $\liminf a_k$-val jelöljük.

Az alábbiakban felsorolt állításokat nem bizonyítjuk.

2.87. Megjegyzések. (1) Mindig létezik limesz inferior és limesz szuperior.

(2) Ha $\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ létezik, akkor

$$\lim (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = \limsup a_k = \liminf a_k.$$

(3) $\limsup a_k = \lim\limits_{k\to\infty} [\sup \{a_k, a_{k+1}, ...\}]$.

2.88. Tétel. *Jelölje R a következő mennyiséget!*

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}}, & ha \ \limsup \sqrt[k]{|c_k|} \in (0, \infty) \\ 0, & ha \ \limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \infty \\ \infty, & ha \ \limsup \sqrt[k]{|c_k|} = 0. \end{cases}$$

Ekkor $|x| < R$ esetén a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hatványsor konvergens, $|x| > R$ esetén pedig divergens.

Bizonyítás. Az állítás első felénél erősebbet igazolunk a következő tételben.
A második rész bizonyítására térve legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|x| > R$. Ez persze csak akkor lehet, ha $R \neq \infty$.

Ha $R = 0$, akkor $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \infty$, azaz létezik az együtthatók egy $(c_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amelyre $\lim \sqrt[k_l]{|c_{k_l}|} = \infty$.
Ekkor viszont $\lim \sqrt[k_l]{|c_{k_l}|\, x^{k_l}} = \infty$, azaz erre az x értékre $\left(c_{k_l} x^{k_l}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ számsorozat tagjainak abszolútértéke nem tart nullához, ami azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_{k_l} x^{k_l}$ sor nem lehet konvergens.

Ha $R > 0$, akkor $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}$, azaz létezik az együtthatók egy $(c_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amelyre $\lim \sqrt[k_l]{|c_{k_l}|} = \frac{1}{R}$, vagyis a $|x| > R$ feltevés szerint egy l indextől kezdve

$$\sqrt[k_l]{|c_{k_l} x^{k_l}|} = \sqrt[k_l]{|c_{k_l}|}\, |x| > 1,$$

vagyis az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_{k_l} x^{k_l}$ sor nem lehet konvergens. □

2.89. Tétel. *Legyen* $0 < R_0 < R$*, ekkor a hatványsor egyenletesen konvergens az* R_0 *sugarú intervallumban.*

Bizonyítás. A Weierstrass-kritériumot használjuk. Legyen $g_j(x) = c_j x^j$, $j = 0, 1, \ldots$, ekkor

$$|g_j(x)| = \left|c_j x^j\right| = |c_j| \left|x^j\right| \leq |c_j| R_0^j.$$

A 2.82 Tétel szerint azt kellene belátni, hogy a $|c_j| R_0^j$ tagokból álló sor konvergens. Világos ekkor, hogy

$$\limsup \sqrt[j]{|c_j| R_0^j} = R_0 \limsup \sqrt[j]{|c_j|} = \frac{R_0}{R} < 1,$$

amiből a gyökkritérium alapján kapjuk, hogy $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| R_0^j$ konvergens. □

Következmény: A hatványsor összege folytonos a konvergenciaintervallum belsejében.

2.90. Példa. Könnyen kiszámítható, hogy az $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$, hatványsor konvergenciasugara végtelen, hiszen

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/n!}} = \limsup \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Ezért ez a hatványsor $\mathbb{R}$ minden korlátos részhalmazán egyenletesen konvergens.

2.91. Megjegyzés. Az előző bizonyításban mindenütt a sor tagjainak abszolútértékét becsültük. Emiatt a tétel komplex számokra is ugyanúgy érvényes; ott konvergenciakörről beszélünk.

3. FEJEZET

Lineáris leképezések

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az X vektortér $M \subset X$ részhalmazának elemei *lineárisan függetlenek*, ha bármely véges sok M-beli elemre $\sum_i \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$. Gyakran M-et nevezzük lineárisan függetlennek, nem pedig az elemeit. Azt mondjuk továbbá, hogy $M \subset X$ *altér* (vagyis X-nek altere), ha az X-beli műveletekkel maga is vektortér.

3.2. Állítás. *Egy vektortér lineárisan független elemeinek maximális száma egyértelmű.*

3.3. Definíció. Az X vektortér (algebrai) dimenziójának nevezzük az X-beli lineárisan független elemek maximális számát (véges vagy végtelen is lehet). Egy ilyen maximális lineárisan független rendszert *bázisnak* nevezünk.

3.4. Definíció. Legyenek X és Y vektorterek, $M \subset X$ pedig egy altér! Egy $A : M \to Y$ leképezést *lineárisnak* nevezünk, ha minden $x_1, x_2 \in M$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

- $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$,
- $A(\lambda x_1) = \lambda A x_1$.

3.5. Példa. Legyen $X = \mathbb{R}^n$, $Y := \mathbb{R}^m$, továbbá $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. Ezt a lineáris algebrában adott $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ és $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ bázis esetén azonosítják egy $\mathcal{A}$ mátrixszal úgy, hogy $\mathcal{A}_{j,k}$ (ami az $\mathcal{A}$ mátrix j-edik sorának k-adik elemét jelöli) az $A\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^m$ vektor $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ bázis szerinti felbontásában $\mathbf{y}_j$ együtthatója. Ekkor a $*$ mátrix-vektor szorzást úgy *definiáljuk*, hogy $\mathcal{A} * \mathbf{x} := A\mathbf{x}$. A fenti azonosítást $\mathcal{A} \sim A$-val jelöljük.

3.1. Lineráis leképezések általános tulajdonságai

Mivel a lineáris leképezések függvények, ezekkel végezhetünk függvényekre vonatkozó műveleteket. Ezeket definiáljuk az alábbiakban.

3.6. Definíció. Legyenek X, Y vektorterek, és jelölje $\mathrm{lin}(X, Y)$ az összes $X \to Y$ lineáris leképezések halmazát!

- $A \in \mathrm{lin}(X, Y), B \in \mathrm{lin}(X, Y)$ esetén $A + B$-t (mint két függvény összegét) így értelmezzük:
$$(A + B)x = Ax + Bx \ \text{ minden } x \in X\text{-re.}$$
- Az $A \in \mathrm{lin}(X, Y)$ lineáris leképezésnek a $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal való szorzatát így értelmezzük:
$$(\lambda A)x = \lambda(Ax) \ \text{ minden } x \in X\text{-re.}$$
- Az $A, B \in \mathrm{lin}(X, X)$ lineáris leképezések szorzatát (mint függvények kompozícióját) így értelmezzük:
$$(AB)(x) = A(B(x)) \ \text{ minden } x \in X\text{-re.}$$

  Vagyis ez egy kompozíciófüggvény: $AB \equiv A \circ B$.

A fentiek szerint $k \in \mathbb{N}$ esetén használjuk az $A^k = AA \dots A$ jelölést.

Könnyen igazolható a következő állítás:

3.7. Állítás. *A fentiekben definiált műveletek esetén* $(A+B) \in lin(X,Y)$, $\lambda A \in lin(X,Y)$ *és* $AB \in lin(X,X)$ *egyaránt teljesülnek.*

3.8. Tétel. $lin(X,Y)$ *vektorteret alkot az előbbi első két művelettel: az* A *és* B *között értelmezett összeadással és a* λ *számmal való szorzással.*

3.9. Definíció. Értelmezzük az alábbi speciális leképezéseket:

- $I : X \to X$, $Ix = x \quad \forall x \in X$
- $0 : X \to X$, $0x = 0 \in X \quad \forall x \in X$,

amelyekről egyszerűen látszik, hogy lineárisak.

3.10. Tétel. $lin(X,X)$*-ben érvényesek a következők:*

1. $(A+B)\,C = AC + BC$.
2. $C\,(A+B) = CA + CB$.
3. $\lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B$.
4. *A fenti* $0 \in lin(X,X)$ *leképezéssel* $0A = A0 = 0$ *teljesül minden* $A \in lin(X,X)$ *esetén, és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú leképezés.*
5. *A fenti* $I \in lin(X,X)$ *leképezéssel* $IA = AI = A$ *teljesül minden* $A \in lin(X,X)$*-ra, és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú leképezés.*

Mivel a bizonyítás egyszerű, ezt nem részletezzük.

Emlékeztetünk rá, hogy a lineáris algebrában úgy *definiálják* az $A, B \in \text{lin}(X,X)$ operátoroknak megfeleltetett $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ mátrixok szorzását, hogy $\mathcal{A} * \mathcal{B} \sim AB$ teljesüljön.

Tudjuk, hogy az inverz csak akkor értelmezhető, ha a függvény injektív. Erre szeretnénk pontosabb feltételt lineáris leképezések esetében.

3.11. Tétel. *Egy* $A \in lin(X,Y)$ *leképezésnek pontosan akkor van inverze, ha* $Ax = 0$ *esetén* $x = 0$ *is teljesül, vagyis ha* $\ker A = \{0\}$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\ker A = \{0\}$. Legyenek $x_1, x_2 \in X$ olyanok, hogy $Ax_1 = Ax_2$. Ekkor persze $A\,(x_1 - x_2) = 0$, vagyis a $\ker A = 0$ feltevés miatt $x_1 - x_2 = 0$, azaz $x_1 = x_2$ teljesül, tehát A injektív.

Most tegyük fel, hogy A injektív. Ekkor $A0 = 0$ miatt $Ax = 0$ esetén esetén valóban $x = 0$ teljesül, azaz tényleg $\ker A = \{0\}$.

□

A függvények inverzéhez hasonlóan a fenti inverzre is az A^{-1} jelölést használjuk.

Bizonyítás nélkül említjük a következő két állítást, amelyeket a továbbiakban minden külön hivatkozás nélkül használunk.

3.12. Állítás. *Ha* $A \in lin(X,X)$ *injektív, akkor* $A^{-1} \in lin(X,X)$ *is teljesül.*

3.13. Állítás. *Legyen* $A \in lin(X,X)$ *olyan, amelyhez létezik* $B \in lin(X,X)$*, úgy, hogy* $AB = BA = I$ *teljesül. Ekkor* A *injektív és* $A^{-1} = B$*, vagyis* B *egyértelmű.*

3.2. Folytonos lineáris leképezések

Lineáris leképezések (operátorok) vizsgálatakor lényeges kérdés, hogyazok mikor lesznek folytonosak. Először egy ehhez kapcsolódó, számolással egyszerű módon ellenőrizhető fogalmat vezetünk be, majd igazoljuk, hogy ez tényleg ekvivalens a folytonossággal.

3.14. Definíció. Legyenek X és Y normált terek és $A : X \rightarrowtail Y$ lineáris! Az A leképezést *korlátosnak* nevezzük, ha van olyan $c \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in D_A$ esetén

$$\|Ax\| \le c\,\|x\|$$

teljesül.

3.15. Megjegyzés. Itt gyakran $A : X \rightarrowtail Y$ típusú lineáris leképezésekről beszélünk, mert a folytonosságra nézve komoly megkötést jelentene, ha a $D_A = X$ feltevéssel élnénk.

3.16. Tétel. *Legyen $A : X \rightarrowtail Y$ lineáris. Ekkor a következő ekvivalenciák teljesülnek:*

$$A \ \textit{folytonos} \iff A \ \textit{folytonos a nulla helyen} \iff A \ \textit{korlátos}$$

Bizonyítás. Az első ekvivalencia: Ha A mindenhol folytonos, akkor nyilván a nullában is. Másrészt, ha a nullában folytonos, akkor tetszőleges x-re $x_n \to x$ esetén $x_n - x \to 0$, vagyis $Ax_n - Ax = A\,(x_n - x) \to 0$. Az átviteli elv alapján tehát valóban folytonos A az x helyen.

A második ekvivalencia: Ha A korlátos, akkor $x_n \to 0$ esetén $\|Ax_n\| \le c\,\|x_n\|$ miatt $Ax_n \to 0$ is fennáll, vagyis A folytonos a nulla helyen.
Tegyük fel fordítva, hogy A folytonos a nullában, de nem korlátos. Ekkor valamilyen $x_n \to 0$ sorozatra $\|Ax_n\| \ge n\|x_n\|$ volna, vagyis

$$\left\|A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| = \left\|\frac{Ax_n}{n\|x_n\|}\right\| \ge \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

lenne igaz, amellett, hogy $\left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{n} \to 0$, ami ellentmond az A lineáris operátor nullában vett folytonosságának.

□

3.17. Példa. Legyen $X := C\,[0,1]$, a szokásos összeadással és skalárral való szorzással, valamint az $\|f\| = \max_{[0,1]} |f|$ normával! Legyen

$$Af := f', \ D_A = \{f \in C[0,1] : f' \in C[0,1]\}\,.$$

Nyilvánvaló, hogy $A : X \rightarrowtail X$, és belátjuk, hogy nem folytonos.
Tekintsük ehhez az $f_j\,(t) = \frac{1}{j}e^{-jt}, j \in \mathbb{N}, t \in [0,1]$ függvényeket, amelyeknek normája $\|f_j\,(t)\| = \frac{1}{j}$. Következésképp $\lim_j \|f_j\| = 0$.
Továbbá

$$\|Af_j\| = \sup_{t\in[0,1]} |e^{-jt}| = 1.$$

Eszerint a fenti A operátor nem folytonos (hiszen egy nullához tartó sorozat esetén annak képei mind egy normájúak), de lineáris.

A fenti probléma véges dimenziós X esetén nem fordulhat elő, amint a következő állítás mutatja.

3.18. Állítás. *Ha $A \in lin\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor A folyonos.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ az a mátrix, melyre $\mathcal{A} * \mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Megbecsüljük $\|A\mathbf{x}\|$ értékét úgy, hogy felhasználjuk a valós $p_1, p_2, \ldots, p_n$ és $q_1, q_2, \ldots, q_n$ számokra érvényes

$$(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots p_n q_n)^2 \leq (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2)$$

egyenlőtlenséget. Ezzel tehát

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = \|\mathcal{A} * \mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{m} (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n)^2 \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 =$$
$$= \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2,$$

vagyis mindkét oldalból gyököt vonva kapjuk, hogy a $c = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}^2$ választással

$$\|A\mathbf{x}\| \leq c\,\|\mathbf{x}\|.$$

Így A korlátos, vagyis a 3.16 Tétel szerint folytonosnak is kell lennie. □

3.19. Definíció. Legyen X, Y normált tér, $A \in \operatorname{lin}(X, Y)$ és korlátos. Legyen az A operátor *normája* a következő:

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}.$$

Megjegyezzük, hogy ha A korlátos, akkor a jobb oldal valóban véges, hiszen $\|Ax\| \leq c\|x\| = c$-nek kell fennállnia valamilyen $c \in \mathbb{R}^+$ esetén, vagyis $\|A\| \leq c$ is teljesül.

3.20. Tétel. *Legyenek X és Y normált terek, és tekintsük a korlátos, $\operatorname{lin}(X, Y)$-beli operátorokat az összeadással és számmal való szorzással, valamint az előbb értelmezett normával. Ez normált teret alkot, amelyre az $\mathscr{B}(X, Y)$ jelölést használjuk.*

Bizonyítás. Belátjuk először, hogy a norma tulajdonságai teljesülnek. A fenti megjegyzésből látszik, hogy $\|A\| \geq 0$.

1. Nyilván $\|A\| \geq 0$ és $A = 0$ esetén $\|A\| = 0$. Fordítva: $\|A\| = 0$ esetén *tetszőleges* $0 \neq x \in X$ esetén az $\frac{x}{\|x\|}$ vektorra, amelynek normája *egy*, teljesül, hogy
$$0 = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\|.$$
Vagyis tetszőleges $x \in X$-re $Ax = 0$, tehát A valóban nulla.
2. Legyen most $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges! Ekkor
$$\|\lambda A\| = \sup\{\|(\lambda A)\,x\| : \|x\| = 1\} = \sup\{|\lambda| \cdot \|Ax\| : \|x\| = 1\} =$$
$$= |\lambda| \cdot \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} = \lambda \cdot \|A\|.$$
3. Végül a háromszög-egyenlőtlenséget igazoljuk.
$$\|A + B\| = \sup\{\|(A + B)\,x\| : \|x\| = 1\} =$$
$$= \sup\{\|Ax + Bx\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|Ax\| + \|Bx\| : \|x\| = 1\} \leq$$
$$\leq \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} + \sup\{\|Bx\| : \|x\| = 1\} = \|A\| + \|B\|.$$

□

3.21. Tétel. *Legyen $A \in \mathscr{B}(X, Y)$. Ekkor minden $x \in X$ esetén teljesül az $\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$ egyenlőtlenség, továbbá*

$$\|A\| = \min\{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in X\}.$$

Bizonyítás. Felhasználva, hogy $x \neq 0$ esetén $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$, az operátornorma definícióját átírhatjuk a következőképpen:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in X \right\},$$

azaz minden $x \neq 0$ vektor esetén $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, amiből $\|x\|$-szel való szorzással kapjuk az $\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$ egyenlőtlenséget, ami persze $x = 0$ esetén is teljesül.

Tudjuk tehát, hogy maga $\|A\|$ is olyan c érték, amelyre $\|Ax\| \leq c \|x\|$, vagyis teljesül, hogy

$$\|A\| \geq \inf \{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in X\}. \tag{3.1}$$

Másrészt, ha $\|Ax\| \leq c \|x\|$ teljesül minden $x \in X$ esetén, akkor $x \neq 0$ esetén $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c$ is igaz, sőt, emiatt

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c.$$

Ekkor a jobb oldalon szereplő c értékek infimumánál is kisebbegyenlő lesz $\|A\|$.
Ezt a (3.1) egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk tehát, hogy

$$\|A\| = \inf \{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c \|x\| \ \forall x \in X\},$$

és mivel maga $\|A\|$ is megfelel c-nek, ezért ez egyszersmind minimum is.

□

3.22. Tétel. *Ha X normált, Y pedig teljes normált tér, akkor az $\mathscr{B}(X, Y)$ normált tér is teljes.*

Bizonyítás. Legyen $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az $\mathscr{B}(X, Y)$ normált térben, vagyis minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $j, k \geq k_0$ esetén

$$\|A_j - A_k\| < \varepsilon.$$

Be kellene látni, hogy van olyan $A \in \mathscr{B}(X, Y)$, amelyre $\lim\limits_j \|A_j - A\| = 0$.

Legyen $x \in X$ tetszőleges rögzített elem! Tekintsük az $(A_l x)_{l \in \mathbb{N}}$ Y-beli sorozatot! Vegyük észre, hogy $j, k \geq k_0$ esetén

$$\|A_j x - A_k x\| = \|(A_j - A_k)\, x\| \leq \|A_j - A_k\| \, \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

azaz a fenti sorozat Cauchy-tulajdonságú.

Mivel az Y tér teljes, azért az $(A_l x)_{l \in \mathbb{N}}$ sorozatnak létezik limesze, amellyel legyen

$$Ax = \lim_{j \to \infty} A_j x.$$

Nyilván most

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{j \to \infty} A_j(x_1 + x_2) = \lim_{j \to \infty} A_j x_1 + \lim_{j \to \infty} A_j x_2 = Ax_1 + Ax_2,$$

és hasonlóan

$$A\lambda x = \lim_{j \to \infty} A_j \lambda x = \lambda \lim_{j \to \infty} A_j x = \lambda A x,$$

vagyis a fentiekben definiált A lineáris. Sőt, mivel $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért korlátos is (egy C felső korláttal), vagyis

$$\|Ax\| = \lim_{j \to 0} \|A_j x\| \leq C \|x\|,$$

tehát A maga is korlátos.

Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén a fenti k_0 indexet választva érvényes tehát, hogy a $j, l > k_0$ indexekre

$$\|A_j x - A_l x\| \leq \|A_j - A_l\| \|x\| = \varepsilon \|x\|,$$

azaz $\lim_{j \to \infty} A_j x = Ax$ miatt egyúttal

$$\|(A - A_l)x\| = \|Ax - A_l x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

is igaz, tehát a 3.21 Tétel miatt $\|A - A_l\| \leq \varepsilon$ teljesül. Ez viszont azt jelenti, hogy $\lim_{l \to \infty} A_l = A$ áll fenn, amivel a teljességet igazoltuk.

$\square$

4. FEJEZET

Deriválás és alkalmazásai

Emlékeztetünk rá, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható egy $x_0 \in D_f$ pontban, ha a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.1}$$

határérték létezik, és ezt nevezzük az f függvény x_0-beli deriváltjának (jelölése: $f'(x_0)$).

Vezessük be az

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \tag{4.2}$$

mennyiséget, azaz ekkor

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),$$

ahol a (4.1) és (4.2) formulák szerint $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ezt az egyenlőséget fogjuk általánosítani normált terekre.

4.1. Definíció. Legyenek X, Y normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $x_0 \in \operatorname{int}(D_f)$! Azt mondjuk, hogy f *differenciálható* az $x_0 \in D_f$ pontban, ha létezik $A \in \mathscr{B}(X, Y)$ úgy, hogy

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x),$$

ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x - x_0\|} = 0 \in Y$.

4.2. Megjegyzés. A definíció $X = Y = \mathbb{R}$ esetben visszaadja a klasszikus definíciót.

4.3. Tétel. *Ha f differenciálható x_0-ban, akkor A egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A, \widetilde{A} \in \mathscr{B}(X, Y)$ olyanok, hogy az alábbi egyenlőségek egyaránt teljesülnek:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x)$$
$$f(x) - f(x_0) = \widetilde{A}(x - x_0) + \widetilde{\eta}(x),$$

ahol

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to x_0} \frac{\widetilde{\eta}(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Belátjuk, hogy $A - \widetilde{A} = 0$. Legyen $z \in X$ tetszőleges, továbbá $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ekkor elég kis $|a|$ értéket választva $x = x_0 + a \cdot z$ benne van x_0 azon környezetében, ahol f értelmes, azaz

$$0 = \left(A - \widetilde{A}\right)(az) + (\eta - \widetilde{\eta})(x_0 + az)$$

teljesül. Ennek mindkét oldalát a-val osztva kapjuk, hogy

$$0 = \left(A - \widetilde{A}\right) z + (\eta - \widetilde{\eta})(x_0 + az)/a, \tag{4.3}$$

ahol

$$\left\|\frac{(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)}{a}\right\| = \frac{\|(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)\|}{|a|} = \frac{\|(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)\|}{\|x-x_0\|}\|z\| =$$

$$= \underbrace{\frac{\|(\eta-\tilde{\eta})\,x\|}{\|x-x_0\|}}_{\to 0,\text{ ha } x\to x_0} \cdot \|z\| \to 0.$$

Tehát a (4.3) formulában az $a \to 0$ határértéket véve kapjuk, hogy $\left(A-\widetilde{A}\right)z = 0$ teljesül tetszőleges $z \in X$ esetén, vagyis A és $\widetilde{A}$ azonosak.

□

4.4. Definíció. Ha f differenciálható az x_0-ban, akkor az $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ korlátos lineáris operátort *az f függvény x_0-beli deriváltjának* nevezzük, és $f'(x_0)$-lal jelöljük.

4.5. Megjegyzés. A fentiek szerint $f'(x_0) \in \mathscr{B}(X,Y)$, továbbá erre igaz, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \eta(x),$$

ahol $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|} = 0$.

4.6. Példák. (1) Legyen $\mathrm{sq}\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ az $\mathrm{sq}(A) = A^2$ hozzárendeléssel adott. Kiszámítjuk ennek a deriváltját az A helyen. A definíciót használjuk az $x = A+S$ és $x_0 = A$ szereposztással.
Ekkor az $x \to x_0$ feltétel az $S \to 0$ feltétellel ekvivalens. Nyilván

$$\mathrm{sq}(A+S) - \mathrm{sq}(A) = (A+S)^2 - A^2 = AS + SA + S^2,$$

ahol

$$\lim_{S\to 0}\frac{\|S^2\|}{\|S\|} \le \lim_{S\to 0}\frac{\|S\|\cdot\|S\|}{\|S\|} = \lim_{S\to 0}\|S\| = 0,$$

vagyis a definícióban szereplő η függvényként megfelelő az $\eta(S) = S^2$ hozzárendeléssel adott. Így a derivált az A helyen az $S \to AS + SA$ hozzárendeléssel adott, azaz $\mathrm{sq}'(A)[S] = AS + SA$.

(2) Legyen $b_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $b_A(x) = \langle Ax, x\rangle$ hozzárendeléssel adott, ahol $\langle\cdot,\cdot\rangle$ az $\mathbb{R}^n$-beli skaláris szorzás, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pedig egy adott mátrix. Kiszámítjuk ennek is a deriváltját. Az előző példához hasonló elven

$$b_A(x+s) - b_A(x) = \langle A(x+s), x+s\rangle - \langle Ax, x\rangle =$$
$$= \langle Ax, s\rangle + \langle As, x\rangle + \langle s, s\rangle = \langle s, Ax\rangle + \langle s, A^*x\rangle + \langle s, s\rangle,$$

ahol

$$\lim_{s\to 0}\frac{\|s^2\|}{\|s\|} \le \lim_{s\to 0}\frac{\|s\|\cdot\|s\|}{\|s\|} = \lim_{s\to 0}\|s\| = 0,$$

vagyis η függvényként megfelelő az $\eta(s) = (s,s)$ hozzárendeléssel adott. A derivált az x helyen pedig a következő hozzárendeléssel adott lineáris függvény lesz:

$$b'_A(x)[s] = \langle s, (A+A^*)\,x\rangle,$$

ami azonosítható az $(A+A^*)\,x$ vektorral.

4.7. Tétel. *Ha f differenciálható x_0-ban, akkor f folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Felhasználva az

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \eta(x)$$

egyenlőséget, belátjuk, hogy $\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$. Egyrészt

$$\|f'(x_0)(x - x_0)\| \le \|f'(x_0)\| \|x - x_0\| \to 0, \text{ ha } x \to x_0.$$

Másrészt

$$\|\eta(x)\| = \frac{\|\eta(x)\|}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\| \to 0, \text{ ha } x \to x_0.$$

Tehát

$$\lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = \lim_{x\to x_0} \|f'(x_0)(x - x_0) + \eta(x)\|$$
$$\leqslant \lim_{x\to x_0} \|f'(x)(x - x_0)\| + \lim_{x\to x_0} \|\eta(x)\| = 0.$$

□

4.0.1. A deriválás művelete, műveleti szabályok

4.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy f és g differenciálható x_0-ban Ekkor $f + g$ is differenciálható x_0-ban, és*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén λf is differenciálható x_0-ban és

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda(f'(x_0)).$$

Bizonyítás. Csak a tételben szereplő első állítást bizonyítjuk.
Mivel f differenciálható x_0-ban, ezért elég kis r_1 esetén f értelmezve van a $B_{r_1}(x_0)$ halmazon. Ekkor $x \in B_{r_1}(x_0)$ esetén

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \eta_1(x),$$

ahol $\lim_{x\to x_0} \frac{\eta_1(x)}{\|x - x_0\|} = 0$.
Hasonlóan: mivel g differenciálható x_0-ban, ezért elég kis r_2 esetén g értelmezve van a $B_{r_2}(x_0)$ halmazon. Ekkor $x \in B_{r_2}(x_0)$ esetén

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + \eta_2(x),$$

ahol $\lim_{x\to x_0} \frac{\eta_2(x)}{\|x - x_0\|} = 0$.
Ezekből következik, hogy az $r = \min\{r_1, r_2\}$ választással $x \in B_r(x_0)$ esetén

$$[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)] = f'(x_0)(x - x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \eta_1(x) + \eta_2(x) =$$
$$= [f'(x_0) + g'(x_0)](x - x_0) + [\eta_1(x) + \eta_2(x)]$$

teljesül. Továbbá mivel

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\eta_1(x)}{\|x - x_0\|} + \frac{\eta_2(x)}{\|x - x_0\|} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\eta_1(x) + \eta_2(x)}{\|x - x_0\|} = 0,$$

ami definíció szerint éppen a tétel állítását adja. □

4.9. Tétel. *(a kompozíció függvény deriválási szabálya) Tegyük fel, hogy X, Y, Z normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$ és $g : Y \rightarrowtail Z$. Tegyük fel, hogy f differenciálható $x_0 \in X$-ban és g differenciálható $f(x_0) \in Y$-ban. Ekkor a $g \circ f : X \rightarrowtail Z$ függvény is differenciálható x_0-ban és*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0) \in \mathscr{B}(X, Z).$$

Bizonyítás. Mivel f differenciálható x_0-ban, így f értelmezve van egy $B_{r_1}(x_0)$ környezetben. Legyen $x \in B_{r_1}(x_0)$, ekkor

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \eta_1(x), \tag{4.4}$$

ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta_1(x)}{\|x - x_0\|} = 0$. Mivel g differenciálható $y_0 = f(x_0)$-ban, ezért értelmezve van y_0 egy $B_{r_2}(y_0)$ környezetében. Legyen $y \in B_{r_2}(y_0)$; ekkor

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \eta_2(y) \tag{4.5}$$

teljesül, ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta_2(x)}{\|x - x_0\|} = 0$. Mivel f folytonos x_0-ban, ezért a $B_{r_2}(y_0) = B_{r_2}(f(x_0))$ környezethez van olyan $\tilde{r}_1$, hogy $x \in B_{\tilde{r_1}}(x_0)$ esetén $f(x) \in B_{r_2}(f(x_0))$.
Legyen

$$r_1^* := \min\{r_1, \tilde{r_1}\}.$$

Most $x \in B_{r_1^*}(x_0)$ esetén az $y = f(x)$ választással (4.5) a következő alakú:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] + \eta_2(f(x)).$$

Ebbe beírva az $x \in B_{r_{1*}}$ esetén is érvényes (4.4) formulát, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) &= g'(f(x_0))[f'(x_0)(x - x_0) + \eta_1(x)] + \eta_2(f(x)) = \\ =& g'(f(x_0))[f'(x_0)(x - x_0)] + \underbrace{[g'(f(x_0))\eta_1(x) + \eta_2(f(x))]}_{:=\eta(x)}.\end{aligned}$$

A tétel igazolásához azt kellene megmutatni, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x - x_0\|} = 0$.
Becsülve először $\eta(x)$ első tagját, nyerjük, hogy

$$\frac{\|g'(f(x_0))\eta_1(x)\|}{\|x - x_0\|} \leq \frac{\|g'(f(x_0))\|\,\|\eta_1(x)\|}{\|x - x_0\|} = \|g'(f(x_0))\| \frac{\|\eta_1(x)\|}{\|x - x_0\|} \to 0,$$

ha $x \to x_0$, mert ekkor az utolsó tényező limesze definíció szerint nulla. Tehát elegendő csak az $\frac{\eta_2(f(x))}{\|x - x_0\|} \to 0$ konvergenciát igazolni. Ehhez használjuk a következő jelölést:

$$\varepsilon(y) := \begin{cases} \frac{\|\eta_2(y)\|}{\|y - y_0\|}, & \text{ha } y \neq y_0, y \in B_{r_2}(y_0) \\ 0, & \text{ha } y = y_0. \end{cases}$$

Láthatjuk, hogy ekkor $\varepsilon : Y \rightarrowtail \mathbb{R}$, amit átrendezve adódik, hogy minden $y \in B_{r_2}(y_0)$ esetén

$$\|\eta_2(y)\| = \varepsilon(y)\,\|y - y_0\|,$$

vagyis

$$\frac{\|\eta_2(f(x))\|}{\|x - x_0\|} = \varepsilon(f(x)) \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

Tudjuk, hogy f folytonos x_0-ban és ε folytonos $y_0 = f(x_0)$-ban, tehát $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(f(x)) = \varepsilon(f(x_0)) = 0$, ezért a fenti szorzat limesze nulla, ha a második tényező korlátos.
Ez viszont teljesül, ugyanis az

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \eta_1(x)$$

egyenlőség miatt

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant \|f'(x_0)(x - x_0)\| + \|\eta_1(x)\| \leq \|f'(x_0)\| \cdot \|x - x_0\| + \|\eta_1(x)\|,$$

vagyis

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \|f'(x_0)\| + \frac{\eta_1(x)}{\|x - x_0\|},$$

ahol $\|f'(x_0)\|$ rögzített, és $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\eta_1(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$ □

Egy állítás erejéig visszatérünk a valós függvények esetéhez.

4.10. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és $f : I \to R$ szigorúan monoton, folytonos függvény. Ha f differenciálható $a \in D_f$-ban és $f'(a) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható $b = f(a)$-ban és*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Bizonyítás. Mivel f szigorúan monoton (növő), ezért f injektív, tehát létezik f^{-1}. Mivel $D_f = I$ intervallum, ezért a Bolzano-tétel szerint $R_f = J$ is intervallum, sőt, nyílt is, mivel f szigorúan monoton. Ekkor f^{-1} értelmezve van $b = f(a)$ egy környezetében, amelyből egy $f(x) = y \neq b$ pontot véve

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \tag{4.6}$$

teljesül, ahol $y \to b$ esetén $x \to a$, és a szigorú monotonitás miatt $x \neq a$. Vagyis (4.6)-ban határértéket véve

$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

4.11. Példák. (1) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} = I.$

f szigorúan monoton nő, mindenhol deriválható, $f'(x) = e^x$, $R_f = (0, \infty) = J$. Tehát $b > 0, b \in J$ esetén

$$\ln'(b) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{e^{\ln b}} = \frac{1}{b}.$$

(2) $f(x) = \sin x$, $I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

f szigorúan monoton növő, deriválható, $f'(x) = \cos x$. Ezért

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

továbbá az $f^{-1} = \arcsin$ jelölést szokás használni.

4.1. Differenciálhatóság $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvényekre

Legyen ebben a szakaszban $X := \mathbb{R}^n$, továbbá $Y := \mathbb{R}^m$, azaz $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ típusú.

Megvizsgáljuk, mit jelent az, hogy f differenciálható egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban.

Ha ez teljesül, akkor definíció szerint létezik olyan $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ függvény, hogy az $\mathbf{x}_0$ valamely környezetében

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \eta(\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\eta(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0 \tag{4.7}$$

teljesül.
Tudjuk továbbá, hogy A-nak egyértelműen megfeleltethető egy $\mathcal{A}$-val jelölt $\mathbb{R}^{m\times n}$-es mátrix, amelyre

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathcal{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \tag{4.8}$$

Az tehát a feladatunk, hogy meghatározzuk $\mathcal{A}$ elemeit (szokásos módon a j-edik sor k-adik elemét $\mathcal{A}_{j,k}$-val jelöljük).

Először legyen $m = 1$, ekkor a (4.7) és (4.8) formulákból azt kapjuk, hogy

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathcal{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \eta(\mathbf{x}). \tag{4.9}$$

Válasszuk úgy az $\mathbf{x}$ vektort, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ alakú legyen, ahol csakis a k-adik komponens nem nulla. Ekkor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \delta(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, és a fenti $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ feltétel azt jelenti, hogy $\delta \to 0$, amit a (4.9) formulába helyettesítve, majd δ-val osztva kapjuk, hogy

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + \delta(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)) - f(\mathbf{x}_0)}{\delta} = \mathcal{A}_{1,k} + \frac{\eta(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|},$$

ahol $\delta \to 0$ esetén a két oldal határértékét véve a bal oldalon definíció szerint a k-adik változó szerinti parciális derivált jelenik meg, a jobb oldalon η tulajdonságát használva pedig a második tag limesze nulla. Emiatt

$$\partial_k f(\mathbf{x}_0) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \delta(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)) - f(\mathbf{x}_0)}{\delta} = \mathcal{A}_{1,k} + \lim_{\delta\to 0} \frac{\eta(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathcal{A}_{1,k}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha a fenti $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $\mathbf{x}_0$ pontban, akkor $\mathbf{x}_0$-beli deriváltja a következő mátrixszal azonosítható:

$$\mathcal{A} = [\partial_1 f(\mathbf{x}_0)\ \partial_2 f(\mathbf{x}_0)\ \dots\ \partial_n f(\mathbf{x}_0)].$$

A fentiekben tehát $\partial_k f(\mathbf{x}_0)$ jelöli az f függvény $\mathbf{x}_0$ helyen vett k-adik változó szerinti parciális deriváltját.

Most az általános $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény deriváltjának felírásához használjuk f-nek azt az alakját, hogy $f(\mathbf{x})$ j-edik komponensét $f_j(\mathbf{x})$-szel jelöljük, azaz

$$f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x})\ f_2(\mathbf{x})\ \dots\ f_m(\mathbf{x})]^T.$$

Ekkor a derivált (4.7)-beli alakjában a jobb oldal j-edik komponense a következő:

$$f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x}_0) = \mathcal{A}_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \eta_j(\mathbf{x}), \tag{4.10}$$

ahol $\mathcal{A}_j$ az $\mathcal{A}$ mátrix j-edik sora. Vagyis a fenti levezetést az $\mathbf{x} \to f_j(\mathbf{x})$ hozzárendeléssel adott $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathcal{A}_j = [\partial_1 f_j(\mathbf{x}_0)\ \partial_2 f_j(\mathbf{x}_0)\ \dots\ \partial_n f_j(\mathbf{x}_0)].$$

Tehát az $f'(\mathbf{x}_0)$-lal azonosított mátrix ez esetben

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_1(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_1(\mathbf{x}_0) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_2(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_m(\mathbf{x}_0) & \cdots & \partial_n f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

A levezetés eredményeit foglaljuk össze az alábbi tételben.

4.12. Tétel. *Ha $f = (f_1, f_2 ... f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor minden k-ra f_k parciálisan differenciálható minden változójában, továbbá $f'(\mathbf{x}_0) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a fenti $\mathcal{A}$ mátrixszal adható meg.*

4.13. Megjegyzés. Ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ parciálisan differenciálható $\mathbf{x}_0$-ban minden változója szerint, abból nem következik, hogy f differenciálható is.

4.1.1. Lokális növekedés, fogyás, lokális szélsőérték

4.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}(D_f)$. Azt mondjuk, hogy

- f *lokálisan nő* a-ban, ha van olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a)$ esetén
$$x < a \Rightarrow f(x) \le f(a) \quad \text{és} \quad a < x \Rightarrow f(a) \le f(x),$$
- f *szigorúan lokálisan nő* a-ban, ha van olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a)$ esetén
$$x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \quad \text{és} \quad a < x \Rightarrow f(a) < f(x),$$
- f *lokálisan csökken* a-ban, ha $-f$ lokálisan nő a-ban,
- f *szigorúan lokálisan csökken* a-ban, ha $-f$ szigorúan lokálisan nő a-ban.

4.15. Tétel. *Legyen f differenciálható az $a \in \operatorname{int}(D_f)$ pontban.*
Ha f az a pontban lokálisan nő, akkor $f'(a) \ge 0$, és ha $f'(a) > 0$ teljesül, akkor f az a pontban szigorúan lokálisan nő.
Hasonlóan, ha f lokálisan fogy az a pontban, akkor $f'(a) \le 0$, ha pedig $f'(a) < 0$ teljesül, akkor f az a pontban szigorúan lokálisan fogy.

Bizonyítás. Csak a növekedésre vonatkozó állításokat igazoljuk, azokat $-f$-re alkalmazva az utolsó két állítás automatikusan adódik.

Tegyük fel először, hogy az f függvény az a pontban lokálisan nő. Mivel f differenciálható a-ban, azért

$$0 \le \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

ami bizonyítja az első állítást.
Tegyük fel, hogy $f'(a) > 0$. Ekkor tehát

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - a| < \delta$ esetén $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ teljesül. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy az f függvény a -ban szigorúan lokálisan nő.

□

4.16. Megjegyzés. Fontos, hogy az előző tételben milyen relációjelek szerepelnek, mert élsebb állítás egyik következtetés esetében sem igaz. Az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvény 0-ban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 0$.

4.17. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, a \in \operatorname{int}(D_f)$. Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban

- lokális minimuma van, ha a-nak van olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a)$ esetén $f(x) \geq f(a)$ teljesül,
- szigorú lokális minimuma van, ha a-nak van olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) > f(a)$ teljesül.

4.18. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $f'(a) \neq 0$ volna, akkor ott vagy szigorúan monoton növekedne ($f'(a) > 0$ esetén) vagy vagy szigorúan monoton csökkenne ($f'(a) < 0$ esetén), azaz nem lehetne szélsőértéke. □

4.19. Megjegyzés. A fenti következtetés megfordítása nem igaz, amelyre szintén példa az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvény az $a = 0$ pontban.

4.1.2. Monoton növekedés és fogyás – a Lagrange-középértéktétel

4.20. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény egy I intervallumon

- *monoton nő*, ha minden $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- *szigorúan monoton nő*, ha minden $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$,
- *monoton csökken*, ha $-f$ monoton nő,
- *szigorúan monoton csökken*, ha $-f$ szigorúan monoton nő.

4.21. Tétel. *(Rolle-tétel) Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és (a,b)-n differenciálható, továbbá $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a,b)$, amelyre $f'(\xi) = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Ha f konstans, akkor eleve igaz az állítás.

Ha nem konstans, akkor $\max\limits_{[a,b]} f \neq f(a)$ vagy $\min\limits_{[a,b]} f \neq f(a)$ teljesül. Ahol nincs egyenlőség, ott a megfelelő szélsőértéket (amely a Weierstrass-maximumelv miatt létezik) valamilyen $\xi \in (a,b)$ helyen veszi fel f, és ekkor a 4.18 Tétel miatt $f'(\xi) = 0$ teljesül.

□

4.22. Tétel. *(Lagrange-féle középértéktétel) Tegyük fel ismét, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és differenciálható (a,b)-n. Ekkor létezik $\xi \in (a,b)$, amelyre $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ teljesül.*

Bizonyítás. Visszavezetjük a Rolle-tételre. Értelmezzük a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Ekkor g folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n. Nyilvánvalóan

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = f(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = g(a),$$

azaz a g függvényre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, tehát van olyan $\xi \in (a,b)$, hogy $g'(\xi) = 0$, azaz

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

amit átrendezve kapjuk a tételben szereplő állítást. □

4.23. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum! $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos I-ben, továbbá differenciálható* int *I-ben. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

- *f monoton nő I-n.*

- $f'(x) \geq 0$ *teljesül minden* $x \in \operatorname{int} I$ *esetén.*

Bizonyítás. Ha f monoton nő, akkor minden $x \in \operatorname{int} I$ esetén $f'(x) \geq 0$ teljesül.

Tegyük fel fordítva, hogy $f'(x) \geq 0$ teljesül az $\operatorname{int} I$ halmazon! Ekkor $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén a Lagrange-középértéktétel alapján van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0.$$

Ezt $x_2 - x_1$-vel szorozva nyerjük a tétel állítását. □

4.24. Megjegyzés. Azt hihetnénk, hogy f szigorú monoton növekedése ekvivalens f' szigorú pozitivitásával, pedig ez nem igaz. Ugyanis az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott valós függvény szigorúan monoton nő, ugyanakkor $f'(0) = 0$.

4.25. Állítás. *Ha a fenti tétel feltételeivel* $f' = 0$ *az* I *intervallumon, akkor ott* f *konstans.*

Bizonyítás. Most $f' \geq 0$ az I intervallumon, azaz itt f monoton növő. Hasonlóan $-f' \geq 0$ az I intervallumon, azaz itt $-f$ is monoton növő, tehát f monoton csökkenő is. Mindent egybevetve valóban azt kaptuk, hogy f konstans.

□

4.26. Tétel. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallum!* $f : I \to \mathbb{R}$ *folytonos* I*-ben, továbbá differenciálható* $\operatorname{int} I$*-ben. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

- f *szigorúan monoton nő* I*-n.*
- $f'(x) \geq 0$ *teljesül minden* $x \in \operatorname{int} I$ *esetén, és* I*-nek nincs olyan* J *részintervalluma, ahol* $f' = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f szigorúan monoton nő az I-n. Ekkor monoton növő is, vagyis a 4.23 Tétel szerint $f'(x) \geq 0$ teljesül minden $x \in int(I)$ esetén.
Ha lenne olyan $(c, d) \subset I$ intervallum, hogy $f'|_{(c,d)} = 0$, akkor a 4.25 Állítás értelmében $f|_{(c,d)}$ konstans volna. Ez ellentmond annak, hogy f szigorúan monoton nő.

Ha $f' \geq 0$ az $\operatorname{int} I$ intervallumon, akkor a 4.23 Tétel értelmében f monoton növő I-n. Ha f nem szigorúan monoton növő lenne, akkor volna két $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ pont, ahol $f(x_1) = f(x_2)$. Ekkor viszont f monoton növő tulajdonsága miatt f konstans lenne az (x_1, x_2) intervallumon, azaz deriváltja itt nulla volna, ami ellentmond a feltevésnek. □

4.1.3. A Lagrange-középértéktétel egydimenziós általánosítása

4.27. Tétel. *(Cauchy-féle középérték tétel) Tegyük fel, hogy* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$*, folytonosak,* (a, b)*-n differenciálhatóak, továbbá* g' *sehol sem nulla* (a, b)*-n. Ekkor van olyan* $\xi \in (a, b)$*, amelyre teljesül, hogy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $g(x) = x$ esetén ez a Lagrange-középértéktétel állítása. Világos, hogy $g(b) - g(a) \neq 0$, ugyanis ha $g(b) = g(a)$ teljesülne, akkor a Rolle-tétel szerint volna olyan $\eta \in (a, b)$, amelyre $g'(\eta) = 0$.
Legyen tehát

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

Az így definiált $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, emellett $F(a) = f(a)$, továbbá

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(b) - g(a)] = f(a).$$

Tehát F-re a Rolle-tétel alkalmazható, azaz van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $F'(\xi) = 0$. Ekkor

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi),$$

amit átrendezve kapjuk a tétel állítását. □

4.28. Tétel. *Tétel (L' Hospital - szabály alapesete):*
Tegyük fel, hogy $f, g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ értelmezve vannak és differenciálhatók $a \in \mathbb{R}$ egy környezetében (esetleg a kivételével), továbbá $\lim\limits_a f = \lim\limits_b g = 0$. Ekkor $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \lim\limits_a \frac{f'}{g'}$, ha ez utóbbi létezik.

Bizonyítás. Terjesszük ki az f és g függvényeket a-ra nullával, ha eddig ott nem voltak értelmesek, azaz legyen mindenképp $f(a) = g(a) = 0$. Ezzel f, g folytonosak a egy U környezetében és deriválhatók is esetleg a kivételével, továbbá $\lim\limits_a \frac{f'}{g'}$ létezése miatt feltehető, hogy $g'|_{U \setminus a} \neq 0$. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középérték-tételt: az $x \in U$ és a által meghatározott intervallumra! Ebben akkor van olyan ξ pont, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

teljesül. Nyilván $x \to a$ esetén $\xi \to a$ is fennáll, azaz

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

ha ez utóbbi létezik. □

4.29. Megjegyzés. A tétel állítása általánosítható a következő esetekre.

(1) $a := \pm\infty$ és $\lim\limits_a f = 0, \lim\limits_a g = 0$.
Ekkor is igaz, hogy $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \lim\limits_a \frac{f'}{g'}$, ha ez utóbbi létezik.

(2) $\lim\limits_a f = \pm\infty$ és $\lim\limits_a g = \pm\infty$. Ekkor hasonló állítás mondható ki és igazolható figyelembe véve, hogy $\frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f}$.

4.2. A parciális deriváltak tulajdonságai

A fentiekben megmutattuk, hogy írható fel egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény deriváltja, ha az létezik. Az azonban, hogy egy f függvény parciális deriváltjai léteznek egy $\mathbf{x}$ pontban, nem feltétlenül elég ahhoz, hogy $f'(\mathbf{x})$ értelmes legyen.

4.30. Példa. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az alábbi hozzárendeléssel adott:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_1 x_2 = 0 \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$, azaz f-nek léteznek 0-ban a parciális deriváltjai, azonban még csak nem is folytonos 0-ban.

Tehát $f'(\mathbf{x})$ létezéséhez valamilyen extra feltételre van szükségünk.

4.31. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény összes elsőrendű parciális deriváltja létezik az $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ valamely környezetében, és ezek folytonosak $\mathbf{x}^*$-ban. Ekkor f differenciálható $\mathbf{x}^*$-ban.*

Bizonyítás. Nyilván $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ egy környezetében fekvő $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontra teljesül, hogy

(4.11)

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) = \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ f(x_1^*, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n) + \dots + f\left(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n\right) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) . \end{aligned}$$

Itt a Lagrange-középérték-tétel értelmében alkalmasan választott, x_i és x_i^* közt levő ξ_i esetén $(i = 1, 2, \dots, n)$ teljesül, hogy

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2, \dots, x_n) &= (x_1 - x_1^*)\partial_1 f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) \\ f(x_1^*, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n) &= (x_2 - x_2^*)\partial_2 f(x_1^*, \xi_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= (x_n - x_n^*)\partial_n f(x_1^*, x_2^*, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve a (4.11) formulába kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) = \\ &= (x_1 - x_1^*)\partial_1 f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) + (x_2 - x_2^*)\partial_2 f(x_1^*, \xi_2, \dots, x_n) + \\ &\dots + (x_n - x_n^*)\partial_n f(x_1^*, x_2^*, \dots, \xi_n) = \\ &= (x_1 - x_1^*)\partial_1 f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + (x_2 - x_2^*)\partial_2 f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \\ &\dots + (x_n - x_n^*)\partial_2 f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \\ &= (x_1 - x_1^*)(\partial_1 f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \partial_1 f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)) + \\ &+ (x_2 - x_2^*)(\partial_2 f(x_1^*, \xi_2, \dots, x_n) - \partial_2 f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)) + \dots \\ &+ (x_n - x_n^*)(\partial_n f(x_1^*, x_2^*, \dots, \xi_n - \partial_n f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)). \end{aligned} \tag{4.12}$$

A tételben szereplő állítás igazolásához már csak azt kellene látni, hogy (4.12) második sorában szereplő tagok mindegyike kisrendű abban az értelemben, ahogy a derivált definíciójában szereplő η függvény.

Elsőként azt jegyezzük meg, hogy minden lehetséges j indexre $|x_j - x_j^*| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$, mert a bal oldal a jobb oldalon szereplő vektor j-edik komponense. Másodszor pedig $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*$ esetén biztos, hogy $\xi_j \to x_j^*$ is teljesül, azaz a parciális deriváltakra vonatkozó folytonosság miatt

$$\begin{aligned} &\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*} \partial_1 f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \partial_1 f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ &\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*} \partial_2 f(x_1^*, \xi_2, \dots, x_n) - \partial_2 f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ &\quad\vdots \\ &\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*} \partial_n f(x_1^*, x_2^*, \dots, \xi_n - \partial_n f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0. \end{aligned}$$

Ekkor tehát

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^*}\frac{x_1-x_1^*}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|}\left(\partial_1 f(\xi_1,x_2,\dots,x_n)-\partial_1 f(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)\right)=0$$
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^*}\frac{x_2-x_2^*}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|}\left(\partial_2 f(x_1^*,\xi_2,\dots,x_n)-\partial_2 f(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)\right)=0$$
$$\vdots$$
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^*}\frac{x_n-x_n^*}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|}\left(\partial_n f(x_1^*,x_2^*,\dots,\xi_n)-\partial_n f(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)\right)=0,$$

vagyis (4.12) második sorában szereplő tagok mindegyike valóban kisrendű. □

4.32. Megjegyzés. A tétel feltétele elegendő, de nem szükséges f differenciálhatóságához.

4.33. Tétel. *Legyen* $f=(f_1,f_2,\dots,f_n):\mathbb{R}^n\rightarrowtail\mathbb{R}^m\,(m>1)$. *Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

- f *differenciálható* $\mathbf{x}_0$*-ban.*
- *Minden* $j\in\{1,2,\dots,n\}$ *esetén* $f_j:\mathbb{R}^n\rightarrowtail\mathbb{R}$ *differenciálható* x_0*-ban.*

Bizonyítás. Ha f deriválható $\mathbf{x}_0$-ban, akkor

$$f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)=\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\eta(\mathbf{x}),\quad \text{ahol}\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\frac{\eta(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}=0$$

teljesül az $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\dots,\eta_n)$ függvényre. Ez pontosan azt jelenti, hogy minden $j\in\{1,2,\dots,n\}$ esetén

$$f_j(\mathbf{x})-f_j(\mathbf{x}_0)=\mathcal{A}_j(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\eta_j(\mathbf{x}),$$

ahol

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Ez viszont épp azt jelenti, hogy tetszőleges f_j koordinátafüggvény deriválható $\mathbf{x}_0$ -ban. □

Következmény: Ha az előző tétel feltételeivel $\partial_k f_j$ létezik $\mathbf{x}_0$ egy környezetében és folytonos $\mathbf{x}_0$-ban minden $j,k\in\{1,2,\dots,n\}$ esetén, akkor f differenciálható $\mathbf{x}_0$-ban.

4.34. Definíció. Legyenek X, Y normált terek, $f:X\rightarrowtail Y$. Tekintsük az összes $x\in X$ pontot, melyben f differenciálható! Azt a függvényt, amely az ilyen $x\in X$ ponthoz az $f'(x)\in\mathscr{B}(X,Y)$ deriváltat rendeli, f (első) *derivált függvényének* nevezzük; jele f'. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az* $\Omega\subset X$ *halmazon*, ha $\Omega\subset D(f')$. Azt mondjuk, hogy f *folytonosan differenciálható az* $\Omega\subset X$ *halmazon*, ha f' folytonos Ω-n.

4.2.1. Magasabbrendű differenciálhatóság A valós analízisben szokásos jelöléshez hasonlóan a fenti jelöléseket használva egy f függvény f' deriváltfüggvényének deriváltfüggvényét f''-vel jelöljük, azaz

$$f''(x_0):=(f')'(x_0).$$

4.35. Megjegyzés. Gyakran beszélünk $\overline{\Omega}$-beli folytonos deriválhatóságról is. Ez akkor teljesül, ha f' folytonosan kiterjeszthető Ω-ról az $\overline{\Omega}$ halmazra.

4.36. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ típusú függvény. Ha valamely j-re a $\partial_j f$ függvény a k-adik változója szerint parciálisan differenciálható egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor értelemszerűen

$$\partial_k \partial_j f(\mathbf{x}) := [\partial_k (\partial_j f)]\, \mathbf{x}.$$

Hasonlóan értelmezhetők az f függvény magasabb rendű parciális deriváltjai is.

Vajon igaz-e a fenti esetben, hogy tetszőleges $1 \leq j, k \leq n$ esetén $\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$ teljesül? Általában nem, amint a következő példa mutatja.

4.37. Példa.

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ekkor $\partial_1 \partial_2 f(0,0) = 0$, de $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = 1$. Az eredmények nem triviálisak, kiszámításukat nem részletezzük, csak az elsőrendű parciális deriváltakat adjuk meg:

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2 + xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Olyan, könnyen ellenőrizhető feltételt adunk meg, amellyel a parciális deriváltak felcserélhetősége mégis teljesül.

4.38. Tétel. *(Young-tétel $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}$-be képező függvényekre)* *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, melyre $(x_0, y_0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ pont környezetében létezik $\partial_1 \partial_2 f$ és $\partial_2 \partial_1 f$, és folytonosak is a (x_0, y_0)-ban. Ekkor $\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$.*

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi hozzárendeléssel adott $F, G : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényeket:

$$F(x) := f(x,y) - f(x,y_0) \qquad G(y) := f(x,y) - f(x_0,y).$$

Ezek az x_0, illetve y_0 egy-egy olyan környezetében értelmesek, amelyeknek Descartes-szorzata D_f-beli.

Összevetve az F és G függvényeket kapjuk, hogy

$$F(x) - F(x_0) = f(x,y) - f(x,y_0) - f(x_0,y) + f(x_0,y_0) = G(y) - G(y_0), \tag{4.13}$$

Alkalmazzuk először a Lagrange-középértéktételt az F és G függvényekre! Eszerint van olyan $\xi \in (x, x_0)$, hogy

$$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0) = [\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, y_0)](x - x_0).$$

Hasonlóan, van olyan $\eta \in (y, y_0)$, amelyre

$$G(y) - G(y_0) = G'(\eta)(y - y_0) = [\partial_2 f(x, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta)](y - y_0),$$

ezért a (4.13) egyenlőség miatt

$$[\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, y_0)](x - x_0) = [\partial_2 f(x, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta)](y - y_0).$$

Ismét alkalmazva a Lagrange-féle középértéktételt az $y \mapsto \partial_1 f(\xi, y)$, illetve az $x \mapsto \partial_2 f(x, \eta)$ hozzárendeléssel adott függvényekre, kapjuk, hogy van olyan $\widetilde{\xi} \in (x, x_0)$, illetve $\widetilde{\eta} \in (y, y_0)$, amelyekre

$$\partial_2 (\partial_1 f)(\xi, \widetilde{\eta})(y - y_0)(x - x_0) = \partial_1 (\partial_2 f)\left(\widetilde{\xi}, \eta\right)(x - x_0)(y - y_0),$$

amiből $\partial_2(\partial_1 f)(\xi,\widetilde{\eta}) = \partial_1(\partial_2 f)\left(\widetilde{\xi},\eta\right)$. adódik.

Tudjuk, hogy $\partial_1\partial_2 f$ és $\partial_2\partial_1 f$ folytonosak (x_0,y_0)-ban, továbbá $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ esetén $\xi_n,\widetilde{\xi_n}\to x_0$ és $\eta_n,\widetilde{\eta_n}\to y_0$ is teljesül a fentiekben választott $\xi_n,\widetilde{\xi_n},\eta_n,\widetilde{\eta_n}$ értékekre. Ezért

$$\partial_2\partial_1 f(x_0,y_0) = \lim_{(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)} \partial_2\partial_1 f(\xi_n,\widetilde{\eta_n}) = \lim_{(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)} \partial_1\partial_2\left(\widetilde{\xi_n},\eta_n\right) = \partial_1\partial_2 f(x_0,y_0),$$

ahogy a tételben állítottuk. □

Következmény: Ha $f:\mathbb{R}^n\rightarrowtail\mathbb{R}$ olyan, hogy az összes második parciális deriváltja létezik x_0 egy környezetében és folytonos x_0-ban, akkor $\partial_j\partial_k f(x_0) = \partial_k\partial_j f(x_0)$.

4.3. Bilineáris operátorok

Láttuk, hogy ha egy $f : X \rightarrowtail Y$ függvény második deriváltja x_0-ban létezik, akkor $f''(x_0)\in\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,Y))$. Ez utóbbi teret azonban nehéz elképzelni, ezért elemeit összefüggésbe fogjuk hozni az $X\times X$-ből Y-ba képező valamilyen operátorokkal.

4.39. Definíció. Legyenek X, Y vektorterek, ekkor jelölje $(X\times Y,\|\cdot\|_{X\times Y})$ azt a normált teret, amelynek alaphalmaza a $\{(x,y)|x\in X, y\in Y\}$ Descartes-szorzat, a rajta értelmezett műveletek a következők:

- összeadás: $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,
- $\lambda\in\mathbb{R}$ számmal való szorzás: $\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$,

továbbá a norma következő:

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \sqrt{\|x\|_X^2+\|y\|_Y^2}$$

4.40. Állítás. *A fenti definíció értelmes, azaz $X\times Y$ a fenti műveletekkel vektortér, továbbá ezen $\|\cdot\|_{X\times Y}$ valóban norma.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ számokra és $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ vektorokra teljesül, hogy

$$\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\mu x_2,\mu y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2),$$

ahol az első komponens X-beli, a második Y-beli, azaz $\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)\in X\times Y$. Ezzel beláttuk, hogy $X\times Y$ a fenti műveletekkel valóban vektortér.

Világos, hogy $\|(x,y)\|_{X\times Y} := \sqrt{\|x\|_X^2+\|y\|_Y^2}\geq 0$, sőt pontosan akkor lehet nulla ez, ha a gyökjel alatt szereplő négyzetösszeg mindkét tagja nulla, vagyis ha $x=y=0$, tehát a $(0,0)\in X\times Y$ elem esetén. Azt is egyszerűen kapjuk, hogy tetszőleges $\lambda\in\mathbb{R}$ számra és $(x,y)\in X\times Y$ vektorra

$$\begin{aligned}\|\lambda(x,y)\|_{X\times Y} &= \|(\lambda x,\lambda y)\|_{X\times Y} = \sqrt{\lambda^2\|x\|_X^2+\lambda^2\|y\|_Y^2} = \\ &= |\lambda|\sqrt{\|x\|_X^2+\|y\|_Y^2} = |\lambda|\|(x,y)\|_{X\times Y}.\end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenséget nem igazoljuk. □

4.41. Megjegyzés. Más normát is lehetne definiálni az alaphalmazok Descartes-szorzatán, például az $\|(x,y)\| := \|x\|_X+\|y\|_Y$ egyenlőséggel szintén normát kapnánk.

A továbbiakban gyakran elhagyjuk a normált terek említésekor a megfelelő normák jelölését.

4.42. Definíció. Legyenek X, Y, Z normált terek, tekintsük az $X \times Y$ vektorteret! Egy $\widetilde{A} : X \times Y \rightarrowtail Z$ operátort *bilineárisnak* nevezünk, ha minden rögzített $x \in X$ esetén az $y \mapsto \widetilde{A}\,(x, y)$ hozzárendeléssel adott $Y \rightarrowtail Z$ operátor lineáris, továbbá minden rögzített $y \in Y$ esetén az $x \mapsto \widetilde{A}\,(x, y)$ hozzárendeléssel adott $X \rightarrowtail Z$ operátor is lineáris.

4.43. Megjegyzés. Könnyen igazolható, hogy az $X \times Y$-ről Z-be képező bilineáris operátorok vektorteret alkotnak a következő műveletekkel:

- $(\tilde{A} + \tilde{B})(x, y) = \tilde{A}(x, y) + \tilde{B}(x, y)$,
- $(\lambda\tilde{A})(x, y) = \lambda \cdot \tilde{A}(x, y)$.

4.44. Példák. (1) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adott mátrix. Ekkor az $(x, y) \to (Ax \,|\, y) >$ hozzárendeléssel adott $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú operátor bilineáris. Itt $(\cdot \,|\, \cdot)$ az $\mathbb{R}^n$-beli skalárszorzatot jelöli.

(2) Az $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \to \operatorname{Det}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ hozzárendeléssel adott $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ operátor szintén bilineáris.

(3) Hogy néznek ki az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú bilineáris operátorok?
Ha A ilyen, akkor a bilineáris tulajdonság miatt

$$A(x, y) = x \cdot A(1, y) = xy \cdot A(1, 1),$$

vagyis egy $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú bilineáris operátornak úgy kell kinéznie, hogy az (x, y) párhoz a komponensek szorzatának konstansszorosát rendeli hozzá.

Bilineáris operátorok folytonosságát jellemezzük a következőkben.

4.45. Tétel. *Az $\widetilde{A} : X \times Y \rightarrowtail Z$ bilineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha korlátos, azaz ha van olyan $c \geq 0$ konstans, amellyel minden $(x, y) \in X \times Y \cap D(\widetilde{A})$ esetén*

$$\left\|\widetilde{A}\,(x, y)\right\| \leq c \left\|x\right\| \cdot \left\|y\right\|.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\widetilde{A}$ korlátos. Belátjuk, hogy $\widetilde{A}$ folytonos tetszőleges $(x, y) \in X \times Y$ helyen. Ha $(x_n, y_n) \to (x, y)$, akkor a norma definíciójából látszik, hogy mind $\|x - x_n\| \to 0$, mind $\|y - y_n\| \to 0$ teljesül. Fennáll továbbá, hogy

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{A}\,(x, y) - \tilde{A}\,(x_n, y_n)\right\| &= \left\|\left[\tilde{A}\,(x, y) - \tilde{A}\,(x_n, y)\right] + \left[\tilde{A}\,(x_n, y) - \tilde{A}\,(x_n, y_n)\right]\right\| \leq \\ &\leq \left\|\tilde{A}\,(x - x_n, y)\right\| + \left\|\tilde{A}\,(x_n, y - y_n)\right\| \leqslant c \left\|x - x_n\right\| \cdot \left\|y\right\| + c \left\|x_n\right\| \cdot \left\|y - y_n\right\|. \end{aligned}$$

Itt viszont a jobb oldal tart a nullához, azaz a sorozatfolytonosság elvét használva beláttuk, hogy $\tilde{A}$ folytonos.

Most tegyük fel indirekt módon, hogy $\tilde{A}$ nem korlátos! Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $(x_n, y_n) \in X \times Y$ pár, hogy

$$\left\|\widetilde{A}\,(x_n, y_n)\right\| > n^2 \left\|x_n\right\| \cdot \left\|y_n\right\|. \tag{4.14}$$

Legyen $\widetilde{x_n} := \frac{x_n}{n\cdot\|x_n\|}$ és $\widetilde{y_n} := \frac{y_n}{n\cdot\|y_n\|}$. Ekkor $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) \to (0, 0)$, ugyanakkor (4.14) miatt

$$\left\|\widetilde{A}\,(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})\right\| > \frac{1}{n^2 \left\|x_n\right\| \cdot \left\|y_n\right\|} n^2 \left\|x_n\right\| \cdot \left\|y_n\right\| = 1.$$

Vagyis $\widetilde{A}$ nem lehet folytonos, amivel indirekt módon beláttuk az állítást. □

4.46. Definíció. Legyenek X, Y, Z normált terek, $B : X \times Y \to Z$ korlátos, folytonos bilineáris operátor. Ekkor $\widetilde{A}$ normáját így értelmezzük:

$$\|B\| := \sup \{\|B(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\}.$$

A következő állításokban lényeges, hogy mindenütt olyan operátorokat vizsgálunk, amelyek értelmezési tartománya $X \times Y$.

4.47. Állítás. *A fenti definíció értelmes, azaz normát definiál a folytonos $X \times Y \to Z$ bilineáris operátorok halmazán, amelyre teljesül, hogy*

$$\|B\| = \min \{c : \|B(x,y)\| \leq c \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall (x,y) \in X \times Y\}.$$

Bizonyítás. Csak a bizonyítás első felét részletezzük, az egyenlőség ugyanolyan elven igazolható, mint a korlátos lineáris operátorok esetében.

Nemnegatív mennyiségek szuprémuma is mindenképpen nemnegatív, továbbá pontosan akkor nulla, ha $\|B(x,y)\| = 0$ teljesül minden (nem csak egy normájú) $x \in X$ és $y \in Y$ esetén, azaz ha $B = 0$.

Nyilván teljesül még, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \|\lambda B\| &= \sup \{\|\lambda B(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\} = \\ &= \sup \{|\lambda| \, \|B(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\} = |\lambda| \, \|B\|. \end{aligned}$$

Végül kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\|B_1 + B_2\| = \sup \{\|B_1 + B_2(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\}. \\ &\leq \sup \{\|B_1(x,y)\| + \|B_2(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\} \leq \\ &\leq \sup \{\|B_1(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\} + \sup \{\|B_2(x,y)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\} \\ &= \|B_1\| + \|B_1\|, \end{aligned}$$

vagyis a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. □

4.48. Tétel. *Tekintsük az $X \times Y \to Z$ korlátos bilineáris operátorokat az előbb bevezetett összeadással és skalárral való szorzással, és vegyük hozzá a fenti normát. Ekkor egy normált teret kapunk.*

Az állítást nem bizonyítjuk, az egyszerűen adódik a definíciókból.

4.49. Tétel. *Legyenek X, Y, Z normált terek, $A \in \mathscr{B}(X, \mathscr{B}(Y,Z))$. Értelmezzük az $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ operátort a következő módon: $\tilde{A}(x,y) := (Ax)\, y$. Ekkor $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ korlátos bilineáris operátor.*

Bizonyítás. A fentiek szerint $Ax \in \mathscr{B}(Y,Z)$, azaz $(Ax)\, y \in Z$, vagyis $\tilde{A}$ valóban $X \times Y \to Z$ típusú.

Belátjuk először, hogy $\tilde{A}$ bilineáris operátor. Az $\tilde{A}$ operátor definíciója és A linearitása miatt teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= [A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)]\, y = (\lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2)\, y = \\ &= \lambda_1 [(Ax_1)\, y] + \lambda_2 [(Ax_2)\, y] = \lambda_1 \tilde{A}(x_1, y) + \lambda_2 \tilde{A}(x_2, y), \end{aligned}$$

valamint hasonlóan

$$\tilde{A}(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = (Ax)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 (Ax)\, y_1 + \lambda_2 (Ax)\, y_2 = \lambda_1 \tilde{A}(x, y_1) + \lambda_2 \tilde{A}(x, y_2),$$

vagyis $\tilde{A}$ valóban bilineáris.

Belátjuk végül, hogy $\tilde{A}$ korlátos. Most A és Ax korlátossága miatt teljesül, hogy

$$\left\|\tilde{A}(x,y)\right\| = \|(Ax)\,y\| \leqslant \|Ax\| \cdot \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

következésképp $\tilde{A}$ maga is korlátos, továbbá $\left\|\tilde{A}\right\| \leq \|A\|$.

$\square$

Ezt az eredményt is felhasználva az $\mathscr{B}(X, \mathscr{B}(Y,Z))$-beli operátorok karakterizációját mondja ki a következő tétel.

4.50. Tétel. *Legyenek X, Y, Z normált terek, $A \in \mathscr{B}(X, \mathscr{B}(Y,Z))$. Ekkor az $\widetilde{A}(x,y) := (Ax)\,y, x \in X, y \in Y$ hozzárendeléssel értelmezett $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ operátor bilineáris.*

Fordítva: minden $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ korlátos bilineáris operátor a fenti alakú, azaz létezik pontosan egy $A \in \mathscr{B}(X, \mathscr{B}(Y,Z))$ operátor, amelyre $\widetilde{A}(x,y) = (Ax)\,y$.

Bizonyítás. Az első állítást az előző tételben beláttuk.
Tegyük most fel, hogy $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ korlátos bilineáris operátor. Tekintsük tetszőleges, rögzített $x \in X$ esetén az $A_x : Y \to Z, A_x(y) = \tilde{A}(x,y)$ operátort. Ez nyilván lineáris, másrészt korlátos, mert $\widetilde{A}$ korlátossága miatt

$$\|A_x(y)\| = \left\|\tilde{A}(x,y)\right\| = \left\|\tilde{A}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \cdot \|x\| \cdot \|y\|\right\| \leq \left\|\tilde{A}\right\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \left(\left\|\tilde{A}\right\| \cdot \|x\|\right) \cdot \|y\|,$$

amiből következik, hogy

$$A_x \in \mathscr{B}(Y,Z) \quad \text{és} \quad \|A_x\| \leq \left\|\tilde{A}\right\| \cdot \|x\|.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az $x \to A_x \in \mathscr{B}(Y,Z)$ hozzárendeléssel adott (nyilván lineáris) operátor egyúttal korlátos is, sőt az

$$\|A\| \leq \left\|\widetilde{A}\right\|$$

becslés is teljesül. $\square$

4.51. Megjegyzés. Az előző két tételből kapjuk, hogy $\|A\| = \left\|\widetilde{A}\right\|$, vagyis a $\widetilde{A}(x,y) = (Ax)\,y$ képlet lineáris normatartó leképezést definiál a folytonos $X \times Y \to Z$ bilineáris operátorok és $\mathscr{B}(X, \mathscr{B}(Y,Z))$ között.

4.3.1. Multilineáris leképezések - magasabbrendű deriváltak értelmezése

4.52. Definíció. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ vektorterek. Egy $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Z$ leképezést *multilineárisnak* nevezünk, ha minden koordinátájában lineáris (a többi koordinátát rögzítve).

4.53. Definíció. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ most normált terek. Ekkor az
$\widetilde{A} : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Z$ multilineáris leképezést *korlátosnak* nevezünk, ha van olyan $c \in \mathbb{R}^+$ szám, amellyel

$$\left\|\widetilde{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \cdots \cdot \|x_n\|$$

teljesül minden $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ esetén.

4.54. Példa. Ha $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \mathbb{R}^n$, akkor az

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \det\,[x_1\ x_2\ \ldots\ x_2]$$

hozzárendeléssel megadott leképezés multilineáris (vagy n-lineáris), ahol a jobb oldalon a megadott oszlopvektorokból összeállított mátrix determinánsa szerepel.

Bizonyítás nélkül említjük meg a következő fontos eredményeket.

4.55. Tétel. *Egy fenti típusú $\widetilde{A}$ multilineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha korlátos.*

4.56. Tétel. *Egy fenti típusú $\widetilde{A}$ multilineáris folytonos operátor általános alakja*

$$\widetilde{A}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=(((Ax_1)x_2)x_3,\ldots,x_n),A\in\mathscr{B}(X_1,\mathscr{B}(X_2,\ldots,\mathscr{B}(X_n,Z)))\,.$$

A második derivált értelmezéséhez legyenek X, Y normált terek, $f:X\rightarrowtail Y$. Ha f differenciálható $x_0\in X$-ban, akkor $f'(x_0)\in\mathscr{B}(X,Y)$, ezért $f''(x_0)=(f')'(x_0)\in\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,Y))$.
Az $f''(x_0)\in\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,Y))$-beli operátornak a fentiek szerint egyértelmű módon megfelel egy $\tilde{A}:X\times X\to Y$ folytonos bilineáris operátor:

$$\tilde{A}(x_1,x_2):=((f''(a))x_1)x_2, \tag{4.15}$$

ahol $(x_1,x_2)\in X\times X$.

4.57. Példák. (1) Legyen $X:=\mathbb{R}^n, Y:=\mathbb{R}$. Ha $f'(a)$ létezik, akkor az

$$f'(a)\leftrightarrow(\partial_1 f(a),\partial_2 f(a),\ldots,\partial_n f(a))\in\mathbb{R}^n$$

azonosítást alkalmazzuk, amely megfelel egy

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\leftrightarrow\mathbb{R}^n$$

azonosításnak.
Ezek szerint $f':\mathbb{R}^n\to\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ úgy is felfogható, hogy $f':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.
Ekkor $f''(a)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ (amellett, hogy tekinthető $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ bilineáris operátornak) tekinthető $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ -beli operátornak is, amelynek egy $n\times n$ -es mátrix felel meg, mégpedig:

$$f''(a)\longleftrightarrow\begin{pmatrix}\partial_1^2 f(a) & \partial_2\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_1 f(a)\\ \partial_1\partial_2 f(a) & \partial_2^2 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_2 f(a)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1\partial_n f(a) & \partial_2\partial_n f(a) & \cdots & \partial_n^2 f(a)\end{pmatrix}=\mathcal{A}.$$

Ezzel (a 4.15) formulának megfelelően fennáll a következő összefüggés:

$$[f''(a)](x_1,x_2)=\langle\mathcal{A}x_1,x_2\rangle=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\partial_j\partial_k f(a)\,x_{1k}\right]x_{2j}.$$

(2) Most $f:\mathbb{R}\to Y$, ahol Y tetszőleges normált tér. Ekkor $f'(a)\in\mathscr{B}(\mathbb{R},Y)$, azaz

$$f'(a)(s)=s\cdot f'(a)(1),$$

vagyis az $f'(a)$ operátornak megfeleltetjük az $f'(a)(1)\in Y$ elemet.
Ezzel $f':\mathbb{R}\to\mathscr{B}(\mathbb{R},Y)$ helyett $f':\mathbb{R}\to Y$ típusúnak vehető, vagyis f'' szintén $\mathbb{R}\to Y$ típusú, tehát $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ esetén

$$[f''(a)](x_1,x_2)=[f''(a)x_1]x_2=f''(1)\cdot x_1x_2,$$

ami szintén megfelel (a 4.15) formulának.

4.3.2. A Lagrange-féle középértéktétel többváltozós függvényekre Először azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor X tetszőleges normált tér, továbbá $Y := \mathbb{R}$.

4.58. Tétel. *Legyen $a, b \in X$, és vezessük be az*

$$s(a,b) := \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$$

jelölést, amely végesdimenziós esetben a két pontot összekötő szakasz.

Tegyük fel, hogy $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos az $s(a,b)$ halmazon és differenciálható az $s(a,b) \setminus \{a,b\}$ halmazon. Ekkor van olyan $\xi \in s(a,b) \setminus \{a,b\}$ elem, amelyre

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a bizonyítandó egyenlőség értelmes abban az értelemben, hogy annak mind jobb, mind bal oldala $\mathbb{R}$-beli.

Az állítást visszavezetjük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények esetére. Ehhez definiáljuk a következő függvényt:

$$\varphi : [0,1] \to X, \quad \varphi(t) := a + t(b-a), t \in [0,1].$$

Ekkor $\varphi \in C[0,1]$ és φ differenciálható is $(0,1)$-ben, mert

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = (t_2 - t_1)(b-a),$$

azaz a derivált a $b-a$-val való szorzás, amit az előző példa alapján $b-a$-val azonosítunk.

Most a $g = f \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény konstrukciója miatt folytonos $[0,1]$-en, továbbá deriválható $(0,1)$-en. Teljesül továbbá, hogy $g(0) = f\varphi(0) = f(a)$, valamint $g(1) = f\varphi(1) = f(b)$. A Lagrange-középértéktételt is használva kapjuk, hogy van olyan $\tau \in (0,1)$, amelyre

$$f(b) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(\tau)(1-0) = f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) = f'(\varphi(\tau))(b-a),$$

vagyis $\xi = \varphi(\tau)$ választással teljesül a tétel állítása.

$\square$

Vajon lehet ezt tovább általánosítani arra az esetre, amikor $Y \neq \mathbb{R}$?

4.59. Példa. Belátjuk, hogy $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}^2$ esetén a fenti állítás nem igaz. Legyen ugyanis

$$f = (f_1, f_2) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ (f_1, f_2)(t) := (\cos t, \sin t).$$

Ekkor

$$f(2\pi) - f(0) = (0,1) - (0,1) = (0,0),$$

azaz

$$f(2\pi) - f(0) = f'(\xi) \cdot (2\pi - 0)$$

csak akkor teljesülhet, ha $f'(\xi) = 0$, ami viszont nem lehetséges, mert

$$|f'(\xi)| = |(-\sin\xi, \cos\xi)| = 1.$$

Általános esetben a következő állítás érvényes, amelyet nem bizonyítunk.

4.60. Tétel. *(Lagrange-egyenlőtlenség) Legyenek X, Y normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $a, b \in X$, f folytonos az $[s(a,b)]$ halmazon és differenciálható az $s(a,b) \setminus \{a,b\}$ halmazon. Ekkor*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{\xi \in s(a,b)} \|f'(\xi)(b-a)\|.$$

4.61. Állítás. *Legyenek X, Y normált terek, $\Omega \subset X$ tartomány (azaz nyílt és összefüggő) $\Leftrightarrow \Omega$ nyílt és bármely két x_1, x_2 pontja összeköthető Ω-ban haladó törött vonallal, azaz léteznek $x_1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, x_2 \in \Omega$ pontok úgy, hogy bármely két egymás utánit összekötő szakasz maga is Ω része. Ha az $f : \Omega \to Y$ függvény differenciálható Ω-n és minden x-re és $f'(x) = 0$, akkor f állandó.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $f(x_1) = f(x_2) \in Y$.
Először alkalmazzuk a Lagrange-egyenlőtlenséget $s(x_1, \xi_1)$-re! Ekkor

$$\|f(\xi_1) - f(x_1)\| \leq \sup_{\eta_1 \in s(x_1,\xi_1)} \|f'(\eta_1)(\xi_1 - x_1)\| = 0,$$

azaz $f(\xi_1) = f(x_1)$. Ugyanilyen elven kapjuk az $s(\xi_1, \xi_2), s(\xi_2, \xi_3), \ldots, s(\xi_k, x_2)$ szakaszokra alkalmazva, hogy

$$f(x_1) = f(\xi_1) = f(\xi_2), f(\xi_2) = f(\xi_3), \ldots, f(\xi_k) = f(x_2),$$

ahogy a tételben állítottuk.

$\square$

4.4. Függvénysorok és sorozatok és deriválása

4.62. Tétel. *Legyen $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható minden $n \in \mathbb{N}$-re! Tegyük fel továbbá, hogy*

- *$f_n \to f$ pontonként (a, b)-n,*
- *$(f_n')_{n\in\mathbb{N}} \to g$ egyenletesen (a, b)-n.*

Ekkor $f' = g$ teljesül.

Bizonyítás. Előzetesen megjegyezzük, hogy a feltételekből következik, hogy g maga is folytonos, hiszen folytonos függvények egyenletes limeszeként állt elő.
Először belátjuk, hogy minden rögzített $[x, x + h] \subset (a, b)$ esetén van olyan $x_h \in (x, x + h)$, hogy

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot g(x_h). \tag{4.16}$$

A Lagrange-középértéktétel miatt minden $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan $x_n \in [x, x + h]$, hogy

$$f_n(x + h) - f_n(x) = h \cdot f'(x_n).$$

Ezeknek az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ értékeknek van torlódási pontja, azaz létezik olyan $x_h \in [x, x + h]$ érték, hogy egy $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozatra $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_h$.
Ekkor persze az

$$(f_{n_k}) \to f \quad \text{és} \quad \left(f_{n_k}'\right) \to g$$

konvergencia is teljesül az (a, b) intervallumon, az első esetben pontonként, a másodikban egyenletesen. Ezért a jelölést egyszerűsítve n_k helyett mindenhol az n indexet használjuk. Ekkor

$$f(x + h) - f(x) = [f(x + h) - f_n(x + h)] + [f_n(x + h) - f_n(x)] + [f_n(x) - f(x)],$$

ahol az $x + h$ és x pontokban érvényes konvergencia miatt

$$\lim_{n\to\infty} f(x + h) - f_n(x + h) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - f(x) = 0.$$

Teljesül még $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletes konvergenciája és g folytonossága miatt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x + h) - f_n(x) = \lim_{n\to\infty} h \cdot f_n'(x_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} h \cdot ([f_n'(x_n) - g(x_n)] + [g(x_n) - g(x_h)] + g(x_h)) = \lim_{n\to\infty} h \cdot g(x_h) = h \cdot g(x_h),$$

amellyel a (4.16)-beli egyenlőséget igazoltuk.

Ezzel akkor

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| \leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x_h)\right| + |g(x_h)-g(x)|,$$

ahol a jobb oldalon $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x_h)\right| = 0$ a (4.16) egyenlőség miatt, vagyis g folytonossága miatt

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| \leq \lim_{h\to 0}|g(x_h)-g(x)| = 0,$$

ami épp azt jelenti, hogy $f'(x) = g(x)$. □

Ennek közvetlen következménye a sorokra vonatkozó hasonló állítás.

4.63. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\varphi_j : (a,b) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, valamint a*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j = \varphi \quad \textit{pontonként és} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j' = g \quad \textit{egyenletesen (a,b)-n.}$$

Ekkor φ differenciálható (a,b)-n és itt

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j\right)' = \varphi' = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j'$$

Bizonyítás. A feltétel pontosan azt jelenti, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N} \varphi_j = \varphi \quad \text{pontonként és} \quad \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N} \varphi_j' = g \quad \text{egyenletesen.}$$

Ekkor viszont az előző tétel miatt φ deriválható, és $\varphi' = g$ az (a,b) intervallumon. □

4.64. Megjegyzés. Ez a tétel ad használható elégséges feltételt arra, hogy mikor lehet egy függvénysort "tagonként" deriválni.

4.65. Példa. Teljesül, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2},$$

ugyanis a $\left|\frac{\sin kx}{k^3}\right| \leq \frac{1}{k^3}$, tehát a Weierstrass-kritérium szerint $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ pontoként (sőt egyenletesen is) konvergens $\mathbb{R}$-en.

Hasonlóan, $\left|\frac{\cos kx}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$, tehát a Weierstrass-kritérium szerint $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

Ezzel a 4.63 Tétel feltételei teljesülnek, szabad tehát tagonként deriválni a függvénysort.

Azonban előfordulhat, hogy egy függvénysort nem szabad tagonként deriválni, amint a következő példa mutatja.

4.66. Példa. Legyenek $g_1, g_2, \ldots$ valós függvények a következő hozzárendeléssel adottak:

$$g_j(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{ha } j = 1 \\ \frac{1}{j}\operatorname{arctg} x^j - \frac{1}{j-1}\operatorname{arctg} x^{j-1}, & \text{ha } j > 1. \end{cases}$$

Ekkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} g_j(x) = \frac{1}{k}\operatorname{arctg} x^k = 0,$$

amely az arctg függvény korlátossága miatt egyenletesen is teljesül, azaz

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} g_n\right)' = 0.$$

Ugyanakkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j'(x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} g_j'(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{x^{k-1}}{1+x^{2k}},$$

amely $x = 1$ esetén $\frac{1}{2}$, azaz

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j'\right)(1) \neq \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j\right)'(1).$$

4.4.1. Hatványsorok deriválása

4.67. Definíció. Adott $a \in \mathbb{R}$ és valós $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ együtthatók esetén a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$ alakú függvénysort az *a közepű hatványsornak* nevezzük.

Jelölje $R \in (0,\infty]$ ennek a konvergenciasugarát! Tudjuk, hogy $|x-a| < R$ esetén a hatványsor konvergens x-ben, továbbá hogy $\forall\delta > 0$ esetén egyenletesen konvergens az $[a-R+\delta, a+R-\delta]$ intervallumon.

Szükségünk lesz még a következő elemi eredményre, amelyet nem bizonyítunk.

4.68. Állítás. *A fenti hatványsor tagonkénti deriválásával kapott* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kc_k\,(x-a)^{k-1}$ *hatványsor konvergenciasugara szintén* R.

4.69. Tétel. *Ha a fenti jelölésekkel* $|x-a| < R$ *teljesül, akkor a hatványsor* x*-ben tagonként deriválható:*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k\,(x-a)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k\,(x-a)^{k-1}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a függvénysorok tagonkénti deriválásáról szóló 4.63 Tételt! Világos, hogy a hatványsor tagjai folytonosak, akárhányszor differenciálhatóak. Mivel $|x-a| < R$, ezért választható olyan $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ intervallum, hogy $x \in [c,d]$. Az előző állítás szerint a tagok deriváltjaiból alkotott hatványsor konvergenciasugara ugyancsak R, ezért az egyenletesen konvergens $[c,d]$-n. Ezzel teljesülnek a 4.63 Tétel feltételei, azaz x-ben valóban szabad tagonként deriválni a hatványsort. □

4.5. Taylor-közelítés és Taylor-sor

4.70. Állítás. *Tegyük fel, hogy az* $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény a következő, a közepű,* R *konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegeként áll elő:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k \quad \text{ha } |x-a| < R.$$

Ekkor minden $j \in \mathbb{N}$ *indexre* $c_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$ *teljesül.*

Bizonyítás. Az előbbiek szerint $|x-a|<R$ esetén a hatványsor tagonként deriválható, sőt, mivel a deriváltnak ugyanaz a konvergenciasugara, ezért az is, amiből kapjuk, hogy

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k k\,(x-a)^{k-1}, \qquad f''(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k k\,(k-1)\,(x-a)^{k-2}$$

és teljes indukcióval látható, hogy minden $j\in\mathbb{N}$ esetén

$$f^{(j)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k k\,(k-1)\,(k-2)\,,\dots,(k-j+1)\,(x-a)^{k-j}\,.$$

Ezt az $x=a$ helyen felírva kapjuk, hogy

$$f^{(j)}(a)=c_j\cdot j\,(j-1)\,(j-2)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1=c_j j!,$$

vagyis $c_j=\frac{f^{(j)}(a)}{j!}$, ahogy állítottuk. □

4.71. Megjegyzés. Abban a speciális esetben, ha $f=P_N$, azaz egy N-edfokú polinomfüggvény, azt kapjuk, hogy

$$P(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Gyakorlatilag azonban a kérdés fordított: nem tudjuk előre egy függvényről, hogy valóban egy hatványsor összege-e, de szeretnénk ilyennel, illetve ennek véges sok tagjával közelíteni.

4.72. Definíció. Tegyük fel, hogy egy f függvény a egy környezetében akárhányszor differenciálható! Ekkor a

$$T_{N,f,a}(x):=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hozzárendeléssel adott polinomfügvényt az f függvény a pont körüli *N-edfokú Taylor-polinomjának*, a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort pedig az f függvény a pont körüli *Taylor-sorának* nevezzük.

A fő kérdés ebben a szakaszban az, hogy az f függvény a pont körüli Taylor-sora mikor (milyen x értékekre) adja magát az f függvényt?

4.73. Tétel. *Tegyük fel, hogy, hogy f függvény $N+1$-szer differenciálható a egy környezetében. Ebben a környezetben fekvő tetszőleges x pontra*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$$

teljesül alkalmasan választott $\xi\in(x,a)$ elemre.

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy $N=0$ esetén megkapjuk a Lagrange-féle középértéktételt.
Vezessük be az alábbi jelölést:

$$g(x):=f(x)-\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(x)-T_{N,f,a}(x)\,.$$

Vegyük észre, hogy a 4.71 Megjegyzés miatt minden $k = 0, 1, \ldots N$ esetén

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = c_k = \frac{T^{(k)}_{N,f,a}(a)}{k!}.$$

Ekkor

$$g\left(a\right) = f\left(a\right) - T_{N,f,a}\left(a\right) = 0$$

és ugyanígy

$$g^{(k)}\left(a\right) = f^{(k)}\left(a\right) - T^{(k)}_{N,f,a}\left(a\right) = 0$$

teljesül minden $k = 1, 2, \ldots, N$ indexre.
Ezért a Cauchy-középértéktételt felhasználva a g és az $x \mapsto (x - a)^{N+1}$ függvényekre kapjuk a

$$\frac{g\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{N+1}} = \frac{g\left(x\right) - g\left(a\right)}{\left(x-a\right)^{N+1} - \left(a-a\right)^{N+1}} = \frac{g'\left(\xi_1\right)}{\left(N+1\right)\left(\xi_1 - a\right)^{N}}$$

egyenlőséget valamilyen $\xi_1 \in (x, a)$ esetén. Hasonlóan folytatva adódik, hogy

$$\frac{g\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{N+1}} = \frac{g'\left(\xi_1\right) - g'\left(a\right)}{\left(N+1\right)\left(\xi_1 - a\right)^{N} - \left(N+1\right)\left(a-a\right)^{N}} = \frac{g''\left(\xi_2\right)}{\left(N+1\right)N\left(\xi_2 - a\right)} =$$
$$= \cdots = \frac{g^{(N+1)}\left(\xi_{N+1}\right)}{(N+1)!} = \frac{f^{(N+1)}\left(\xi_{N+1}\right)}{(N+1)!},$$

vagyis valóban

$$\frac{g\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{N+1}} = \frac{f^{(N+1)}\left(\xi_{N+1}\right)}{(N+1)!},$$

ahogy a tételben állítottuk. □

A fenti tétel nyilvánvaló következménye az alábbi.

4.74. Következmény. *Ha az f valós függvény akárhányszor differenciálható a egy környezetében, és*

$$f(x) - \lim_{N\to\infty} T_{N,f,a}(x) = \lim_{N\to\infty} f(x) - T_{N,f,a}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{f^{(N+1)}\left(\xi\right)}{(N+1)!}\left(x-a\right)^{N+1} = 0$$

az I intervallumon egyenletesen, akkor

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^{k} \quad I\text{-n egyeneletesen},$$

vagyis ez esetben az a körüli Taylor-sor előállítja az f függényt azon x értékekre, amelykre a fenti feltétel teljesül.

Egyszerű, elegendő (de nem szükséges) feltétel erre az, ha $\left|f^{(n+1)}\left(\xi\right)\right|$ egyenletesen korlátos I-n (azaz létezik egy minden n és $x \in I$ esetén érvényes felső korlát). Ekkor ugyanis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ miatt valóban teljesül, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f^{(N+1)}\left(\xi\right)}{(N+1)!}\left(x-a\right)^{N+1} = 0$$

az I intervallumon egyenletesen.

4.75. Megjegyzés. Lehetséges, hogy f akárhányszor differenciálható, de a Taylor-sora az a pont kivételével nem állítja elő a függvényt.
Ilyen például az alábbi hozzárendeléssel adott függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Némi számolással ugyanis látható, hogy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to 0} f'(x) = 0, \ldots, \lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0,$$

továbbá f akárhányszor deriválható az $a = 0$ helyen, tehát

$$f'(0) = 0,\ f''(0) = 0, \ldots,$$

azaz f Taylor-sora azonosan nulla, ugyanakkor $f(x) > 0$, ha $x \neq 0$.

4.5.1. A binomiális sor Ebben a szakaszban az $f(x) := (1+x)^\alpha$ hozzárendeléssel adott valós függvény nulla körüli Taylor-sorát vizsgáljuk abban az esetben, ha $\alpha \in \mathbb{R}, x > -1$. Egyszerű számolással kapjuk a következő egyenlőségeket:

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^\alpha & f(0) = 1 \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ \vdots & \vdots \\ f^{(j)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)(1+x)^{\alpha-j} & f^{(j)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1). \end{array}$$

Felhasználva az

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}.$$

jelölést is kapjuk, hogy az f függvényhez tartozó nulla körüli Taylor-sor a következő:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j, \tag{4.17}$$

amelyet *binomiális sornak* is neveznek. Először az a kérdés merül fel, hogy ez hol konvergens.

4.76. Tétel. *A fenti* (4.17) *hatványsor konvergenciasugara 1.*

Bizonyítás. A hányados-kritériumot használjuk: kiszámítjuk ehhez a hatványsor egymást követő tagjainak hányadosát.

$$\frac{\binom{\alpha}{j+1} x^{j+1}}{\binom{\alpha}{j} x^j} = \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j)}{(j+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}} \frac{x^{j+1}}{x^j} = \frac{\alpha-j}{j+1} x,$$

vagyis

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{j+1} x^{j+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{j} x^j\right|} = |x| \lim_{j\to\infty} \frac{|\alpha-j|}{|j+1|} = |x|,$$

tehát $|x| < 1$ esetén a hatványsor abszolút konvergens.

Az is nyilvánvaló, hogy $|x| > 1$ esetén a hatványsor nem lesz abszolút konvergens, vagyis a konvergenciasugár pontosan 1. □

4.77. Állítás. $|x| < 1$ *esetén a Taylor sor előállítja* f*-et, vagyis* $(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j$.

Bizonyítás. A maradéktagra vonatkozó becslés helyett közvetlen bizonyítást adunk az egyenlőségre, azaz belátjuk, hogy $|x| < 1$ esetén $f(x) = g(x)$, ahol

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j.$$

Mivel a konvergenciahalmazon a hatványsor tagonként deriválható, ezért kapjuk, hogy itt

$$g'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} j x^{j-1}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{1+x}{\alpha} g'(x) = (1+x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\alpha} \binom{\alpha}{j} x^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\alpha} \binom{\alpha}{j} (x^{j-1} + x^j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j}{\alpha} \binom{\alpha}{j} + \frac{j+1}{\alpha} \binom{\alpha}{j+1} \right) x^j = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{j}{\alpha} + \frac{j+1}{\alpha} \frac{\alpha - j}{j+1} \right) x^j = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j =$$

$$= g(x).$$

Másrészt teljesül az is, hogy

$$\frac{1+x}{\alpha} f'(x) = \frac{1+x}{\alpha} \alpha (1+x)^{\alpha-1} = (1+x)^{\alpha} = f(x).$$

Figyelembe véve még, hogy $f(0) = g(0) = 1$, kapjuk, hogy a $(-1, 1)$ intervallumon mind f, mind g megoldása az

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{\alpha}{1+t} y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdeti érték feladatnak. A megoldás egyértelműsége miatt tehát a két függvény valóban azonos. □

4.78. Megjegyzés. Itt használtuk a differenciálegyenletek elméletének egy fontos tételét, amit ismertnek tételezünk fel. Enélkül jóval összetettebb számolással tudnánk igazolni a tételt.

4.79. Példák. (1) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1/2}{j} x^j$

(2) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-1/2}{j} (-x^2)^j$

4.5.2. Taylor formula többváltozós függvényekre Legyen X normált tér, valamint $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ k+1-szer differenciálható a $B_r(a) \subset X$ gömbben. A valós esethez hasonlóan az f függvényt egy egyszerűbb szerkezetű függvénnyel akarjuk közelíteni.

4.80. Tétel. *Legyen $h \in X$ olyan, hogy $|h| < r$ teljesül! A fenti feltételek esetén valamilyen $\tau \in (0, 1)$ számmal $f(a+h)$ a következő alakban adható meg:*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)(h)}{1!} + \frac{f''(a)(h,h)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)(h,h,\ldots,h)}{k!} +$$

$$+ \frac{f^{(k+1)}(a + \tau h)(h,h,\ldots,h)}{(k+1)}.$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt a $\varphi(t) = f(a+th)$ egyenlőséggel. Ekkor

$$\varphi'(t) = f'(a+th)\,h,$$

ahol $f'(a+th) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ és hasonlóan a második derivált és a bilineáris operátorok azonosítási elve miatt

$$\varphi''(t) = [f''(a+th)\,h]h = f''(a+th)(h,h).$$

Sőt, általában minden $k \in \mathbb{N}$ indexre

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+th)(h,h,\ldots,h)$$

érvényes, vagyis

$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(h,h,\ldots,h)$$

teljesül. Most figyelembe véve a $\varphi(0) = f(a)$ és $\varphi(1) = f(a+h)$ egyenlőségeket, a φ függvény nulla körüli

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}1 + \frac{\varphi''(0)}{2!}1^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}1^k + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}1^{k+1}$$

alakjába helyettesítve (ahol $\tau \in (0,1)$ alkalmas konstans), kapjuk, hogy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)(h,h)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)(h,h,\ldots,h)}{k!} + \\ + \frac{f^{(k+1)}(a+\tau h)(h,h,\ldots,h)}{(k+1)},$$

ahogy a tételben állítottuk. □

4.81. Példa. Abban a speciális esetben, mikor $k = 1$ és $X = \mathbb{R}^n$, az f függvény első rendű Taylor-közelítése másodrendű maradéktaggal az alábbi:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a)\,h_j + \sum_{j,k=1}^{n} (\partial_j \partial_k f)(a+\tau h)\,h_j h_k,$$

ahol $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

4.82. Megjegyzés. Legyenek X, Y normált terek! Bebizonyítható, hogy ha $f : X \to Y$ és k-szor differenciálható $B_\delta(a)$-n, akkor a Taylor formula $\|h\| < \delta$ esetén: $f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)(h,h,\ldots,h)}{k!} + R_k$, ahol R_k a maradéktag, amelynek normájára az

$$\|R_k\| \le \frac{\|h\|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \sup_{\xi \in B_\delta(a)} \left\| f^{(k+1)}(\xi) - f^{(k+1)}(a) \right\|$$

becslés teljesül.

4.5.3. Többváltozós függvények lokális szélsőértéke

4.83. Definíció. Legyen X normált tér, $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$, amely értelmezve van az $a \in X$ pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban *lokális minimuma* van, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $x \in B_\delta(a)$ esetén $f(x) \ge f(a)$.
Ha $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > f(a)$, akkor *szigorú lokális minimumról* beszélünk.

Hasonlóan értelmezzük a lokális maximum fogalmát is, amelyet nem részletezünk.

4.84. Tétel. *Tegyük fel, hogy f differenciálható az a-ban és f-nek a-ban lokális szélsőértéke van (minimuma vagy maximuma). Ekkor $f'(a) = 0 \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $0 \neq h \in X$ tetszőleges. Belátjuk, hogy $f'(a)h = 0 \in \mathbb{R}$. Mivel f differenciálható a-ban, ezért elég kicsi $t \in \mathbb{R}$ esetén az előző tétel szerint

$$f(a+th) - f(a) = f'(a)(th) + \eta(th)$$

ahol

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{|\eta(th)|}{\|th\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|\eta(th)|}{|t| \cdot \|h\|},$$

vagyis $\lim\limits_{t\to 0} \frac{|\eta(th)|}{|t|} = 0$.
Ha $f'(a)h > 0$ lenne, akkor tehát

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = f'(a)h > 0$$

volna, vagyis valamilyen $\delta_1 > 0$ számra $t \in (0, \delta_1)$ esetén $f(a+th) - f(a) > 0$ teljesülne, tehát nem lehetne lokális maximum a-ban. Hasonlóan, valamilyen $\delta_2 < 0$ számra $t \in (\delta_2, 0)$ esetén $f(a+th) - f(a) < 0$ teljesülne, tehát nem lehetne lokális minimum sem a-ban. Ugyanígy kapunk ellentmondást abban az esetben is, ha az $f'(a)h < 0$ feltételezéssel élünk. □

4.85. Definíció. Legyen X normált tér, $g : X \times X \to \mathbb{R}$, (folytonos) bilineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy

- *g pozitív definit*, ha $g(h,h) > 0,\ \forall h \in X \setminus \{0\}$,
- *negatív definit*, ha $g(h,h) < 0,\ \forall h \in X \setminus \{0\}$,
- *pozitív szemidefinit*, ha $g(h,h) \geq 0,\ \forall h \in X$,
- *negatív szemidefinit*, ha $g(h,h) \leq 0,\ \forall h \in X$,
- *szigorúan pozitív definit*, ha $\exists c > 0$ állandó, hogy $g(h,h) \geq c\|h\|^2,\ \forall h \in X$.

4.86. Állítás. *Ha $X = \mathbb{R}^n$ és a $g : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezés g pozitív definit, akkor szigorúan pozitív definit is.*

Bizonyítás. Tekintsük az $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ halmazt, amely korlátos és zárt, következésképp sorozatkompakt.
Ekkor a $G : X \to \mathbb{R}$, $G(h) := g(h,h)$ függvény folytonos, vagyis a Weierstrass-tétel miatt az S_1 sorozatkompakt halmazon felveszi az minimumát.

Létezik tehát egy $h_0 \in S_1$, hogy minden $h \in S_1$ esetén

$$G(h) := g(h,h) \geq g(h_0, h_0) = c,$$

ahol a pozitív definit tulajdonság miatt $c > 0$. Ekkor tetszőleges $x \in X \setminus \{0\}$ esetén

$$g(x,x) = g\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\|x\|\right) = \|x\|^2 g\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant c\|x\|^2,$$

ami bizonyítja az állítást. □

4.87. Megjegyzés. Végtelen dimenziós vektorterekben a fenti állítás nem igaz.

4.88. Megjegyzés. $X = \mathbb{R}^n$ esetén egy $X \times X \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezés egy négyzetes mátrixszal adható meg. Ha a mátrix szimmetrikus, és A összes sajátértéke nagyobb mint 0, akkor A pozitív definit, sőt, a fentiek értelmében szigorúan pozitív definit.

4.89. Tétel. *Ha az $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in X$ egy környezetében, és f'' folytonos a-ban, akkor teljesülnek a következők:*

(1) Ha f-nek a-ban lokális minimuma van, akkor $f'(a) = 0$, és $f''(a)$ pozitív szemidefinit.

(2) Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ szigorú pozitív definit, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

Bizonyítás. Írjuk fel a 4.80 Tétel alapján a Taylor-formulát f-re másodrendű maradéktaggal az a pont körül! Ekkor tetszőleges $h \in X$, $\|h\| = 1$ és elég kis abszolútértékű $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(a+th) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}th + \frac{f''(a+\tau th)}{2!}(th, th)$$

valamilyen $\tau \in (0,1)$ esetén.

Az első állítás bizonyításához tegyük fel, hogy f-nek a-ban lokális minimuma van. Tudjuk, hogy ekkor $f'(a) = 0$, vagyis

$$0 \leqslant \frac{f(a+th) - f(a)}{t^2} = \frac{f''(a+\tau th)}{2!}(h, h)$$

teljesül. Ennek mindkét oldalán a $t \to 0$ határértéket véve, és az f'' függvény a-beli folytonosságát használva nyerjük, hogy

$$0 \leqslant f''(a)(h, h),$$

amit bizonyítani kellett.

A második állítás igazolásához ismét az

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t^2} = \frac{f''(a+\tau th)}{2!}(h, h)$$

egyenlőségből indulunk ki. Mivel f'' folytonos a-ban, ezért van olyan U környezete a-nak, hogy $a + th \in U$ esetén

$$\frac{f''(a+\tau th)}{2!}(h, h) \geq c > 0$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}^+$ esetén. Ebben a környezetben $f(a)$ szigorú lokális maximum lesz. □

4.5.4. Implicit függvénytétel A témakör tárgyalásának motivációja a következő probléma: adott $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény esetén a $\Phi(x, y) = 0$ egyenlet milyen feltételek mellett határoz meg egy $y = f(x)$ függvényt? Azaz: ki lehet fejezni az y változót a fenti egyenletből?

4.90. Példák. (1) $\Phi(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$. Itt az egyenlet megoldásai az origó körüli egységkörvonal pontjai.
Valamilyen plusz feltétel biztos szükséges y egyértelmű meghatározásához, hiszen $y = \sqrt{1 - x^2}$ és $y = -\sqrt{1 - x^2}$ egyaránt érvényesek.

(2) Ha a $\Phi(x, y) := x^2 + y^2 + 1 = 0$ hozzárendeléssel adott függvényt tekintjük, akkor egyáltalán nincs megoldás.

(3) A $\Phi(x, y) := y^2 - x^2 = 0$ egyenlőségnek eleget tevő pontok halmaza $\mathbb{R}^2$-ben két egyenes. Most az origó környezetében nem tudjuk y értékét egyértelműen meghatározni x segítségével, mert ott metszik egymást az egyenesek. Ez azzal függ össze, hogy

$$\partial_2 \Phi(x, y) = 2y \Rightarrow \partial_2 \Phi(0, 0) = 0.$$

4.91. Tétel. *Legyen* $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *függvény, amely értelmezve van és folytonos valamilyen* $(\mathbf{a}, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *pont egy környezetében és* $\Phi(\mathbf{a}, b) = 0$*. Tegyük fel még, hogy* $\partial_{n+1}\Phi$ *létezik és folytonos* $(\mathbf{a}, b)$ *egy környezetében, és* $\partial_{n+1}\Phi(\mathbf{a}, b) \neq 0$*.*
Ekkor létezik $\mathbf{a}$*-nak olyan* $B_r(\mathbf{a})$*,* b*-nek pedig olyan* $(b-d, b+d)$ *környezete és* $f : B_r(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, hogy*

$$\{(\mathbf{x}, y) : \Phi(\mathbf{x}, y) = 0, \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}), y \in (b-d, b+d)\} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})\}.$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért csak az $n = 1$ esetre igazoljuk a tételt.
Ha $\partial_2\Phi(a, b) > 0$, akkor $\partial_{n+1}\Phi$ folytonossága miatt (a, b)-nek van olyan $B_{r_1}(a) \times (b-d, b+d)$ környezete, ahol $\partial_2\Phi(x, y) > 0$, vagyis $x \in B_{r_1}(a)$ esetén $y \mapsto \Phi(x, y)$ szigorúan monoton nő a $(b-d, b+d)$ halmazon. Tehát az is igaz, hogy $\Phi(a, b-d) < 0 < \Phi(a, b+d)$. Mivel Φ folytonos az $(a, b+d)$ és $(a, b-d)$ pontok között, ezért van olyan $r \in (0, r_1)$, hogy $x \in B_r(a)$ esetén $\Phi(x, b-d) < 0 < \Phi(x, b+d)$ teljesül.
Alkalmazzuk most a Bolzano-tételt rögzített $x \in B_r(a)$ esetén az $y \mapsto \Phi(x, y)$ hozzárendeléssel adott függvényre! Ekkor létezik $f(x)$, hogy $b - d < f(x) < b + d$ esetén $\Phi(x, f(x)) = 0$. Mivel $y \mapsto \Phi(x, y)$ szigorúan monoton nő, $f(x)$ egyértelmű.

Belátjuk még, hogy f folytonos $B_r(a)$-n. Legyen $x_0 \in B_r(a)$, és (a, b) helyett tekintsük az $(x_0, f(x_0))$ pontot! Ekkor $b - d < f(x_0) < b + d$. Azt szeretnénk belátni, hogy f folytonos x_0-ban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám!
Az előző állítás miatt az $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ számot elég kicsire választva

$$b - d \leq f(x_0) - \varepsilon' < f(x_0) + \varepsilon' \leq b + d,$$

azaz

$$[f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon'] \subset [b-d, b+d]$$

és $\Phi(x_0, f(x_0)) = 0$ teljesül.
Figyelembe véve, hogy Φ itt folytonos, van olyan $\varrho \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in B_\varrho(x_0)$ esetén

$$\Phi(x, f(x_0) - \varepsilon') < 0 < \Phi(x, f(x_0) + \varepsilon').$$

Ekkor a Bolzano tétel segítségével létezik $y \in (f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon')$, amelyre $\Phi(x, y) = 0$. Ugyanakkor $y = f(x)$ és $\varepsilon' < \varepsilon$ miatt, minden $x \in B_\varrho(x_0)$ pontra $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, tehát f folytonos x_0 -ban.

□

A gyakorlatban fontos a fenti tétel általánosítása $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvényekre, amelyet kimondunk, de nem bizonyítunk.

4.92. Tétel. *Legyen a*

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

függvény folytonos az $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *pont egy környezetében, ahol* $\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$*, továbbá* $\mathbf{y} \mapsto \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *folytonosan differenciálható* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *valamilyen környezetében; ezt a deriváltat* F *jelöli. Felteszzük végül, hogy* $\det(F(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \neq 0$*. Ekkor létezik* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$*-nek olyan* $B_r(\mathbf{a}) \times B_\varrho(\mathbf{b})$ *környezete, és olyan* $f : B_r(\mathbf{a}) \to B_\varrho(\mathbf{b}) \subset \mathbb{R}^m$ *folytonos függvény, hogy*

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_r(\mathbf{a}) \times B_\varrho(\mathbf{b}) : \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})\}.$$

4.93. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a fenti tétel feltételei és az* $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *hozzárendeléssel adott függvény is folytonosan deriválható az a környezetében. Ekkor* $f : B_r(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}^m$ *differenciálható.*

4.94. Megjegyzés. Ha tudjuk, hogy f deriválható, akkor az kiszámítható a következő módon:
A $\Phi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$ egyenlőség mindkét oldalát $\mathbf{x}$ szerint deriválva kapjuk, hogy a $B_r(\mathbf{a})$ halmazon

$$0 = \partial_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) + \partial_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) f'(\mathbf{x}),$$

vagyis a $\det(F(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \neq 0$ feltételt használva

$$f'(\mathbf{x}) = -\left[\partial_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\right]^{-1}\left[\partial_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\right].$$

4.95. Tétel. *(Inverz függvény tétel) Legyen $g : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^n$, olyan, hogy értelmezve van és folytonosan differenciálható a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ egy környezetében, továbbá $\det g'(\mathbf{b}) \neq 0$. Ekkor az $\mathbf{a} := g(\mathbf{b})$ jelöléssel kapjuk, hogy létezik léteznek $B_r(\mathbf{a})$ és $B_r(\mathbf{b})$ környezetek, és*

$$g^{-1} : B_r(\mathbf{a}) \to B_r(\mathbf{b})$$

folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_r(\mathbf{a}) \times B_r(\mathbf{b}) : \mathbf{x} = g(\mathbf{y})\} = \left\{\left(\mathbf{x}, g^{-1}(\mathbf{x})\right) : \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})\right\}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} - g(\mathbf{y})$$

hozzárendeléssel adott. Ekkor

$$\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} - g(\mathbf{b}) = 0,\ \partial_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -g'(\mathbf{y}),$$

továbbá $\det(g'(\mathbf{b})) \neq 0$, tehát az implcit függvény tétel feltételei teljesülnek a Φ függvényre. Ezért valóban létezik olyan

$$g^{-1} : B_r(\mathbf{a}) \to B_r(\mathbf{b})$$

függvény, amelyre

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_r(\mathbf{a}) \times B_r(\mathbf{b}) : \mathbf{x} = g(\mathbf{y})\} = \left\{\left(\mathbf{x}, g^{-1}(\mathbf{x})\right) : \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})\right\}$$

teljesül. Az így (implicit módon) adott g^{-1} függvény definíció miatt valóban g lokális inverze.
Az előző megjegyzésben kapott képlet szerint továbbá

$$\left[g^{-1}\right]'(\mathbf{x}) = \left[g'\left(g^{-1}(\mathbf{x})\right)\right]^{-1},$$

ahol a jobb oldalon a $g'(g^{-1}(\mathbf{x}))$ mátrix inverzét vettük, vagyis a fenti definiált g^{-1} függvény deriváltja létezik, és $B_r(\mathbf{a})$-ban folytonosan deriválható. □

Analízis II.

5. FEJEZET

Mérték- és integrálelmélet

5.1. Riemann-integrál

A Riemann-integrál fogalmát az első szakaszban korlátos intervallumon értelmezett korlátos függvényekre definiáljuk, majd ezt általánosítjuk a második szakaszban.

5.1.1. Alsó és felső közelítő összegek Tekintsük az $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = b$ osztópontokkal vett $\mathcal{I}$ felosztását, ahol $I_j = [a_{j-1}, a_j]$, és ennek hosszára használjuk az $|I_j| = |a_j - a_{j-1}|$ jelölést.

5.1. Definíció. A fenti $\mathcal{I}$ felosztás *finomsága* a $\max_{1<j<N} |I_j|$ szám. Egy felosztást a másik *finomításának* nevezünk, ha osztópontjai tartalmazzák a másik osztópontjait.

A fenti definíció szerint ha egy felosztás finomsága δ, akkor az abban szereplő *minden* részintervallum hossza legfeljebb δ.

5.2. Definíció. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor tetszőleges $x_j \in I_j$ $j = 1, 2, \ldots N$ esetén a fenti $\mathcal{I}$ felosztáson értelmezett

$$|I_1|f(x_1) + |I_2|f(x_2) + \cdots + |I_N|f(x_N)$$

összeget az f-hez tartozó egy *Riemann-féle közelítő összegnek* nevezzük.

Ezek infimumát és szuprémumát kitüntetjük, és egy harmadik mennyiséget is használunk:

$$s_f = \sum_{j=1}^{N} |I_j| \cdot \inf_{I_j} f \quad \text{– Riemann-féle alsó közelítő összeg}$$

$$S_f = \sum_{j=1}^{N} |I_j| \cdot \sup_{I_j} f \quad \text{– Riemann-féle felső közelítő összeg}$$

$$S_f - s_f = \sum_{j=1}^{N} |I_j| \cdot (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \quad \text{– Riemann-féle oszcillációs összeg.}$$

Mindezek függnek a felosztástól is, vagyis valójában az $S_{f,\mathcal{I}}$ és $s_{f,\mathcal{I}}$ jelölések lennének pontosak, az egyszerűség kedvéért azonban, ahol nem okoz félreértést, az egyszerűbb változatot használjuk.

5.3. Állítás. *Egy felosztás finomításával a hozzá tartozó Riemann-féle alsó közelítő összeg monoton nő, a felső közelítő összeg pedig monoton csökken.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan igaz az állítás, ha *egy* új osztópontot tartalmazó finomítást veszünk. Mivel minden finomítás megkapható osztópontok egyenkénti hozzávételével, ezért teljesül az állítás. □

A fentiek szerint egy felosztás finomításával az alsó közelítő összegek monoton nőnek, és a felső közelítő összegek monoton csökkennek, továbbá f korlátossága miatt mindkettő korlátos, így ha egy $(\mathcal{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ finomodó felosztássorozat finomsága nullához tart, akkor mind $s_{f,\mathcal{I}_k}$-nak, mind $S_{f,\mathcal{I}_k}$-nak létezik határértéke.

5.4. Állítás. *Tetszőleges I_j és I_k felosztásokra teljesül, hogy*

$$s_{f,I_j} \leq S_{f,I_k}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az I_j és I_k felosztások közös finomítását, amely az egyes osztópontok uniójából áll, és jelöljük $I_j \cup I_k$-val. Mivel ez finomítása mindkét felosztásnak, ezért az 5.3 Állítás miatt

$$s_{f,I_j} \leq s_{f,I_j\cup I_k} \leq S_{f,I_j\cup I_k} \leq S_{f,I_k},$$

teljesül, és pont ezt kellett igazolni. □

5.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy a korlátos f függvény az I intervallumon Riemann-integrálható és integrálja $\int_I f \in \mathbb{R}$, ha a felosztások finomságával nullához tartva tetszőleges, azon értelmezett Riemann-közelítő összegek limesze $\int_I f$. A fenti feltétel formálisan: minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy tetszőleges olyan $\mathcal{I}$ felosztásra, amelynek finomsága δ-nál kisebb, az azon értelmezett tetszőleges $R_{f,\mathcal{I}}$ Riemann-közelítő összegre $|R_{f,\mathcal{I}} - \int_I f| < \varepsilon$.

A fenti feltételt nem egyszerű ellenőrizni, hiszen tetszőleges (elég finom felosztáshoz tartozó) Riemann-közelítő összegre kell teljesülnie. Ezért mondjuk ki a következőt.

5.6. Állítás. *Korlátos $f : I \to \mathbb{R}$ függvények esetén a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *f az I intervallumon Riemann-integrálható.*

(ii) *Ha egy $(\mathcal{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat finomsága nullához tart, akkor $s_{f,\mathcal{I}_k} \to \int_I f$ és $S_{f,\mathcal{I}_k} \to \int_I f$ is teljesül, ahol $\int_I f \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Ha egy $(\mathcal{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat finomsága nullához tart, akkor $S_{f,\mathcal{I}_k} - s_{f,\mathcal{I}_k} \to 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Az (i)⇒ (ii) következtetés igazolása:
Az alsó Riemann összeg definíciója miatt az $(s_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozathoz van olyan Riemann-összegekből álló $(R_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden k indexre $R_{f,I_k} - s_{f,I_k} < \varepsilon/k$ teljesül. Ezért ha f Riemann-integrálható, azaz $(R_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}} \to \int_I f$, akkor egyúttal $(s_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}} \to \int_I f$ is teljesül.
Ugyanígy igazolható az $(S_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}} \to \int_I f$ konvergencia.

Az (ii)⇒ (iii) következtetés triviális, hiszen ha két sorozat limesze megegyezik, akkor különbségük limesze nulla.

(iii)⇒ (i) eset:
Először belátjuk, hogy az (iii) feltételből következik az

$$(S_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}} \to \inf\{S_{f,I_k} : I_k \text{ egy felosztás}\}$$

konvergencia.

Ha ugyanis nem teljesülne, akkor volna olyan $(S_{f,I_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amelynek limesze $\inf\{S_{f,I_k} : I_k \text{ egy felosztás}\}$-nál nagyobb volna, így a (iii) feltétel miatt lenne olyan I_k felosztás, hogy $S_{f,I_k} < s_{f,I_k}$, amely ellentmond az 5.4 Állításnak. Ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$(s_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}} \to \sup\{s_{f,I_k} : I_k \text{ egy felosztás}\}$$

is érvényes.
Ismét használva a (iii) pontban említett tulajdonságot, kapjuk, hogy $(s_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}}$ és $(S_{f,I_k})_{k\in\mathbb{N}}$

limesze azonos. De mivel tetszőleges $\mathcal{I}_k$ felosztáson vett tetszőleges $R_{\mathcal{I}_k}$ Riemann-féle közelítő összegre

$$s_{f,\mathcal{I}_k} \leq R_{\mathcal{I}_\|} \leq S_{f,\mathcal{I}_k},$$

ezért a rendőr-elv alapján a felosztás finomságával nullához tartva tetszőleges $R_{\mathcal{I}_k}$ Riemann-közelítő összeg határértéke is az $S_{f,\mathcal{I}_k}$ és $s_{f,\mathcal{I}_k}$ felső és alsó közelítő összegek közös limesze. □

A Riemann-integrál legfontosabb tulajdonságai a következők.

5.7. Állítás. (i) *A Riemann-integrál lineáris, azaz ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, akkor az $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ együtthatókkal vett lineáris kombinációjuk is, és*

$$\int_I \lambda_1 f + \lambda_2 g = \lambda_1 \int_I f + \lambda_2 \int_I g.$$

(ii) *A Riemann-integrál intervallumok szerint additív, azaz ha $\int_{[a,a^*]} f$ és $\int_{[a^*,b]} f$ létezik (amit általában $\int_a^{a^*} f$ és $\int_{a^*}^b f$ jelöl), akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, és*

$$\int_{[a,a^*]} f + \int_{[a^*,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

(iii) *Tetszőleges $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvényre teljesül, hogy*

$$\int_I f \leq |I| \cdot \sup_I f.$$

(iv) *Tetszőleges $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvényre teljesül, hogy*

$$\left|\int_I f\right| \leq |I| \int_I |f|.$$

Bizonyítás. (i) Nyilvánvalóan a λf függvényhez tartozó tetszőleges $R_{f,\mathcal{I}}$ Riemann-közelítő összeg éppen az f függvényhez tartozó ilyen osztópontokon és felosztáson vett $R_{f,\mathcal{I}}$ Riemann-közelítő összeg λ-szorosa. Ezért ha az eredetinek létezik limesze a felosztás finomságával nullához tartva, akkor a λ-szorosnak is, és ez a limesz az eredeti λ-szorosa.

(ii) Adott ε-hoz legyen δ_f, illetve δ_g az a szám, amelynél finomabb felosztáson tetszőleges Riemann-közelítő összegre

$$\left|R_{f,\mathcal{I}} - \int_I f\right|| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad \left|R_{g,\mathcal{I}} - \int_I g\right|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ esetén

$$\begin{aligned} \left|R_{f+g,\mathcal{I}} - \left(\int_I f + \int_I g\right)\right| &= \left|R_{f,\mathcal{I}} + R_{g,\mathcal{I}} - \left(\int_I f + \int_I g\right)\right| \leq \\ \leq \left|R_{f,\mathcal{I}} - \int_I f\right|| + \left|R_{g,\mathcal{I}} - \int_I g\right|| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) Tudjuk, hogy a jobb oldalon egy triviális Riemann-féle felső közelítő összeg szerepel, amely valóban legalább akkora, mint az integrál.

(iv) Először azt látjuk be, hogy $|f|$ maga is Riemann-integrálható. Egyszerű esetszétválasztással látható be, hogy tetszőleges I_j intervallumon teljesül a

$$\sup_{I_j}|f| - \inf_{I_j}|f| \le \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f$$

egyenlőtlenség, vagyis az $|f|$-hez tartozó oszcillációs összeg legfeljebb akkora, mint az f-hez tartozó. Emiatt valóban $|f|$ is Riemann-integrálható.

Tudjuk továbbá, hogy $f \le |f|$ és $-|f| \le f$ egyaránt teljeülnek, ami az egyes függvényekhez tartozó Riemann-integrálokr azt adja, hogy

$$\int_I f \le \int_I |f| \quad \text{és} \quad -\int_I |f| \le \int_I f,$$

amely definíció szerint az

$$\left|\int_I f\right| \le |I| \int_I |f|$$

becsléssel ekvivalens. □

5.1.2. Improprius integrál Előfordulhat az alkalmazásokban, hogy nem korlátos halmazon kell az integrált kiszámítani, illetve az is, hogy nem korlátos függvény integrálját kell meghatározni. Fontos továbbá a következő fejezetekben tárgyalt elmélethez is megengednünk, hogy az integrál értéke ∞ vagy $-\infty$ legyen, amelyhez használni fogjuk az $\overline{\mathbb{R}} = -\infty \cup \mathbb{R} \cup \infty$ jelölést.

Először azt az esetet tárgyaljuk, amikor $I = (a, b]$ alakú, $\lim_a f = \infty$, továbbá minden $[a_n, b] \subset (a, b]$ esetén f korlátos az $[a_n, b]$ intervallumon.

5.8. Definíció. Ha van olyan $\int_I f \in \overline{\mathbb{R}}$ érték, hogy tetszőleges $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (a, b]$, $a_j \to a$ sorozat esetén

$$\lim_{a_n\to a} \int_{[a_n,b]} f = \int_I f,$$

akkor azt mondjuk, hogy f improprius integrálja az I intervallumon $\int_I f$.

5.9. Példák. (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a_n\to 0+} \int_{a_n}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a_n\to 0+} \ln 1 - \ln a_n = \infty.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a_n\to 0+} \int_{a_n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a_n\to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a_n} = 2.$

Másodszor azt az esetet tárgyaljuk, amikor $I = [a, \infty)$ alakú.

5.10. Definíció. Ha van olyan $\int_I f \in \overline{\mathbb{R}}$ érték, hogy tetszőleges $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset [a, \infty)$, $b_j \to \infty$ sorozat esetén

$$\lim_{b_n\to \infty} \int_{[a,b_n]} f = \int_I f,$$

akkor azt mondjuk, hogy f improprius integrálja $\int_I f$.

5.11. Példák. (1)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b_n\to\infty} \int_1^{b_n} \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b_n\to\infty} \ln(b_n+2) - \ln 1 = \infty.$$

(2)

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b_n\to\infty} \int_1^{b_n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b_n\to\infty} 2\sqrt{b_n} - 2\sqrt{1} = \infty.$$

Megjegyzés: A további improprius integrálokat úgy *definiáljuk*, hogy

$$I_1 \cup I_2 = I \subset \overline{\mathbb{R}} \text{ esetén} \int_I f := \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

5.12. Példák. (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \operatorname{arctg} 0 - \lim_{a_n\to-\infty} \operatorname{arctg} a_n + \lim_{b_n\to\infty} \operatorname{arctg} b_n - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty$$

Megállapodunk még abban, hogy $g : I \to \overline{\mathbb{R}}$ nemnegatív függvények Riemann-integrálját is értelmezzük, és ez minden olyan esetben végtelen, amikor g értéke egy nem elfajuló intervallumon végtelen.

5.1.3. Konvergenciatulajdonságok, ellenpéldák

5.13. Állítás. *Ha az $f_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénysorozat minden tagja Riemann-integrálható, emellett $f_n \to f$ egyenletesen, akkor f is Riemann-integrálható, és* $\lim \int_I f_n = \int_I f$.

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy f is Riemann-integrálható. Ehhez azt kell belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy minden, δ-nál finomabb $\mathcal{I}$ felosztáson az f-hez tartozó Riemann-féle oszcillációs összeg legfeljebb ε. Legyen n olyan nagy, hogy ekkor $\sup|f - f_n| < \frac{\varepsilon}{4I}$. Ekkor persze minden I_j részintervallumon

$$\sup_{I_j} f < \sup_{I_j} f_n + \frac{\varepsilon}{4I} \quad \text{és} \quad \inf_{I_j} f_n - \frac{\varepsilon}{4I} < \inf_{I_j} f$$

érvényesek, amelyeket egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f < \sup_{I_j} f_n - \inf_{I_j} f_n + \frac{\varepsilon}{2I},$$

amelyeket részintervallumonként összegezve kapjuk, hogy $S_f - s_f \le S_{f_n} - s_{f_n} + \frac{\varepsilon}{2}$. Ha most elég kis δ értéket választunk, akkor f_n Riemann-integrálhatósága miatt $S_{f_n} - s_{f_n} < \frac{\varepsilon}{2}$, vagyis ekkor

$$S_f - s_f \le S_{f_n} - s_{f_n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ezzel a feladat állítása már könnyen igazolható, ugyanis adott $\varepsilon > 0$ számhoz olyan n_0 indexet választva, hogy $n > n_0$ esetén $|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{|I|}$ legyen, teljesül, hogy

$$\left|\int_I f - \int_I f_n\right| = \left|\int_I f_n - f\right| \le \int_I |f_n - f| \le |I| \cdot \frac{\varepsilon}{|I|} = \varepsilon.$$

Ez viszont definíció szerint azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$. □

Természetesen vetődik fel a kérdés, milyen állítás mondható ki pontonkénti konvergenciát feltételezve.

5.14. Példa. Rendezzük sorba a $[0,1]$ intervallumbeli racionális számokat; legyen f_k az a függvény, amely az első k db racionális számban 1-et máshol nullát vesz fel. Ekkor f_k egy korlátos, monoton növő, Riemann-integrálható függvényekből álló sorozat. Ennek pontonkénti limesze az az f függvény, amely a racionális számokban egyet, a többin nullát vesz fel (Dirichlet-függvény). Ez azonban nem Riemann-integrálható. Ugyanis bármely $\mathcal{I}$ felosztás bármely I_j részintervallumában lesz racionális és irracionális szám is, azaz lesz olyan, ahol f egyet, és olyan is ahol nullát vesz fel. Emiatt bármely I_j részintervallumban $\inf_{I_j} f = 0$, és $\sup_{I_j} f = 1$, azaz

$$s_f = \sum_{j=1}^{N} |I_j| \cdot \inf_{I_j} f = 0 \quad \text{és} \quad S_f = \sum_{j=1}^{N} |I_j| \cdot \sup_{I_j} f = \sum_{j=1}^{N} |I_j| = 1.$$

A 5.5 Definíció értelmében tehát f valóban nem lehet Riemann-integrálható. Tehát sajnos lehetséges, hogy egy Riemann-integrálható függvényekből álló pontonként konvergens függvénysorozat limesze még csak nem is Riemann-integrálható.

5.1.4. Tételek Riemann-integrálható függvényekkel kapcsolatban

5.15. Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt, akkor tetszőleges $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható.*

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy elég finom felosztáson az oszillációs összeg egy előre kijelölt ε számnál kisebbé tehető. A Heine-tétel miatt egy ilyen függvény egyenletesen is folytonos; vegyünk egy olyan finom $\mathcal{I}$ felosztást, hogy tetszőleges I_j intervallumon belül a függvény változása legfeljebb $\frac{\varepsilon}{|I|}$ legyen, azaz minden $x_1, x_2 \in I_j$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{|I|}.$$

Ekkor a Weierstrass-maximumelvet használva az oszcillációs összegben szereplő különbségekre

$$|\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f| = |\max_{I_j} f - \min_{I_j} f| < \frac{\varepsilon}{|I|},$$

amiket összegezve

$$S_f - s_f = \sum_{j=1}^{N} |I_j| \cdot (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) < \sum_{j=1}^{N} |I_j| \cdot \frac{\varepsilon}{|I|} = \frac{\varepsilon}{|I|} \sum_{j=1}^{N} |I_j| = \varepsilon,$$

vagyis az 5.5 Definíció értelmében az állítást igazoltuk. □

5.16. Tétel. *Ha $f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ monoton csökkenő, akkor Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Két esetet különböztetünk meg.
Ha valamilyen $t > 0$ esetén $f(t) = \infty$, akkor f egy nem elfajuló intervallumon nulla, vagyis a megállapodás értelmében Riemann-integrálható.
Ha minden $t > 0$ esetén $f(t)$ véges, akkor oszcillációs összege az $[a,b]$ intervallum egy $a_1, a_2, \ldots, a_N$ belső osztópontokból álló felosztásán:

$$\begin{aligned} S_f - s_f &= (a_1 - a)(\sup_{[a,a_1]} f - \inf_{[a,a_1]} f) + (a_2 - a_1)(\sup_{[a_1,a_2]} f - \inf_{[a_1,a_2]} f) + \\ &\cdots + (b - a_N)(\sup_{[a_N,b]} f - \inf_{[a_N,b]} f) = \\ &= (a_1 - a)(f(a) - f(a_1)) + (a_2 - a_1)(f(a_1) - f(a_2)) + \cdots + (b - a_N)(f(a_N) - f(b)). \end{aligned}$$

Itt minden komponens pozitív, azaz ha a felosztás finomsága δ, akkor

$$S_f - s_f \leq (f(a) - f(a_1))\delta + (f(a_1) - f(a_2))\delta + \cdots + (f(a_N) - f(b))\delta = \\ = (f(a) - f(b))\delta.$$

Ezért $\delta \to 0$ esetén az oszcillációs összeg valóban nullához tart, tehát f Riemann-integrálható bármely korlátos intervallumon.
Definíció szerint

$$\int_0^\infty f = \lim_{\substack{a_n \to 0 \\ b_n \to \infty}} \int_{a_n}^{b_n} f,$$

ahol a jobb oldalon levő határérték az f függvény nemnegatív tulajdonsága miatt biztosan létezik (esetleg végtelen lehet). Ezzel az állítást igazoltuk. $\square$

5.17. Tétel. *Ha az* $f_j : (0, \infty) \to [0, \infty]$ *monoton csökkenő függvények Riemann-integrálja véges, emellett az* f_j *sorozat pontonként monoton növőleg tart* f*-hez (azaz minden* $t \in \mathbb{R}^+$ *esetén* $f_j(t) \to f(t)$ *monoton növőleg), akkor* $\lim \int_{\mathbb{R}^+} f_j = \int_{\mathbb{R}^+} f$.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy az előző tétel értelmében a sorozat minden tagja Riemann-integrálható. Másrészt $t_1 < t_2$ esetén $f_j(t_1) \geq f_j(t_2)$ áll fenn, vagyis $f(t_1) \geq f(t_2)$, azaz f is monoton csökkenő, tehát szintén Riemann-integrálható.

Ha $\int_{\mathbb{R}^+} f = \infty$, akkor minden N-hez van olyan $I_N \subset \mathbb{R}^+$ korlátos intervallum, hogy azon $\int_{\mathbb{R}^+} f > N + 1$, azaz I_N-nek van olyan $\mathcal{I}$ felosztása, hogy azon az s_f alsó közelítő összegre $s_f > N$ teljesül. Ennek osztópontjaiban a pontonkénti konvergenciát használva kapjuk, hogy van olyan f_j függvény, amelyhez tartozó s_{f_j} alsó közelítő összegre $s_{f_j} > N - 1$ teljesül, tehát

$$N - 1 < s_{f_j} \leq \int_{I_N} f_j \leq \int_{\mathbb{R}^+} f_j,$$

tehát az $\int_{\mathbb{R}^+} f_j$ (monoton növő) sorozat limesze is végtelen.

Ha $\int_{\mathbb{R}^+} f < \infty$, akkor adott $\varepsilon > 0$-hoz keresünk olyan j_0 indexet, hogy $j > j_0$ esetén $\left| \int_{\mathbb{R}}^+ f_j - \int_{\mathbb{R}}^+ f \right| \leq \varepsilon$. Válasszunk először olyan $I_N \subset \mathbb{R}^+$ korlátos intervallumot, hogy azon

$$\left| \int_{\mathbb{R}^+} f - \int_{I_N} f \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ekkor $0 \leq f_j \leq f$ miatt ugyanígy

$$\left| \int_{\mathbb{R}^+} f_j - \int_{I_N} f_j \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.1}$$

teljesül minden j indexre. Másrészt tekintsük az I_N intervallum olyan $\mathcal{I}$ felosztását, ahol

$$s_f + \frac{\varepsilon}{4} \geq \int_{I_N} f \geq S_f - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.2}$$

Ekkor ismét a pontonkénti konvergenciát használva kapjuk, hogy van olyan j_0 index, hogy $j > j_0$ esetén

$$\int_{I_N} f_j + \frac{\varepsilon}{3} \geq s_{f_j} + \frac{\varepsilon}{3} \geq s_f + \frac{\varepsilon}{4} \geq \int_{I_N} f \geq S_f - \frac{\varepsilon}{4} \geq S_{f_j} - \frac{\varepsilon}{3} \geq \int_{I_N} f_j - \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.3}$$

azaz

$$\left| \int_{I_N} f - \int_{I_N} f_j \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ekkor a (5.1), (5.2) és (5.3) becsléseket és a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy $j > j_0$-ra

$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} f - \int_{\mathbb{R}^+} f_j\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^+} f - \int_{I_N} f\right| + \left|\int_{I_N} f - \int_{I_N} f_j\right| + \left|\int_{I_N} f_j - \int_{\mathbb{R}^+} f_j\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

tehát a tételben állított konvergencia teljesül. □

5.1.5. Lehetséges általánosítások Ha a fenti elméletet $I = [a, b] \to X$ típusú függvényekre akarjuk kiterjeszteni, ahol X egy Banach-tér, akkor a Riemann-közelítő összegek és a belőlük kapott integrálhatósági definíció változatlanul elmondható. Azonban azt már nehezebb igazolni, hogy folytonos függvények Riemann-integrálhatók (a rendezés hiánya miatt ugyanis sem alsó, sem felső közelítő összeg nincs). Ezért ezzel nem foglalkozunk részletesen.

Abban az esetben, ha $X = \mathbb{R}^d$, akkor az előző elmélet komponensenként alkalmazható, és vektor értékű függvények Riemann-integrálja minden nehézség nélkül definiálható.

Végül fontos eset az is, amikor $f : \Omega \to \mathbb{R}$ típusú, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Ez az eset az első szakaszbeli tárgyaláshoz nagyon hasonló módon kezelhető, mindössze a felosztásban szereplő intervallumok helyett résztartományokat, a hosszak helyett a résztartományok területét (térfogatát) kell használnunk, a finomság pedig a maximális átmérő kell, hogy legyen.

5.2. A mértékelmélet néhány fogalma

A Riemann-integrál bevezetésének motivációja is egy terület meghatározása volt. De mi az, hogy terület? Mit kell, hogy tudjon egy "jó" területfogalom? Milyen síkidomnak (halmaznak) lehet területe? A hossz/terület/térfogat fogalmak közös általánosítására szolgál a mérték.

Először egy olyan struktúrát adunk meg, amelyen a mérték definiálható.

5.2.1. Speciális halmazrendszerek

5.18. Definíció. Egy Ω alaphalmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszerét szigma-algebrának nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \setminus B \in \mathcal{A}$ is teljesül.
- Ha az $A_1, A_2, \ldots$ halmazok mindegyike $\mathcal{A}$-beli, akkor $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ is teljesül.

A következő állítást nem igazoljuk, de fel fogjuk használni.

5.19. Állítás. *Egy Ω alaphalmaz részhalmazainak tetszőleges $\mathfrak{A}$ rendszeréhez létezik olyan legszűkebb $\mathcal{A}$ szigma-algebra, amelyre $\mathfrak{A} \subset \mathcal{A}$.*
Teljesül továbbá, hogy tetszőleges $\mathcal{A}$ szigma-algebra a megszámlálható metszetre is zárt, vagyis ha az $A_1, A_2, \ldots$ halmazok mindegyike $\mathcal{A}$-beli, akkor $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ is teljesül.

5.20. Példák.
- Triviális: $\mathcal{A}$ legyen Ω összes részhalmaza.
- Kicsit nehezebb: Legyen $\Omega = [0, 1]$, és legyen

$$\mathcal{A} = \{A \subset [0, 1] : A \text{ megszámlálható vagy } A^c \text{ megszámlálható}\}.$$

- Nehezen látható, de fontos: Legyen $\Omega = \mathbb{R}^d$, és $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ a legszűkebb olyan szigma-algebra, amely tartalmazza $\mathbb{R}^d$ nyílt részhalmazait. Ezt Borel-féle szigma-algebrának nevezik, elemeit pedig Borel-halmazoknak.

5.21. Állítás. $d = 1$ *esetére a Borel-féle szigma-algebrára teljesülnek az alábbiak.*

(a) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *a legszűkebb olyan szigma-algebra, amely tartalmazza a nyílt intervallumokat.*
(b) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *a legszűkebb olyan szigma-algebra, amely tartalmazza az* $[a, b)$ *alakú intervallumokat.*

Bizonyítás. (a) Jelöljük a nyílt intervallumokat tartalmazó legszűkebb szigma-algebrát $\tilde{\mathcal{B}}$-vel, az $[a, b)$ alakú intervallumokat tartalmazó legszűkebb szigma-algebrát pedig $\hat{\mathcal{B}}$-vel. Azt kell igazolni, hogy $\hat{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Az nyilvánvaló, hogy $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ezért elegendő a fordított tartalmazást igazolni.

Az (a) rész igazolásához is elegendő lenne, ha belátnánk, hogy $\tilde{\mathcal{B}}$ minden nyílt halmazt tartalmaz, hiszen akkor $\tilde{\mathcal{B}}$ egy nyílt halmazokat tartalmazó szigma-algebra, vagyis tényleg nem lehet szűkebb, mint $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Tekintsünk tehát egy G nyílt halmazt, és minden x pontjához rendeljük hozzá azon G-beli nyílt intervallumok unióját, amelyek a pontot tartalmazzák.
Ez maga is nyílt intervallum, méghozzá a maximális, x-et tartalmazó; jelöljük G_x-szel. Nyilvánvaló, hogy az ilyen intervallumok uniója pontosan az eredeti G halmaz, hiszen annak része, másrészt tartalmazza G összes pontját. A kérdés csak az, ténylegesen hány ilyen különböző nyílt halmaz uniójából állt elő. Ha $G_x \neq G_y$, akkor nyilván diszjunktak, mert ha lenne metszetük, akkor egyik sem lehetett volna maximális. De mindegyikben kell racionális számnak lennie, vagyis nem lehet több különböző G_x alakú halmaz, mint ahány racionális szám van. Ezek szerint minden nyílt halmaz előáll megszámlálható sok nyílt intervallum uniójaként, azaz ha egy szigma-algebra tartalmazza a nyílt intervallumokat, akkor az összes nyílt halmazt is tartalmazza, vagyis ez bővebb $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ -nél.

(b) Az biztos, hogy $\tilde{\mathcal{B}} \subset \hat{\mathcal{B}}$, mert tetszőleges (a, b) intervallumra

$$(a, b) = \bigcap_{j=1}^{\infty} [a + \frac{1}{j}, b),$$

ahol a jobb oldal a szigma-algebra tulajdonságai miatt szintén $\hat{\mathcal{B}}$ -beli.

Hasolnóan kapjuk, hogy $\tilde{\mathcal{B}} \supset \hat{\mathcal{B}}$, mert tetszőleges $[a, b)$ intervallumra

$$[a, b) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a - \frac{1}{j}, b),$$

ahol a jobb oldal a szigma-algebra tulajdonságai miatt szintén $\tilde{\mathcal{B}}$ -beli.
A fentiekből $\tilde{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{B}}$ adódik, vagyis az (a)-beli állítást felhasználva kapjuk az $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \hat{\mathcal{B}}$ egyenlőséget.

□

5.22. Példa. $d = 1$ esetén $[-1, 1]$, illetve $\mathbb{Q}$ Borel-halmazok.
Nyilvánvaló ugyanis, hogy $[-1, 1] = ((-2, 2) \setminus (-2, -1)) \setminus (1, 2)$, ahol definíció szerint a $(-2, 2) \setminus (-2, -1)$ különbség Borel-halmaz, ezért $(-2, 2) \setminus (-2, -1)) \setminus (1, 2)$ is az.
Általában is $\mathbb{R}$ minden zárt részhalmaza egy nyílt halmaz komplementere, azaz valamilyen $G \subset \mathbb{R}$ halmazra $\mathbb{R} \setminus G$ alakú, így maga is Borel-halmaz.

Mivel $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} q$ alakú, ahol egy megszámlálható únió szerepel, ezért az únió is Borel-halmaz.

5.23. Definíció. Egy $\mathcal{A}$ szigma-algebrán értelmezett $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ függvényt *mértéknek* nevezünk, ha az szigma-additív, azaz $\mathcal{A}$-beli diszjunkt $A_1, A_2, \dots$ halmazok esetén

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

ahol az $\bigsqcup$ szimbólum diszjunkt halmazok unióját jelöli, továbbá ha $\mu(\emptyset) = 0$ teljesül.

A mértékek következő fontos tulajdonságát többször használjuk.

5.24. Állítás. *Legyen $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tetszőleges mérték. Ha az $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset$ egymást tartalmazó halmazok mindegyike $\mathcal{A}$-beli, akkor az úniójuk is, és $\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim\limits_{j \to \infty} \mu(A_j)$.*

Bizonyítás. Az állítást nem változtatja meg, ha a lánchoz hozzávesszük az $A_0 = \emptyset$ halmazt. A szigma-algebra tulajdonságai miatt nyilván az únió is $\mathcal{A}$-beli. Diszjunktizáljuk a fenti sorozatot, azaz tekintsük a diszjunkt $A_0, A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ sorozatot. Figyeljük meg, hogy az első n db ilyen halmaz uniója éppen A_n:

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1}),$$

hiszen $A_j \supset \bigcup_{j=1}^{n} A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$ tartalmazás nyilvánvaló, míg ha egy x elem a bal oldalon van, és k az a legkisebb index, amelyre $x \in A_k$, akkor $x \in A_k \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1})$ azaz a jobb oldalon levő halmaznak is eleme. Sőt ugyanezzel az érveléssel kapjuk, hogy

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$$

is teljesül. Ezért a mérték szigma-additivitását is felhasználva kapjuk, hogy

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu\left(A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} (A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n),$$

ami épp a bizonyítandó állítás. □

5.25. Példa. $\mathcal{A}$ legyen Ω összes részhalmaza, $x \in \Omega$ pedig tetszőleges. Ekkor az alábbiak szerint definiált

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvény mérték, amelyet *egy pontra koncentrált Dirac-mértéknek* neveznek.

A következő példa olyan lényeges, hogy egy állítás keretében fogalmazzuk meg.

5.26. Állítás. *Legyen $\Omega = \mathbb{R}$, tekintsük ezen a $\mathcal{B}$ szigma-algebrát, és legyen egy $[a, b)$ alakú intervallumon $\lambda([a, b)) = b - a$. Ez halmazfüggvény egyértelműen terjeszthető ki a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-beli Borel-halmazokra.*

5.27. Definíció. A fenti állításban szereplő mértéket Lebesgue-mértéknek nevezzük, és (a dimenzió feltüntetése nélkül) λ-val jelöljük.

5.28. Megjegyzés. A mértékelmélet klasszikus felépítésében a Lebesgue-mérték egy $\mathcal{B}_\mathbb{R}$-nél is bővebb halmazrendszeren definiált, azonban nekünk további kiterjesztésre (ún. teljessé tételre) nincs szükségünk.

5.29. Példák. (1) Bármely $b \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda(\{b\}) = 0$, ugyanis tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\{b\} \cup (b, b+\varepsilon) = [b, b+\varepsilon)$ miatt

$$\lambda(\{b\}) \leq \lambda([b, b+\varepsilon)) = \varepsilon,$$

vagyis a bal oldalnak valóban nullának kell lennie.

(2) $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, mert megszámlálható sok nullmértékű halmaz (egy pontból álló halmazok) uniójaként áll elő.

5.30. Megjegyzés. Van olyan valós számokból álló halmaz is (az ún. Cantor-halmaz), amelynek ugyanannyi eleme van, mint a valós számok halmazának, Lebesgue-mértéke mégis nulla.

5.31. Állítás. *A fenti $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ Lebesgue-mérték rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

- *λ eltolásinvariáns, azaz tetszőleges $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ esetén*
$$\lambda(B) = \mu\left(\{\mathbf{b} + \mathbf{x} : \mathbf{b} \in B\}\right).$$
- *λ kívülről és belülről is reguláris, azaz tetszőleges $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ esetén*
$$\lambda(B) = \inf\{\mu(G) : G \supset B, G \textit{ nyílt}\},$$
$$\lambda(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B, F \textit{ zárt}\}.$$

5.32. Definíció. A fentiekben többször használt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ struktúrát *mértéktérnek* nevezzük, ahol $\mathcal{A}$ egy szigma-algebra az Ω alaphalmazon, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ pedig egy mérték.

5.33. Példa. A Lebesgue-mérték fontos általánosítása az, amikor $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növő, jobbról folytonos függvény, és $\lambda_F([a, b)) = F(b) - F(a)$. A fentiekhez hasonlóan ez is egyértelműen terjeszthető ki a $\mathcal{B}$ halmazra, amit Lebesgue–Stieltjes-mértéknek nevezünk. Fontos esete ennek, amikor F egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, azaz a fentieken kívül $\lim_{-\infty} F = 0$ és $\lim_{\infty} F = 1$ teljesül. Ekkor egy H halmaz mértéke annak valószínűségét adja meg, hogy X értéke a H halmazba esik.

5.34. Definíció. Adott mértéktér esetén azt mondjuk, hogy egy tulajdonság valamilyen H halmazon *majdnem mindenütt* teljesül, ha van olyan nulla mértékű $H_0 \subset H$ halmaz, hogy az adott tulajdonság a $H \setminus H_0$ halmazon teljesül.

5.3. Mérhető függvények, Lebesgue-integrál

Definiáljuk függvények egy alkalmas osztályát, amelyeken integrált tudunk majd értelmezni.

5.35. Definíció. Adott $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér esetén azt mondjuk, hogy az $f : \Omega \to [0, \infty)$ függvény *mérhető*, ha minden $t \in \mathbb{R}^+$ esetén az $\{x : f(x) > t\}$ halmaz $\mathcal{A}$-beli; és ennek megfelelően definiáljuk az $\tilde{F} : [0, \infty) \to [0, \infty]$ függvényt az $\tilde{F}(t) = \mu\{x : f(x) > t\}$ hozzárendeléssel.

5.36. Állítás. *Ha $f : \Omega \to [0, \infty)$ mérhető, akkor az $\{x : f(x) \geq t\}, \{x : f(x) \leq t\}, \{x : f(x) < t\}$ halmazok is $\mathcal{A}$-beliek.*

Bizonyítás. A második eset igazolása a legegyszerűbb. Tudjuk, hogy $\{x : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$, ezért $\{x : f(x) \leq t\} = \{x : f(x) > t\}^c$ miatt a szigma-algebra komplementerképzésre való zártságát használva kapjuk a kívánt tartalmazást.
Tudjuk azt is, hogy

$$\{x : f(x) \geq t\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x : f(x) > t - \frac{1}{j}\},$$

amiből a szigma-algebra megszámlálható metszetre való zártsága miatt kapjuk az első esetben szereplő tartalmazást.

Végül az $\{x : f(x) < t\} = \{x : f(x) \geq t\}^c$ azonosságot és a most igazolt $\{x : f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$ tartalmazást használva kapjuk, hogy $\{x : f(x) < t\} \in \mathcal{A}$. □

5.37. Megjegyzés. Hasonló technikával igazolható, hogy ha azt tesszük fel, hogy a fenti négy típusú halmaz közül egy típus benne van egy szigma-algebrában, akkor az összes többi típus is. Emiatt az 5.35 Definícióban a mérhető függvények halmazát úgy is definiálhattuk volna, hogy a $\{x : f(x) > t\}$ típusú halmazok helyett valamelyik másik típusra követeljük meg, hogy $\mathcal{A}$-beli legyen.

5.38. Állítás. *Ha $f, g : \Omega \to [0, \infty)$ mérhetőek és $D_f = D_g$, akkor az $f + g$ függvény, valamint tetszőleges $c \geq 0$ esetén cf is mérhető.
Mérhető továbbá az $f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ hozzárendeléssel definiált függvény is.*

Bizonyítás. Csak az első két állítást igazoljuk. Az első bizonyításához azt kell meggondolni, hogy

$$\{x : f(x) + g(x) > t\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) > t - q\} \cap \{x : g(x) > q\},$$

amiből a szigma-algebra metszetre és megszámlálható unióra való zártsága miatt kapjuk az állítást.

Nyilván $\{x : cf(x) > t\} = \{x : f(x) > t/c\} \in \mathcal{A}$, vagyis cf valóban mérhető.

□

5.39. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mérhető függvény μ *mérték szerinti integrálját* az $\int f \, \mathrm{d}\mu := \int_0^\infty \tilde{F}(t) \, \mathrm{d}t$ Riemann-integrállal definiáljuk, amely az 5.16 Tétel miatt biztosan létezik (esetleg lehet ∞). Ha a fenti integrál véges, akkor az f függvényt *végesen integrálhatónak* nevezzük.

Ha a fenti mértéket a Lebesgue-mértéknek választjuk, akkor kapjuk a nemnegatív függvényekre vonatkozó *Lebesgue-integrál* definícióját.

Az eddigiekben csak nemnegatív függvények integráljával foglalkoztunk. Tetszőleges előjelű $g : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt bontunk fel a $g = g_+ - g_-$ összegre, ahol

$$g_+ = g(x) \vee 0 \qquad g_-(x) = -g(x) \vee 0.$$

Ezek nemnegatív függvények, összegük minden x helyen valóban $g(x)$, ami alapján a g függvény integrálját az

$$\int g \, \mathrm{d}\mu := \int g_+ \, \mathrm{d}\mu - \int g_- \, \mathrm{d}\mu$$

különbséggel definiáljuk, amennyiben ez értelmes, azaz a jobb oldalon szereplő két integrál közül legalább az egyik véges.

Gyakran beszélünk egy $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény A halmazon vett integráljáról is, ahol $A \in \mathcal{A}$. Ezt a következő módon értelmezzük:

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu \quad \text{ahol} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin A \\ f(x), & \text{ha } x \in A. \end{cases}$$

5.40. Állítás. *Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható, akkor mérhető is, és Riemann-integrálja megegyezik a Lebesgue-integráljával.*

5.41. Példa. Jelölje valamilyen $H \in \mathcal{A}$ halmazra χ_H ezen halmaz karakterisztikus függvényét, azaz legyen

$$\chi_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in H \\ 0, & \text{ha } x \notin H \end{cases}.$$

Ekkor

$$\tilde{F}(t) = \mu\{x : \chi(x) > t\} = \begin{cases} \mu(H), & \text{ha } t < 1 \\ 0, & \text{ha } t > 1, \end{cases}$$

vagyis $\int \chi_H = \int_0^\infty \tilde{F}(t) \,\mathrm{d}t = 1 \cdot \mu(H) = \mu(H)$.

5.42. Állítás. *Ha az $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ függvények végesen integrálhatók, és összegük értelmes, akkor tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansokkal*

$$\int c_1 f + c_2 g \,\mathrm{d}\mu = c_1 \int f \,\mathrm{d}\mu + c_2 \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Csak az állítás egyik részét igazoljuk; mégpedig azt, hogy a fenti feltételekkel $\int cf \,\mathrm{d}\mu = c \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Most definíció szerint teljesül, hogy

$$\tilde{F}_{cf}(t) = \mu\{x : cf(x) > t\} = \mu\{x : f(x) > t/c\} = \tilde{F}_f(t/c),$$

azaz

$$\int cf \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}_{cf}(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}_f(t/c) \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}_f(s) c \,\mathrm{d}s = c \int f \,\mathrm{d}\mu,$$

ahogy állítottuk.
Az összegre vonatkozó $\int f + g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$ egyenlőség igazolása összetettebb, ezért ezt nem részletezzük. □

5.4. A mérhető függvények elméletének nevezetes tételei

A fejezetben szereplő összes állítást adott $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér esetén igazoljuk.

5.43. Tétel. *(Beppo Levi - tétel vagy monoton konvergenciatétel)*
Legyen $f_1, f_2, \ldots$ egy végesen integrálható $\Omega \to \mathbb{R}$ függvényekből álló monoton növő sorozat, amelynek pontonkénti limesze f. Ekkor f integrálható és

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy f is mérhető, amihez azt kell igazolni, hogy minden $t \in \mathbb{R}^+$ esetén az $\{x : f(x) > t\}$ halmaz $\mathcal{A}$-beli. Nyilván az $f(x) > t$ reláció pontosan akkor teljesül, ha az $f(x)$-hez monoton növőleg konvergáló $f_n(x)$ sorozat tagjaira is teljesül $f_n(x) > t$ egy indextől kezdve. Emiatt

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > t\},$$

vagyis a szigma-algebra tulajdonságai miatt a bal oldali halmaz is $\mathcal{A}$-beli, azaz f mérhető.

Sőt az úniót bővülő halmazok sorozata adja, vagyis az 5.24 Állítás miatt nyilván

$$\mu\left(\{x : f(x) > t\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x : f_n(x) > t\}\right).$$

Ahhoz, hogy pozitív függvények Riemann-integrálját vehessük, az eredeti helyett tekintsük a $0, f_2 - f_1, f_3 - f_1, \ldots$ sorozatot, amely ugyanúgy monoton növő, pontonkénti limesze pedig $f - f_1$.

Vegyük észre, hogy ezen sorozat elemeire ugyanúgy

$$\tilde{F}(t) := \mu\left(\{x : f - f_1(x) > t\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x : f_n - f_1(x) > t\}\right) =: \lim_{n\to\infty} \tilde{F}_n(t)$$

sőt, mivel $\left(\tilde{F}_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ minden t-re monoton növő, ezért a 5.17 Tétel alkalmazható, amiből kapjuk, hogy

$$\int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty]} \tilde{F}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty]} \tilde{F}_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int f_n - f_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

vagyis az integrál linearitását használva mindkét oldalhoz az $\int f_1 \,\mathrm{d}\mu$ mennyiséget hozzáadva kapjuk a tétel állítását. □

A következő tétel tárgyalásához szükségünk lesz az alábbi egyszerű állításra.

5.44. Állítás. *Tetszőleges* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *sorozatra* $\liminf a_n = \sup_k \inf\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$.

Bizonyítás. Mivel (a_n)-nek van olyan részsorozata, amely $\liminf a_n$-hez tart, ezért minden k-ra $\liminf a_n \geq \inf\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$. Ekkor viszont k-ban mindkét oldal szuprémumát véve kapjuk, hogy

$$\liminf a_n \geq \sup_k \inf\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}.$$

Ha itt szigorú egyenlőtlenség állna, akkor valamilyen $s > 0$ szám esetén minden k-ra volna $\liminf a_n - s$-nél is kisebb eleme az $\inf\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ halmaznak, de akkor olyan részsorozata is, amelynek limesze $\liminf a_n - s$-nél is kisebb, ami ellentmondás. □

5.45. Lemma. *(Fatou-lemma)*
Legyen $n = 1, 2, \ldots$ *esetén* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *nemnegatív végesen integrálható függvény. Ekkor az* $f(x) := \liminf f_n(x)$ *hozzárendeléssel definiált függvény is végesen integrálható, továbbá teljesül a következő becslés:*

$$\liminf \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. A fenti állítás ötletét használva vezessük be az $f^k(x) := \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \ldots\}$ hozzárendeléssel adott függvényt. Ekkor a nyilvánvalóan

$$\{x : f^k(x) \geq t\} = \bigcap_{j\geq k} \{x : f^j(x) \geq t\},$$

teljesül, azaz az 5.37 Megjegyzés miatt f^k is mérhető. Sőt, $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozat, ezért minden x-ben ennek limesze az $f^k(x)$ értékekből álló halmaz szuprémuma, vagyis a 5.44 Állítás miatt

$$\lim_{k\to\infty} f^k(x) = \sup_k \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \ldots\} = \liminf f_n(x) = f(x),$$

tehát az $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra a monoton konvergenciatétel alkalmazható. Vegyük még figyelembe, hogy minden $j \geq k$ indexre fennáll az

$$\int_\Omega \inf_{j\geq k} f_j \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_j(x)\,\mathrm{d}\mu$$

egyenlőtlenség, tehát a

$$\int_\Omega \inf_{j\geq k} f_j \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{j\geq k} \int_\Omega f_j(x)\,\mathrm{d}\mu$$

becslés is. Most a monoton konvergenciatételt, $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monotonitását, f^k definícióját, az előző becslést, végül az 5.44 Állítást felhasználva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f^k\,\mathrm{d}\mu = \sup_k \int_\Omega f^k\,\mathrm{d}\mu = \sup_k \int_\Omega \inf_{j\geq k} f_j(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \\ &\leq \sup_k \inf_{j\geq k}\int_\Omega f_j(x)\,\mathrm{d}\mu = \liminf \int_\Omega f_j(x)\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

amellyel beláttuk a tételt. □

A fenti lemma legfontosabb következménye az elmélet második nagy tétele, a dominált konvergenciatétel vagy más néven Lebesgue-tétel.

5.46. Tétel. *(Lebesgue-tétel)*
Legyen $f_1, f_2, \ldots$ egy $\Omega \to \mathbb{R}$ típusú, mérhető függvényekből álló sorozat, amelynek pontonkénti limesze f. Továbbá tegyük fel, hogy van olyan végesen integrálható $g : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden n-re $|f_n| \leq g$ teljesül. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$.

Bizonyítás. Mindenekelőtt be kell látni, hogy ha a pontonkénti konvergencia teljesül, akkor

$$f_{n+} \to f_+ \qquad \text{és} \qquad f_{n-} \to f_-.$$

Ennek bizonyítását nem részletezzük, az az $f(x)$ előjelére vonatkozó esetszétválasztással könnyen adódik.
A tételt először a pozitív részekre vonatkozóan igazoljuk. Használjuk ehhez a Fatou-lemmát a nemnegatív f_{n+} függvények sorozatára. Mivel ennek limesze f_+, ezért egyszersmind $\liminf f_{n+} = f_+$ is igaz, vagyis az integrálokra

$$\int f_+\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_{n+}\,\mathrm{d}\mu.$$

Másrészt a feltétel miatt $f_{n+} \leq g$, vagyis $g - f_{n+}$ nemnegatív, és pontonként $g - f_+$-hoz tart. Vagyis a Fatou-lemma miatt

$$\begin{aligned}\int g\,\mathrm{d}\mu - \int f_+\,\mathrm{d}\mu &= \int g - f_+\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int g - f_{n+}\,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int g\,\mathrm{d}\mu + \liminf \int -f_{n+}\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathrm{d}\mu - \limsup \int f_{n+}\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

azaz mindkét oldalból az $\int g\,\mathrm{d}\mu$ mennyiséget kivonva, majd az előző formulával összevetve kapjuk, hogy

$$\limsup \int f_{n+}\,\mathrm{d}\mu \leq \int f_+\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_{n+}\,\mathrm{d}\mu,$$

ami csakis úgy teljesülhet, ha mindenhol egyenlőség érvényes. Ekkor viszont $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_{n+}\,\mathrm{d}\mu$ létezik, és limesze $\int f_+$, így

$$\lim_{n\to\infty}\int f_{n+}\,\mathrm{d}\mu = \int f_+\,\mathrm{d}\mu.$$

A fenti levezetést a $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvényre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int f_- \,\mathrm{d}\mu = \int (-f)_+ \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int (-f)_{n+} \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{n-} \,\mathrm{d}\mu,$$

amelyet az előzővel összevetve kapjuk a tétel állítását, azaz hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_{n+} \,\mathrm{d}\mu - \int f_{n-} \,\mathrm{d}\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int f_{n+} \,\mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_{n-} \,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

5.4.1. Szorzatmértékek és a Fubini-tétel A következő állításoknál mindenhol feltesszük, hogy az ott szereplő mértékek rendelkeznek a következő tulajdonsággal.

5.47. Definíció. Egy $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mértéket *szigma-végesnek* nevezünk, ha az Ω alaphalmaz előáll legfeljebb megszámlálható sok véges mértékű halmaz uniójaként.

5.48. Definíció. Adott $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ mértékterek esetén a bennük szereplő mértékek szorzatát az $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ szorzathalmazokat tartalmazó legszűkebb szigma-algebrán értelmezzük, amit $\mathcal{A}$-val jelölünk.
Legyen $\mu_1 \times \mu_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\mu_1 \times \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2). \tag{5.4}$$

5.49. Állítás. *A fenti* (5.4) *Definíció tényleg meghatározza a szorzatmértéket, azaz a fenti definícióval adott halmazfüggvény az $A_1 \times A_2$ alakú halmazokról egyértelműen terjeszthető ki az ezeket tartalmazó legszűkebb $\mathcal{A}$ szigma-algebrára.*

5.50. Példa. Ha $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1$, akkor $\mu_1 \times \mu_2 = \lambda_2$, azaz a kétdimenziós Lebesgue-mérték.

A szorzatmértékkel kapcsolatos állításokat sorolunk fel bizonyítás nélkül. Ehhez $B \in \mathcal{A}$ esetén definiáljuk a következő halmazokat:

$$B_x = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in B\} \qquad \text{és} \qquad B_y = \{x \in \Omega_1 : (x, y) \in B\}.$$

Nem triviális tény, hogy $B_x \in \mathcal{A}_2$ és $B_y \in \mathcal{A}_1$ teljesül tetszőleges $x \in \Omega_1$ és $y \in \Omega_2$ esetén.

5.51. Állítás. *A fent definiált szorzatmértékre teljesülnek a kövekezők:*

(i) *Tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ esetén fennáll, hogy*

$$\mu_1 \times \mu_2(B) = \int_{\Omega_1} \mu_2(B_x) \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \mu_1(B_y) \,\mathrm{d}\mu_2.$$

(ii) *A szorzatmérték kommutatív a következő értelemben: tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ esetén teljesül, hogy*

$$\mu_1 \times \mu_2(B) = \mu_2 \times \mu_1 \left(\{(y, x) : (x, y) \in B\}\right),$$

továbbá asszociatív: az $\{A_1 \times A_2 \times A_3 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, A_3 \in \mathcal{A}_3\}$ szorzathalmazokat tartalmazó legszűkebb szigma-algebra minden B elemére igaz, hogy

$$\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3) \left(\{(x, (y, z)) : (x, y, z) \in B\}\right) = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 \left(\{((x, y), z) : (x, y, z) \in B\}\right).$$

(iii) *Minden $f : \Omega_1 \to [0, \infty)$ mérhető függvény integrálja előáll, mint f szubgráfjának $\mu_1 \times \lambda_1$ mértéke, ahol a megszokott módon λ_1 az egydimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Azaz*

$$\int_{\Omega_1} f \,\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1 \times \lambda_1 \left(\{(x, y) : 0 \le y \le f(x)\}\right).$$

A bizonyítást egyik esetben sem részletezzük. Mindhárom állítás bizonyításának alapgondolata az, hogy az egyenlőség két oldalán szigma-véges mértékek állnak, amelyek $A_1 \times A_2$ alakú halmazokon azonosak, így az azokat tartalmazó legszűkebb szigma-algebrán is meg kell egyezniük.

Következményként a mértékelmélet harmadik alaptételét, a Fubini-tételt fogalmazzuk meg.

5.52. Tétel. *Legyen $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, \infty)$ mérhető függvény. Ekkor használva az $f(x, \cdot) : \Omega_2 \to [0, \infty)$, $f(x, \cdot)(y) = f(x, y)$ és az $f(\cdot, y) : \Omega_1 \to [0, \infty)$, $f(\cdot, y)(x) = f(x, y)$ jelöléseket, teljesül, hogy*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, \cdot) \,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\cdot, y) \,\mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2.$$

Bizonyítás. A bizonyításban mindenütt az 5.51 Állítás pontjait használjuk. Tudjuk, hogy a (iii) pont miatt

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) = (\mu_1 \times \mu_2) \times \lambda \left(\{((x, y), z) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right).$$

Ezt először a (ii), majd az (i), végül ismét az (iii) pontbeli azonosság alapján átalakítva

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) = (\mu_1 \times \mu_2) \times \lambda \left(\{((x, y), z) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right) = \\
&= \mu_1 \times (\mu_2 \times \lambda) \left(\{((x, (y, z)) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right) = \\
&= \int_{\Omega_1} (\mu_2 \times \lambda) \left(\{(y, z) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right) \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, \cdot) \,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1,
\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó első egyenlőséget adja.
A (ii) pontban szereplő kommutativitást használva ugyanilyen elven kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) = (\mu_1 \times \mu_2) \times \lambda \left(\{((x, y), z) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right) = \\
&= (\mu_2 \times \mu_1) \times \lambda \left(\{((y, x), z) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right) = \\
&= \mu_2 \times (\mu_1 \times \lambda) \left(\{((y, (x, z)) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right) = \\
&= \int_{\Omega_2} (\mu_1 \times \lambda) \left(\{(x, z) : 0 \le z \le f(x, y)\} \right) \mathrm{d}\mu_2 = \\
&= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\cdot, y) \,\mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2,
\end{aligned}$$

ami a második egyenlőség bizonyítása. □

Fontos speciális eset az, amikor mindkét mérték az egydimenziós Lebesgue-mérték. Ekkor a fenti jelölések helyett gyakran az

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

illetve

$$\int_{\Omega_2} f(x, \cdot) \,\mathrm{d}\mu_2 = \int_{\Omega_2} f(x, y) \,\mathrm{d}y \quad \text{és} \quad \int_{\Omega_1} f(\cdot, y) \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1} f(x, y) \,\mathrm{d}x$$

jelöléseket használják, amelyekkel a Fubini-tétel azt jelenti, hogy a különböző változók szerinti integrálás felcserélhető.

5.4.2. Azonos szigma-algebrán értelmezett mértékek kapcsolata: a Radon–Nikodym-tétel A következőkben a $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ és $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mértékterekben szereplő mértékek kapcsolatát vizsgáljuk, azaz feltesszük, hogy ezek azonos szigma-algebrán értelmezettek.

5.53. Definíció. Azt mondjuk, hogy a fenti ν mérték *abszolút folytonos* a μ mértékre nézve, ha $\mu(M) = 0$ esetén $\nu(M) = 0$ is teljesül.

Példa: A nulla pontra koncentrált δ_0 Dirac-mérték nem abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve $\mathbb{R}^d$-ben. Ugyanis a nulla pont Lebesgue-mértéke nulla, ugyanakkor δ_0 szerinti mértéke *egy*. Hasonlóan a Lebesgue-mérték sem abszolút folytonos a δ_0 Dirac-mértékre nézve, mert a $(0,1)^d$ kocka Lebesgue-mértéke *egy*, míg δ_0 szerinti mértéke *nulla*.

5.54. Tétel. *Tegyük fel, hogy a fenti μ és ν mértékek szigma-végesek, továbbá ν abszolút folytonos μ-re nézve. Ekkor létezik olyan $f : \Omega \to [0, \infty)$ $\mathcal{A}$-mérhető függvény, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$.*

A fenti tételben szereplő (az egyes mértékektől függő) f függvényt a ν mérték μ szerinti Radon–Nikodym-deriváltjának nevezzük, és gyakran így jelölik: $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Ez konstruktív módon limeszként is előállítható a klasszikus derivált mintájára.

Megjegyzés: A fizikai törvények korrekt felírásakor gyakran sűrűségekkel kell dolgoznunk. A fenti állítás ismeretében lehetünk biztosak abban, hogy ezek a sűrűségek léteznek és függvényként megadhatók. Ha például ν a tömegnek megfeleltetett mérték, továbbá μ a háromdimenziós Lebesgue-mérték, akkor a fenti állítás feltétele azt jelenti, hogy nem engedünk meg "tömegpontokat", sőt minden nulla térfogatú halmazról feltesszük, hogy tömege nulla. A fenti állítás azt mondja, hogy ekkor valóban létezik, az a ϱ függvény, amelyet sűrűségfüggvénynek nevezünk, azaz egy rögzített V térfogaton mért $m(V)$ össztömeget kiszámíthatjuk úgy, hogy azon a sűrűségfüggvényt a Lebesgue-mérték szerint integráljuk, azaz formulákkal

$$m(V) = \int_V \varrho \, \mathrm{d}\lambda.$$

6. FEJEZET

Valós vonalintegrálok

6.1. Definíció. Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható. Ekkor azt mondjuk, hogy φ egy *folytonosan deriválható L utat* határoz meg $\mathbb{R}^n$-ben.
Ha a fentiek mellett $\varphi|_{(\alpha,\beta)}$ injektív és deriváltja sehol sem nulla, akkor azt mondjuk, hogy φ *egyszerű, folytonosan deriválható utat* határoz meg $\mathbb{R}^n$-ben. Ennek értékkészletét *egyszerű, folytonosan deriválható görbének* nevezzük, és Γ-val jelöljük.
Ha egy egyszerű Γ görbére $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ is teljesül, akkor a görbét *zártnak* mondjuk.

6.2. Definíció. Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ által meghatározott *folytonosan deriválható út hossza* az $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$ felosztáshoz tartozó $\sum\limits_{k=1}^{m} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|$ összeg határértéke, ha a felosztás finomsága nullához tart.

A további állítások igazolásához szükségünk lesz a következő fontos technikai eredményre.

6.3. Lemma. *Ha $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható, akkor a különbségi hányados függvény egyenletesen tart a deriválthoz a következő értelemben:*
Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ esetén (ahol $t_k, t_{k-1} \in [\alpha, \beta]$) teljesül az alábbi becslés:

$$\left| \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - \varphi'(t_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

6.4. Állítás. *A $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ által meghatározott folytonosan deriválható út hossza* $\displaystyle\int_\alpha^\beta |\dot{\varphi}(t)|\,\mathrm{d}t.$

Bizonyítás. Jelölje most is $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$ az $[\alpha, \beta]$ felosztásának osztópontjait, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges!
Mivel φ folytonosan deriválható, ezért $|\dot{\varphi}(t)|$ folytonos, így Riemann-integrálható is, és integálja a $\sum_{k=1}^{m}(t_k - t_{k-1})|\dot{\varphi}(t_{k-1})|$ közelítő összeg határértékeként kapható meg, azaz van olyan δ_1, hogy az annál finomabb felosztásokon

$$\left| \int_\alpha^\beta |\dot{\varphi}(t)|\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{m}(t_k - t_{k-1})|\dot{\varphi}(t_{k-1})| \right| \le \varepsilon.$$

Másrészt tudjuk, hogy a 6.3 Lemma és a valós számokra érvényes $||a| - |b|| \le |a - b|$ egyenlőtlenség miatt van olyan δ_2, hogy az annál finomabb felosztás osztópontjain

$$|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| - (t_k - t_{k-1})|\dot{\varphi}(t_{k-1})| \le \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \cdot |t_k - t_{k-1}|$$

teljesül.
Vagyis egy $\min\{\delta_1, \delta_2\}$-nél finomabb felosztás osztópontjain

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\alpha^\beta |\dot\varphi(t)| \,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^m |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \right| \le \\
&\le \left| \int_\alpha^\beta |\dot\varphi(t)| \,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) |\dot\varphi(t_{k-1})| \right| + \\
&+ \left| \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) |\dot\varphi(t_{k-1})| - \sum_{k=1}^m |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \right| = \\
&= \left| \int_\alpha^\beta |\dot\varphi(t)| \,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) |\dot\varphi(t_{k-1})| \right| + \\
&+ \left| \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) |\dot\varphi(t_{k-1})| - |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \right| \le \\
&\le \varepsilon + \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} (t_k - t_{k-1}) = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

ami pontosan azt jelenti, hogy ha a felosztás finomítása nullához tart, akkor

$$\sum_{k=1}^m |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| \to \int_\alpha^\beta |\dot\varphi(t)| \,\mathrm{d}t,$$

ahogy a tételben állítottuk. □

A következő szakaszban használni fogjuk az $\mathbb{R}^n$-beli skalárszorzásra vonatkozó $(\cdot \,|\, \cdot)$ jelölést.

6.5. Definíció. Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható, amelynek értékkészlete Γ, továbbá $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folytonos. Legyen továbbá $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$ egy felosztás, és $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ tetszőleges. A fenti felosztáshoz tartozó

$$\sum_{k=1}^m (f(\varphi(\tau_k)) \,|\, \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))$$

összeg $\max\limits_{k=1,2,\ldots,m} t_k - t_{k-1} \to 0$ esetén vett határértékét (ha az létezik), az f függvény L *úton vett vonalintegráljának* nevezzük, és $\displaystyle\int_L f$ -fel jelöljük.

A következő állításokat gyakran használjuk majd minden külön hivatkozás nélkül, de bizonyításukat nem részletezzük.

6.6. Állítás. *A fenti határérték valóban létezik, és*

$$\int_L f = \int_\alpha^\beta (f(\varphi(t)) \,|\, \dot\varphi(t)) \,\mathrm{d}t.$$

6.7. Állítás. *Ha Γ egyszerű, folytonosan deriválható görbe, $\varphi(\alpha) \ne \varphi(\beta)$ és $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor $\int_\Gamma f$ nem függ a φ függvénytől.*

6.1. A vonalintegrál tulajdonságai

Először néhány egyszerű tulajdonságot sorolunk fel, amelyek a definíció alapján közvetlenül igazolhatók; ezt csak a harmadik esetben részletezzük..

1. Függvények szerinti additivitás.
Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ (szakaszonként) folytonosan differenciálható függvény, $\Gamma := R_\varphi$ és $g, h : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények. Ekkor tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén
$$\int_L (\lambda g + \mu h)(x) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_L g(x) \, \mathrm{d}x + \mu \int_L h(x) \, \mathrm{d}x.$$
2. Út szerinti additivitás.
Legyenek $\varphi_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ és $\varphi_2 : [\beta, \gamma] \to \mathbb{R}^n$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvények, amelyek az L_1, illetve az L_2 utat határozzák meg, és legyen $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$. Ekkor legyen
$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [\alpha, \beta] \\ \varphi_2(t) & t \in [\beta, \gamma] \end{cases},$$
vagyis $\varphi : [\alpha, \gamma] \to \mathbb{R}^n$. Ekkor φ is szakaszonként folytonosan differenciálható függvény lesz, továbbá $\Gamma = R_\varphi$ és tetszőleges $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény esetén
$$\int_L g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{L_1} g(x) \, \mathrm{d}x + \int_{L_2} g(x) \, \mathrm{d}x.$$
3. A vonalintegrál triviális becslése.
Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ (szakaszonként) folytonosan differenciálható függvény (amely meghatároz egy L szakaszonként folytonosan differenciálható utat), legyen $\Gamma = R_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ és $g : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folytonos. Ekkor
$$\left| \int_L g(x) \, \mathrm{d}x \right| = \left| \int_L (g(\varphi(t)) \mid \dot{\varphi}(t)) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_\alpha^\beta |(g(\varphi(t)) \mid ,) \dot{\varphi}(t)| \, \mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \int_\alpha^\beta |g(\varphi(t))| \cdot |\dot{\varphi}(t)| \, \mathrm{d}t \leq \sup_\Gamma |g| \cdot \int_\alpha^\beta |\dot{\varphi}(t)| \, \mathrm{d}t = \sup_\Gamma |g| \cdot [L \text{ ívhossza}] .$$

6.8. Megjegyzések. (1) A fenti fogalmak és állítások egyszerűen terjeszthetők ki arra az esetre, amikor $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonos, és szakaszonként folytonosan deriválható; Legyen ezek az $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$ felosztás által meghatározott szakaszok. Ekkor a megfelelő vonalintegrál kiszámítása az
$$\int_L f = \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f(\varphi(t)) \mid \dot{\varphi}(t)) \, \mathrm{d}t$$
képlettel történik.

(2) Az előző állítás miatt általában görbék menti integrálokról beszélünk; ekkor a bevezetőben említett φ függvény és az általa meghatározott út általában nem is lényeges, csak φ értékkészlete.

6.1.1. A vonalintegrál úttól való függetlensége Azt vizsgáljuk, milyen feltételekkel lesz független egy vonalintegrál attól, hogy a $\varphi(\alpha)$ és $\varphi(\beta)$ pontok közt milyen úton (görbén) számítjuk ki. Egy erre vonatkozó elégséges feltétel a következő.

6.9. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz! Ha az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvénynek létezik primitív függvénye, azaz olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $F' = f$, akkor minden folytonosan deriválható $L \subset \Omega$ út esetén a fenti jelölésekkel*
$$\int_L f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

azaz a vonalintegrál csak f-nek az út kezdő- és végpontjában felvett értékétől függ, az úttól nem.

Bizonyítás. A fenti képlet, az $F' = f$ feltétel, a kompozíciófüggvény deriválási szabálya, majd a Newton–Leibniz-formula felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_L f &= \int_\alpha^\beta (f(\varphi(t)) \mid \dot\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (F'(\varphi(t)) \mid \dot\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),\end{aligned}$$

ahogy a tételben állítottuk. □

Fontos kérdés, hogy igaz-e a fenti állítás megfordítása.

6.10. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz! Ha az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény vonalintegrálja csak f-nek az út kezdő- és végpontjában felvett értékétől függ, az úttól nem, akkor f-nek létezik primitív függvénye, azaz olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $F' = f$.*

Bizonyítás. A feltétel miatt rögzített $\mathbf{a} \in \Omega$ esetén az

$$F : \Omega \to \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{x}) = \int_{L(\mathbf{a},\mathbf{x})} f$$

hozzárendeléssel adott függvény értelmes, ahol $L(\mathbf{a},\mathbf{x})$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x}$ pontok között haladó tetszőleges út, amelyet a $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ függvény határoz meg, azaz $\varphi(\alpha) = \mathbf{a}$ és $\varphi(\beta) = \mathbf{x}$.
Be fogjuk látni, hogy a fent definiált F függvény j-edik változó szerinti deriváltja éppen f_j. Legyen

$$\tilde\varphi : [\alpha, \beta + h] \to \Omega, \quad \tilde\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in [\alpha, \beta] \\ \varphi(\beta) + (t-\beta)\mathbf{e}_j & t \in [\beta, \beta + h], \end{cases}$$

ahol $\mathbf{e}_j$ a j-edik egységvektor. Most $\tilde\varphi$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j$ közti folytonos utat határoz meg, továbbá $t \in [\beta, \beta + h]$ esetén $\dot{\tilde\varphi}(t) = \mathbf{e}_j$, vagyis

$$\begin{aligned}\partial_j F(\mathbf{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{L(\mathbf{a},\mathbf{x}+h\mathbf{e}_j)} f - \int_{L(\mathbf{a},\mathbf{x})} f\right) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_\alpha^{\beta+h} (f(\tilde\varphi(t)) \mid \dot{\tilde\varphi}(t))\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta (f(\varphi(t)) \mid \dot\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} (f(\tilde\varphi(t)) \mid \dot{\tilde\varphi}(t))\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} (f(\tilde\varphi(t)) \mid \mathbf{e}_j)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Azt kellene tehát igazolni, hogy

$$f_j(\varphi(\beta)) - \frac{1}{h}\lim_{h\to 0}\int_\beta^{\beta+h} (f(\tilde\varphi(t)) \mid \mathbf{e}_j)\,\mathrm{d}t = 0.$$

A bal oldal abszolútértéke a következőképpen alakítható át és becsülhető:

$$\begin{aligned}&\left| f_j(\varphi(\beta)) - \lim_{h\to 0}\int_\beta^{\beta+h} f_j(\tilde\varphi(t))\,\mathrm{d}t \right| = \lim_{h\to 0}\left| \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} f_j(\varphi(\beta)) - \int_\beta^{\beta+h} f_j(\tilde\varphi(t))\,\mathrm{d}t \right| \le \\ &\le \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} |f_j(\varphi(\beta)) - f_j(\tilde\varphi(t))|\,\mathrm{d}t \le \lim_{h\to 0}\max_{t\in[\beta,\beta+h]} |f_j(\varphi(\beta)) - f_j(\tilde\varphi(t))|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Itt viszont $f_j \circ \tilde\varphi$ folytonossága miatt nyilvánvalóan a jobb oldal limesze nulla, amivel az állítást beláttuk. □

Összefoglalva tehát az alábbi fontos tételt igazoltuk.

6.11. Tétel. *Az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény vonalintegrálja pontosan akkor független az integrálási úttól, ha létezik primitív függvénye.*

6.12. Megjegyzés. Ha $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vonalintegrálja független az integrálási úttól, akkor egy zárt görbe mentén vett integrálja nulla, hiszen ennek ugyannak kell lennie, mint egy egyetlen pontból álló görbén vett integrál. Sőt, ez fordítva is igaz: ha f bármely zárt görbén vett integrálja nulla, akkor vonalintegráljának függetlennek kell lennie az úttól. Ezt a két tulajdonságot többször említjük a továbbiakban akár felváltva is.

Az a fontos kérdés maradt tehát hátra, hogy eldöntsük, mikor létezik egy $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek primitív függvénye.

Tudjuk, hogy ha $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható (ekkor $\partial_k f_j$ folytonos minden k, j-re) és létezik $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, hogy $\Phi' = f$, akkor a Young-tételt is felhasználva

$$\partial_k f_j = \partial_k \left(\partial_j \Phi\right) = \partial_j \left(\partial_k \Phi\right) = \partial_j f_k.$$

Tehát egy folytonosan deriválható f függvény primitív függvénye csak akkor létezhet, ha $\partial_k f_j = \partial_j f_k$.

Ez azonban önmagában nem elégséges feltétel. Legyen ugyanis

$$\Omega := \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |\mathbf{x}| < 2\right\},$$

továbbá

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

Most $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$, ugyanis

$$\partial_2 f_1 \left(x_1, x_2\right) = \frac{-\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 2x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}$$

és hasonlóan

$$\partial_1 f_2 \left(x_1, x_2\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}.$$

De ha létezne f-nek primitív függvénye, akkor a 6.11 Tétel szerint

$$\int_{S_1} f\left(x\right) dx = 0$$

volna. Azonban az S_1-gyel jelölt egységkörön vett integrálja, amit az egységkört megadó

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(t) = (\cos t, \sin t)$$

függvényt használva számolunk ki, a következő:

$$\int_{S_1} f\left(x\right)\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi} \left(f\left(\varphi\left(t\right)\right) \mid \dot{\varphi}\left(t\right)\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \left(-\sin t\right) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t\right]\ \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Ez azonban nem nulla, vagyis f-nek nem lehet Ω-n primitív függvénye.

A primitív függvény létezésének vizsgálata előtt egy kis kitérőt kell tennünk: a paraméteres integrálok deriválhatóságát kell megvizsgálnunk.

6.1.2. Paraméteres integrálok

6.13. Definíció. Legyen $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény. Legyen

$$g : [a, b] \to \mathbb{R},\ g(x) := \int\limits_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y,$$

amelyet az f függvény y szerinti paraméteres integráljának nevezünk.

6.14. Tétel. *A fenti definícióban szereplő g függvény folytonos.*

Bizonyítás. Most rögzített $x_0 \in [a, b]$ esetén

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y - \int_c^d f(x_0, y)\ \mathrm{d}y \right| =$$
$$= \left| \int_c^d (f(x, y) - f(x_0, y))\ \mathrm{d}y \right| \leqslant \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)|\ \mathrm{d}y$$

teljesül. Mivel f folytonos, $D_f = [a, b] \times [c, d]$ korlátos és zárt halmaz (azaz sorozatkompakt is), ezért f egyenletesen folytonos. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $|(x, y) - (x^*, y^*)| < \delta$ esetén

$$|f(x, y) - f(x^*, y^*)| < \varepsilon.$$

Most $x^* = x_0$, $y^* = y$ esetén ez azt jelenti, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon,$$

minden $y \in [c, d]$ értékre, vagyis

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon (d - c),$$

ami éppen a g függvény x_0-beli folytonosságát jelenti. □

6.15. Tétel. *Ha $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos és $\partial_1 f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ folytonosan kiterjeszthető $[a, b] \times [c, d]$-re, akkor g folytonosan differenciálható $[a, b]$-n, és*

$$g'(x) = \int\limits_c^d \partial_1 f(x, y)\ \mathrm{d}y,$$

vagyis felcserélhetjük a deriválást és az integrálást.

Bizonyítás. Legyenek $x, x_0 \in (a, b)$, továbbá $x \neq x_0$! Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel felhasználásával kapjuk, hogy van olyan x és x_0 közötti ξ_y, hogy

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int\limits_c^d \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}\ \mathrm{d}y = \int\limits_c^d \partial_1 f(\xi_y, y)\ \mathrm{d}y,$$

azaz teljesül a következő becslés:

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d \partial_1 f(x_0, y)\ \mathrm{d}y \right| = \left| \int_c^d (\partial_1 f(\xi_y, y) - \partial_1 f(x_0, y))\ \mathrm{d}y \right| \leq$$
$$\leqslant \int_c^d |\partial_1 f(\xi_y, y) - \partial_1 f(x_0, y)|\ \mathrm{d}y,$$

vagyis ha $x \to x_0$, akkor $\xi_y \to x_0$ miatt a $\partial_1 f$ függvény egyenletes folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$\left|\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_c^d \partial_1 f(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right| = \lim_{x\to x_0}\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_c^d \partial_1 f(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right| = 0,$$

ami épp a bizonyítandó állítás. □

6.2. Primitív függvény létezésének feltétele

A primitív függvény létezésére vonatkozó további feltétel a tartomány alakjára vonatkozik.

6.16. Definíció. Egy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományt *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha tetszőleges, a tartományban levő egyszerű, zárt, (szakaszonként) folytonosan differenciálható $\Gamma = R_\varphi$ görbét folytonos mozgatással annak tetszőleges $\mathbf{y}$ pontjára lehet húzni úgy, hogy végig a tartományban maradjunk, azaz létezik olyan

$$\psi : [0,1] \times [\alpha, \beta] \to \Omega$$

folytonos függvény, hogy

$$\psi(0,s) = \varphi(s) \quad \text{és} \quad \psi(1,s) = \mathbf{y}$$

teljesül minden $s \in [\alpha,\beta]$ esetén.

6.17. Definíció. Egy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományt *csillagszerűnek* nevezünk, ha létezik olyan $\mathbf{b} \in \Omega$ pontja, hogy minden $\mathbf{x} \in \Omega$ esetén az $\mathbf{b}$ és $\mathbf{x}$ pontokat összekötő szakaszt tartalmazza Ω.

6.18. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagszerű, továbbá $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonosan deriválható függvény, hogy minden $1 \le j,k \le n$ indexre $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ teljesül. Ekkor f-nek létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. Feltehető az, hogy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Ha ugyanis ebben az esetben igazoljuk az állítást, akkor tetszőleges $\mathbf{b}$ és Ω tartomány esetén tekintve az

$$f_0 : \{\mathbf{x} - \mathbf{b} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega\} \to \mathbb{R}^n, \quad f_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{b})$$

hozzárendeléssel adott függvénynek létezik F_0 primitív függvénye, hiszen értelmezési tartománya csillagszerű az origóra nézve. Ekkor viszont az

$$F : \Omega \to \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

hozzárendeléssel adott függvény deriváltjára

$$F'(\mathbf{x}) = F_0'(\mathbf{x} - \mathbf{b}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{b}) = f(\mathbf{x}),$$

vagyis f-nek is van primitív függvénye.

A bizonyítás konstruktív: az $\mathbf{0}$ és $\mathbf{x}$ pontokat összekötő szakaszt megadó

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) = t\mathbf{x}$$

függvényt használva legyen F az f függvény fenti szakaszon vett vonalintegrálja, azaz

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^1 (f(\varphi(t)) \mid \dot\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t\mathbf{x})\mathbf{x}\,\mathrm{d}t.$$

Belátjuk, hogy $\partial_j F(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x})$. Most

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k(t\mathbf{x})\, x_k\,\mathrm{d}t,$$

ahol a parciális deriváltak folytonosságát és az előző tételt használva $j \neq k$ esetén

$$\partial_j \int_0^1 f_k(t\mathbf{x})\, x_k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \partial_j f_k(t\mathbf{x})\, t \cdot x_k \,\mathrm{d}t,$$

$j = k$ esetén pedig

$$\partial_k \int_0^1 f_k(t\mathbf{x})\, x_k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\partial_k f_k(t\mathbf{x})\, t \cdot x_k + f_k(t\mathbf{x})\right] \mathrm{d}t.$$

Vagyis összefoglalva

$$\begin{aligned}\partial_j F(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \partial_j f_k(t\mathbf{x})\, t \cdot x_k + f_j(t\mathbf{x})\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \partial_k f_j(t\mathbf{x})\, t \cdot x_k + f_j(t\mathbf{x})\right] \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\partial_t \left[f_j(t\mathbf{x})\, t\right] = \sum_{k=1}^n \partial_k f_j(t\mathbf{x})\, x_k \cdot t + f_j(t\mathbf{x}),$$

így

$$\partial_j F(\mathbf{x}) = \int_0^1 \dot{g}_j(t)\, \mathrm{d}t = g_j(1) - g_j(0) = f_j(\mathbf{x}) - 0 = f_j(\mathbf{x})$$

teljesül, amit igazolni akartunk. $\square$

7. FEJEZET

Komplex függvénytan

Ebben a fejezetben komplex függvények tulajdonságait vizsgáljuk, azaz $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvényeket. Kiderül majd, hogy az ezen függvények deriválthatóságára bevezetett fogalom nagyon szigorú feltételt ad. Lényegében ennek elemzése az alábbi anyagrész tárgya.

7.1. Definíció. Egy $\Omega \subset \mathbb{C}$ (vagy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) halmazt *tartománynak* nevezünk, ha az összefüggő és nyílt.

A fejezetben vizsgált függvények minden esetben $\Omega \to \mathbb{C}$ típusúak lesznek, ahol $\Omega \subset \mathbb{C}$ mindig egy tartományt jelöl.

7.1. Komplex differenciálhatóság és vonalintegrál

7.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ értelmezve egy $z_0 \in \mathbb{C}$ pont valamilyen környezetében. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható (deriválható)* z_0-ban, ha a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték létezik $\mathbb{C}$-ben. A limeszt a valós függvények deriválásához hasonlóan így jelöljük: $f'(z_0)$.

7.3. Definíció. Az $\Omega \to \mathbb{C}$ függvényt *holomorfnak* nevezzük, ha az Ω minden pontjában deriválható.

7.4. Megjegyzés. A komplex differenciálhatóságnak van szemléletes geometriai jelentése is. Mivel $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, és az

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

egyenlőség teljesül, ezért a jobb oldallal definiált

$$z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

függvény az $S_r(z_0)$ körvonal pontjait először $S_r(0)$-ba tolja, aztán a $f'(z_0)$ komplex számmal szorozza (ami egy forgatás és nyújtás egymásutánja), majd $f(z_0)$-vel eltolja. Így egy körvonalat körvonalba képez; sőt, a körüljárás irányát is megtartja. Röviden azt szokták mondani, hogy egy deriválható függvény aszimptotikusan körtartó.

Vizsgáljuk meg, mit jelent az, hogy a $g : \Omega \to \mathbb{C}$ függvény differenciálható egy z pontban!
A határérték vizsgálatához vezessük be azokat az $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek az alábbi hozzárendeléssel adottak:

$$\widetilde{g}_1(x_1, x_2) = \mathfrak{Re}\, g(x_1 + ix_2) \quad \text{és} \quad \widetilde{g}_2(x_1, x_2) = \mathfrak{Im}\, g(x_1 + ix_2).$$

Ekkor a definíciónak teljesülnie kell abban az esetben is, ha

$$(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \to 0,\ \mathfrak{Re}\, h_k = 0 \quad \text{és} \quad (h_k)_{k\in\mathbb{N}} \to 0,\ \mathfrak{Im}\, h_k = 0.$$

Most $\mathfrak{Im}\, h_k = 0$ esetén

$$\lim_{h_k \to 0} \mathfrak{Re}\, \frac{g(z+h_k)-g(z)}{h_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{\tilde{g}_1(x_1+h_k, x_2)-\tilde{g}_1(x_1,x_2)}{h_k} = \partial_1 \tilde{g}_1(x_1,x_2),$$

illetve

$$\lim_{h_k \to 0} \mathfrak{Im}\, \frac{g(z+h_k)-g(z)}{h_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{\tilde{g}_2(x_1+h_k, x_2)-\tilde{g}_2(x_1,x_2)}{h_k} = \partial_1 \tilde{g}_2(x_1,x_2)$$

teljesül, és hasonlóan

$$\lim_{ih_k \to 0} \mathfrak{Re}\, \frac{g(z+h_k i)-g(z)}{ih_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{\tilde{g}_2(x_1, x_2+h_k)-\tilde{g}_2(x_1,x_2)}{h_k} = \partial_2 \tilde{g}_2(x_1,x_2),$$

illetve

$$\lim_{h_k \to 0} \mathfrak{Im}\, \frac{g(z+h_k)-g(z)}{ih_k} = -\lim_{h_k \to 0} \frac{\tilde{g}_1(x_1, x_2+h_k)-\tilde{g}_1(x_1,x_2)}{h_k} = -\partial_2 \tilde{g}_1(x_1,x_2).$$

A fenti egyenlőségeket összevetve adódnak a

$$\partial_1 \tilde{g}_1(x_1,x_2) = \partial_2 \tilde{g}_2(x_1,x_2) \quad \text{és} \quad \partial_1 \tilde{g}_2(x_1,x_2) = -\partial_2 \tilde{g}_1(x_1,x_2) \tag{7.1}$$

egyenlőségek, amelyeket *Cauchy–Riemann-egyenleteknek* nevezünk.

7.5. Definíció. Ha $\Gamma \subset \Omega$ szakaszonként folytonosan differenciálható, egyszerű görbe, amely a $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ függvénnyel adott, akkor a $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ komplex függvény Γ-n vett *vonalintegrálját* az

$$\int_\Gamma g(z)\, \mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta g(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \mathfrak{Re}\, g(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t + i \int_\alpha^\beta \mathfrak{Im}\, g(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t$$

komplex értékű integrállal definiáljuk.

7.6. Megjegyzés. Ha a fenti esetben Γ zárt, és ez a $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ függvénnyel adott, akkor a $\tilde{\varphi} : [0, \beta - \alpha] \to \mathbb{C}$, $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(\beta - s)$ hozzárendeléssel adott függvény ugyancsak a Γ görbét adja meg, azonban könnyen kiszámítható, hogy

$$\int_\alpha^\beta g(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{\beta-\alpha} g(\tilde{\varphi}(s))\dot{\tilde{\varphi}}(s)\, \mathrm{d}s$$

Tehát ha egy zárt görbén vett vonalintegrálról beszélünk, akkor rögzíteni kell, hogy a görbét mely (szakaszonként folytonosan deriválható) függvény értékkészleteként kaptuk. Valójában (a 6.7 Tétel miatt) csak azt kell rögzíteni, hogy a görbén milyen irányú körüljárást határoz meg φ. A körüljárás iránya mindig legyen pozitív, azaz a

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi(\gamma) = \cos\gamma + i \sin\gamma$$

függvényhez tartozó körüljárási iránnyal megegyező.

7.2. A Cauchy-alaptétel és következményei

7.7. Tétel. *(Cauchy-alaptétel) Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf. Ekkor g integrálja bármely szakaszonként folytonosan differenciálható, Ω-ban haladó egyszerű zárt görbén nulla.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, mely egy egyszerű zárt $\Gamma \subset \Omega$ görbét határoz meg. Definíció szerint ekkor

$$\int_\Gamma g\,(z)\ \mathrm{d}z := \int_\alpha^\beta g\,(\varphi\,(t))\,\dot{\varphi}\,(t)\ \mathrm{d}t.$$

Legyenek $\varphi_1,\ \varphi_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ az alábbi egyenlőséggel definiált függvények:

$$\varphi_1\left(t\right) = \mathfrak{Re}\,\varphi(t) \quad \text{és} \quad \varphi_2\left(t\right) = \mathfrak{Im}\,\varphi\left(t\right),$$

továbbá használjuk az előző tételben bevezetett $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ jelöléseket. Ekkor

$$\int_\alpha^\beta g\left(\varphi(t)\right)\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left(g\left(\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)\right)\right)\cdot\left(\dot{\varphi}_1(t) + i\dot{\varphi}_2(t)\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\dot{\varphi}_1\left(t\right) - g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\dot{\varphi}_2\left(t\right) +$$

$$+\, i\left(g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\dot{\varphi}_1\left(t\right) + g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\dot{\varphi}_2\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Ennek valós része a következő:

$$\int_\alpha^\beta \left(\left(g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), -g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\right) \mid \left(\dot{\varphi}_1\left(t\right), \dot{\varphi}_2\left(t\right)\right)\right)\mathrm{d}t, \tag{7.2}$$

ahol a Cauchy–Riemann-egyenletek miatt

$$\partial_2 g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = -\partial_1 g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)),$$

tehát az első komponensben szereplő $(g_1, -g_2)$ függvénynek létezik potenciálfüggvénye az Ω egyszeresen összefüggő tartományon, azaz a fenti (7.2) képletben adott zárt görbén vett integrálja nulla. Hasonlóan, a keresett integrál képzetes része a következő:

$$\int_\alpha^\beta \left(\left(g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\right) \mid \left(\dot{\varphi}_1\left(t\right), \dot{\varphi}_2\left(t\right)\right)\right)\mathrm{d}t, \tag{7.3}$$

ahol a Cauchy–Riemann-egyenletek miatt

$$\partial_2 g_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \partial_1 g_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t)),$$

tehát az első komponensben szereplő (g_2, g_1) függvénynek létezik potenciálfüggvénye az Ω egyszeresen összefüggő tartományon, vagyis (a 7.3) képletben adott zárt görbén vett integrálja nulla. □

A Cauchy-alaptétel közvetlen következményeit vizsgáljuk meg. Minden esetben Γ egy egyszerű, zárt, szakaszonként folytonosan differencálható görbe $\mathbb{C}$-ben.

7.8. Tétel. *Egy $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ nyílt halmaz két összefüggő komponensből (részből) áll, a két komponens közül az egyik korlátos, a másik nem. A korlátos komponenst Γ belsejének nevezzük (és $\mathring{\Gamma}$-val jelöljük), a nem korlátos komponenst Γ külsejének.*

7.9. Megjegyzés. A tétel állítása triviálisnak tűnik, bizonyítása mégis nagyon összetett.

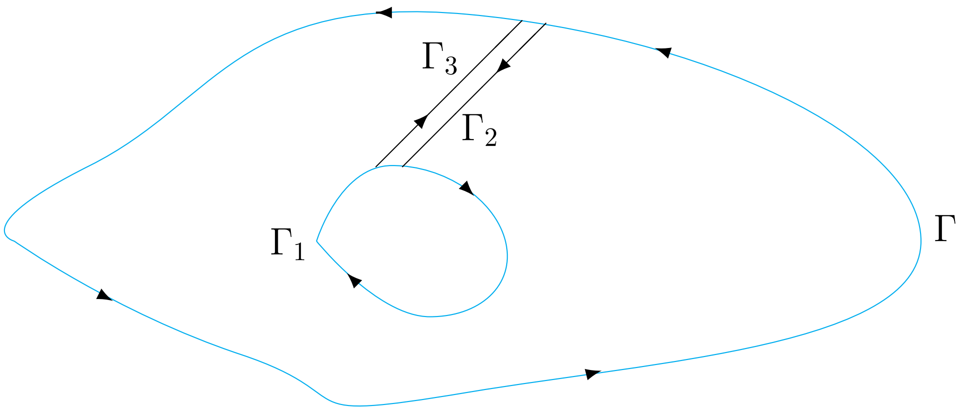
7.10. Tétel. *Legyenek $\Gamma, \Gamma_1 \subset \Omega$ egyszerű, zárt, szakaszonként folytonosan differenciálható görbék, legyen $\Gamma_1 \subset \mathring{\Gamma}$. tegyük fel továbbá, hogy $\mathring{\Gamma}\setminus(\Gamma_1 \cup \mathring{\Gamma}_1) \subset \Omega$, vagyis hogy Ω tartalmazza a Γ és Γ_1 "közötti" tartományt. Legyen $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf. Ekkor*

$$\int_\Gamma f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Csak a bizonyítás vázlatát adjuk meg, amely erősen a szemléletre támaszkodik. Legyen az ábrán ε a Γ_2 és Γ_3 görbék távolsága, és jelölje Γ_ε, illetve $\Gamma_{1,\varepsilon}$ azokat a görbéket, amelyeket úgy kapunk Γ-ból, illetve Γ_1-ből, hogy azoknak a Γ_2 és Γ_3 görbék közti részét elhagyjuk.

Ekkor a Cauchy-alaptételt alkalmazva a $\Gamma_\varepsilon, \Gamma_2, -\Gamma_{1,\varepsilon}, \Gamma_3$ utakból álló szakaszonként folytonosan differenciálható zárt görbére, teljesül, hogy

$$0 = \int_{\Gamma_\varepsilon} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_{1,\varepsilon}} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_3} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z.$$



1. ábra.

Ha a jobb oldalon az $\varepsilon \to 0$ limeszt vesszük (azaz Γ_2 "közel kerül" Γ_3-hoz) akkor kapjuk, hogy

$$0 = \int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz,$$

ami éppen a tétel állítását jelenti. $\square$

A fenti tétel általánosítása a következő, amelyet nem igazolunk, de később használni fogunk.

7.11. Tétel. *Legyenek $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_k \subset \Omega$ diszjunkt, egyszerű, zárt, szakaszonként folytonosan differenciálható görbék, amelyekre $\Gamma_j \subset \mathring{\Gamma}$ és a $\mathring{\Gamma}_j$ halmazok diszunktak ($j = 1, 2, \ldots, k$). Legyen f holomorf egy olyan tartományon, amely tartalmazza a $\mathring{\Gamma} \setminus (\mathring{\Gamma}_1 \cup \mathring{\Gamma}_2 \cup \cdots \cup \mathring{\Gamma}_k)$ halmazt. Ekkor*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} f(z)\,dz.$$

7.3. A Cauchy-féle integrálformula, deriváltja és alkalmazásai

7.12. Tétel. *(Cauchy-féle integrálformula) Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $\Gamma \subset \Omega$ egyszerű, zárt, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe (ekkor $\mathring{\Gamma} \subset \Omega$), és $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf. Ekkor tetszőleges $z \in \mathring{\Gamma}$ esetén*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Bizonyítás. Legyen

$$K_{\varrho}(z) := \{\zeta \in \mathbb{R} : |\zeta - z| = \varrho\}$$

a z középpontú, ϱ sugarú körvonal, ahol ϱ-t olyan kicsinek választjuk, hogy $K_{\varrho}(z) \subset \mathring{\Gamma}$ érvényes. Ekkor a Cauchy-alaptétel közvetlen következménye szerint

$$\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{K_{\varrho}(z)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

ahol először az

$$\int_{K_{\varrho}(z)} \frac{1}{\zeta - z}$$

integrált számítjuk ki.
Most a $\zeta = z + \varrho\cos(t) + i\varrho\sin(t)$ paraméterezés mellett $\zeta - z = \varrho\cos(t) + i\varrho\sin(t)$, tehát valóban teljesül, hogy

$$K_\varrho(z) = \{\zeta \in \mathbb{R} : |\zeta - z| = \varrho\},$$

így $K_\varrho(z)$ a

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,,\ \varphi(t) = z + \varrho\cos(t) + i\varrho\sin(t)$$

hozzárendeléssel adott függvényhez tartozó zárt görbe, ahol

$$\varphi'(t) = -\varrho\sin(t) + i\varrho\cos(t)\,.$$

A vonalintegrál definícióját használva tehát

$$\int_{K_\varrho(z)} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho\cos(t) + i\varrho\sin(t)}\left[-\varrho\sin(t) + i\varrho\cos(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Ezek szerint akkor

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} g(z)\, 2\pi i = \frac{1}{2\pi i} g(z) \int_{K_\varrho(z)} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

alakba írható.
A tétel igazolásához tehát elgendő belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan ϱ, hogy a következő becslés teljesül:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - g(z)\right| \le \varepsilon. \tag{7.4}$$

Felhasználva, hogy az

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - g(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int_{K_\varrho(z)} \frac{g(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right|$$

egyenlőség érvényes, kapjuk egyszerű számolással, majd az integrál triviális becslésével, hogy

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - g(z)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \int_{K_\varrho(z)} \frac{g(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_\varrho(z)} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \varrho \cdot \sup_{\zeta \in K_\varrho(z)} \frac{|g(\zeta) - g(z)|}{\varrho} = \sup_{\zeta \in K_\varrho(z)} |g(\zeta) - g(z)|.$$

Ha itt $\varrho \to 0$, akkor a $\zeta \to z$ teljesül, azaz a g függvény z pontban vett folytonosságát használva $g(\zeta) \to g(z)$, tehát a kívánt (7.4) becslés elég kis ϱ esetén valóban teljesül. □

7.13. Definíció. Egy $\Gamma \subset \mathbb{C}$ egyszerű (nem feltételen zárt) szakaszonként folytonosan differenciálható görbe és $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ folytonos függvény esetén a

$$G : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C},\ G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

függvényt *Cauchy-típusú integrálnak* nevezzük. Az egyszerűség kedvéért a jelölésben a Γ görbét nem tüntetjük fel.

7.14. Tétel. *A fenti G függvény a $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ halmazon holomorf és*

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Bizonyítás. Csak a $k = 1$ esetet látjuk be, hasonló - de összetettebb - számolással teljes indukcióval a tétel igazolható. Tehát ezt szeretnénk igazolni:

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Először a bal oldalhoz tartozó különbségi hányados függvény alakítjuk át:

$$\frac{G(z+h) - G(z)}{h} = \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z - h}\,\mathrm{d}\zeta - \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{h}\left[\frac{g(\zeta)}{\zeta - z - h} - \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\right]\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta)\,\frac{(\zeta - z) - (\zeta - z - h)}{h(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta$$

Az állítás igazolásához a következő különbséget kell tehát becsülnünk:

$$\left|\frac{G(z+h) - G(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma g(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right]\mathrm{d}\zeta\right| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma g(\zeta)\,\frac{(\zeta - z) - (\zeta - z - h)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| = \frac{|h|}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq$$
$$\leqslant \frac{|h|}{2\pi}\cdot|\Gamma|\cdot\sup_{\zeta\in\Gamma}\frac{1}{|\zeta - z - h|\cdot|\zeta - z|^2}, \tag{7.5}$$

ahol $|\Gamma|$ jelöli Γ hosszát.
Mivel $\Gamma \subset \mathbb{C}$ korlátos és zárt, ezért sorozatkompakt is, így a

$$d_\Gamma : \Gamma \to \mathbb{C},\ d(\zeta) = |\zeta - z|$$

folytonos függvénynek van minimuma azaz létezik $\zeta_0 \in \Gamma$, hogy $2d := |\zeta_0 - z| = \inf_{\zeta\in\Gamma}|\zeta - z|$.
Ha most $|h| \leq d$, akkor

$$|\zeta - z - h| \geqslant |\zeta - z| - |h| \geq 2d - d = d,$$

tehát a (7.5) becslést folytatva kapjuk, hogy

$$\left|\frac{G(z+h) - G(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{|h|}{2\pi}\cdot|\Gamma|\cdot\frac{1}{d(2d^2)},$$

amely nullához tart, ha $h \to 0$. Azaz

$$\left|\lim_{h\to 0}\frac{G(z+h) - G(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{2\pi}\cdot|\Gamma|\cdot\frac{1}{d(2d^2)} = 0,$$

amivel a $k = 1$ esetre igazoltuk a tétel állítását. □

Fontos speciális eset az, amikor $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf, $z_0 \in \Omega$ tetszőleges, $\Gamma = K_\varrho(z_0)$ olyan körvonal (ld. a 7.12 Tétel bizonyítását), amely belsejével együtt az Ω halmazban van. Ekkor a Cauchy-féle integrálformula alapján

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\varrho(z_0)} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta,$$

az előző tétel szerint pedig

$$g^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_\varrho(z_0)} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta,$$

vagyis g a z_0 pontban k-szor is deriválható. Ezt fogalmazzuk meg a következő fontos tételben.

7.15. Tétel. *Ha $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf, akkor akárhányszor is deriválható Ω minden pontjában.*

A valós esethez hasonlóan most kapcsolatot létesítünk a vonalintegrál és a primitív függvény között.

7.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $g : \Omega \subset \mathbb{C}$ folytonos függvény $\int_\Gamma g(z)\, \mathrm{d}z$ vonalintegráljának értéke tetszőleges Ω-ban haladó egyszerű, szakaszonként folytonosan differenciálható Γ görbe esetén annak csak a kezdő- és végpontjától függ. Ennek megfelelően az $a \in \Omega$ rögzített pont esetén felírt*

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{C}, \ \Phi(z) := \int_a^z g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

függvény értelmes, ahol az integrálás tetszőleges olyan görbén történik, amelynek végpontjai a és z, továbbá Φ deriváltjára

$$\Phi'(z) = g(z)$$

teljesül.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a Φ függvény defníciója szerint

$$\frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{z+h} g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta - \int_a^{z} g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \right] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

teljesül. Ekkor tehát a

$$\left| \frac{\Phi(z+h) - \Phi(z)}{h} - g(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{h} \int_z^{z+h} g(z)\, \mathrm{d}\zeta \right| =$$
$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} (g(\zeta) - g(z))\, \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{1}{|h|} |h| \sup_{\zeta \in L(z,z+h)} |g(\zeta) - g(z)|,$$

becslés érvényes (itt a z és $z+h$ pontokat összekötő szakaszon vettük az integrált), ahol $h \to 0$ esetén a jobb oldal és így a bal oldal is 0-hoz tart. □

A fenti tétel nyilvánvaló következménye az alábbi.

7.17. Tétel. *(Morera tétele):*
Ha $g : \Omega \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, amelynek az Ω-ban haladó egyszerű szakaszonként folytonosan differenciálható görbéken vett integrálja csak a görbe kezdő- és végpontjától függ, akkor g holomorf.

Ugyanis előbbi tétel szerint a $\Phi(z) = \int_a^z g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$ hozzárendeléssel adott függvény differenciálható és $\Phi'(z) = g(z)$, tehát Φ differenciálható, ezért kétszer is, így g holomorf.

7.18. Lemma. *Legyen $\Gamma \subset \mathbb{C}$ egyszerű, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, továbbá $f_k : \Gamma \to \mathbb{C}$ folytonos függvények, ahol $k \in \mathbb{N}$. Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k = f$ sor egyenletesen konvergens, akkor f is folytonos, továbbá*

$$\int f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(z)\,dz,$$

vagyis az integrálás és az összegzés felcserélhető.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy ha a $g_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ folytonos függvényekre $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k = g$ teljesül egyenletesen, akkor ezek valós és komplex részére is ugyanez áll fenn, tehát a valós függvényekre vonatkozó hasonló állítás miatt kapjuk, hogy

$$\int_\alpha^\beta \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k = \int_\alpha^\beta \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{Re}\, g_k + i\,\mathfrak{Im}\, g_k = \int_\alpha^\beta \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{Re}\, g_k + i \int_\alpha^\beta \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{Im}\, g_k =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\alpha^\beta \mathfrak{Re}\, g_k + i \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\alpha^\beta \mathfrak{Im}\, g_k = \mathfrak{Re} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\alpha^\beta g_k + i\,\mathfrak{Im} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\alpha^\beta g_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\alpha^\beta g_k.$$

Legyen $\Gamma = R_\varphi$, ahol $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható. A fenti egyenlőséget a $g_k(t) = f_k(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)$ hozzárendeléssel adott függvényre alkalmazva nyerjük tehát, hogy

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_k(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Gamma f_k(z)\,dz,$$

amit bizonyítani akartunk. □

7.4. Komplex függvénysorok tulajdonságai, Taylor-sorfejtés

7.19. Definíció. Legyenek $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$, f_k folytonosak. Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k = f$ az Ω *belsejében egyenletesen konvergens*, ha minden $K \subset \Omega$ sorozatkompakt halmaz esetén a sor a K halmazon egyenletesen konvergens.

7.20. Tétel. *(Weierstrass-tétel komplex függvényekre)*
Legyenek az $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ függvények holomorfak, továbbá az $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ sor Ω belsejében egyenletesen konvergens. Ekkor

(1) $f := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ is holomorf,

(2) $f' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} {f_k}'$,

(3) $f^{(j)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^{(j)}$ egyenletesen konvergens Ω belsejében minden $j \in \mathbb{N}$-re.

Bizonyítás. Egyrészt tudjuk, hogy $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ folytonos az Ω halmazon, hiszen a sor Ω belsejében egyenletesen konvergens).
Belátjuk, hogy f differenciálható tetszőleges $z_0 \in \Omega$ egy kis $B_r(z_0) \subset \Omega$ környezetében.

Vegyünk egy $\Gamma \subset B_r(z_0)$ egyszerű, szakaszonként folytonosan differenciálható, zárt görbét! Az előbbi lemma alapján a sor Γ-n vett egyenletes konvergenciáját használva kapjuk, hogy

$$\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\Gamma \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Gamma f_k(z)\ \mathrm{d}z = 0,$$

vagyis a Morera-tétel alapján f valóban holomorf.

A második állítás bizonyításához a Cauchy-féle integrálformulát használjuk. Eszerint ha $z \in B_r(z_0)$, akkor

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Most jegyezzük meg, hogy mivel a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ sor Ω belsejében érvényes egyenletes konvergens, ezért a

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

sorra ugyanez érvényes. Ezért azt kapjuk, hogy

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(z),$$

ami bizonyítja a tétel második pontját.

Végül a lemma miatt a fenti egyenlőségben szereplő integrálok is egyenletesen konvergensek, vagyis valóban

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(z).$$

egyenletesen. Ezt a bizonyított elv szerint ismét tagonként deriválhatjuk, amiből kapjuk a tétel harmadik állítását. □

7.21. Példa. Tekintsük a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ hatványsort!

Ha ennek konvergenciasugara $R > 0$, akkor $|z - z_0| < R$ esetén a sor konvergens, továbbá minden R-nél kisebb sugarú, z_0 középpontú körben a hatványsor egyenletesen konvergens. Mivel $f_k(z) = c_k (z - z_0)^k$ holomorf, és az f_k függvényekből álló sor a konvergencia sugár belsejében egyenletesen konvergens, így a Weierstrass-tételből következően a sor összege is holomorf, és a sor tagonként akárhányszor deriválható.

Továbbá az

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

definícióval adott összegfügvény ekkor a konvergenciakör belsejében tagonként differenciálható, ezért egyszerű számolással kapjuk, hogy a valós esettel analóg módon $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Valójában a fordított eset a fontos; adott f függényt próbálunk meg komplex hatványsor alakjában megadni.

7.22. Definíció. Legyen f holomorf z_0 egy környezetében. Ekkor az f függvényhez tartozó z_0 körüli Taylor-sort így értelmezzük:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

A Taylor-formula vizsgálata előtt egy fontos példát említünk, amelyet fel fogunk használni.

7.23. Példa. Az $f(z) := \frac{1}{1-z}$ hozzárendeléssel adott f függvény holomorf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ tartományon, hiszen deriváltját a valós esettel analóg módon ott képlettel megadhatjuk.

Szintén a valós esettel analóg módon kapjuk, hogy $z \neq 1$ esetén

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n,$$

ahol mindkét oldalon az $n \to \infty$ határértéket véve $|z| < 1$ esetén adódik, hogy

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

A sorfejtések elemzésénél többször használjuk majd a következő jelölést, amely adott $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartományra és $z \in \Omega$ pontra vonatkozik:

$$B_R(z) = \text{maximális } \Omega\text{-beli } z \text{ középpontú nyílt körlap.}$$

Mivel az Ω tartományt most rögzítjük, a fenti jelölésben nem használtuk.

7.24. Tétel. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf. Ekkor az f függvényt előállítja Taylor-sora tetszőleges $z_0 \in \Omega$ pont körül a $B_R(z_0)$ körlapon.*
Azaz formulával:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

ahol $z \in B_R(z_0)$.

Bizonyítás. Legyen $z \in B_R(z_0)$, és válasszuk az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarat úgy, hogy $|z - z_0| < r < R$.
Használjuk továbbá az

$$K_r(z_0) := \{\zeta : |\zeta - z_0| = r\}$$

jelölést is.
A Cauchy-féle integrálformulát $K_r(z_0)$-ra, mint zárt görbére és z-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

ahol a nevező:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

Itt $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$ érvényes, ugyanis $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$. Tehát

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}},$$

amely a Weierstrass-kritérium szerint $\zeta \in K_r(z_0)$ esetén egyenletesen konvergens.

Így

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(z_0)} f(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r(z_0)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,$$

ahol valóban

$$f^{(k)}(z_0) = c_k = \frac{k!}{2\pi i}\int_{K_r(z_0)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

azaz

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

érvényes. □

A fenti tétel fontos következménye az alábbi.

7.25. Állítás. *Legyenek f, g holomorf függvények az $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartományon, továbbá $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ és $z_* \in \Omega$ olyanok, hogy*

$$\lim(z_j)_{j\in\mathbb{N}} = z_* \quad \text{és} \quad z_j \neq z_*,\ f(z_j) = g(z_j)\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ekkor $f(z) = g(z)$ érvényes az egész Ω halmazon.

Bizonyítás. Világos, hogy a két függvény z_*-beli folytonossága miatt a sorozatfolytonosság elvét használva $f(z_*) = g(z_*)$.

Először belátjuk, hogy $f(z) = g(z)$ érvényes minden $B_R(z_*) \subset \Omega$ nyílt körlapon. Fejtsük Taylor-sorba az f és g függvényt z_* körül, és írjuk fel egyenlőségüket a $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sorozat pontjaiban!

$$f(z_j) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(z_*)}{j!}(z_j-z_*)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{g^{(j)}(z_*)}{j!}(z_j-z_*)^j = g(z_j)\,, \tag{7.6}$$

ahol az összeg első tagja azonos, tehát

$$\frac{f'(z_*)}{1!}(z_j-z_*) + \frac{f^{(2)}(z_*)}{2!}(z_j-z_*)^2 + \frac{f^{(3)}(z_*)}{3!}(z_j-z_*)^3 + \dots =$$
$$= \frac{g'(z_*)}{1!}(z_j-z_*) + \frac{g^{(2)}(z_*)}{2!}(z_j-z_*)^2 + \frac{g^{(3)}(z_*)}{3!}(z_j-z_*)^3 + \dots .$$

Mivel $z_j - z_* \neq 0$, ezért azzal osztva

$$f'(z_*) + \frac{f^{(2)}(z_*)}{2!}(z_j-z_*) + \frac{f^{(3)}(z_*)}{3!}(z_j-z_*)^2 + \dots =$$
$$= g'(z_*) + \frac{g^{(2)}(z_*)}{2!}(z_j-z_*) + \frac{g^{(3)}(z_*)}{3!}(z_j-z_*)^2 + \dots$$

adódik. Mivel a két oldalon álló hatványsor $B_R(z_*)\setminus z_*$-ban konvergens, ezért z_*-ban is, így ott is folytonos. Ha tehát a két oldalon álló hatványsor a $z_j \neq z_*$ pontokban azonos, akkor $z_j = z_*$ -ban is, amit felírva kapjuk, hogy $f'(z_*) = g'(z_*)$. Az eljárást folytatva (vagyis a (7.6) első két tagját elhagyva, $z_j - z_*$-gal osztva) nyerjük, hogy $f^{(2)}(z_*) = g^{(2)}(z_*)$. Az eljárást folytatva kapjuk, hogy (7.6)-ban a két oldalon szereplő Taylor-sorok azonosak, vagyis valóban $f(z) = g(z)$ teljesül a $B_R(z_*) \subset \Omega$ nyílt körlapon.

Végül azt igazoljuk, hogy a két függvény tetszőleges $z \in \Omega$ pontban is azonos. Legyen $U \subset \Omega$ azon pontok halmaza, ahol f és g összes deriváltja megegyezik. Most láttuk be, hogy ez nem üres, hiszen z_* ilyen tulajdonságú pont. Sőt, a fenti gondolatmenet alapján U nyílt, mert ha egy z pont benne van, akkor a $B_R(z)$ körlapon f és g Taylor-sora azonos, tehát ezen a körlapon akármelyik pont olyan tulajdonságú, mint z_*, azaz ott az összes derivált is azonos.

Másrészt, ha $z^* \notin U$, akkor $(f-g)^{(j)}(z^*) \neq 0$ valamilyen j indexre, vagyis az $f-g$ függvény folytonossága miatt ugyanez teljesül z^* valamilyen környezetében. Tehát ha U^c nem lenne üres, akkor Ω két diszjunkt nem üres nyílt halmaz úniója volna, ami egy összefüggő halmazra nem teljesülhet.

Azaz $U = \Omega$, amivel a tétel állítását beláttuk. □

7.26. Definíció. Legyen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf. Azt mondjuk, hogy z_0 az f függvénynek *n-szeres gyöke*, ha

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \;\; f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

7.27. Állítás. *Az $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre vonatkozó alábbi állítások ekvivalensek:*

- *z_0 az f-nek n-szeres gyöke*
- *$f(z) = (z-z_0)^n g(z)$, ahol g holomorf z_0 egy környezetében és $g(z_0) \neq 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \text{ és } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

teljesül! Fejtsük Taylor-sorba f-et z_0 körül:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k =$$
$$= (z-z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n}.$$

Ekkor legyen

$$g(z) := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n} = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n},$$

ha $z \neq z_0$, vagyis a bal oldal korlátos a $B_R(z_0) \setminus z_0$ halmazon, ami azt jelenti, hogy a bal oldalon levő hatványsor konvergenciasugara is legalább R. Ekkor viszont ott egyenletesen is konvergens, tehát a Weierstrass-tétel miatt ott deriválható. Végül $g(z_0) = f^{(n)}(z_0) \neq 0$ teljesül, vagyis az első tulajdonságból valóban következik a második.

Fordítva, tegyük fel, hogy

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z)$$

alakú, ahol g holomorf és $g(z_0) \neq 0$.

Most a g függvényt z_0 körül sorba fejtve kapjuk, hogy

$$g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (z-z_0)^l,$$

ahol a feltétel miatt $c_0 \neq 0$. Vagyis

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (z-z_0)^{l+n} = c_0(z-z_0)^n + c_1(z-z_0)^{n+1} + ...$$

amely f Taylor-sora.

Leolvashatjuk, hogy itt az első n db együttható, azaz $f(z_0), f'(z_0), \ldots, f^{(n-1)}(z_0)$ nulla, viszont $f^{(n)}(z_0) = g(z_0) \cdot n! \neq 0$. Tehát a második tulajdonságból következik az első. □

7.5. Egész függvények tulajdonságai és nevezetes egész függvények

7.28. Definíció. Ha az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény holomorf, akkor f-et *egész függvénynek* nevezzük.

7.29. Tétel. *(Liouville-tétel)*
Ha az f egész függvény korlátos, akkor f konstansfüggvény.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy f holomorf $\mathbb{C}$-n. Fejtsük Taylor-sorba $z_0 = 0$ körül! Vezessük be az

$$S_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\} \quad \text{és} \quad M = \sup_{\mathbb{C}} |f|$$

jelöléseket!
Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$-re érvényes az

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

előállítás, vagyis a tétel igazolásához elegendő belátni, hogy $k \neq 0$ esetén $c_k = 0$.
Tudjuk, hogy

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

amelyet a következő módon becsülhetünk:

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M}{r^{k+1}} = \frac{M}{r^k}.$$

Mivel ez minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén érvényes, ezért ha $k \geq 1$, akkor $|c_k|$ minden pozitív számnál kisebb, tehát nulla. Ezzel a fentiek értelmében a tételt beláttuk. □

7.30. Tétel. *(az algebra alaptétele)*
Legyen P egy legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomfüggvény! Ekkor van gyöke, azaz létezik $z_0 \in \mathbb{C}$, amelyre $P(z_0) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $P(z) \neq 0$ érvényes az egész $\mathbb{C}$ halmazon. Ekkor persze $\frac{1}{P}$ egész függvény. Belátjuk, hogy korlátos is. Legyen tehát

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \text{ ahol } n \geq 1 \text{ és } a_n \neq 0.$$

Ekkor

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| = \frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{z^n \left|a_n + a_{n-1} z^{-1} + ... + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}\right|},$$

ahol

$$\lim_{|z| \to \infty} a_n + a_{n-1} z^{-1} + ... + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n} = a_n.$$

Van tehát olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $|z| \geq r$ esetén

$$\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq \frac{|a_n|}{2},$$

vagyis ekkor

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| = \frac{1}{z^n \left|a_n + a_{n-1} z^{-1} + ... + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}\right|} \leq \frac{2}{r^n \cdot |a_n|}.$$

Másrészt $|z| \leq r$ esetén is érvényes egy

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq M$$

becslés valamilyen $M \in \mathbb{R}^+$ számmal, hiszen a lehetséges z értékek halmaza most sorozatkompakt.
Így tehát valóban korlátos egészfüggvény lesz $\frac{1}{P}$, vagyis konstans, így maga a polinom is az. Tehát egy olyan komplex polinomfüggvény, amelyiknek nincs gyöke, csakis egy konstansfüggvény lehet. □

A következő szakaszban nevezetes komplex függvényeket tárgyalunk.

7.31. Definíció. Legyen minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

továbbá

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

végül

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots.$$

A valós esettel analóg módon belátható, hogy a definíció értelmes abban az értelemben, hogy a megadott hatványsorok konvergenciasugara ∞, azaz a fent definiált függvények valóban $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ típusúak.

7.32. Állítás. *Tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén fennáll, hogy*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Bizonyítás. A definíciót és a binomiális tételt használva kapjuk, hogy

$$e^{z_1+z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right],$$

ami definíció szerint a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$ sorok Cauchy-szorzata. Mivel ezek abszolút konvergensek, ezért valóban

$$e^{z_1+z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = e^{z_1}e^{z_2}$$

teljesül. □

A fentiek szerint $z = x + iy$ esetén (ahol $x, y \in \mathbb{R}$) fennáll, hogy $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, ahol

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) =$$
$$= \cos y + i \sin y$$

azaz

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{7.7}$$

Ebből az is következik, hogy

$$|e^z| = e^x = e^{\mathfrak{Re}\,(z)} \quad \text{és} \quad \arg e^z = y = \mathfrak{Im}\,(z)\,.$$

Definíció szerint az is teljesül, hogy

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right)$$

és

$$e^{-iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...\right) + i\left(-\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + ...\right),$$

így

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... = \cos z,$$

valamint

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... = \sin z$$

is érvényes.
Fennáll továbbá, hogy

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right]^2 + \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right]^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} =$$
$$= \frac{2+2}{4} = 1,$$

valamint érvényesek a valós trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós képletek.

Használva a (7.7) formulát kapjuk továbbá, hogy

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z\left(\cos 2\pi + i \sin 2\pi\right) = e^z,$$

azaz e^z periodikus $2\pi i$ szerint.

Ugyancsak a (7.7) formulát használva kapjuk, hogy

$$|e^z| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x.$$

Emiatt $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Ugyanakkor $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ miatt $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos ix = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \mathrm{ch}\, x,$$

és ugyanúgy $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$ miatt $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\mathrm{sh}\, x,$$

vagyis a trigonometrikus függvények nem lesznek korlátosak, hanem a képzetes változó szerint exponenciálisan nőnek.

7.6. A Laurent-sorfejtés és a reziduum-tétel

Idáig az Ω tartományon holomorf függvények analízisével és Taylor-sorával foglalkoztunk. Felmerül a kérdés, hogy nem lehet-e egységesen, valamilyen hatványsor alakjában felírni azokat a függvényeket is, amelyek az Ω halmaznak csak egyes pontjaiban nem értelmezettek (esetleg éppen azon pontok körül, ahol nincsenek értelmezve).

7.33. Definíció. $f : \Omega \setminus z_0 \to \mathbb{C}$ holomorf. Ekkor a z_0 pontot az f függvény *izolált szinguláris pontjának* nevezzük.

7.34. Megjegyzés. Ha az f függvény rögzített, a z_0 pontot a fenti esetben egyszerűen csak szinguláris pontnak nevezzük.

7.35. Tétel. *Tegyük fel, hogy f holomorf az $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ tartományon, ahol $0 < R \leq \infty$. Ekkor*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

teljesül minden $z \in \Omega$ esetén, ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Ezt nevezzük f Laurent-sorfejtésének.

Bizonyítás. A bizonyítás első fele nem lesz teljes, a szemléletre hagyatkozunk. Legyenek adott $z \in \Omega$ esetén $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy

$$0 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R.$$

Ekkor a 1 Ábra esetéhez hasonlóan látható, hogy a Cauchy-féle integrálformula szerint

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

teljesül, vagyis $\zeta \in S_{r_2}$ esetén

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

érvényes, ahol a sor egyenletesen konvergens $\zeta \in S_{r_2}$ esetén.
Ha $\zeta \in S_{r_1}$, akkor

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^m =$$
$$= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}}.$$

Most az $m = -n - 1$ új indexszel

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

tehát kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}} f(\zeta)\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta + \sum_{n=-1}^{-\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

ahol a Cauchy-alaptétel következménye miatt vehetünk S_{r_1}, S_{r_2} helyett S_r-et. Az utolsó egyenlőségből leolvashatjuk, hogy valóban

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

alakú, ahol $c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ és $0 < r < R$. □

7.36. Megjegyzés. A Laurent-sorfejtés egyértelmű. Ugyanis nem nehéz belátni, hogy ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(z-z_0)^n,$$

akkor $d_n = c_n$.
A Laurent-sorfejtés egyenletesen konvergens minden Ω-ban fekvő sorozatkompakt halmazon.

7.37. Definíció. Az

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Laurent-sorban szereplő első összeget az f függvény *főrészének*, a második összeget az f függvény *reguláris részének* nevezzük.

- Ha f főrésze nulla, azaz $n < 0$ esetén $c_n = 0$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek z_0-ban *megszüntethető szingularitása* van.
- Ha véges sok negatív indexű együttható nem 0, akkor z_0-t *pólusnak* nevezzük (az ilyen együtthatók száma a pólus rendje).
- Ha végtelen sok negatív indexre az együttható nem 0, akkor azt mondjuk, f -nek z_0-ban *lényeges szingularitása* van.
- A c_{-1} együtthatót az f függvény z_0-beli *reziduumának* nevezzük, és a következő módon jelöljük:

  $$\mathrm{Res}_{z_0} f := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

  ahol a 7.35 tételt használtuk $n = 1$ esetén.

7.38. Megjegyzés. Definíció szerint teljesül ekkor az

$$\int_{S_r} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}_{z_0} f \tag{7.8}$$

azonosság. Számunkra éppen ez lesz hasznos: a c_{-1} együttható, azaz az reziduum ismeretében vonalintegrálokat tudunk kiszámítani.

7.39. Tétel. *(Reziduum-tétel)*
Tegyük fel, hogy $f : \Omega \setminus \{z_1, z_2, ..., z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorf. Ekkor olyan egyszerű, zárt, szakaszonként folytonosan differenciálható $\Gamma \subset \Omega$ görbét véve, amelyre

$$\{z_1, z_2, ..., z_k\} \subset \mathring{\Gamma} \subset \Omega$$

teljesül, fennáll a következő egyenlőség:

$$\int_\Gamma f(\zeta)\ d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res_{z_j} f.$$

Bizonyítás. A Cauchy-alaptétel következménye szerint (ld. 7.11 Tétel), valamint a reziduumra vonatkozó (7.8) azonosság alapján teljesül, hogy

$$\int_\Gamma f(\zeta)\ d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f(\zeta)\ d\zeta = \sum_{j=1}^{k} 2\pi i \mathrm{Res}_{z_j} f,$$

ami éppen a tételben szereplő állítás. □

Azt a gyakorlatilag fontos kérdést vizsgáljuk, hogy a reziduumot hogyan lehet kiszámítani pólus esetén.
Feltesszük, hogy az f függvénynek z_0-ban m-edrendű pólusa van. Ekkor

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots,$$

vagyis

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \dots,$$

amely egy konvergens hatványsor. Ezt tagonként $m-1$-szer deriválva, majd a $z = z_0$ helyen kiszámítva kapjuk, hogy

$$\left(f(z)(z-z_0)^m\right)^{(m-1)}\Big|_{z=z_0} = c_{-1}(m-1)!,$$

tehát

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left(f(z)(z-z_0)^m\right)^{(m-1)}\Big|_{z=z_0}. \tag{7.9}$$

A reziduum kiszámításához használt gondolatmenet közvetlen következménye az alábbi állítás.

7.40. Állítás. *Az f függvénynek z_0-ban pontosan akkor van m-edrendű pólusa, ha a*

$$g(z) := f(z)(z-z_0)^m$$

hozzárendeléssel definiált függvény holomorf z_0 egy környezetében és $g(z_0) \neq 0$.

Egy komplex függvény gyökei gyökök és reciprokának pólusai közti kapcsolatot adja meg a következő állítás

7.41. Állítás. *Ha a h komplex függvény holomorf z_0 egy környezetében, és z_0-ban m-szeres gyöke van, akkor az $f = \frac{1}{h}$ függvénynek z_0-ban m-edrendű pólusa van.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a feltétel szerint

$$h(z) = (z-z_0)^m h_1(z)$$

teljesül, ahol $h_1(z_0) \neq 0$ és h_1 holomorf. Ezért

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m h_1(z)},$$

ahol $\frac{1}{h_1}$ holomorf z_0 egy környezetében, $\frac{1}{h_1}(z_0) \neq 0$, tehát $\frac{1}{h(z)}$-nek valóban m-edrendű pólusa van z_0-ban. □

A reziduum kiszámításának két egyszerű esetét ismertetjük a következőkben.

1. Tegyük fel, hogy h-nak z_0-ban egyszeres gyöke van, vagyis

$$h(z) = (z-z_0)\, h_1(z), \quad \text{ahol } h_1(z_0) \neq 0.$$

Az előző állítás szerint ekkor $\frac{1}{h}$-nak z_0-ban elsőrendű pólusa van, tehát (a 7.9) formulát az $m = 1$ esetre alkalmazva, és a $z \to \frac{z-z_0}{h(z)}$ hozzárendeléssel adott függvény z_0-beli folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{h}\right) = \left[\frac{z-z_0}{h(z)}\right]_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{h'(z_0)}.$$

2. Ha $f = \varphi\psi$ alakú, ahol φ holomorf z_0 egy környezetében, és ψ -nek elsőrendű pólusa van z_0-ban, akkor

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ...$$

és

$$\psi = \frac{d_{-1}}{z-z_0} + d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + ...,$$

így

$$f(z) = \varphi(z)\cdot\psi(z) = \frac{c_0 d_{-1}}{z-z_0} + (c_0 d_0 + c_1 d_{-1}) + (c_2 d_{-1} + c_1 d_0 + c_0 d_1)(z-z_0) + ...,$$

tehát

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = c_0 d_{-1} = \varphi(z_0)\cdot \mathrm{Res}_{z_0}\psi. \tag{7.10}$$

7.42. Példa. Számítsuk ki a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ valós improprius integrált!

Vegyük először észre, hogy a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ egyenlőség miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

érvényes, vagyis egy komplex értékű függvénynek a valós tengely egy szakaszán vett vonalintegrálját kell kiszámolni.

Most a $z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ hozzárendeléssel adott függvény $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$-ben holomorf, továbbá izolált szingularitása van az i és $-i$ helyeken.

Legyenek

$$S_R = \{z : |z| = R, \mathfrak{Im}\, z \geq 0\}, \quad \text{és} \quad \Gamma_R = S_R \cup [-R, R],$$

amellyel

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z,$$

azaz
$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z-\int_{S_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right).$$
A reziduum tétel alapján
$$\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\mathrm{Res}_i\left(z\mapsto\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right).$$
A reziduum kiszámításához vegyük észre, hogy
$$\frac{e^{iz}}{1+z^2}=e^{iz}\cdot\frac{1}{1+z^2}=e^{iz}\cdot\frac{1}{(z-i)(z+i)},$$
ahol az első komponens a $z=i$ helyen e^{-1}, a második komponens reziduuma a $z=i$ helyen $\frac{1}{z-i}$ együtthatója a $z=i$ helyen, azaz $\frac{1}{2i}$.
Összefoglalva, a (7.10) formula alapján
$$\mathrm{Res}_i\left(z\mapsto\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right)=\frac{1}{e\cdot 2i},$$
tehát
$$\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z=2\pi i\frac{1}{e\cdot 2i}=\frac{\pi}{e}.$$
Végül belátjuk, hogy $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}=0$.
Felhasználva, hogy $|e^{iz}|=e^{\mathfrak{Re}\,(iz)}\le 1$ és $|1+z^2|\ge|z^2|-1=|z|^2-1$, kapjuk a következő becslést:
$$\left|\int_{S_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right|\le\pi R\cdot\sup_{z\in S_R}\left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right|\le\pi R\frac{1}{|z|^2-1}=\pi R\frac{1}{R^2-1},$$
vagyis $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{S_R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z=0$, tehát
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz=\frac{\pi}{e}.$$

7.7. Komplex függvények inverze és konform leképezések

Komplex függvények invertálhatóságával foglalkozunk; először az ún. lokális inverz létezését vizsgáljuk.

7.43. Tétel. *Tegyük fel, hogy f holomorf a z_0 pont egy környezetében. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

- *Ha $f'(z_0)=0$, akkor f -nek nincs lokális inverze z_0 egyetlen környezetében sem.*
- *Ha $f'(z_0)\neq 0$, akkor f-t a z_0 pont elég kis környezetére leszűkítve, f-nek létezik inverze, és az inverz függvény holomorf a $w_0=f(z_0)$ pont egy környezetében.*

A tétel bizonyítása több lépésből áll, fontos segédállításokat használ, ezért nem részletezzük.

7.44. Megjegyzés. A fenti tétel általában csak lokálisan igaz. Az exponenciális függvény deriváltja ugyanis önmaga, ami sehol sem nulla, mégsem létezhet globálisan inverze, hiszen a $2\pi i$ szerint periodikus.

7.45. Állítás. *Az exponenciális függvény injektív az* $\Omega := \{z : \mathfrak{Re}\, z \in \mathbb{R}, \mathfrak{Im}\, z \in [0, 2\pi)\}$ *halmazon és* $R_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bizonyítás. Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és $e^z = w$, ahol $z = x + iy$. Ekkor

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)),$$

valamint

$$w = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

ahol $r = |w|$ és $\arg(w) = \varphi \in [0, 2\pi)$.
Mivel $e^x = r = |w|$, ezért $x = \ln|w|$ és $y = \varphi = \arg(w)$ is teljesül, tehát teljesül a

$$e^z = w \Leftrightarrow z = x + iy = \ln|w| + i \arg(w).$$

ekvivalencia, ami egyértelműen meghatározza a $z \in \Omega$ komplex számot. □

Az előbbiek alapján szeretnénk definiálni a természetes alapú logaritmust a komplex számokon.

7.46. Definíció. $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén legyen $\log w := \ln|w| + i \arg w$.

7.47. Megjegyzés. A logaritmus függvény értelmezhető minden olyan tartományon, ahol az argumentum egyértelműen értelmezhető. Mivel $\log z = \ln z$, ha $\mathfrak{Im}\, z = 0$, gyakran $\log z$ helyett az $\ln z$ jelölést használjuk tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén is.

Invertálható komplex függvényekkel akarunk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíteni bizonyos tartományok között. Egy erre vonatkozó fontos tételt tárgyalunk a továbbiakban.

7.48. Definíció. Ha $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf és $f'(z) \neq 0$ az Ω tartományon, akkor az f függvényt *konform leképezésnek* nevezzük.

7.49. Tétel. *(konform leképezések Riemann-féle alaptétele):*
Legyen $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ *egyszeresen összefüggő tartomány. Ekkor létezik egyetlen* f *konform leképezés, amely* Ω *-t a* $B_1(0)$ *egységkörre képezi injektív módon úgy, hogy egy adott* $z_0 \in \Omega$ *pontra* $f(z_0) = 0$, *és* $\arg f'(z_0) = \varphi$ *adott.*

7.50. Példa. Félsík konform leképezése az egységkörre. Legyen tehát

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) > 0\} \quad \text{és} \quad f(z) := \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} e^{i\varphi},$$

ahol a felülvonás a komplex konjugálást jelöli. Láthatjuk, hogy $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf, és $\mathfrak{Im}(z) > 0$ felhasználásával egyszerűen kapjuk, hogy tetszőleges $z \in \Omega$ esetén $\frac{|z-z_0|}{|z-\overline{z_0}|} < 1$, vagyis $f(z) \in B_1(0)$.
Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$f(z) := \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} e^{i\varphi} \quad \text{esetén} \quad z = \frac{\overline{z_0} f(z) e^{-i\varphi} - z_0}{f(z) e^{-i\varphi} - 1},$$

vagyis az inverz $|f(z)| < 1$ esetén valóban értelmes, azaz tetszőleges $f(z) \in B_1(0)$ elemet magkapunk valamilyen z pont képeként.

$f(z)$ inverz képe (azaz z) viszont csak Ω-beli lehet, mert $\mathfrak{Im}(z) = 0$ esetén $\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right| = 1$ teljesül, $\mathfrak{Im}(z) < 0$ esetén pedig $\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right| > 1$, vagyis ekkor $f(z)$ a $B_1(0)$ körön kívül van.

Analízis III.

8. FEJEZET

Hilbert-terek

8.1. Skaláris szorzat és prehilbert terek

8.1. Definíció. Az X $\mathbb{K}$ számtest feletti vektortéren értelmezett $(\cdot\,|\,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ kétváltozós függvényt *skaláris szorzatnak* nevezzük, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(1) bármely rögzített $y \in X$ mellett a $(\cdot\,|\,y)$ parciális függvény lineáris, vagyis bármely $x_1, x_2 \in X$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ esetén $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\,|\,y) = \lambda_1(x_1\,|\,y) + \lambda_2(x_2\,|\,y)$,
(2) bármely $x, y \in X$ esetén $(x\,|\,y) = \overline{(y\,|\,x)}$ (*konjugált szimmetria*),
(3) bármely $x \in X$ esetén $(x\,|\,x) \geq 0$ és $(x\,|\,x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$ (*pozitív definitség)*.

Az $(X, (\cdot\,|\,\cdot))$ párt *prehilbert térnek* nevezzük, ha X vektortér és $(\cdot\,|\,\cdot)$ X feletti skaláris szorzat.

Vegyük észre, hogy a skaláris szorzat a komplex vektortér esetén az első változójában lineáris, a másodikban viszont konjugáltan lineáris, azaz bármely $x, y_1, y_2 \in X$ esetén

$$(x\,|\,y_1 + y_2) = (x\,|\,y_1) + (x\,|\,y_2), \qquad (y\,|\,\lambda x) = \overline{\lambda}(x\,|\,y).$$

Megjegyezzük, hogy a matematikában általában (és így jelen jegyzetben is) a skaláris szorzás az első változójában lineáris és a másodikban konjugált lineáris, a fizikában viszont a konvenció éppen ennek a fordítottja, azaz a skaláris szorzás az első változójában konjugáltan lineáris, a másodikban pedig lineáris.

Megjegyezzük továbbá, hogy ha a skaláris szorzat definíciójában a (3) pont helyett csak azt tesszük fel, hogy

$$(x\,|\,x) \geq 0, \qquad (x \in X),$$

akkor az $(\cdot\,|\,\cdot)$ függvényt *fél-skalár szorzatnak* nevezzük.

8.2. Példa. Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, akkor $\mathbb{K}^n$ prehilbert tér az alábbi

$$(x\,|\,y) := \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{y}_k, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$$

skaláris szorzással.

8.3. Példa. Jelölje ℓ^2 a négyzetesen összegezhető valós vagy komplex sorozatoknak a halmazát, vagyis $x \in \ell^2$ pontosan akkor, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Akkor ℓ^2 prehilbert tér az alábbi skaláris szorzattal

$$(x\,|\,y) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \overline{y}_n, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

8.4. Példa. Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ egy mérhető halmaz és jelölje $L^2(M)$ a négyzetesen integrálható valós vagy komplex értékű mérhető függvények terét. Emlékeztetünk rá, hogy egy $\varphi : M \to \mathbb{C}$ függvényt akkor nevezünk mérhetőnek, ha $\varphi_1 = \mathfrak{Re}\,\varphi$ és $\varphi_2 = \mathfrak{Im}\,f$ mindketten mérhető függvények, illetve φ-t integrálhatónak nevezzük, ha φ_1 és φ_2 mindketten integrálhatóak, és ilyenkor

$$\int_M \varphi \, d\lambda = \int_M \varphi_1 \, d\lambda + i \int_M \varphi_2 \, d\lambda.$$

Ekkor tehát az $L^2(M)$ függvénytér azon $\varphi : M \to \mathbb{C}$ mérhető függvényekből áll, amelyekre φ_1 és φ_2 négyzetesen integrálható. A skaláris szorzatot $L^2(M)$-en a

$$(\varphi \,|\, \psi) := \int_M \varphi \cdot \bar{\psi} \, d\lambda, \qquad \varphi, \psi \in L^2(M) \tag{8.1}$$

egyenlőséggel definiáljuk. Valójában az így definiált $(\cdot \,|\, \cdot)$ függvény csupán fél-skalárszorzat, hiszen bármely φ majdnem mindenütt nulla függvényre $(\varphi \,|\, \varphi) = 0$ teljesül, azonban élünk azzal a mérték- és integrálelméletben megszokott konvencióval, miszerint két függvényt azonosnak tekintünk, ha azok majdnem mindenütt megegyeznek, úgy (8.1) már valóban skaláris szorzatot definiál.

A skaláris szorzattal kapcsolatos legfontosabb egyenlőtlenség az alábbi

8.5. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség. *Legyen X egy prehilbert tér, akkor*

$$|(x \,|\, y)|^2 \le (x \,|\, x) \cdot (y \,|\, y) \qquad (x, y \in X).$$

Bizonyítás. Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor egyúttal $(x \,|\, y) = 0$, ezért ilyenkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Ha $y \neq 0$, akkor $v = (y \,|\, y)x - (x \,|\, y)y$ választással

$$\begin{aligned} 0 \le (v \,|\, v) &= (y \,|\, y)\Big[(y \,|\, y)(x \,|\, x) - \overline{(x \,|\, y)}(x \,|\, y) - (x \,|\, y)(y \,|\, x) + (x \,|\, y)\overline{(x \,|\, y)}\Big] \\ &= (y \,|\, y)\Big[(y \,|\, y)(x \,|\, x) - |(x \,|\, y)|^2\Big], \end{aligned}$$

amit az $(y \,|\, y) > 0$ számmal leosztva éppen kívánt egyenlőtlenséghez jutunk. □

8.6. Tétel. *Legyen X prehilbert tér, ekkor az*

$$\|x\| := \sqrt{(x \,|\, x)}, \qquad (x \in X) \tag{8.2}$$

egyenlőséggel definiált $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}_+$ leképezés norma.

Bizonyítás. Triviális, hogy $\|x\| \ge 0$ és $\|x\| = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$, a pozitív homogenitás pedig a

$$(\lambda x \,|\, \lambda x) = |\lambda|^2 (x \,|\, x)$$

egyenlőségből következik. A háromszög-egyenlőtlenség igazolásához legyen $x, y \in X$, akkor a 8.5 Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(x \,|\, y) + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = [\|x\| + \|y\|]^2, \end{aligned}$$

amiből négyzetgyökvonás után kapjuk, hogy $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$. □

8.7. Megjegyzés. Ezt a (8.2) egyenlőséggel definiált $\| \cdot \|$ normát nevezzük a skaláris szorzat által indukált normának. A továbbiakban - hacsak másképp nem mondjuk - az X prehilbert teret minden esetben ezzel a normával látjuk el, és a megfelelő metrikus és topológiai fogalmak is mind erre a normára vonatkoznak.

A továbbiakban a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget legtöbbször az alábbi alakban fogjuk használni:

8.8. Következmény. *Ha X prehilbert tér, akkor*

$$|(x\,|\,y)| \le \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in X.$$

Szintén egyszerű számolással igazolható az alábbi két fontos eredmény:

8.9. Paralelogramma egyenlőség. *Legyen X prehilbert tér, akkor*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2], \qquad x, y \in X.$$

8.10. Polarizációs formulák. *Legyen X prehilbert tér és $x, y \in X$, akkor*

(1) *valós tér esetén*

$$(x\,|\,y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2],$$

(2) *komplex tér esetén*

$$(x\,|\,y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2].$$

8.11. Definíció. A $(\mathscr{H}, (\cdot\,|\,\cdot))$ prehilbert teret *Hilbert-térnek* nevezzük, ha az teljes (vagyis Banach-tér).

8.12. Állítás. *Ha X prehilbert tér, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pedig olyan X-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $y_n \to y$ valamely $x, y \in X$ vektorokra, akkor*

$$(x_n\,|\,y_n) \to (x\,|\,y).$$

Bizonyítás. A feltétel szerint $\|x_n - x\| \to 0$ és $\|y_n - y\| \to 0$, ezért

$$\begin{aligned}
|(x_n\,|\,y_n) - (x\,|\,y)| &= |((x_n - x) + x\,|\,(y_n - y) + y) - (x\,|\,y)| \\
&= |(x_n - x\,|\,y) + (x\,|\,y_n - y) + (x_n - x\,|\,y_n - y)| \\
&\le \|x_n - x\|\|y\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y_n - y\|,
\end{aligned}$$

vagyis valóban $(x_n\,|\,y_n) \to (x\,|\,y)$. □

8.13. Következmény. *Ha X prehilbert tér, akkor az X feletti $(\cdot\,|\,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ skaláris szorzat folytonos, továbbá bármely $y, z \in X$ rögzített vektorok esetén az $(y\,|\,\cdot)$ és $(\cdot\,|\,z)$ parciális függvények (vagyis az*

$$g_y(x) := (y\,|\,x), \qquad \textit{és} \qquad f_z(x) := (x\,|\,z), \qquad x \in X$$

egyenlőséggel értelmezett függvények) szintén folytonosak.

8.2. Ortogonalitás prehilbert terekben

A skaláris szorzat egyik legnagyobb előnye, hogy lehetőséget ad vektorok merőlegességének definiálására:

8.14. Definíció. Legyen X prehilbert tér, akkor az $x, y \in X$ vektorokat egymásra merőlegeseknek (vagy ortogonálisaknak) nevezzük (jelölésben $x \perp y$), ha $(x\,|\,y) = 0$

8.15. Definíció. Legyen X prehilbert tér és abban M egy nem-üres halmaz, akkor az

$$M^\perp := \{x \in X \,|\, x \perp y \quad (\forall y \in M)\}$$

halmazt az M *merőleges kiegészítőjének* (vagy *ortokomplementerének*) nevezzük.

Tehát egy $x \in X$ vektorra $x \in M^\perp$ pontosan akkor teljesül, ha minden $y \in M$ mellett $(x \,|\, y) = 0$.

8.16. Megjegyzés. Legyen X egy prehilbert tér.

(1) Bármely $x, y \in X$ vektorokra $x \perp y$ pontosan akkor igaz, ha $y \perp x$.
(2) Egy $x \in X$ vektorra $x \perp x$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$, speciálisan $X^\perp = \{0\}$. (Vigyázzunk azonban arra, hogy az $M^\perp = \{0\}$ egyenlőségből nem feltétlenül következik az $M = X$ egyenlőség!)
(3) Ha $M \subseteq X$ egy tetszőleges nem-üres halmaz, akkor $0 \in M^\perp$, illetve $M \cap M^\perp \subseteq \{0\}$.

8.17. Állítás. *Legyen X prehilbert tér és legyenek $M, N \subseteq X$ az X tetszőleges nem-üres részhalmazai. Ekkor fennállnak a következők:*

(1) *$M^\perp$ zárt lineáris altere X-nek,*
(2) *ha $N \subseteq M$, akkor $M^\perp \subseteq N^\perp$,*
(3) *$M \subseteq M^{\perp\perp}$ és $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$.*

Bizonyítás. (1) Először azt igazoljuk, hogy $M^\perp$ lineáris altér: ha ui. $x_1, x_2 \in M^\perp$, akkor bármely $y \in M$ mellett

$$(x_1 + x_2 \,|\, y) = (x_1 \,|\, y) + (x_2 \,|\, y) = 0,$$

vagyis $x_1 + x_2 \in M^\perp$. Hasonlóan adódik, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in M^\perp$ esetén $\lambda x \in M^\perp$, tehát $M^\perp$ lineáris altér.

Megmutatjuk, hogy $M^\perp$ zárt: legyen ui. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $M^\perp$-ben haladó sorozat, amely konvergál az $x \in X$ vektorhoz. A 8.12 Állítás szerint bármely rögzített $y \in M$ mellett $(x_n \,|\, y) \to (x \,|\, y)$, ahol a feltétel szerint minden n-re $(x_n \,|\, y) = 0$, következésképp $(x \,|\, y) = 0$, vagyis $x \in M^\perp$, amivel $M^\perp$ zártságát igazoltuk.

(2) Tegyük fel, hogy $N \subseteq M$ és legyen $x \in M^\perp$, akkor a feltétel szerint minden $y \in M$ vektorra $(x \,|\, y) = 0$, így $N \subseteq M$ miatt minden $y \in N$ vektorra is $(x \,|\, y) = 0$, vagyis $x \in N^\perp$. Ezzel igazoltuk, hogy $M^\perp \subseteq N^\perp$.

(3) Először igazoljuk, hogy $M \subseteq M^{\perp\perp}$: legyen ui. $x \in M$, akkor minden $y \in M^\perp$ mellett $(x \,|\, y) = 0$, ami éppen azt jelenti, hogy $x \in (M^\perp)^\perp = M^{\perp\perp}$. Tehát valóban, $M \subseteq M^{\perp\perp}$.

Ezután rátérünk az $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$ egyenlőség bizonyítására: egyfelől az imént bizonyított összefüggés alapján $M^\perp \subseteq (M^\perp)^{\perp\perp}$. Másfelől ismét az $M \subseteq M^{\perp\perp}$ összefüggésből (2) szerint $(M^{\perp\perp})^\perp \subseteq M^\perp$. Emiatt valóban $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$. □

8.18. Megjegyzés. Az $M^{\perp\perp}$ halmazt az M *biortokomplementerének* nevezzük.

Emlékeztetünk rá, hogy ha X vektortér és $M \subseteq X$ egy tetszőleges halmaz, akkor $\mathrm{span}(M)$ jelöli az M halmaz által generált lineáris alteret, vagyis $\mathrm{span}(M)$ a tartalmazás tekintetében legkisebb olyan lineáris altér X-ben, amely M-et tartalmazza.

8.19. Állítás. *Legyen M az X prehilbert tér egy tetszőleges nem-üres részhalmaza, akkor*

$$M^\perp = [\overline{\mathrm{span}(M)}]^\perp$$

Bizonyítás. Mivel $M \subseteq \overline{\mathrm{span}(M)}$, azért a 8.17 Állítás (2) pontja szerint

$$[\overline{\mathrm{span}(M)}]^\perp \subseteq M^\perp.$$

Megfordítva, legyen $z \in M^\perp$ egy rögzített vektor és jelölje $f_z : X \to \mathbb{K}$ az

$$f_z(x) := (x \,|\, z), \qquad x \in X$$

egyenlőséggel értelmezett lineáris függvényt. A 8.13 Következmény szerint f_z folytonos, ezért annak

$$\ker f_z := \{x \in X \mid f_z(x) = 0\}$$

magtere zárt lineáris altér X-ben. Vegyük észre továbbá, hogy $z \in M^\perp$ azzal ekvivalens, hogy $M \subseteq \ker f_z$, vagyis $\ker f_z$ egy olyan zárt lineáris altér X-ben, amely tartalmazza az M halmazt, így $\overline{\operatorname{span}(M)}$ értelmezése alapján

$$\overline{\operatorname{span}(M)} \subseteq \ker f_z.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy minden $x \in \overline{\operatorname{span}(M)}$ vektor esetén $(x \mid z) = 0$, következésképp $z \in [\overline{\operatorname{span}(M)}]^\perp$. □

8.3. A Riesz-féle ortogonális felbontási tétel

8.20. Definíció. Legyen (X, ϱ) egy metrikus tér, legyen továbbá $Y \subseteq X$ az X egy nem-üres részhalmaza és legyen $x \in X$. Akkor az x pont Y halmaztól való távolsága alatt a

$$d_Y(x) := \inf_{y \in Y} \varrho(x, y)$$

nemnegatív számot értjük.

Általában a $d_Y(x)$ számot definiáló infimum valódi, vagyis nem minimum. Másszóval, általában nem létezik az x-hez legközelebb eső Y-beli pont. (Egyszerű példaként tekintsük a valós számok $\mathbb{R}$ halmazában az $x = 0$ pontnak az $Y = (0, 1)$ nyílt intervallumtól vett távolságát, akkor világos, hogy $d_Y(x) = 0$, ugyanakkor $x \notin Y$ miatt nincs olyan $y \in Y$ pont, amelyre $d_Y(x) = \varrho(x, y)$ volna.)

8.21. Definíció. Legyen (X, ϱ) egy metrikus tér, akkor azt mondjuk, hogy az $x \in X$ pont az $Y \subseteq X$ halmaztól való távolsága realizálódik az $y \in Y$ pontban, ha

$$d_Y(x) = \varrho(x, y).$$

Az alábbi eredmény pont és zárt konvex halmaz távolságáról Riesz Frigyes magyar matematikustól származik:

8.22. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $C \subseteq \mathscr{H}$ a $\mathscr{H}$ egy nem-üres zárt és konvex részhalmaza. Ekkor bármely $x \in \mathscr{H}$ vektornak a C halmaztól való távolsága egyértelműen realizálódik, vagyis létezik egyetlen $z \in C$, hogy*

$$d_C(x) = \|x - z\|.$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $x \in \mathscr{H}$ vektort és jelölje

$$d := d_C(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Az infimum definíciója alapján választhatunk olyan $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ C-beli sorozatot, hogy

$$d_n := \|x - y_n\| \to d.$$

Rögzített $n, m \in \mathbb{N}$ indexek mellett írjuk fel a paralelogramma szabályt a $v = x - y_n$ és $w = y_m - x$ vektorokra, akkor

$$\|y_n - y_m\|^2 + \|2x - (y_n + y_m)\|^2 = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2[\|v\|^2 + \|w\|^2] = 2d_n^2 + 2d_m^2,$$

amit átrendezve nyerjük, hogy

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2.$$

Minthogy C konvex halmaz és $y_n, y_m \in C$, azért egyúttal $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in C$, ezért a d szám értelmezése alapján $d \leq \|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|$. Következésképp

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4d^2 \to 0, \qquad n, m \to +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, ezért $y_n \to z$ teljesül valamely $z \in \mathscr{H}$ vektorra, továbbá a C halmaz zártsága miatt egyúttal $z \in C$. Az x pont C-től való távolsága pedig realizálódik z-ben, ui.

$$\|x - z\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \lim_{n\to\infty} d_n = d.$$

Végezetül igazoljuk a tétel unicitásra vonatkozó részét: tegyük fel, hogy az x vektor C halmaztól való távolsága realizálódik a $z_1, z_2 \in C$ pontokban, akkor az

$$y_n = \begin{cases} z_1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ z_2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

módon definiált $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan C-beli sorozat, amelyre $\|x - y_n\| \to d$, ezért a bizonyítás első fele alapján $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $z_1 = z_2$. □

A fenti tétel egyik legfontosabb következményeként igazoljuk az alábbi felbontási tételt:

8.23. Riesz-féle ortogonális felbontási tétel. *Legyen K a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér egy zárt lineáris altere, akkor bármely $x \in \mathscr{H}$ vektor egyértelműen előáll*

$$x = x_1 + x_2$$

összeg alakban, ahol $x_1 \in K$ és $x_2 \in K^\perp$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathscr{H}$ egy rögzített vektor. A tételben szereplő K halmaz eleget tesz a 8.22 Tétel feltételeinek. Legyen tehát x_1 az az egyértelműen meghatározott K-beli vektor, amely mellett

$$d_K(x) = \|x - x_1\|.$$

Világos, hogy $x_2 := x - x_1$ választással $x = x_1 + x_2$, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy $x_2 \in K^\perp$. Ennek igazolásához rögzítsünk egy $y \in K$ vektort és vezessük be

$$p(t) := \|x - (x_1 + ty)\|^2, \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenlőséggel definiált $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Mivel bármely t-re $x_1 + ty \in K$, azért x_1 értelmezése alapján

$$p(0) \leq p(t), \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ami azt jelenti, hogy p-nek minumuma van 0-ban. Másfelől egyszerű számolás mutatja, hogy

$$p(t) = \|x_2\|^2 - 2t\,\mathfrak{Re}(x_2 \,|\, y) + t^2\|y\|^2,$$

vagyis p differenciálható, és a fentiek alapján

$$0 = p'(0) = 2\,\mathfrak{Re}(x_2 \,|\, y).$$

Ha $\mathscr{H}$ valós Hilbert-tér, úgy a fentiekből következik, hogy $(x_2 \,|\, y) = 0$. Ha pedig $\mathscr{H}$ komplex, úgy a fenti érvelést megismételve y helyett az iy vektorra nyerjük, hogy

$$0 = \mathfrak{Re}(x_2 \,|\, iy) = \mathfrak{Re}[-i(x_2 \,|\, y)] = \mathfrak{Im}(x_2 \,|\, y),$$

vagyis ismételten az $(x \,|\, y) = 0$ egyenlőséghez jutottunk. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $x_2 \in K^\perp$, amiből a felbontás létezése már következik.

A felbontás egyértelműsége nyilvánvaló abból, hogy $K \cap K^\perp = \{0\}$. Valóban, ha x előáll

$$x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$$

alakban, ahol $x_1, x_1' \in K$ és $x_2, x_2' \in K^\perp$, akkor

$$x_1 - x_1' = x_2 - x_2' \in K \cap K^\perp = \{0\},$$

vagyis $x_1 = x_1'$ és $x_2 = x_2'$. □

8.24. Definíció. Legyen K zárt lineáris altér a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben és $x \in \mathscr{H}$ esetén jelölje $P(x) := x_1$ azt az egyértelműen meghatározott $x_1 \in K$ vektort, amelyre $x - P(x) \in K^\perp$. A $P(x) \in K$ vektort az x K-ra vett merőleges vetületének, a $P : \mathscr{H} \to K$, $x \mapsto P(x)$ leképezést pedig a K-ra való ortogonális projekciónak nevezzük.

A Riesz-féle felbontási tétel egy fontos következményét fogalmazza meg az alábbi

8.25. Állítás. *Legyen K zárt lineáris altere a $\mathscr{H}$ Hilbert-térnek, akkor*

$$K = K^{\perp\perp}.$$

Bizonyítás. A $K \subseteq K^{\perp\perp}$ tartalmazást beláttuk a 8.17 Állítás (3) pontjában. Megfordítva, legyen $x \in K^{\perp\perp}$, akkor a 8.23 Riesz-féle felbontási tétel szerint x felírható $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in K$ és $x_2 \in K^\perp$. Itt egyúttal $x_1 \in K^{\perp\perp}$, ezért

$$x_2 = x - x_1 \in K^{\perp\perp} \cap K^\perp,$$

következésképp $x_2 = 0$, vagyis $x = x_1 \in K$. Ezzel a $K^{\perp\perp} \subseteq K$ tartalmazást és egyúttal a tételt is igazoltuk. □

8.26. Következmény. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és legyen $K \subseteq \mathscr{H}$ egy olyan zárt lineáris altér, hogy $K \neq \mathscr{H}$, akkor $K^\perp \neq \{0\}$.*

8.27. Következmény. *Legyen M a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér egy tetszőleges nem-üres részhalmaza, akkor*

$$M^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span}(M)}.$$

Bizonyítás. A 8.19 Állítás során láttuk, hogy

$$M^\perp = [\overline{\operatorname{span}(M)}]^\perp,$$

így az előző következmény szerint

$$M^{\perp\perp} = [\overline{\operatorname{span}(M)}]^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span}(M)}.$$

□

8.4. Ortogonális sorozatok és ortogonális sorok

8.28. Definíció. Legyen X normált tér és $M \subseteq X$, az M halmazt *totális* halmaznak nevezzük, ha

$$\overline{\operatorname{span}(M)} = X.$$

8.29. Definíció. Legyen X prehilbert tér és $M \subseteq X$, az M halmazt *teljes* halmaznak nevezzük, ha $M^\perp = \{0\}$.

Vigyázzunk arra, hogy egy prehilbert-tér részhalmazának fenti értelemben vett teljessége nem keverendő össze a metrikus teljességgel!

8.30. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $M \subseteq \mathscr{H}$ egy tetszőleges nem-üres részhalmaz. A következő kijelentések ekvivalensek:*
(i) *M totális,*
(ii) *M teljes.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii): Tegyük fel, hogy M totális, azaz $\overline{\operatorname{span}(M)} = \mathscr{H}$, akkor

$$M^\perp = [\overline{\operatorname{span}(M)}]^\perp = \mathscr{H}^\perp = \{0\},$$

vagyis M teljes.

(ii)⇒(i): Tegyük fel, hogy M teljes, akkor

$$\{0\} = M^\perp = [\overline{\operatorname{span}(M)}]^\perp,$$

vagyis $K = \overline{\operatorname{span}(M)}$ olyan zárt lineáris altér $\mathscr{H}$-ban, hogy $K^\perp = \{0\}$. A 8.26 Következmény szerint $K = \mathscr{H}$, vagyis M totális halmaz. □

8.31. Definíció. Az X normált teret szeparábilisnak nevezzük, ha létezik benne megszámlálható totális halmaz.

8.32. Következmény. *Egy $\mathscr{H}$ Hilbert-tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$.*

8.33. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{H}$-ban haladó sorozat.
(1) Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot *ortogonális sorozatnak* nevezzük, ha minden $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ indexek esetén $x_n \perp x_m$,
(2) Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot *ortonormált sorozatnak* nevezzük, ha ortogonális és minden n-re $\|x_n\| = 1$.

8.34. Megjegyzés. A továbbiakban egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ jelöli az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozathoz asszociált sort, vagyis azt a sorozatot, amelynek az n-edik tagja az

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$$

részletösszeg. Ha az így definiált $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sort konvergensnek nevezzük és annak összege alatt a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

limeszt értjük.

8.35. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sort *ortogonális sornak* nevezzük, ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat.

8.36. Pithagorasz-tétel. *Legyen X prehilbert tér és legyenek $x_1, \ldots, x_n \in X$ páronként egymásra ortogonális vektorok, akkor*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Bizonyítás. A feltétel szerint bármely $i \neq j$ index mellett $(x_i \,|\, x_j) = 0$, ezért

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_i \,|\, x_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \,|\, x_i),$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőség. □

A következő definícióban emlékeztetünk a lineárisan független vektorrendszer fogalmára:

8.37. Definíció. Legyen X vektortér.

(a) Az $x_1, \ldots, x_n \in X$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha bármely $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárokra a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

(b) Az $Y \subseteq X$ nem-üres halmazt lineárisan függetlennek nevezzük, ha annak bármely véges részhalmaza lineárisan független.

8.38. Állítás. *Legyen X prehilbert tér és $Y \subseteq X$ egy csupa nem-nulla, páronként ortogonális vektorokból álló nem-üres halmaz, akkor Y lineárisan független.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, \ldots, x_n \in Y$ egy tetszőleges véges rendszer és tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

teljesül valemely $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárokra, akkor bármely j-re

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, x_j \right) = \lambda_j (x_j \,|\, x_j) = \lambda_j \|x_j\|^2,$$

így $x_j \neq 0$ miatt $\lambda_j = 0$. □

8.39. Következmény. *Ha $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszer az X prehilbert térben, akkor $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ lineárisan független.*

A következő tételben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy adott $Y = \{y_1, y_2, \ldots, \}$ megszámlálható X-beli lineárisan független halmazból lehet-e ortonormált rendszert készíteni. Erre ad választ az alábbi

8.40. Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció. *Legyen X prehilbert tér, legyen továbbá $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan X-beli sorozat, hogy az $\{y_n \,|\, n = 1, 2, \ldots\}$ halmaz lineárisan független. Ekkor létezik olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat, hogy bármely n-re*

$$\operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$$

Bizonyítás. Az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot rekurcióval állítjuk elő. Először is vegyük észre, hogy a lineáris függetlenség miatt minden n-re $y_n \neq 0$.

Legyen $e_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}$, akkor nyilvánvaló, hogy $\|e_1\| = 1$ és az y_1 és e_1 által kifeszített alterek azonosak.

Második lépésben keressük először a z_2 vektort $z_2 := y_2 - \lambda_1 e_1$ alakban úgy, hogy $z_2 \perp e_1$ teljesüljön, vagyis

$$0 = (z_2 \,|\, e_1) = (y_2 \,|\, e_1) - \lambda_1 (e_1 \,|\, e_1) = (y_2 \,|\, e_1) - \lambda_1,$$

tehát $\lambda_1 = (y_2 \,|\, e_1)$ megfelelő. Ekkor $z_2 \neq 0$, ui. y_1, y_2 lineárisan függetlenek. Következésképp $e_2 := \frac{z_2}{\|z_2\|}$ vektorra $\|e_2\| = 1$, $(e_1 \,|\, e_2) = 0$, és nyilvánvalóan

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2\} = \operatorname{span}\{y_1, y_2\}.$$

Harmadik lépésben keressük először a z_3 vektort $z_3 = y_3 - \mu_1 e_1 - \mu_2 e_2$ alakban úgy, hogy $z_3 \perp e_1$ és $z_3 \perp e_2$ teljesüljön, vagyis

$$\begin{aligned} 0 = (z_3 \,|\, e_1) &= (y_3 \,|\, e_1) - \mu_1 (e_1 \,|\, e_1) - \mu_2 (e_2 \,|\, e_1) = (y_3 \,|\, e_1) - \mu_1, \\ 0 = (z_3 \,|\, e_2) &= (y_3 \,|\, e_2) - \mu_1 (e_1 \,|\, e_2) - \mu_2 (e_2 \,|\, e_2) = (y_3 \,|\, e_2) - \mu_2, \end{aligned}$$

tehát $\mu_1 = (y_3 \,|\, e_1)$ és $\mu_2 = (y_3 \,|\, e_2)$ megfelelő. Ekkor $z_3 \neq 0$ a lineáris függetlenség miatt. Következésképp $e_3 := \frac{z_3}{\|z_3\|}$ választással $\|e_3\| = 1$, $e_3 \perp e_1$ és $e_3 \perp e_2$, továbbá nyilvánvalóan

$$\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \operatorname{span}\{y_1, y_2, y_3\}.$$

Az eljárást folytatva kapjuk a tételben előírt $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatot. □

8.41. Következmény. *Ha $\mathscr{H}$ szeparábilis Hilbert-tér, akkor létezik $\mathscr{H}$-ban teljes ortonormált sorozat.*

8.42. Parseval-tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{H}$-ban haladó ortogonális sorozat. Ekkor a következő két kijelentés egyenértékű:*

(i) *a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ortogonális sor konvergens,*

(ii) *a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ numerikus sor konvergens.*

Továbbá az ekvivalens (i) és (ii) feltételek mellett a sor összegének normájára fennáll a következő:

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \Big\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2. \tag{8.3}$$

Bizonyítás. Vezessük be rögzített n esetén az

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_n, \qquad S_n := \sum_{k=0}^{n} \|x_n\|^2$$

jelöléseket. Megmutatjuk, hogy az $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{H}$-beli sorozat pontosan akkor konvergens, ha $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat konvergens. A $\mathscr{H}$ és $\mathbb{R}$ terek teljessége mellett ez azzal egyenértékű, hogy az $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor Cauchy tulajdonságú, ha az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat Cauchy tulajdonságú.

Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $n > m$, akkor a Pithagorasz-tétel szerint

$$\|s_n - s_m\|^2 = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|^2 = S_n - S_m,$$

amiből leolvasható, hogy bármely n, m mellett $\|s_n - s_m\|^2 = |S_n - S_m|$. Ebből pedig világos, hogy $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor Cauchy-tulajdonságú sorozat, ha $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-tulajdonságú sorozat.

végezetül tegyük fel, hogy az (i) és (ii) ekvivalens feltételek mindegyike teljesül és jelölje

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \qquad S := \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$$

a megfelelő összegeket, akkor a sorösszegek értelmezése folytán $s_n \to s$ és $S_n \to S$, továbbá a Pithagorasz-tétel szerint

$$\|s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2 = S_n,$$

amiből az $\|s\|^2 = S$ egyenlőség, vagyis (8.3) már következik. □

Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy ortonormált sor $\mathscr{H}$-ban és legyen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy numerikus sorozat, világos, hogy ekkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ egy ortogonális sor. Az alábbiakban többnyire ilyen típusú ortogonális sorokkal fogunk foglalkozni, ezért érdemes a fenti Parseval-tételt átfogalmazni $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ alakú ortogonális sorokra:

8.43. Következmény. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{H}$-ban haladó ortonormált sorozat, legyen továbbá $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy numerikus sorozat. Ekkor a következő két kijelentés egyenértékű:*

(i) *a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ ortogonális sor konvergens,*

(ii) *a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ numerikus sor konvergens.*

Továbbá a fenti (i) és (ii) ekvivalens feltételek mellett fennáll a következő:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló a 8.42 Parseval-tételből. □

8.44. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{H}$-ban haladó sorozat. Ha a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sor konvergens, akkor bármely $y \in \mathscr{H}$ mellett a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (x_n \,|\, y)$ numerikus sor is konvergens és*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \,\middle|\, y \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n \,|\, y) \tag{8.4}$$

Bizonyítás. Jelölje

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad s := \sum_{n=0}^{\infty} x_n,$$

akkor a sorösszeg értelmezése alapján $s_n \to s$, ezért a skaláris szorzat folytonosságát felhasználva

$$\sum_{k=0}^{n} (x_k \,|\, y) = (s_n \,|\, y) \to (s \,|\, y),$$

ami éppen azt jelenti, hogy $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n \,|\, y)$ konvergens és összegére (8.4) teljesül. □

A következő állítás azt mutatja, hogy az α_n együtthatók visszanyerhetők az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat és a $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$ sorösszeg ismeretében:

8.45. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{H}$-beli ortonormált sorozat, legyen továbbá $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathbb{K}$-beli sorozat, amely eleget tesz a 8.43 Következmény ekvivalens (i) és (ii) feltételeinek. Jelölje*

$$x := \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n,$$

akkor bármely k-ra fennáll, hogy

$$\alpha_k = (x \,|\, e_k).$$

Bizonyítás. Rögzítsük le a k indexet, akkor bármely $n \geq k$ mellett

$$\sum_{j=0}^{n}(\alpha_j e_j \,|\, e_k) = \alpha_k,$$

ezért a 8.44 Lemma alapján

$$(x \,|\, e_k) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n e_n \,|\, e_k) = \alpha_k.$$

□

8.46. Következmény. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{H}$-ban haladó ortonormált sorozat. Ha $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K}$-beli sorozatok, hogy $\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n$ és $\sum_{n\in\mathbb{N}}\beta_n e_n$ konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n e_n,$$

akkor

$$\alpha_n = \beta_n, \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző Állításból. □

8.47. Megjegyzés. A fenti következményre szokás úgy is hivatkozni, mint a Fourier-együtthatók egyértelműségi tétele.

8.48. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert tér,$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy ortonormált sorozat $\mathscr{H}$-ban, legyen továbbá $x \in \mathscr{H}$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ mellett az $\alpha_n := (x \,|\, e_n)$ számot az x vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat szerinti n-edik *Fourier-együtthatójának*, a $\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n$ sort pedig x vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatra vonatkozó *Fourier-sorának* nevezzük.

Első eredményünk az absztrakt Fourier-sorok konvergenciájával foglalkozik.

8.49. Bessel-egyenlőtlenség. *Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben haladó ortonormált sorozat, akkor bármely $x \in \mathscr{H}$ vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerinti Fourier-sora konvergens és fennáll a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{8.5}$$

ún. Bessel-egyenlőtlenség. Továbbá a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x \mid e_n) e_n = x$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2 = \|x\|^2 \tag{8.6}$$

Bizonyítás. Jelölje

$$\alpha_n := (x \mid e_n), \qquad \text{illetve} \qquad s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k.$$

Elsőként megmutatjuk, hogy

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2. \tag{8.7}$$

Valóban,

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathfrak{Re}(x \mid s_n) + \|s_n\|^2,$$

ahol

$$(x \mid s_n) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_k (x \mid e_k) = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2,$$

illetve a Pithagorasz-tétel alapján

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2,$$

amiből (8.7) már következik. A (8.7) egyenlőségből világos, hogy minden n-re

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2,$$

amiből a (8.5) Bessel-egyenlőtlenség már következik. A $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ Fourier-sor konvergenciája pedig a 8.43 Következményből adódik. Jelölje végül

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$$

a kérdéses Fourier-sor összegét, akkor (8.7) és a 8.43 Következmény alapján nyerjük, hogy

$$\|x - s\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2,$$

amivel a (8.6) egyenlőséget is beláttuk. □

Az imént bizonyított Bessel-egyenlőtlenség értelmében egy adott x vektor Fourier-sora mindig konvergens. Az alábbi tételben meghatározzuk azt is, hogy mely vektorhoz konvergál.

8.50. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{H}$-ban haladó ortonormált sorozat és $x \in \mathscr{H}$. Jelölje*

$$u := \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n) e_n$$

a megfelelő Fourier-sor összegét, akkor minden k-ra

$$(u \,|\, e_k) = (x \,|\, e_k).$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik a 8.45 Állításból. □

A következő eredmény a Fourier-sorok alaptétele:

8.51. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{H}$-ban haladó ortonormált sorozat, jelölje továbbá*

$$K := \overline{\operatorname{span}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}$$

az e_n vektorok által generált zárt lineáris alteret. Ekkor bármely $x \in \mathscr{H}$ vektor $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerinti Fourier-sorának összege azonos az x K-ra vett merőleges vetületével.

Bizonyítás. Jelölje

$$u := \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n) e_n$$

a megfelelő Fourier-sor összegét és jelölje rögzített n mellett

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (x \,|\, e_k) e_k.$$

Világos, hogy $s_n \in K$, illetve $s_n \to u$, ezért K zártsága miatt $u \in K$. Megmutatjuk, hogy $v := x - u$ választással $v \in K^\perp$, ami az $x = u + v$ egyenlőség figyelembevételével éppen azt jelenti, hogy u azonos az x K-ra vett merőleges vetületével. Ez pedig a 8.19 Állítás értelmében azzal ekvivalens, hogy minden k-ra $v \perp e_k$. Ez utóbbi viszont teljesül, ui. az előző Lemma szerint

$$(v \,|\, e_k) = (x \,|\, e_k) - (u \,|\, e_k) = 0,$$

amivel a tételt beláttuk. □

8.52. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat $\mathscr{H}$-ban. Az $x \in \mathscr{H}$ vektort *Fourier-sorba fejthetőnek* nevezzük az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerint, ha x azonos az x $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerinti Fourier-sorának összegével:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n) e_n.$$

Az előző tétel egyszerű következményeként kapjuk az alábbi eredményt:

8.53. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat $\mathscr{H}$-ban, akkor egy $x \in \mathscr{H}$ vektor pontosan akkor fejthető Fourier-sorba $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szerint, ha*

$$x \in \overline{\operatorname{span}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}.$$

8.54. Tétel. *Egy $\mathscr{H}$ Hilbert-térben pontosan akkor lesz minden vektor Fourier-sorba fejthető egy adott $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat szerint, ha $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ totális, vagy ami ugyanaz, ha $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes.*

Az alábbiakban néhány konkrét példát mutatunk teljes ortonormált rendszerekre:

8.55. Példa. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy lineárisan független vektorokból sorozat, hogy az $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ lineárisan független és totális halmaz $\mathscr{H}$-ban. Ekkor a Gram–Schmidt ortonalizációs eljárással nyert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat teljes ortonormált sorozat $\mathscr{H}$-ban.

8.56. Példa. Legyen $a < b$ és jelölje $I := [a, b]$. Tekintsük az $L^2(I)$ valós Hilbert-teret és abban $n = 0, 1, 2, \dots$ mellett a

$$p_n(t) := t^n, \qquad t \in [a, b],$$

egyenlőséggel értelmezett p_n elemi polinomokat. Igazolható, hogy a $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ rendszer lineárisan független és totális halmaz $L^2(I)$-ben, ezért az ebből Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárással nyert $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat teljes. Nem nehéz ellenőrizni, hogy valamennyi L_n maga is polinom; ezeket *Legendre-polinomoknak* nevezzük.

8.57. Példa. Tekintsük a $\mathscr{H} := L^2(0, 2\pi)$ komplex Hilbert-teret, és abban a

$$\varphi_k(t) := e^{ikt}, \qquad t \in [0, 2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

egyenlőséggel értelmezett $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ függvényrendszert. Egyszerű számolás mutatja, hogy $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortogonális rendszer, ui. $k \neq l$ esetén

$$\int_0^{2\pi} \varphi_k(t) \cdot \overline{\varphi_l(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ilt}\, dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}\, dt = \frac{e^{i(k-l)2\pi} - 1}{i(k-l)} = 0,$$

$k = l$ esetén pedig

$$\int_0^{2\pi} \varphi_k(t) \cdot \overline{\varphi_k(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\psi_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \qquad t \in [0, 2\pi], \quad k \in \mathbb{Z}$$

egyenlőséggel definiált $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ rendszer ortonormált. Igazolható, hogy ez a rendszer teljes (vagy ami ugyanaz, totális) $L^2(0, 2\pi)$-ben. Ezt nevezzük a $L^2(0, 2\pi)$-beli *komplex trigonometrikus rendszernek.*

8.58. Példa. Tekintsük ezúttal az $L^2(0, 2\pi)$ valós Hilbert-teret, és abban vezessük be $t \in [0, 2\pi]$ esetén a

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(t) &:= \cos(nt), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \\ \varphi_{2n-1}(t) &:= \sin(nt), \qquad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

egyenlőségekkel definiált $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot. Nem nehéz ellenőrizni, hogy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat és

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_0(t)|^2 = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} |\varphi_n(t)|^2 = \pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

amiből kapjuk, hogy az

$$\begin{aligned}
\psi_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\
\psi_{2n}(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \qquad n = 1, 2, \ldots \\
\psi_{2n-1}(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt), \qquad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

egyenlőséggel értelmezett $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat. Igazolható, hogy ez a rendszer teljes $L^2(0, 2\pi)$-ben.

8.59. Példa. Tekintsük az $L^2(0, \pi)$ valós Hilbert teret, és abban vezessük be a

$$\varphi_n(t) := \cos(nt), \qquad t \in [0, \pi], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

egyenlőséggel definiált $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Nem nehéz belátni, hogy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat, és

$$\int_0^\pi |\varphi_0(t)|^2 = \pi, \qquad \int_0^\pi |\varphi_n(t)|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

vagyis az alábbi

$$\psi_0(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad \psi_n(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nt), \qquad t \in [0, \pi], \quad n =, 1, 2, \ldots$$

egyenlőséggel értelmezett $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ún. *cosinus-rendszer* ortonormált sorozat. Igazolható, hogy az így definiált cosinus-rendszer teljes $L^2(0, \pi)$-ben.

Hasonlóan, az alábbi

$$\psi_n(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nt), \qquad t \in [0, \pi], \quad n = 1, 2, \ldots$$

ún. *sinus-rendszer* is teljes ortonormált rendszert alkot $L^2(0, \pi)$-ben.

9. FEJEZET

Duális tér és folytonos lineáris funkcionálok

9.1. Duális terek és reprezentációik

9.1. Definíció. Ha X normált tér, akkor $X' := \mathscr{B}(X;\mathbb{K})$ jelöli az X feletti folytonos lineáris funkcionálok halmazát:

$$X' := \{f : X \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ folytonos és lineáris}\}.$$

Az X' halmazt az X topologikus duális terének (vagy röviden duális terének) nevezzük.

Láttuk, hogy X' az alábbi

$$\|f\| := \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} |f(x)|$$

ún. funkcionál normával ellátva mindig Banach-tér (függetlenül attól, hogy X maga teljes-e vagy sem).

A fejezetben elsőként Hilbert-terek duális terét vizsgáljuk meg.

9.2. Állítás. *Legyen X egy prehilbert tér és $y \in X$ rögzített vektor, akkor az*

$$f_y(x) := (x\,|\,y), \qquad x \in X$$

egyenlőséggel értelmezett $f_y : X \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál és $\|f_y\| = \|y\|$.

Bizonyítás. A skaláris szorzat értelmezéséből következik, hogy f_y lineáris funkcionál, továbbá a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$|f_y(x)| \leq \|x\|\|y\|, \qquad x \in X,$$

vagyis f_y korlátos és normájára fennáll az $\|f_y\| \leq \|y\|$ becslés. Világos, hogy ha $y = 0$, akkor $\|f_y\| = \|y\| = 0$. Ellenkező esetben vegyük az $x := \frac{y}{\|y\|}$ vektort, erre $\|x\| = 1$ teljesül, ezért

$$\|f_y\| \geq |f_y(x)| = \|y\|,$$

amivel az $\|f_y\| \geq \|y\|$ egyenlőtlenséget is igazoltuk. □

Az alábbi Riesz-féle reprezentációs tétel szerint Hilbert-térben ennek a megfordítása is igaz, vagyis Hilbert-téren minden folytonos lineáris funkcionál a fenti f_y alakú.

9.3. Riesz reprezentációs tétele. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és legyen $f \in \mathscr{H}'$ egy folytonos lineáris funkcionál, akkor létezik egyetlen olyan $y \in \mathscr{H}$ vektor, amely mellett f előáll*

$$f(x) = (x\,|\,y), \qquad x \in \mathscr{H}$$

alakban.

Bizonyítás. Ha $f = 0$, akkor az $y = 0$ választás triviálisan megfelelő. Tegyük fel, hogy $f \neq 0$, vagyis valamely x_0 mellett $f(x_0) \neq 0$. Mivel f folytonos lineáris funkcionál, ez azt jelenti, hogy

$$\ker f := \{x \in \mathscr{H} \mid f(x) = 0\}$$

valódi zárt lineáris altere $\mathscr{H}$-nak. A 8.26 Következmény szerint tehát $[\ker f]^\perp \neq \{0\}$. Legyen $z \in [\ker f]^\perp$, $z \neq 0$ egy tetszőleges vektor, akkor bármely $x \in \mathscr{H}$ mellett $v = f(x)z - f(z)x$ választással $v \in \ker f$, ui.

$$f(v) = f(x)f(z) - f(z)f(x) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $v \in \ker f$, és ezért $v \perp z$, vagyis

$$0 = (v \mid z) = f(x)(z \mid z) - f(z)(x \mid z),$$

amiből átrendezés után kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{f(z)}{\|z\|^2}(x \mid z) = \left(x \,\middle|\, \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z\right).$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $y = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$ rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy

$$f(x) = (x \mid y_1) = (x \mid y_2), \qquad x \in \mathscr{H}$$

valamely $y_1, y_2 \in \mathscr{H}$ vektorokra, akkor

$$(x \mid y_1 - y_2) = 0, \qquad x \in \mathscr{H},$$

vagyis $y_1 - y_2 \in \mathscr{H}^\perp = \{0\}$, következésképp $y_1 = y_2$. □

9.4. Definíció. Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $f \in \mathscr{H}'$ egy folytonos lineáris funkcionál, akkor azt az $y \in \mathscr{H}$ vektort amely mellett f előáll

$$f(x) = (x \mid y), \qquad x \in \mathscr{H}$$

alakban, az f reprezentáns vektorának nevezzük.

9.5. Példa. Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ egy mérhető halmaz és legyen f egy folytonos lineáris funkcionál $L^2(M)$ felett. Akkor létezik egy majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott $\psi \in L^2(M)$ függvény, amely mellett f előáll

$$f(\varphi) = \int_M \varphi \cdot \psi, \qquad \varphi \in L^2(M) \tag{9.1}$$

alakban. Valóban, mivel $L^2(M)$ Hilbert-tér, a 9.3 Riesz reprezentációs tétel értelmében létezik (egy nulla mértékű halmaz erejéig egyértelmű) $\chi \in L^2(M)$, amelyre

$$f(\varphi) = (\varphi \mid \chi) = \int_M \varphi \cdot \bar{\chi}, \qquad \varphi \in L^2(M),$$

amiből látható, hogy $\psi := \bar{\chi}$ választással f éppen a (9.1) alakot veszi fel.

9.6. Példa. Legyen ismét $M \subseteq \mathbb{R}^n$ egy mérhető halmaz, legyenek továbbá $1 < p, q < +\infty$ olyan valós számok, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Rögzítsünk egy $\psi \in L^q(M)$ függvényt, akkor a Hölder-egyenlőtlenség szerint bármely $\varphi \in L^p(M)$ esetén az

$$\int_M \varphi \cdot \psi$$

integrál jól definiált és

$$\left|\int_M \varphi \cdot \psi\right| \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q.$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$f_\psi(\varphi) := \int_M \varphi \cdot \psi, \qquad \varphi \in L^p(M),$$

$f_\psi : L^p(M) \to \mathbb{K}$ leképezés folytonos lineáris funkcionál és $\|f_\psi\| \leq \|\psi\|_q$. Igazolható, hogy valójában $\|f_\psi\| = \|\psi\|_q$, továbbá bármely $f \in L^p(M)'$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen $\psi \in L^q(M)$, amelyre $f = f_\psi$, vagyis igaz a következő

9.7. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz, akkor minden $f \in L^p(M)'$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen $\psi \in L^q(M)$, amely mellett f előáll*

$$f(\varphi) = \int_M \varphi \cdot \psi, \qquad \varphi \in L^p(M)$$

alakban.

9.2. Lineáris operátorok és funkcionálok kiterjesztése

Ebben a fejezetben lineáris funkcionálok kiterjesztéseivel foglalkozunk. Elsőként egy általános eredményt igazolunk folytonos lineáris operátor kiterjeszthetőségéről:

9.8. Állítás. *Legyen X normált tér, Y pedig Banach-tér, legyen továbbá $M \subseteq X$ adott lineáris altér és $A : M \to Y$ egy folytonos lineáris funkcionál. Akkor létezik egyetlen $\widetilde{A} : \overline{M} \to Y$ folytonos lineáris leképezés, amely A-t kiterjeszti és amelyre $\|A\| = \|\widetilde{A}\|$ teljesül.*

Bizonyítás. Bármely $x \in \overline{M}$ vektorhoz választható olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ M-ben haladó sorozat, hogy $x_n \to x$. Akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyúttal Cauchy-sorozat is, ezért a

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\|\|x_n - x_m\|, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

becslés alapján $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy-sorozat az Y Banach-térben, vagyis konvergens. Mielőtt bevezetnénk az

$$\widetilde{A}(x) := \lim_{n\to\infty} Ax_n, \qquad x \in \overline{M} \tag{9.2}$$

jelölést, megmutatjuk, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ határérték csak x-től, és nem az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konkrét megválasztásától függ. Valóban, ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindketten olyan M-beli sorozatok, hogy $x_n \to x$ és $u_n \to x$, akkor a fentiek alapján $Ax_n \to y$ és $Au_n \to v$ valamely $y, v \in Y$ vektorokra, ugyanakkor

$$\|Ax_n - Ay_n\| \leq \|A\|\|x_n - y_n\| \to 0,$$

amiből leolvasható, hogy $y = v$. Ez azt jelenti, hogy a (9.2) egyenlőség egy jól definiált $\widetilde{A} : \overline{M} \to Y$ függvényt ad. Ha $x \in M$, akkor az $x_n := x$ konstans sorozat választással kapjuk, hogy $\widetilde{A}x = Ax$, vagyis $A \subset \widetilde{A}$. Továbbá A lineáris, ha ui. $x, u \in \overline{M}$, és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan M-beliek, hogy $x_n \to x$ és $u_n \to u$, akkor $M \ni x_n + u_n \to x + u$, ezért

$$\widetilde{A}(x+u) = \lim_{n\to\infty} A(x_n + u_n) = \lim_{n\to\infty}(Ax_n + Au_n) = \widetilde{A}(x) + \widetilde{A}(u). \tag{9.3}$$

Hasonlóan igazolható, hogy $\widetilde{A}(\lambda x) = \lambda \widetilde{A}x$, $(x \in \overline{M}, \lambda \in \mathbb{K})$, vagyis $\widetilde{A}$ lineáris operátor. A folytonosság igazolásához legyen ismét $x \in \overline{M}$ és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan M-beli sorozat, hogy $x_n \to x$, akkor $Ax_n \to \widetilde{A}x$, ahol minden n-re $\|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\|$, ezért

$$\|\widetilde{A}x\| \leq \|A\|\|x\|$$

ami azt jelenti, hogy $\widetilde{A}$ folytonos és $\|\widetilde{A}\| \leq \|A\|$. Végül kihasználva, hogy $A \subset \widetilde{A}$,

$$\|\widetilde{A}\| = \sup_{x\in\overline{M},\|x\|\leq 1} \|\widetilde{A}x\| \geq \sup_{x\in M,\|x\|\leq 1} \|\widetilde{A}x\| = \sup_{x\in M,\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|A\|,$$

amivel az $\|A\| = \|\widetilde{A}\|$ egyenlőséget is beláttuk.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy $A_1, A_2 : \overline{M} \to Y$ mindketten olyan folytonos operátorok, amelyek kiterjesztik A-t, vagyis amelyek M-en megegyeznek. Ha $x \in \overline{M}$ adott vektor, és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan M-beli sorozat, hogy $x_n \to x$, akkor $A_1x_n \to A_1x$, illetve $A_2x_n \to A_2x$, ahol minden n-re $A_1x_n = A_2x_n$, ezért $A_1x = A_2x$. □

A fenti $\widetilde{A}$ operátort az A $\overline{M}$-ra való normatartó kiterjesztésének nevezzük.

9.9. Következmény. *Ha X normált tér, $M \subseteq X$ egy lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ egy folytonos lineáris funkcionál, akkor f egyértelműen kiterjeszthető $\widetilde{f} : \overline{M} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionállá úgy, hogy $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$.*

Vegyük észre, hogy a fenti állítás mindössze annyit állít, hogy folytonos lineáris funkcionált egy adott altérről az altér lezártjára ki lehet terjeszteni a folytonosság és a norma megtartásával. Az alábbi messze nem triviális eredmény szerint folytonos lineáris funkcionál altérről a *normált tér egészére* kiterjeszthető norma tartó módon. Ilyenkor azonban (az előző szituációval szemben) egyértelműség nem állítható.

9.10. Hahn–Banach-tétel. *Legyen X normált tér, $X_0 \subseteq X$ lineáris altér és $f_0 : X_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál. Akkor létezik olyan (általában nem egyértlemű) $f : X \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál (vagyis $f \in X'$), amely kiterjeszti f_0-t és amelyre $\|f\| = \|f_0\|$.*

A Hahn–Banach-tétel alábbi fontos következményét szokás „kis Hahn–Banach-tételnek” is nevezni.

9.11. Tétel. *Legyen X egy nem-nulla dimenziós normált tér és $x \in X$ egy tetszőleges vektor, akkor létezik olyan $f \in X'$, $\|f\| = 1$ funkcionál, hogy*

$$f(x) = \|x\|.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $x \neq 0$ és jelölje $x_0 := \frac{x}{\|x\|}$, illetve $M := \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, vagyis M az x_0 által generált egy-dimenziós altér. Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$f_0 : M \to \mathbb{K}; \qquad f_0(\lambda x_0) := \lambda$$

függvény lineáris funkcionál, továbbá

$$\|f_0\| = \sup_{\lambda\in\mathbb{K},\|\lambda x_0\|=1} |f_0(\lambda x_0)| = \sup_{\lambda\in\mathbb{K},|\lambda|=1} |\lambda| = 1,$$

vagyis f_0 folytonos és $\|f_0\| = 1$. Másrészt $\|x\|x_0 = x$ miatt $f_0(x) = \|x\|$. Legyen $f \in X'$ az f_0 egy normatartó kiterjesztése a 9.10 Hahn–Banach-tétel értelmében, akkor $\|f\| = 1$ és

$$f(x) = f_0(x) = \|x\|.$$

Végül ha $x = 0$, akkor bármely $f \in X', \|f\| = 1$ funkcionál megfelelő (ilyen létezik az $X \neq \{0\}$ feltétel és a bizonyítás első fele alapján). □

9.3. Normált tér biduálisa és reflexív Banach-terek

Legyen X egy normált tér, akkor az X' duális tér a funkcionál normával szintén normált tér (sőt Banach-tér). Speciálisan tekinthető az X' tér duális tere is, vagyis $(X')'$, amely duális tér lévén szintén Banach-tér.

9.12. Definíció. Az $X'' := (X')'$ Banach-teret az X normált tér *biduális terének* (vagy *második duális terének*) nevezzük.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az X normált tér természetes módon azonosítható az X'' biduális tér egy lineáris alterével. Ehhez tekintsük a következő konstrukciót.

Legyen $x \in X$ egy tetszőleges rögzített vektor és tekintsük az alábbi

$$\widehat{x}(f) := f(x), \qquad f \in X' \tag{9.4}$$

egyenlőséggel definiált $\widehat{x} : X' \to \mathbb{K}$ függvényt.

9.13. Állítás. *Bármely $x \in X$ esetén $\widehat{x}$ folytonos lineáris funkcionál X' felett (azaz $\widehat{x} \in X''$), és $\|\widehat{x}\| = \|x\|$.*

Bizonyítás. Elsőként a linearitást ellenőrizzük: legyen $f, g \in X'$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned} \widehat{x}(f+g) &= (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \widehat{x}(f) + \widehat{x}(g), \\ \widehat{x}(\lambda f) &= (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \widehat{x}(f). \end{aligned}$$

Továbbá az

$$|\widehat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|, \qquad f \in X',$$

becslésből következik, hogy $\widehat{x} \in (X')'$ és $\|\widehat{x}\| \leq \|x\|$. Végül a 9.11 Tétel szerint létezik $f \in X', \|f\| = 1$, hogy $f(x) = \|x\|$, ezért

$$\|\widehat{x}\| \geq |\widehat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\|,$$

amivel az $\|\widehat{x}\| = \|x\|$ egyenlőséget is igazoltuk. □

A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy ha (X, ϱ) és (Y, d) metrikus terek, akkor egy $f : X \to Y$ leképezést *izometriának* nevezünk, ha

$$d(f(x_1), f(x_2)) = \varrho(x_1, x_2), \qquad (\forall x_1, x_2 \in X).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden izometria injektív, illetve ha X és Y normált terek, akkor egy $T : X \to Y$ lineáris operátor pontosan akkor izometria, ha

$$\|Tx\| = \|x\|, \qquad (\forall x \in X).$$

9.14. Tétel. *Legyen X normált tér, akkor a*

$$\Phi(x) := \widehat{x}, \qquad x \in X,$$

$\Phi : X \to X''$ leképezés lineáris izometria.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján elegendő a Φ linearitását ellenőriznünk. Legyen $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, azt kell igazolnunk, hogy $\widehat{x+y} = \widehat{x} + \widehat{y}$, illetve $\widehat{\lambda x} = \lambda \widehat{x}$. Ehhez pedig legyen $f \in X'$, akkor

$$\begin{aligned} (\widehat{x+y})(f) &= f(x+y) = f(x) + f(y) = \widehat{x}(f) + \widehat{y}(f), \\ (\widehat{\lambda x})(f) &= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \widehat{x}(f), \end{aligned}$$

amivel Φ linearitását igazoltuk. □

9.15. Megjegyzés. A fentiek szerint a Φ természetes leképezés izometrikus bijekciót létesít az X és $\mathrm{ran}(\Phi)$ között, emiatt szokás e tereket azonosnak tekinteni. Ha tehát azt írjuk, hogy $X \subseteq X''$, akkor ezt úgy kell érteni, hogy az X és $\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq X''$ tereket azonosítottuk Φ-n keresztül.

9.16. Definíció. Az X Banach-teret *reflexívnek* mondjuk, ha a fenti Φ természetes leképezés szürjetív X''-re, vagyis Φ izometrikus izomorfizmus X és X'' között.

9.17. Megjegyzés. Vigyázzunk arra, hogy egy X Banach-tér nem feltétlenül reflexív attól, hogy létezik valamilyen $\Psi : X \to X''$ izometrikus izomorfizmus. A reflexivitás fogalmába azt is beleértjük, hogy ez az izomorfizmus a 9.14 Tételben definiált Φ operátoron keresztül valósul meg.

9.18. Megjegyzés. Formálisan általánosabb lett volna, ha a 9.16 Definícióban egy X tetszőleges (tehát nem feltétlenül teljes) normált tér reflexivitását értelmezzük. Ha azonban a $\Phi : X \to X''$ izometrikus izomorfizmus, akkor az X'' teljessége miatt könnyű megmutatni, hogy X is szükségképpen teljes, vagyis Banach-tér.

9.19. Példa. Bizonyítás nélkül megemlítünk néhány a gyakorlatban fontos reflexív, illetve nem reflexív Banach-teret:

1) minden véges dimenziós Banach-tér reflexív,
2) minden Hilbert-tér reflexív,
3) minden $1 < p < +\infty$ valós szám mellett a ℓ^p sorozattér reflexív,
4) minden $1 < p < +\infty$ valós szám és $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz mellett $L^p(M)$ reflexív,
5) az ℓ^1 és ℓ^∞ sorozatterek egyike sem reflexív,
6) az $L^1(M)$ és $L^\infty(M)$ terek egyike sem reflexív,
7) ha $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, akkor a folytonos függvények $C[a, b]$ tere nem reflexív.

10. FEJEZET

A Banach-terek teljességének következményei

10.1. Pontonkénti konvergencia és a Banach–Steinhaus-tétel

10.1. Definíció. Legyenek X és Y normált terek és legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{B}(X;Y)$-beli operátorsorozat, és legyen $A \in \mathscr{B}(X;Y)$. Azt mondjuk, hogy az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként konvergál A-hoz, ha

$$A_n x \to Ax, \qquad (\forall x \in X).$$

Ha $Y = \mathbb{K}$, akkor egy X'-beli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionálsorozat valamely $f \in X'$ funkcionálhoz való pontonkénti konvergenciáját szokás *gyenge-* konvergenciának* vagy *w^*-konvergenciának* is nevezni.

Elsőként megvizsgáljuk a pontonkénti, illetve az operátornorma szerinti konvergencia viszonyát.

10.2. Állítás. *Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathscr{B}(X;Y)$-beli operátorsorozat, amely az operátornorma szerint tart az $A \in \mathscr{B}(X;Y)$ operátorhoz (vagyis $\|A_n - A\| \to 0$). Akkor $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként is tart A-hoz.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $x \in X$ vektort, akkor

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\|\|x\| \to 0,$$

vagyis $A_n x \to Ax$. □

Az alábbi példa mutatja, hogy a megfordítás nem feltétlenül igaz, vagyis egy pontonként konvergens operátorsorozat nem feltétlenül konvergál az operátor norma szerint is:

10.3. Példa. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abban egy ortonormált sorozat, vezessük be továbbá minden n-re az

$$f_n(x) := (x \,|\, e_n), \qquad x \in \mathscr{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $f_n : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionált. Láttuk, hogy f_n folytonos és $\|f_n\| = \|e_n\| = 1$. A 8.49 Bessel-egyenlőtlenség szerint minden x-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x \,|\, e_n)|^2 \leq \|x\|^2,$$

amiből következik, hogy $(x \,|\, e_n) \to 0$, vagyis

$$f_n(x) \to 0, \qquad x \in \mathscr{H},$$

ami azt jelenti, hogy $f_n \to 0$ pontonként. Ugyanakkor $\|f_n\| = 1$ miatt $f_n \nrightarrow 0$ a funkcionál norma szerint.

10.4. Definíció. Legyenek X és Y normált terek, legyen továbbá $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egy adott $\mathscr{B}(X;Y)$-beli operátorrendszer.

(i) Azt mondjuk, hogy $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *pontonként korlátos*, ha minden rögzített $x \in X$-re

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda x\| < +\infty.$$

(ii) Azt mondjuk, hogy $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *egyenletesen korlátos*, ha

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda\| < +\infty.$$

10.5. Banach egyenletes korlátosság tétele. *Legyenek X és Y Banach-terek, akkor egy $\mathscr{B}(X;Y)$-beli $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ operátorrendszer pontosan akkor pontonként korlátos, ha egyenletesen korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ egyenletesen korlátos és legyen $M \geq 0$ olyan konstans, hogy $\|A_\lambda\| \leq M$ minden λ-ra, akkor bármely rögzített $x \in X$ mellett

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda x\| \leq M \cdot \|x\|,$$

vagyis $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pontonként korlátos.

A másik irány messze nem triviális, ezért azt nem bizonyítjuk. □

10.6. Banach–Steinhaus-tétel. *Legyenek X és Y Banach-terek és legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathscr{B}(X;Y)$-ban haladó sorozat, amely pontonként konvergens, vagyis minden $x \in X$ mellett létezik az*

$$A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n x \tag{10.1}$$

határérték. Akkor az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer egyenletesen korlátos, továbbá a (10.1) *egyenlőséggel definiált $A : X \to Y$ leképezés folytonos lineáris operátor.*

Bizonyítás. A műveletek folytonossága alapján világos, hogy A lineáris, ha ui. $x, y \in X$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, akkor

$$A(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} [\lambda A_n x + \mu A_n y] = \lambda A(x) + \mu A(y).$$

Vegyük észre, hogy a feltételek mellett az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozat pontonként korlátos, ui. minden $x \in X$ mellett $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és ezért egyúttal korlátos sorozat. A 10.5 Tétel szerint $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen korlátos, vagyis létezik $M \geq 0$, hogy

$$\|A_n\| \leq M, \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{10.2}$$

Végül megmutatjuk, hogy A korlátos: legyen ui. $x \in X$, akkor $A_n x \to Ax$, ahol (10.2) szerint minden n-re $\|A_n x\| \leq M\|x\|$, ezért

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M\|x\|,$$

ami éppen azt jelenti, hogy A korlátos, és $\|A\| \leq M$. □

10.7. Definíció. Legyen X normált tér, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy X-beli sorozat és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat gyengén konvergál az x vektorhoz, ha minden $f \in X'$ folytonos lineáris funkcionál esetén $f(x_n) \to f(x)$ teljesül.

10.8. Állítás. *Legyen X normált tér és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan X-beli sorozat, amely normában konvergál valamely $x \in X$ vektorhoz (azaz $\|x_n - x\| \to 0$), akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén is konvergál az x vektorhoz.*

Bizonyítás. Legyen $f \in X'$ egy folytonos lineáris funkcionál, akkor

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| \to 0,$$

vagyis $f(x_n) \to f(x)$, ami azt jelenti, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gyengén konvergál x-hez. □

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás megfordítása nem igaz, vagyis egy gyengén konvergens sorozat nem feltétlenül konvergál a norma szerint is (vö. 10.3 Példa).

Vegyük észre, hogy egy X normált tér X' duálisán értelmezhetjük mind a gyenge, mind pedig a gyenge-* (vagy pontonkénti) konvergenciákat: egy X'-beli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionálsorozat definíció szerint akkor tart gyengén az $f \in X'$ funkcionálhoz, ha bármely $F \in X''$ biduálisbeli elem mellett $F(f_n) \to F(f)$ teljesül:

$$F(f_n) \to F(f), \qquad \forall F \in X''. \tag{10.3}$$

Ugyanakkor a gyenge-* konvergencia értelmezése alapján $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontosan akkor tart f-hez a gyenge-* konvergencia szerint, ha

$$\widehat{x}(f_n) \to \widehat{x}(f), \qquad x \in X, \tag{10.4}$$

ahol $\widehat{x} \in X''$ a (9.4) egyenlőséggel értelmezett biduálisbeli elem. Ebből már látható, hogy minden gyengén konvergens funkcionálsorozat egyúttal gyenge-* konvergens is. A megfordítás viszont nem igaz, csak ha minden $F \in X''$ biduálisbeli elem előáll $F = \widehat{x}$ alakban, vagyis ha a tér reflexív. Igaz tehát az alábbi eredmény:

10.9. Állítás. *Ha X reflexív Banach-tér, akkor az X'-beli gyenge, illetve gyenge-* konvergencia ugyanazt jelenti.*

Végezetül bizonyítás nélkül kimondunk egy a gyakorlatban felettébb hasznos állítást, mely a Bolzano–Weierstrass-tétel „gyenge" változatának tekinthető:

10.10. Tétel. *Reflexív Banach-térben bármely korlátos sorozatnak létezik gyengén konvergens részsorozata*

10.2. Banach nyít leképezés tétele és a zárt gráf tétel

10.11. Állítás. *Legyenek X és Y vektorterek, akkor egy $A : X \to Y$ lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha $\ker A = \{0\}$, és ilyenkor az A^{-1} inverz leképezés maga is lineáris leképezés.*

Bizonyítás. Világos, hogy $0 \in \ker A$, ezért ha A injektív, akkor szükségképp $\ker A = \{0\}$. Megfordítva, ha $\ker A = \{0\}$ és $x, y \in X$ olyanok, hogy $Ax = Ay$, akkor $A(x - y) = 0$, vagyis $x - y \in \ker A$, amiből $x = y$ és egyúttal az A injektivitása is következik.

Tegyük fel, hogy A injektív és jelölje $Y_0 := \operatorname{ran} A$ az A operátor képterét. Világos, hogy Y_0 lineáris altere Y-nak, vagyis maga is vektortér. Megmutatjuk, hogy $A^{-1} : Y_0 \to X$ lineáris: ha ui. $y_1, y_2 \in Y_0$ és $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, akkor léteznek egyértelműen olyan $x_1, x_2 \in X$ vektorok, hogy $Ax_1 = y_1$ és $Ax_2 = y_2$, (vagyis $x_1 = A^{-1}y_1, x_2 = A^{-1}y_2$). De akkor

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$

ami azt jelenti, hogy

$$A^{-1}(\alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2,$$

vagyis A^{-1} lineáris. □

Az alábbiakban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy egy folytonos lineáris operátor inverze milyen feltételek mellett lesz maga is folytonos. A következő egyszerű példa mutatja, hogy a folytonosság nem öröklődik automatikusan az inverz operátorra:

10.12. Példa. Jelölje X a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények $C[0,1]$ terét a $\|\cdot\|_\infty$ maximum normával, illetve jelölje Y szintén a $C[0,1]$ teret, azonban az alábbi

$$\|\varphi\|_1 := \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx, \qquad \varphi \in C[0,1]$$

integrál-normával. Legyen T az $X \to Y$, $T\varphi = \varphi$ egyenlőséggel értelmezett identikus leképezés, akkor a

$$\|T\varphi\|_1 = \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx \le \max_{x\in[0,1]} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_\infty$$

becslés mutatja, hogy T korlátos, éspedig $\|T\| \le 1$. Ugyanakkor egyszerű számolás mutatja, hogy $\varphi_n(x) := x^n$, $(x \in [0,1], n \in \mathbb{N})$ értelmezéssel olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot kapunk, amelyre

$$\|\varphi_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \qquad \|\varphi_n\|_\infty = 1,$$

vagyis $\|\varphi_n\|_1 \to 0$, de $\|T^{-1}\varphi_n\|_\infty = 1 \nrightarrow 0$, és ezért $T^{-1} : Y \to X$ nem folytonos.

10.13. Banach nyílt leképezés tétele. *Legyenek X és Y mindketten Banach-terek és tegyük fel hogy a $T \in \mathscr{B}(X;Y)$ operátor szürjektív, akkor T nyílt leképezés, vagyis bármely $\Omega \subseteq X$ nyílt halmaz T szerinti képe is nyílt.*

10.14. Banach lineáris homeomorfizmus tétele. *Legyenek X és Y mindketten Banach-terek és tegyük fel hogy a $T \in \mathscr{B}(X;Y)$ operátor bijekció, akkor $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y;X)$.*

Bizonyítás. Világos, hogy a feltétel mellett $T^{-1} : Y \to X$ lineáris operátor, csak azt kell igazolnunk, hogy T^{-1} folytonos, vagy ami ezzel ekvivalens, T^{-1} folytonos a $0 \in Y$ pontban. Legyen $\varepsilon > 0$, akkor a nyílt leképezés tétel szerint a $B_\varepsilon(0,X)$ X-beli nyílt halmaz T-általi képe, vagyis a

$$V := T(B_\varepsilon(0,X)) := \{Tx \mid x \in B_\varepsilon(0,X)\}$$

nyílt halmaz Y-ban, és világos, hogy $0 \in V$. Ezért létezik olyan $\delta > 0$, hogy $B_\delta(0,Y) \subseteq V$, következésképp

$$T^{-1}(B_\delta(0,Y)) \subseteq T^{-1}(V) = B_\varepsilon(0,X).$$

Ezzel megmutattuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy bármely $y \in Y$, $\|y\| < \delta$ esetén $\|T^{-1}y\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis T^{-1} folytonos a 0-ban. □

Emlékeztetünk rá, hogy egy f függvény gráfján (vagy grafikonján) a

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$$

halmazt értjük.

10.15. Definíció. Legyenek X és Y metrikus terek, akkor egy $f : X \to Y$ függvényt *zárt leképezésnek* nevezünk, ha $G(f) \subseteq X \times Y$ zárt.

A zárt halmazok sorozatokkal való jellemzése alapján könnyen ellenőrizhető, hogy egy $f : X \to Y$ (az X-en mindenütt értelmezett) függvény pontosan akkor zárt, ha bármely X-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra abból, hogy $x_n \to x$ és $f(x_n) \to y$ teljesül valamely $x \in X$ és $y \in Y$ pontokra, következik, hogy $f(x) = y$.

Ebből világos, hogy egy $f : X \to Y$ (az X-en mindenütt értelmezett) leképezés zártsága gyengébb tulajdonság a folytonosságnál: tekintsük ui. az alábbi három kijelentést

(a) $x_n \to x$,
(b) $f(x_n) \to y$,
(c) $f(x) = y$.

Míg az f függvény folytonossága azt jelenti, hogy minden x-re (a)⇒(b)∧(c), addig az f zártsága az (a)∧(b)⇒(c) implikációval ekvivalens.

Megjegyezzük azonban azt is, hogy ha f értelmezési tartománya nem zárt részhalmaza X-nek, akkor a folytonosság és a zártság között semmilyen logikai kapcsolat nincsen. Tekintsük ui. az $X = Y = \mathbb{R}$ metrikus tereket és abban az

$$f(x) := 0, \qquad x \in]0, 1[,$$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

egyenlőséggel értelmezett $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy f folytonos, de $G(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nem zárt halmaz, illetve $G(g) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ugyan zárt halmaz, de g nem folytonos.

10.16. Állítás. *Legyenek X és Y mindketten Banach-terek és legyen $A : X \to Y$ zárt lineáris operátor, akkor $G(A)$ Banach-tér az alábbi*

$$\|(x, Ax)\| := \|x\| + \|Ax\|, \qquad x \in X \tag{10.5}$$

normával.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $G(A) \subseteq X \times Y$ lineáris altér, továbbá $X \times Y$ Banach-tér az

$$\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|, \qquad x \in X, y \in Y \tag{10.6}$$

normával. Minthogy Banach-tér zárt lineáris altere maga is Banach-tér, továbbá a (10.6) norma $G(A)$-ra vett megszorítása megegyezik a (10.5) normával, azért $G(A)$ Banach-tér. □

10.17. Banach zárt gráf tétele. *Legyenek X és Y mindketten Banach-terek és legyen $A : X \to Y$ az X-en mindenütt értelmezett zárt lineáris operátor, akkor A folytonos, vagyis $A \in \mathscr{B}(X; Y)$.*

Bizonyítás. Tekintsük a (10.5) normával ellátott $G(A)$ Banach-teret, illetve az alábbi

$$U(x, Ax) := x, \qquad V(x, Ax) := Ax, \qquad x \in X$$

egyenlőségekkel definiált $U : G(A) \to X$ és $V : G(A) \to Y$ lineáris operátorokat. Az alábbi

$$\|U(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\|$$
$$\|V(x, Ax)\| = \|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\|$$

becslések alapján kapjuk, hogy U és V mindketten folytonos lineáris operátorok, éspedig $\|U\|, \|V\| \leq 1$. Egyszerű számolás mutatja, hogy U bijekciót létesít a $G(A)$ és X halmazok között: valóban, bármely $x \in X$ előáll $U(x, Ax) = x$ alakban, vagyis U szürjektív, ha továbbá $U(x_1, Ax_2) = U(x_2, Ax_2)$, akkor $x_1 = x_2$, és ezért $Ax_1 = Ax_2$, vagyis $(x_1, Ax_1) =$

(x_2, Ax_2), következésképp U injektív. A 10.14 Banach-féle lineáris homeomorfizmus tétel szerint U^{-1} folytonos, továbbá fennáll, hogy

$$U^{-1}x = (x, Ax), \qquad x \in X,$$

amiből leolvasható, hogy minden $x \in X$ mellett

$$VU^{-1}x = V(x, Ax) = Ax,$$

vagyis A előáll $A = VU^{-1}$ alakban. Mivel e kompozíció mindkét tényezője folytonos, azért A maga is folytonos. $\square$

Az alábbiakban példát mutatunk olyan (természetesen nem Banach-terek közt értelmezett) zárt lineáris operátorra, amely nem folytonos:

10.18. Példa. Jelölje $X = C^1[0,1]$ az egyszer folytonosan differenciálható függvények alábbi

$$\|\varphi\| := \max_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|, \qquad \varphi \in C^1[0,1]$$

maximum normával ellátott terét, jelölje továbbá $Y := C[0,1]$ a folytonos függvények terét, szintén a maximum normával. Tekintsük az alábbi

$$A\varphi := \varphi'$$

egyenlőséggel értelmezett $A : X \to Y$ lineáris operátor. Megmutatjuk, hogy A zárt, de nem korlátos operátor. Valóban, legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan X-ben haladó sorozat, hogy $\varphi_n \to \varphi$ és $A\varphi_n = \varphi_n' \to \psi$ teljesül valamely $\varphi \in X$ és $\psi \in Y$ függvényekre, akkor az X-, illetve Y-beli normák értelmezése szerint $\varphi_n \to \varphi$ egyenletesen, és $\varphi_n' \to \psi$ egyenletesen, amiből következik, hogy φ differenciálható, és $\varphi' = \psi$ (4.62 Tétel), vagyis $A\varphi = \psi$, következésképp A zárt operátor. Ugyanakkor a

$$\varphi_n(x) := e^{-nx}, \qquad n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$$

egyenlőséggel értelmezett $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa folytonosan differenciálható függvényekből álló sorozat minden tagjára

$$\varphi_n'(x) = -ne^{-nx}, \qquad x \in [0,1]$$

miatt $\|\varphi_n\| = 1$ és $\|A\varphi_n\| = \|\varphi_n'\| = n$ teljesül, következésképp A nem korlátos.

11. FEJEZET

Operátor spektruma

11.1. Korlátos operátor spektruma

Legyenek X és Y egyelőre tetszőleges vektorterek és legyen $A : X \to Y$ egy lineáris operátor. Adott $b \in Y$ mellett tekintsük az alábbi

$$Ax = b \tag{11.1}$$

ún. elsőfajú egyenletet. Világos, hogy (11.1) pontosan akkor oldható meg, ha $b \in \operatorname{ran} A$. Speciálisan, (11.1) pontosan akkor oldható meg bármely $b \in Y$ mellett, ha A *szürjektív*, továbbá a megoldás egyértelműsége ekvivalens az A operátor *injektivitásával*. Tehát a (11.1) elsőfajú egyenletnek akkor és csak akkor létezik minden $b \in Y$ mellett pontosan egy megoldása, ha $A : X \to Y$ *bijekció*. Ha X és Y mindketten normált terek, és $A : X \to Y$ bijektív (vagyis az (11.1) egyenletnek bármely b mellett egyértelműen létezik megoldása), akkor az alkalmazások szempontjából fontos kérdés a megoldás b-től való „folytonos” függése, vagyis az A^{-1} operátor folytonossága.

Ha $X = Y$, vagyis $A : X \to X$, akkor tekinthetjük rögzített $\lambda \in \mathbb{K}$ mellett az (11.1) egyenletnél némiképp általánosabb

$$(A - \lambda I)x = b \tag{11.2}$$

ún. másodfajú egyenletet, ahol I az X tér identikus operátora. Az alábbiakban az (11.2) egyenlet megoldhatóságával foglalkozunk abban a speciális esetben, amikor X Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(X)$.

11.1. Definíció. Legyen X normált tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(X)$ operátor folytonosan invertálhatónak (vagy röviden invertálhatónak) nevezünk, ha $A : X \to X$ bijekció és $A^{-1} \in \mathscr{B}(X)$. A folytonosan invertálható operátorok halmazát a $G(\mathscr{B}(X))$ szimbólummal jelöljük.

11.2. Definíció. Legyen X normált tér és $A \in \mathscr{B}(X)$. A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az A *reguláris értékének* nevezzük, ha $A-\lambda I$ folytonosan invertálható, azaz bijektív és $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathscr{B}(X)$. A reguláris értékek $\varrho(A)$ halmazát az A *rezolvens halmazának* nevezzük:

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, A - \lambda I \in G(\mathscr{B}(X))\}.$$

A $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az A *spektrumpontjának* nevezzük, ha λ nem reguláris értéke A-nak, vagyis $A - \lambda I \notin G(\mathscr{B}(X))$. A spektrumpontok halmazát az A spektrumának nevezzük:

$$\operatorname{Sp}(A) := \mathbb{K} \setminus \varrho(A).$$

Ha X normált tér, $A \in \mathscr{B}(X)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ pontosan akkor teljesül, ha az alábbi kijelentések valamelyike fennáll:

(a) $A - \lambda I$ nem injektív,
(b) $A - \lambda I$ nem szürjektív,
(c) $A - \lambda I$ bijektív, de $(A - \lambda I)^{-1}$ nem folytonos.

A 10.14 Banach lineáris homeomorfizmus tétel alapján (c) nem fordulhat elő, ha X Banach-tér. Ha X véges dimenziós, akkor a lineáris algebrából jól ismert dimenzió tétel értelmében (a) és (b) ekvivalensek, tehát ilyenkor a $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ kijelentés pontosan akkor teljesül, ha

$$\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}.$$

Ha azonban X végtelen dimenziós, akkor (a) és (b) egymástól független feltételek.

11.3. Definíció. Legyen X normált tér és $A \in \mathscr{B}(X)$, akkor a $\lambda \in \mathbb{K}$ számot az X *sajátértékének* nevezzük, ha

$$\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}.$$

A sajátértékek halmazát az A pontspektrumának nevezzük és azt a $\mathrm{Sp}_p(A)$ szimbólummal jelöljük. Minden olyan $x \in X$, $x \neq 0$ vektort, amelyre $Ax = \lambda x$, az A λ-hoz tartozó *sajátvektorának* nevezünk.

A definíció alapján világos, hogy $\mathrm{Sp}_p(A) \subseteq \mathrm{Sp}(A)$, azonban itt általában nincs egyenlőség:

11.4. Példa. Jelölje $X := \ell^2$ a négyzetesen szummálható sorozatok terét és tekintsük az alábbi

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) := (0, x_0, x_1, x_2, \ldots), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

operátort. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $S \in \mathscr{B}(X)$ és hogy $\ker S = \{0\}$, ugyanakkor az is világos, hogy S nem szürjektív. Következésképp $0 \in \mathrm{Sp}(S)$, de $0 \notin \mathrm{Sp}_p(S)$.

11.5. Állítás. *Legyen X Banach-tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(X)$ operátor pontosan akkor folytonosan invertálható, ha eleget tesz az alábbi két feltételnek:*

(a) *létezik $C > 0$, hogy minden $x \in X$-re $\|Ax\| \geq C\|x\|$,*
(b) *A képtere sűrű X-ben: $\overline{\mathrm{ran}\, A} = X$.*

Bizonyítás. Tegyük fel elsőként, hogy A folytonosan invertálható, akkor bármely x-re

$$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|,$$

vagyis $C := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ konstanssal (a) teljesül. Másrészt A szürjektív, vagyis $\mathrm{ran}\, A = X$, ezért (b) triviálisan fennáll.

Megfordítva tegyük fel, hogy $A \in \mathscr{B}(X)$ eleget tesz az (a) és (b) feltételeknek. Akkor (a) alapján $\ker A = \{0\}$, következésképp A injektív. Az A szürjektivitásának igazolásához (b) miatt elegendő azt megmutatni, hogy A képtere zárt. Legyen tehát $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan X-beli sorozat, hogy $Ax_n \to y$ teljesül valamely $y \in X$ vektorra. Megmutatjuk, hogy $y \in \mathrm{ran}\, A$. Vegyük észre, hogy (a) alapján

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{C}\|Ax_n - Ax_m\|, \qquad n, m \in \mathbb{N},$$

kövekezésképp kapjuk, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az X Banach-térben, és ezért $x_n \to x$ valamely $x \in X$ vektorra. Az A operátor folytonossága miatt $Ax_n \to Ax$, következésképp $Ax = y$, vagyis $\mathrm{ran}\, A$ zárt. Ezzel megmutattuk, hogy $A : X \to X$ bijektív. Az A^{-1} operátor folytonossága következik a Banach-lineáris homeomorfizmus tételből, azonban az (a) feltétel felhasznlálásával közvetlenül is igazolható: legyen ui. $y \in X$ tetszőleges, akkor $x = A^{-1}y$ mellett $Ax = y$, és ezért

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{C}\|Ax\| = \frac{1}{C}\|y\|,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy A^{-1} folytonos és $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$. □

11.6. Lemma. *Legyen X Banach-tér és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan X-beli sorozat, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, akkor a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ vektorsor is konvergens X-ben.*

Bizonyítás. Az X teljessége miatt elegendő megmutatni, hogy az

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$$

egyenlőséggel definiált $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részletösszeg sorozat rendelkezik a Cauchy tulajdonsággal. Jelölje

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|,$$

akkor a feltétel alapján $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, továbbá bármely $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ mellett fennáll az

$$\|s_m - s_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| = S_m - S_n$$

becslés, amiből leolvasható, hogy $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. □

Az alábbiakban szükségünk lesz egy $A \in \mathscr{B}(X)$ operátor n-edik hatványaira, melyeket az

$$A^0 := I, \qquad A^{n+1} := A \cdot A^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

rekurzióval értelmezünk.

11.7. Carl Neumann tétel. *Legyen X Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{B}(X)$, $\|A\| < 1$, akkor $I - A$ folytonosan invertálható, a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A^n$ sor konvergens és*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Bizonyítás. Mivel minden n-re $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, ahol $\|A\| < 1$, azért a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A\|^n$ mértani sor konvergenciájának és $\mathscr{B}(X)$ teljességének figyelembevételével a 11.6 Lemma alapján kapjuk, hogy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A^n$ konvergens. Jelölje

$$B := \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

a sor összegét és jelölje továbbá rögzített n-re

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} A^k,$$

akkor egyrészt $B_n(I - A) \to B(I - A)$ és $(I - A)B_n \to (I - A)B$, továbbá $\|A^n\| \to 0$ miatt

$$B_n(I - A) = (I - A)B_n = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I - A^{n+1} \to I,$$

amiből kapjuk, hogy $B(I-A) = (I-A)B = I$. Ezzel tehát igazoltuk hogy $I - A$ folytonosan invertálható, és $(I-A)^{-1} = B$. $\square$

Megjegyezzük, hogy ha X Banach-tér és $A, B \in G(\mathscr{B}(X))$ mindketten invertálható operátorok, akkor AB is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Valóban,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I,$$

és hasonlóan, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

11.8. Állítás. *Legyen X Banach-tér, legyenek továbbá $A, B \in \mathscr{B}(X)$ olyan operátorok, ahol A folytonosan invertálható és*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

akkor B is folytonosan invertálható.

Bizonyítás. Írjuk fel B-t az alábbi

$$B = A - (A - B) = [I - (A - B)A^{-1}]A = (I - C)A$$

szorzat alakban, ahol tehát $C := (A - B)A^{-1}$. Mivel $A \in G(\mathscr{B}(X))$, azért az előző megjegyzés alapján elegendő azt megmutatnunk, hogy $I - C$ folytonosan invertálható. Minthogy a feltétel alapján

$$\|C\| \leq \|A - B\|\|A^{-1}\| < 1,$$

azért a 11.7 Tétel alapján $I - C$ folytonosan invertálható, következésképp B is folytonosan invertálható. $\square$

11.9. Következmény. *Ha X Banach-tér, akkor a folytonosan invertálható operátorok $G(\mathscr{B}(X))$ halmaza nyílt $\mathscr{B}(X)$-ben.*

Bizonyítás. Legyen $A \in G(\mathscr{B}(X))$ és jelölje $r := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, akkor az előző állítás értelmében minden $B \in \mathscr{B}(X)$ operátorra $B \in G(\mathscr{B}(X))$ teljesül, azaz

$$B_r(A, \mathscr{B}(X)) \subseteq G(\mathscr{B}(X)).$$

Ez azt jelenti, hogy A belső pontja a $G(\mathscr{B}(X))$ halmaznak, tehát $G(\mathscr{B}(X))$ nyílt. $\square$

11.10. Következmény. *Legyen X Banach-tér, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(X)$ operátor rezolvens halmaza nyílt, a spektruma pedig zárt.*

Bizonyítás. Minthogy definíció szerint $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{K} \setminus \varrho(A)$, azért elég a $\varrho(A)$ halmaz nyíltságát igazolni. Legyen $\lambda_0 \in \varrho(A)$, akkor $A - \lambda_0 I \in G(\mathscr{B}(X))$. Jelölje $r := \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$, akkor bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda - \lambda_0| < r$ esetén

$$\|(A - \lambda_0 I) - (A - \lambda I)\| = |\lambda - \lambda_0| < r$$

teljül, ezért a 11.8 Állítás szerint $(A - \lambda I)$ folytonosan invertálható, azaz $\lambda \in \varrho(A)$. Ezzel megmutattuk, hogy λ_0 belső pontja $\varrho(A)$-nak, következésképp $\varrho(A)$ nyílt halmaz. $\square$

11.11. Definíció. Legyen X Banach-tér, akkor egy $A \in \mathscr{B}(X)$ operátor spektrálsugarán az alábbi

$$r(A) := \inf\Big\{\|A^n\|^{1/n} \,\Big|\, n = 1, 2, \ldots\Big\} \tag{11.3}$$

nemnegatív számot értjük.

Világos, hogy $r(A) \leq \|A\|$, és itt általában nem is áll egyenlőség.

11.12. Spektrálsugár tétel. *Legyen X Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(X)$, akkor*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Bizonyítás. Minthogy minden n-re fennáll az $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$ becslés, elegendő azt igazolni, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik n_0 küszöbindex, hogy

$$\|A^n\|^{1/n} < r(A) + \varepsilon, \qquad n \geq n_0. \tag{11.4}$$

Rögzítsünk egy $r(A) < r < r(A) + \varepsilon$ számot, akkor az infimum értelmezése folytán létezik olyan $k_0 \geq 1$ természetes szám, hogy

$$\|A^{k_0}\| < r^{k_0}.$$

Legyen $n > k_0$, akkor n egyértelműen felírható $n = mk_0 + l$ alakban, ahol m, l természetes számok, hogy $0 \leq l \leq k_0 - 1$. Az operátornorma szubmultiplikativitása alapján

$$\|A^n\| \leq \|A^{k_0 m}\|\|A^l\| \leq \|A^{k_0}\|^m \|\|A\|^l \leq r^{k_0 m} \cdot C,$$

ahol $C := \max\{1, \|A\|, \|A\|^2, \dots, \|A\|^{k_0-1}\}$. Ebből n-edik gyökvonás után az

$$\|A^n\|^{1/n} \leq C^{1/n} \cdot r^{\frac{k_0 m}{n}} = C^{1/n} \cdot r^{1-\frac{l}{n}}$$

becsléshez jutunk, ahol a jobboldal $n \to \infty$ mellett r-hez konvergál, következésképp elég nagy n_0 esetén (11.4) teljesül. $\square$

11.13. Tétel. *Legyen X Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(X)$. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan szám, hogy $|\lambda| > r(A)$, akkor $\lambda \in \varrho(A)$, a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{\lambda^n}$ sor konvergens és*

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{11.5}$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $r(A) < r < |\lambda|$ számot, akkor a 11.12 Tétel szerint alkalmas n_0 küszöbindex mellett $\|A^n\| < r^n$ teljesül, valahányszor $n \geq n_0$. Speciálisan, $q := \frac{r}{|\lambda|}$ választással,

$$\left\|\frac{A^n}{\lambda^n}\right\| = \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n} \leq \frac{r^n}{|\lambda|^n} = q^n, \qquad n \geq n_0,$$

ezért a 11.6 Lemma alapján a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{\lambda^n}$ sor, és vele együtt együttal a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ sor is kinvergens. Jelölje

$$B := -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}},$$

akkor a $\mathscr{B}(X)$-beli operátor-szorzás folytonossága alapján

$$(A - \lambda I)B = AB - \lambda B = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} = I,$$

és hasonlóképp $B(A - \lambda I) = I$, vagyis $\lambda \in \varrho(A)$ és fennáll az (11.5) egyenlőség. $\square$

11.14. Következmény. *Ha X Banach-tér, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(X)$ operátor spektruma kompakt, és fennáll a*

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq r(A)\} \tag{11.6}$$

tartalmazás.

Bizonyítás. A legutóbbi tétel szerint, ha $|\lambda| > r(A)$, akkor $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$, amiből az (11.6) tartalmazás következik. Speciálisan $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{K}$ korlátos halmaz. Másrészt a 11.10 Következmény szerint $\mathrm{Sp}(A)$ zárt, ezért kompakt halmaz. □

A spektrummal kapcsolatos egyik legfontosabb eredmény az alábbi

11.15. Tétel. *Legyen X komplex Banach-tér és $A \in \mathscr{B}(X)$, akkor* $\mathrm{Sp}(A)$ *nem-üres és fennáll a*

$$r(A) = \max\Big\{|\lambda| \,\Big|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\Big\}$$

egyenlőség.

A 11.15 Tétel tartalma egyfelől az, hogy ha X *komplex* Banach-tér, akkor mindig lesz olyan λ szám, amely mellett az $(A - \lambda I)x = b$ másodfajú egyenletnek nem létezik egyértelmű megoldása valamely b mellett. Másfelől a tétel szerint $r = r(A)$ a legkisebb olyan valós szám, amely mellett az $0 \in \mathbb{C}$ középű r-sugarú zárt körlap tartalmazza az A spektrumát.

11.16. Példa. A 11.15 Tétel állítása nem marad érvényben valós Banach-terekben. Tekintsük ui. az $X = \mathbb{R}^2$ valós Banach-teret (bármely normával), és azon azt az A opertárt, amelynek a mátrixa

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy bármely λ valós szám mellett $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \neq 0$, következésképp $A - \lambda I$ mindig invertálható, és ezért $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

11.2. Alkalmazás négyzetesen integrálható magú operátorokra

Az alábbiakban legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz és legyen $\mathscr{K} \in L^2(M \times M)$ valós vagy komplex értékű függvény. A Fubini-tétel szerint majdnem minden $x \in M$ mellett a $\mathscr{K}(x, \cdot)$ parciális függvény, vagyis a

$$\mathscr{K}_x(y) := \mathscr{K}(x, y), \qquad y \in M$$

egyenlőséggel definiált $\mathscr{K}_x : M \to \mathbb{K}$ függvényre $\mathscr{K}_x \in L^2(M)$ teljesül, és ezért bármely $\varphi \in L^2(M)$ és majdnem minden $x \in M$ mellett $\mathscr{K}_x \cdot \varphi \in L^1(M)$. Következésképp majdnem minden $x \in M$ mellett jól definiált az alábbi

$$\psi(x) := \int_M \mathscr{K}_x \cdot \varphi = \int_M \mathscr{K}(x, y) \cdot \varphi(y)\, dy, \tag{11.7}$$

$\psi : M \to \mathbb{K}$ függvény. (Azokra a nulla mértékű halmazt képező $x \in M$ értékekre, ahol (11.7) nem értelmes, legyen $\psi(x) := 0$.) Elsőként megmutatjuk, hogy $\psi \in L^2(M)$: valóban, majdnem minden $x \in M$ mellett

$$|\psi(x)| \leq \int_M |\mathscr{K}_x \cdot \varphi| = \|\mathscr{K}_x \cdot \varphi\|_1 \leq \|\mathscr{K}_x\|_2 \cdot \|\varphi\|_2,$$

következésképp

$$|\psi(x)|^2 \leq \Big[\int_M |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dy\Big] \cdot \Big[\int_M |\varphi(y)|^2\, dy\Big],$$

amit x szerint integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_M |\psi(x)|^2 &\le \left[\int_M \left(\int_M |\mathscr{K}(x,y)|^2\,dy\right)dx\right]\cdot\left[\int_M |\varphi(y)|^2\,dy\right]\\ &= \left[\int_{M\times M} |\mathscr{K}(x,y)|^2\,dy\,dx\right]\cdot\left[\int_M |\varphi(y)|^2\,dy\right]\\ &= \|\mathscr{K}\|^2_{L^2(M\times M)}\cdot\|\varphi\|_2^2.\end{aligned}$$

Ezzel tehát azt kaptuk, hogy a $K : L^2(M) \to L^2(M), K\varphi := \psi$ leképezés jól definiált lineáris operátor, továbbá a fentiek szerint

$$\|K\varphi\|_2^2 = \|\psi\|_2^2 \le \|\mathscr{K}\|^2_{L^2(M\times M)}\cdot\|\varphi\|_2^2, \qquad \varphi \in L^2(M),$$

vagyis K korlátos és $\|K\| \le \|\mathscr{K}\|^2_{L^2(M\times M)}$. Az így definiált K operátorokat integrálható magú operátoroknak nevezzük, a $\mathscr{K}$ függvényt pedig a K magfüggvényének hívjuk.

Láttuk, hogy K spektrálsugara és normája közt fennáll az $r(K) \le \|K\|$ egyenlőtlenség, továbbá $|\lambda| > r(K)$ esetén λ reguláris értéke K-nak, és

$$(K-\lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{K^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy a $\mathscr{K}$ függvényből kiindulva hogyan számíthatók ki rekurzió segítségével a K^k hatványok.

11.17. Állítás. *Legyenek $\mathscr{K}$ és $\mathscr{L} \in L^2(M\times M)$ és jelölje K, illetve L a megfelelő integráloperátorokat:*

$$(K\varphi)(x) := \int_M \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \qquad (L\varphi)(x) := \int_M \mathscr{L}(x,y)\varphi(y)\,dy, \qquad \varphi \in L^2(M).$$

Akkor $P := KL$ szintén integrálható magú operátor, éspedig

$$\mathscr{P}(x,y) := \int_M \mathscr{K}(x,z)\cdot\mathscr{L}(z,y)\,dz, \qquad x,y \in M$$

magfüggvénnyel.

Bizonyítás. A Fubini-tétel szerint majdnem minden x és $y \in M$ mellett az $\mathscr{K}_x := \mathscr{K}(x,\cdot)$ és $\mathscr{L}^y := \mathscr{L}(\cdot,y)$ parciális függvényekre $\mathscr{K}_x, \mathscr{L}^y \in L^2(M)$ teljesül, ezért majdnem minden $(x,y) \in M\times M$-re $\mathscr{P}$ jól definiált és a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$|\mathscr{P}(x,y)|^2 \le \|\mathscr{K}_x\|_2^2\cdot\|\mathscr{L}^y\|_2^2 = \left[\int_M |\mathscr{K}(x,u)|^2\,du\right]\cdot\left[\int_M |\mathscr{L}(u,y)|^2\,du\right]$$

következésképp ismét a Fubini-tétel szerint

$$\begin{aligned}\int_{M\times M} |\mathscr{P}(x,y)|^2\,dxdy &= \int_M \left(\int_M |\mathscr{P}(x,y)|^2\,dx\right)dy\\ &\le \left[\int_M\left(\int_M |\mathscr{K}(x,u)|^2\,du\right)dx\right]\cdot\left[\int_M\left(\int_M |\mathscr{L}(u,y)|^2\,du\right)dy\right]\\ &= \|\mathscr{K}\|^2_{L^2(M\times M)}\cdot\|\mathscr{L}\|^2_{L^2(M\times M)},\end{aligned}$$

vagyis valóban $L^2(M\times M)$. Másfelől jelölje $\varphi \in L^2(M)$ mellett

$$\psi(z) := (L\varphi)(z) = \int_M \mathscr{L}(z,y)\varphi(y)\,dy, \qquad z \in M,$$

akkor $x \in M$-re, ismét a Fubini-tételt alkalmazva

$$\begin{aligned}(KL\varphi)(x) = (K\psi)(x) &= \int_M \mathscr{K}(x,z)\psi(z)\,dz \\ &= \int_M \Big(\int_M \mathscr{K}(x,z)\mathscr{L}(z,y)\varphi(y)\,dy\Big)\,dz \\ &= \int_M \Big(\int_M \mathscr{K}(x,z)\mathscr{L}(z,y)\,dz\Big)\cdot\varphi(y)\,dy \\ &= \int_M \mathscr{P}(x,y)\cdot\varphi(y)\,dy,\end{aligned}$$

vagyis a KL kompozíció függvény valóban megegyezik a $\mathscr{P}$ magfüggvényhez tartozó integráloperátorral. □

A fenti állítás szerint tehát K bármely K^k hatványa előáll

$$(K^k)\varphi(x) = \int_M \mathscr{K}_k(x,y)\varphi(y)\,dy, \qquad \varphi \in L^2(M),$$

alakban, ahol a $\mathscr{K}_k \in L^2(M\times M)$ magfüggvényeket az alábbi rekurzióval értelmezzük:

$$\mathscr{K}_1(x,y) := \mathscr{K}(x,y), \qquad \mathscr{K}_{k+1}(x,y) := \int_M \mathscr{K}_k(x,z)\mathscr{K}(z,y)\,dz, \qquad k=1,2,\dots$$

A fentiek figyelembevételével tehát $|\lambda| > \|\mathscr{K}\|_{L^2(M\times M)}$ esetén a

$$(K-\lambda I)\varphi = b \tag{11.8}$$

másodfajú egyenlet bármely $b \in L^2(M)$ függvény mellett egyértelműen megoldható, éspedig

$$\varphi = (K-\lambda I)^{-1}b = -\frac{b}{\lambda} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^k}{\lambda^{k+1}}b. \tag{11.9}$$

Vegyük észre, hogy bármely $k=1,2,\dots$ esetén rögzített x,y mellett

$$\mathscr{K}_{k+1}(x,y) = \int_M \mathscr{K}_k(x,z)\mathscr{K}^y(z)\,dz = (K^k\mathscr{K}^y)(x),$$

ezért rögzített y-ra

$$\int_M |\mathscr{K}_{k+1}(x,y)|^2\,dx \le \|K^k\|^2\|K^y\|_2^2 = \|K^k\|^2\cdot\int_M |\mathscr{K}(x,y)|^2\,dx,$$

következésképp

$$\|\mathscr{K}_{k+1}\|^2_{L^2(M\times M)} \le \|K^k\|^2\cdot\|\mathscr{K}\|^2_{L^2(M\times M)}.$$

A $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|K^k\|}{|\lambda|^k}$ sor konvergenciája miatt a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mathscr{K}_k}{\lambda^k}$ függvénysor is konvergens $L^2(M\times M)$-ben és

$$\widetilde{\mathscr{K}} := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathscr{K}_k}{\lambda^{k+1}}$$

jelöléssel

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^k}{\lambda^{k+1}}b\Big)(x) = \int_M \widetilde{\mathscr{K}}(x,y)b(y)\,dy,$$

ezért (11.8) másodfajú egyenlet φ megoldása (11.9) alapján előáll

$$\varphi(x) = -\frac{b(x)}{\lambda} - \int_M \widetilde{\mathscr{K}}(x,y)b(y)\,dy$$

alakban.

12. FEJEZET

Hilbert-terek operátorai

12.1. Folytonos lineáris operátor adjungáltja

Az alábbiakban legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H};\mathscr{K})$. Rögzített $y \in \mathscr{K}$ vektor mellett vezessük be a

$$\varphi(x) := (Ax \,|\, y), \qquad x \in \mathscr{H}$$

egyenlőséggel definiált $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ függvényt, mely folytonos lineáris funkcionál $\mathscr{H}$-n, ui.

$$|\varphi(x)| \leq \|A\|\|y\|\|x\|, \qquad x \in \mathscr{H}.$$

A 9.3 Riesz-reprezentációs tétel értelmében egyértelműen létezik olyan $y^* \in \mathscr{H}$ vektor, amely mellett φ előáll

$$\varphi(x) = (x \,|\, y^*), \qquad x \in \mathscr{H}$$

alakban, vagyis

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, y^*), \qquad x \in \mathscr{H}.$$

Jelölje minden $y \in \mathscr{K}$ mellett $A^*(y) := y^*$, akkor tehát $A^* : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ az a függvény, amely eleget tesz az alábbi ún. adjungálási azonosságnak:

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^*(y)), \qquad x \in \mathscr{H}, y \in \mathscr{K}.$$

Ezt az $A^* : \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ leképezést nevezzük az $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H};\mathscr{K})$ operátor *adjungáltjának*.

12.1. Tétel. *Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H};\mathscr{K})$ folytonos lineáris operátor, akkor $A^* \in \mathscr{B}(\mathscr{K},\mathscr{H})$, emellett $\|A\| = \|A^*\|$ és $(A^*)^* = A$.*

Bizonyítás. Elsőként az A^* linearitását igazoljuk. Legyenek ui. $y_1, y_2 \in \mathscr{K}$ rögzített vektorok, akkor bármely $x \in \mathscr{H}$-ra

$$(x \,|\, A^*(y_1 + y_2)) = (Ax \,|\, y_1 + y_2) = (x \,|\, A^*(y_1)) + (x \,|\, A^*(y_2)) = (x \,|\, A^*(y_1) + A^*(y_1)),$$

amiből az $A^*(y_1 + y_2) = A^*(y_1) + A^*(y_2)$ egyenlőség már következik. Hasonlóan igazolható az A^* leképezés homogenitása. Következő lépésben belátjuk, hogy $A^* \in \mathscr{B}(\mathscr{K},\mathscr{H})$. Legyen ui. $y \in \mathscr{K}$, akkor

$$\|A^*y\|^2 = (AA^*y \,|\, y) \leq \|AA^*y\|\|y\| \leq \|A\|\|A^*y\|\|y\|,$$

amiből az $\|A^*y\| \leq \|A\|\|y\|$ egyenlőtlenség adódik. Ebből pedig az A^* folytonossága, és egyúttal az $\|A^*\| \leq \|A\|$ normabecslés is következik. Legyenek most $x \in \mathscr{H}$ és $y \in \mathscr{K}$, akkor

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^*y) = \overline{(A^*y \,|\, x)} = \overline{(y \,|\, (A^*)^*x)} = ((A^*)^*x \,|\, y),$$

amiből kapjuk, hogy $(A^*)^* = A$. Ennek és a második lépésnek a felhasználásával nyerjük, hogy $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$, következésképp $\|A\| = \|A^*\|$. $\square$

12.2. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H};\mathscr{K})$, akkor*

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2. \tag{12.1}$$

Bizonyítás. Az operátornorma szubmultiplikativitása és az előző tétel alapján kapjuk, hogy $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$. Megfordítva, legyen $x \in \mathscr{H}$, akkor

$$\|Ax\|^2 = (Ax \,|\, Ax) = (A^*Ax \,|\, x) \leq \|A^*A\|\|x\|^2,$$

amiből már adódik az $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$ becslés is. □

12.3. Megjegyzés. A (12.1) egyenlőséget C^*-*tulajdonságnak* nevezzük.

Az alábbiakban megvizsgáljuk az adjungálás és a műveletek kapcsolatát:

12.4. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek és legyenek $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H};\mathscr{K})$ folytonos lineáris operátorok, akkor $(A+B)^* = A^* + B^*$, és bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.*

Bizonyítás. Bármely $x \in \mathscr{H}$ és $y \in \mathscr{K}$ vektorokra

$$((A+B)x \,|\, y) = (x \,|\, A^*y + B^*y) = (x \,|\, (A^* + B^*)y),$$
$$(\lambda Ax \,|\, y) = (Ax \,|\, \overline{\lambda}y) = (x \,|\, \overline{\lambda}A^*y),$$

amiből az állítás már következik. □

12.5. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ és $\mathscr{H}_3$ Hilbert-terek és legyenek $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_2;\mathscr{H}_3)$, illetve $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1;\mathscr{H}_2)$ folytonos lineáris operátorok, akkor $(AB)^* = B^*A^*$*

Bizonyítás. Bármely $x \in \mathscr{H}_1$ és $y \in \mathscr{H}_3$ vektorokra

$$((AB)x \,|\, y) = (A(Bx) \,|\, y) = (Bx \,|\, A^*y) = (x \,|\, B^*A^*y),$$

amiből az $(AB)^* = B^*A^*$ egyenlőtlenség már következik. □

12.6. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek, akkor*

$$\ker A = [\operatorname{ran} A^*]^\perp \qquad \textit{és} \qquad \overline{\operatorname{ran} A} = [\ker A^*]^\perp. \tag{12.2}$$

Bizonyítás. Legyen először $x \in \ker A$, azaz $Ax = 0$, akkor bármely $y \in \mathscr{K}$ vektorra $0 = (Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^*y)$, vagyis $x \in [\operatorname{ran} A^*]^\perp$. Megfordítva legyen $x \in [\operatorname{ran} A^*]^\perp$, akkor bármely $y \in \mathscr{K}$ esetén $(Ax \,|\, y) = (x \,|\, A^*y) = 0$, következésképp $Ax = 0$, azaz $x \in \ker A$.

Az imént bizonyított formulát A helyett A^*-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$[\ker A^*]^\perp = [\operatorname{ran} A^{**}]^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{ran} A},$$

amivel (12.2) második egyenlőségét is beláttuk. □

12.7. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert tér.

a) A $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátort *normálisnak* nevezzük, ha $T^*T = TT^*$, vagyis T és T^* felcserélhető.
b) Az $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátort *önadjungáltnak* nevezzük, ha $A^* = A$.
c) Az $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátort *pozitívnak* nevezzük, ha A önadjungált, és minden $x \in \mathscr{H}$ esetén $(Ax \,|\, x) \geq 0$.
d) Az $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátort *unitérnek* nevezzük, ha $U^*U = UU^* = I$, ahol I a $\mathscr{H}$ identikus operátorát jelöli,
e) A $P \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátort*ortogonális projekciónak* nevezzük, ha $P^* = P^2 = P$, vagyis P önadjungált és idempotens.

12.8. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér és legyen $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ egy folytonos lineáris operátor, akkor minden $x, y \in \mathscr{H}$ esetén*

$$(Tx \mid y) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} i^k (T(x + i^k y) \mid x + i^k y)$$

Bizonyítás. A bizonyítandó forumla egyszerű számolással ellenőrizhető, ezért azt az olvasóra bízzuk. □

12.9. Következmény. *Legyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér és legyenek A és $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ olyanok, hogy*

$$(Ax \mid x) = (Bx \mid x), \qquad \forall x \in \mathscr{H},$$

akkor $A = B$.

Bizonyítás. A 12.8 Lemma szerint bármely $x, y \in \mathscr{H}$ vektorokra $(Ax \mid y) = (Bx \mid y)$, vagyis

$$((A - B)x \mid y) = 0,$$

amiből $A - B = 0$, azaz $A = B$ következik. □

Fontos megjegyeznünk, hogy a 12.8 Lemma és annak 12.9 Következménye kizárólag *komplex* Hilbert-terekben érvényes, ui. például a $\mathscr{H} = \mathbb{R}^2$ valós Hilbert-téren

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olyan operátorok, hogy $(Ax \mid x) = (Bx \mid x) = 0$ bármely $x \in \mathbb{R}^2$-re, ugyanakkor $A \neq B$.

12.10. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.*

(1) *A pontosan akkor önadjungált, ha minden $x \in \mathscr{H}$-ra $(Ax \mid x) \in \mathbb{R}$,*

(2) *A pontosan akkor pozitív, ha minden $x \in \mathscr{H}$-ra $(Ax \mid x) \geq 0$.*

Bizonyítás. (1) Ha $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ önadjungált, akkor minden $x \in \mathscr{H}$ mellett

$$(Ax \mid x) = (x \mid Ax) = \overline{(Ax \mid x)},$$

amiből következik, hogy $(Ax \mid x)$ valós. Megfordítva tegyük fel, hogy minden x-re $(Ax \mid x)$ valós, akkor

$$(Ax \mid x) = \overline{(Ax \mid x)} = (x \mid Ax) = (A^*x \mid x), \qquad x \in \mathscr{H},$$

ezért a 12.9 Következmény szerint $A = A^*$, vagyis A önadjungált.

(2) Nyilvánvaló a pozitív operátorok definíciója és (1) alapján. □

12.11. Példa. Legyen n pozitív egész szám és legyen $\mathscr{H} = \mathbb{K}^n$, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátor egyértelműen reprezentálható egy

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixszal. Egyszerű számolás mutatja, hogy bármely $x, y \in \mathbb{K}^n$ vektorok esetén

$$(Ax \mid y) = ([A] \cdot x \mid y) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \Big) \overline{y_j} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} \overline{y_j} \Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{z_k},$$

ahol $z_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{a_{jk}} y_j$, $k = 1, 2, \ldots, n$, következésképp az A^* adjungált operátor mátrixa a következő alakban adható meg:

$$[A^*] = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

12.12. Példa. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és legyenek $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatok $\mathscr{H}$-ban. Legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy korlátos $\mathbb{K}$-beli sorozat és legyen $M \geq 0$ olyan állandó, hogy minden n-re $|\lambda_n| \leq M$, akkor bármely $x \in \mathscr{H}$ vektor esetén a Bessel-egyenlőtlenség szerint fennáll, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n (x \,|\, e_n)|^2 \leq M^2 \cdot \|x\|^2,$$

ezért a Parseval-tétel szerint a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (x \,|\, e_n) f_n$ ortogonális sor konvergens és annak Tx-szel jelölt összegére

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n (x \,|\, e_n)|^2 \leq M^2 \cdot \|x\|^2.$$

Következésképp a

$$Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \,|\, e_n) f_n \qquad x \in \mathscr{H} \tag{12.3}$$

egyenlőséggel értelmezett $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ leképezés korlátos lineáris operátor, éspedig $\|T\| \leq M$. (Megjegyezzük, hogy $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$ választással valójában $\|T\| = M$ egyenlőség teljesül.) Megmutatjuk, hogy a T^* adjungált operátor a következő hozzárendeléssel adható meg:

$$T^* y = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda}_n (y \,|\, f_n) e_n, \qquad y \in \mathscr{H}. \tag{12.4}$$

Legyen ui. $x, y \in \mathscr{H}$, akkor a skaláris szorzat folytonossága alapján

$$(Tx \,|\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \,|\, e_n)(f_n \,|\, y) = \left(x \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda}_n \cdot \overline{(f_n \,|\, y)} e_n \right) = \left(x \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda}_n \cdot (y \,|\, f_n) e_n \right),$$

amiből a (12.4) egyenlőség már következik.

12.13. Példa. Az előző példának tekintsük azt az esetét, amikor $f_n = e_n$, vagyis T a

$$Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \,|\, e_n) e_n \qquad x \in \mathscr{H}$$

egyenlőséggel értelmezett operátor, ahol $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ továbbra is korlátos sorozat. Könnyen ellenőrizhető, hogy T normális (azaz $T^*T = TT^*$), illetve T pontosan akkor önajdungált, ha minden n-re $\lambda_n = \overline{\lambda}_n$, azaz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós sorozat.

12.14. Példa. Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ egy mérhető halmaz és adott $\mathscr{K} \in L^2(M \times M)$ magfüggvény mellett tekintsük a 11.2 fejezetben bevezetett K integráloperátort:

$$(K\varphi)(x) = \int_M \mathscr{K}(x, y) \varphi(y)\, dy, \qquad \varphi \in L^2(M).$$

Legyen $\mathscr{K}^*$ az az $L^2(M \times M)$-beli függvény, amelyet egy adott $(x, y) \in M \times M$ pontban a

$$\mathscr{K}^*(x, y) := \overline{\mathscr{K}(y, x)}$$

egyenlőséggel értelmezünk. Megmutatjuk, hogy a K^* a $\mathscr{K}^*$ magfüggvény által meghatározott integráloperátor. Legyenek ui. $\varphi, \psi \in L^2(M)$, akkor a Fubini-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(K\varphi \,|\, \psi) &= \int_M K\varphi \cdot \overline{\psi} \\
&= \int_M \Big(\int_M \mathscr{K}(x, y)\varphi(y)\, dy \Big) \cdot \overline{\psi(x)}\, dx \\
&= \int_M \varphi(y) \cdot \Big(\int_M \mathscr{K}(x, y)\overline{\psi(x)}\, dx \Big)\, dy \\
&= \int_M \varphi(y) \cdot \overline{\Big(\int_M \overline{\mathscr{K}(x, y)}\psi(x)\, dx \Big)}\, dy \\
&= \int_M \varphi(y) \cdot \overline{\Big(\int_M \mathscr{K}^*(y, x)\psi(x)\, dx \Big)}\, dy,
\end{aligned}$$

vagyis valóban

$$(K^*\psi)(y) = \int_M \mathscr{K}^*(y, x)\psi(x)\, dx.$$

12.2. Az adjungált operátor és a spektrum

12.15. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ invertálható operátor, akkor T^* is invertálható és*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \tag{12.5}$$

Bizonyítás. A feltevés szerint $TT^{-1} = I = T^{-1}T$, következésképp

$$(T^{-1})^*T^* = (TT^{-1})^* = I = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*,$$

amiből (12.5) már következik. □

12.16. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, akkor*

$$\mathrm{Sp}(A^*) = \{\overline{\lambda} \,|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

Bizonyítás. Elegendő azt igazolnunk, hogy

$$\varrho(A^*) = \{\overline{\lambda} \,|\, \lambda \in \varrho(A)\},$$

ami viszont az $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$ egyenlőség figyelembevételével nyilvánvalóan következik a 12.15 Lemmából. □

Megjegyezzük, hogy abból, hogy λ az A operátor sajátértéke, még nem következik, hogy $\overline{\lambda}$ az A^* sajátértéke volna. Tekintsük ui. a $\mathscr{H} = \ell^2$ Hilbert-téren az alábbi

$$L(x_0, x_1, x_2, \ldots) := (x_1, x_2, x_3, \ldots), \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

operátort. Világos, hogy $e = (1, 0, 0, \ldots)$ választással $Le = 0$, vagyis $\lambda = 0$ az L sajátértéke. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$L^*(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots),$$

amelynek magterére $\ker L^* = \{0\}$ teljesül, vagyis $\lambda = 0$ nem sajátértéke L^*-nak.

12.17. Állítás. *Legyen T normális operátor, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in \mathscr{H}$, akkor a $Tx = \lambda x$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $T^*x = \overline{\lambda}x$.*

Bizonyítás. Elsőként vegyük észre, hogy bármely T normális operátorra fennáll, hogy

$$(Tx \,|\, Tx) = (T^*Tx \,|\, x) = (TT^*x \,|\, x) = (T^*x \,|\, T^*x), \qquad x \in \mathscr{H},$$

vagyis

$$\|Tx\| = \|T^*x\|, \qquad x \in \mathscr{H}. \tag{12.6}$$

Vegyük észre továbbá, hogy T-vel együtt a $T - \lambda I$ operátor is normális, ezért a (12.6) egyenlőséget T helyett $(T - \lambda I)$-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|Tx - \lambda x\| = \|T^*x - \overline{\lambda}x\|, \qquad x \in \mathscr{H},$$

amiből a bizonyítandó állítás már következik. □

12.18. Következmény. *Ha T normális operátor, akkor egy λ szám pontosan akkor sajátértke T-nek, ha $\overline{\lambda}$ sajátértéke T^*-nak.*

12.19. Következmény. *Normális operátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai egymásra merőlegesek.*

Bizonyítás. Legyenek $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ a T különböző sajátértékei és legyenek $x, y \in \mathscr{H}$ olyan vektorok, hogy $Tx = \lambda x$ és $Ty = \mu y$, akkor a 12.17 Állítás szerint

$$\lambda(x \,|\, y) = (Tx \,|\, y) = (x \,|\, T^*y) = (x \,|\, \overline{\mu}y) = \mu(x \,|\, y)$$

amiből $\lambda \neq \mu$ miatt $(x \,|\, y) = 0$ adódik. □

12.3. Numerikus értékkészlet és numerikus sugár

12.20. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, akkor T *numerikus értékkészletén* az alábbi

$$W(T) := \{(Tu \,|\, u) \,|\, u \in \mathscr{H}, \|u\| = 1\}$$

halmazt, T *numerikus sugarán* pedig a

$$w(T) := \sup_{u \in \mathscr{H}, \|u\|=1} |(Tu \,|\, u)|$$

számot értjük.

12.21. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, akkor $w(T) \leq \|T\|$, továbbá*

$$|(Tx \,|\, x)| \leq w(T) \cdot \|x\|^2, \qquad x \in \mathscr{H}. \tag{12.7}$$

Bizonyítás. A Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség és az operátornorma definíciója alapján bármely $u \in \mathscr{H}$, $\|u\| = 1$ esetén

$$|(Tu \,|\, u)| \leq \|T\|\|u\|^2 = \|T\|,$$

amiből a $w(T) \leq \|T\|$ egyenlőtlenség már adódik. A (12.7) egyenlőtlenség $x = 0$ mellett triviálisan igaz, ha pedig $x \neq 0$, akkor $u := \frac{x}{\|x\|}$ választással $|(Tu \,|\, u)| \leq w(T)$, amit átrendezve éppen a bizonyítandó (12.7) egyenlőtlenséget kapjuk. □

12.22. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *T invertálható, vagyis $0 \in \varrho(T)$,*

(ii) $[\operatorname{ran} T]^{\perp} = \{0\}$ *és létezik olyan* $C > 0$ *állandó, hogy*

$$\|Tx\| \geq C\|x\|, \qquad (\forall x \in \mathscr{H}). \tag{12.8}$$

Bizonyítás. Hilbert-térben a $[\operatorname{ran} T]^{\perp} = \{0\}$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $\overline{\operatorname{ran} T} = \mathscr{H}$, ezért a lemma következik a 11.5 Állításból. □

A spektrum és a numerikus sugár kapcsolatát írja le a következő

12.23. Tétel. *Legyen* $\mathscr{H}$ *Hilbert-tér és* $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$*, akkor*

$$\operatorname{Sp}(A) \subseteq \overline{W(A)}.$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, akkor $\lambda \in \overline{W(A)}$. Jelölje a rövidség kedvéért $T := A - \lambda I$, akkor tehát $0 \notin \varrho(T)$, ezért a 12.22 Lemma szerint vagy $[\operatorname{ran} T]^{\perp} \neq \{0\}$, vagy nem létezik olyan $C > 0$ állandó, amely mellett (12.8) teljesül. Előbbi esetben létezik $u \in [\operatorname{ran} T]^{\perp}$, hogy $\|u\| = 1$, akkor $Tu \in \operatorname{ran} T$ miatt

$$0 = (Tu \,|\, u) = (Au \,|\, u) - \lambda(u \,|\, u) = (Au \,|\, u) - \lambda,$$

vagyis $\lambda = (Au \,|\, u)$, és ezért $\|u\| = 1$ folytán $\lambda \in W(A)$. Tegyük fel, hogy a (12.8) feltétel sérül, akkor könnyen látható, hogy

$$\inf_{u \in \mathscr{H}, \|u\|=1} \|Tu\| = 0,$$

vagyis létezik olyan $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ csupa egy-normájú $\mathscr{H}$-beli vektorokból álló sorozat, hogy $Tu_n \to 0$, következésképp

$$|(Tu_n \,|\, u_n)| \leq \|Tu_n\|\|u_n\| = \|Tu_n\| \to 0,$$

amiből $(Tu_n \,|\, u_n) = (Au_n \,|\, u_n) - \lambda(u_n \,|\, u_n) = (Au_n \,|\, u_n) - \lambda$ figyelembevételével nyerjük, hogy $(Au_n \,|\, u_n) \to \lambda$. Mivel minden n-re $(Au_n \,|\, u_n) \in W(A)$, azért $\lambda \in \overline{W(A)}$. □

A fenti állítás közvetlen alkalmazásával nyerjük az alábbi fontos eredményt:

12.24. Tétel. *Legyen* $\mathscr{H}$ *(komplex) Hilbert-tér és* $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *önadjungált operátor, akkor* $\operatorname{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$. *Ha* A *pozitív operátor, akkor* $\operatorname{Sp}(A) \subseteq [0, +\infty[$.

Bizonyítás. Ha A önadjungált operátor, akkor a 12.10 Állítás szerint $W(A) \subseteq \mathbb{R}$, és ezért egyúttal $\overline{W(A)} \subseteq \mathbb{R}$. Az előző állításból következik, hogy $\operatorname{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$. Ha A pozitív operátor, akkor a 12.10 Állítás szerint $W(A) \subseteq [0, +\infty[$, és ezért egyúttal $\overline{W(A)} \subseteq [0, +\infty[$. Az előző állításból következik, hogy ekkor $\operatorname{Sp}(A) \subseteq [0, +\infty[$. □

A következő tételt fel fogjuk használni a kompakt önadjungált operátorok Hilbert–Schmidt-féle alaptételének bizonyításában:

12.25. Tétel. *Legyen* $\mathscr{H}$ *valós vagy komplex Hilbert-tér és* $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *önadjungált operátor, akkor*

$$w(A) = \|A\|$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy bármely korlátos A operátor esetén $w(A) \leq \|A\|$, ezért elegendő a fordított irányú egyenlőtlenséget igazolnunk. Legyenek $x, y \in \mathscr{H}$ tetszőlegesek, akkor

$$(A(x+y) \,|\, x+y) - (A(x-y) \,|\, x-y) = 2(Ax \,|\, y) + 2(Ay \,|\, x) = 4\,\mathfrak{Re}(Ax \,|\, y),$$

következésképp

$$\begin{aligned}4\,\mathfrak{Re}(Ax\,|\,y) &\le |(A(x+y)\,|\,x+y)| + |(A(x-y)\,|\,x-y)| \\ &\le w(A)\cdot\Big[\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\Big] \\ &= 2w(A)\cdot\Big[\|x\|^2+\|y\|^2\Big].\end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy bármely $u, v \in \mathscr{H}$, $\|u\| = \|v\| = 1$ vektorok esetén

$$\mathfrak{Re}(Au\,|\,v) \le w(A),$$

és ezért $u := \frac{x}{\|x\|}$ és $v := \frac{y}{\|y\|}$ választással

$$\mathfrak{Re}(Ax\,|\,y) \le w(A)\|x\|\|y\|,$$

amiből $y = Ax$ helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$\|Ax\| \le w(A)\|x\|,$$

vagyis $\|A\| \le w(A)$. □

12.4. Pozitív operátorok

12.26. Definíció. Legyen E valós vagy komplex vektortér, akkor egy $s : E \times E \to \mathbb{K}$ függvényt *félskalárszorzatnak* nevezünk, ha

(a) minden rögzített y mellett az $s(\cdot, y)$ parciális függvény lineáris,
(b) minden $x, y \in E$ mellett $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$,
(c) minden $x \in E$ mellett $s(x, x) \ge 0$.

Az alábbi eredményt a Cauchy–Schwarz-egyenlőtleneség félskalárszorzatokra vonatkozó változata:

12.27. Állítás. *Legyen s félskalárszorzat az E vektortéren, akkor*

$$|s(x,y)|^2 \le s(x,x)s(y,y), \qquad x, y \in E. \tag{12.9}$$

Bizonyítás. Elsőként tegyük fel, hogy $s(x, x) = s(y, y) = 0$, akkor $u := x - s(x, y)y$ választással egyszerű számolás mutatja, hogy

$$0 \le s(u,u) = -s(x,y)s(y,x) - \overline{s(x,y)}s(x,y) = -2|s(x,y)|^2 \le 0,$$

következésképp $s(x, y) = 0$, ami azt jelenti, hogy (12.9) egyenlőséggel teljesül. Tegyük fel, hogy $s(y, y) \ne 0$, akkor $u := s(y, y)x - s(x, y)y$ választással

$$0 \le s(u,u) = s(y,y)[s(y,y)s(x,x) - |s(x,y)|^2] \le 0,$$

amit $s(y, y)$-nal egyszerűsítve éppen a (12.9) egyenlőséget kapjuk. Hasonlóan adódik az egyenlőtlenség az $s(x, x) \ne 0$ esetben. □

Vegyük észre, hogy ha $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pozitív operátor a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren, akkor az

$$s(x,y) := (Ax\,|\,y), \qquad x, y \in \mathscr{H}$$

egyenlőséggel definiált s függvény félskalárszorzat, ezért a 12.27 Állítás figyelembevételével nyerjük az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|(Ax\,|\,y)|^2 \le (Ax\,|\,x)(Ay\,|\,y), \qquad x, y \in \mathscr{H}. \tag{12.10}$$

Ennek felhasználásával igazolható az alábbi

12.28. Tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ pozitív operátor, akkor*

$$\|Ax\|^2 \le \|A\|(Ax \,|\, x), \qquad x \in \mathscr{H}. \tag{12.11}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a (12.10) egyenlőtlenséget az $y = Ax$ választással, akkor

$$\begin{aligned} \|Ax\|^4 = |(Ax \,|\, y)|^2 &\le (Ax \,|\, x)(Ay \,|\, y) = (Ax \,|\, x)(A^2x \,|\, Ax) \\ &\le (Ax \,|\, x)\|A^2x\|\|Ax\| \le (Ax \,|\, x)\|A\|\|Ax\|^2, \end{aligned}$$

amiből (12.11) már következik. □

Láttuk a 12.23 Tételben, hogy bármely $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ korlátos operátor esetén fennáll a $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \overline{W(A)}$ tartalmazás. Speciálisan, bármely A önadjungált operátor spektrumára fennáll a $\mathrm{Sp}(A) \subseteq [m, M]$ tartalmazás, ahol

$$\begin{aligned} m &:= \inf W(A) = \inf\{(Ax \,|\, x) \mid x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}, \\ M &:= \sup W(A) = \sup\{(Ax \,|\, x) \mid x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

12.29. Állítás. *Ha $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ önadjungált operátor, akkor az imént bevezetett m és M számokra $m, M \in \mathrm{Sp}(A)$ teljesül.*

Bizonyítás. Elsőként igazoljuk, hogy $m \in \mathrm{Sp}(A)$. Az m szám értelmezése alapján ui.

$$0 \le (Ax \,|\, x) - m\|x\|^2 = ((A - mI)x \,|\, x), \qquad x \in \mathscr{H},$$

ami azt jelenti, hogy $A - mI$ pozitív operátor. Emellett ismét az m szám értelmezése alapján létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa egy-normájú vektorokból álló sorozat, hogy $(Ax_n \,|\, x_n) \to m$, vagyis

$$((A - mI)x_n \,|\, x_n) \to 0.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy $m \notin \mathrm{Sp}(A)$, akkor a 12.22 Lemma szerint létezik olyan $C > 0$ állandó, hogy minden x-re $\|(A - mI)x\| \ge C\|x\|$, speciálisan minden n-re

$$C^2 \le \|(A - mI)x_n\|^2,$$

ugyanakkor a 12.28 Tétel szerint

$$\|(A - mI)x_n\|^2 \le \|A - mI\| \cdot ((A - mI)x_n \,|\, x_n) \to 0,$$

amivel ellentmondásra jutottunk.

Hasonlóan igazolható az $M \in \mathrm{Sp}(A)$ tartalmazás. Valóban, az M szám értelmezése alapján egyszerűen ellenőrizhető, hogy $MI - A$ pozitív operátor, ezért ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan csupa egy-normájú vektorokból álló sorozat, hogy $(Ax_n \,|\, x_n) \to M$, akkor ismét a 12.28 Tétel szerint

$$\|(MI - A)x_n\|^2 \le \|MI - A\| \cdot ((MI - A)x_n \,|\, x_n) \to 0,$$

amiből az bizonyítás első felében alkalmazott elv alapján kapjuk, hogy $M \in \mathrm{Sp}(A)$. □

12.30. Következmény. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ önadjungált operátor, akkor az előző állítás jelöléseivel $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$. Ha A pozitív operátor, akkor $\|A\| \in \mathrm{Sp}(A)$.*

Bizonyítás. A 12.25 Tétel szerint

$$\|A\| = w(A) = \sup\Big\{|(Ax \,|\, x)| \,\Big|\, x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\Big\} = \max\{|m|, |M|\},$$

amivel az első állítást igazoltuk. Ha A pozitív operátor, akkor $0 \le m \le M$, ezért ekkor $\|A\| = \max\{m, M\} = M$, ahol az előző tétel szerint $M \in \mathrm{Sp}(A)$. □

12.5. Ortogonális projekciók

Legyen ismét $\mathscr{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és legyen M a $\mathscr{H}$ egy zárt lineáris altere. A 8.23 Riesz-féle felbontási tételben láttuk, hogy bármely $x \in \mathscr{H}$ egyértelműen előáll

$$x = P(x) + Q(x)$$

alakban, ahol $P(x) \in M$ és $Q(x) \in M^{\perp}$. A $P : \mathscr{H} \to M$ (illetve $Q : \mathscr{H} \to M^{\perp}$) leképezést az M-re (illetve $M^{\perp}$-re) vett ortogonális projekciónak nevezzük.

Világos, hogy itt $Q(x) = x - P(x)$, vagyis ha P az M-re vett ortogonális projekció, akkor az $M^{\perp}$-re vett ortogonális projekció előáll $Q = I - P$ alakban.

Vegyük észre továbbá, hogy bármely $x \in M$ vektor esetén $Px = x$, ui. $x = x + 0$ olyan előállítása x-nek, ahol $x \in M$ és $0 \in M^{\perp}$.

12.31. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és P a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér M-re vett ortogonális projekciója. Akkor $P \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|P\| \le 1$ és $P = P^2 = P^*$.*

Bizonyítás. Elsőként P linearitását igazoljuk: legyenek $x, y \in \mathscr{H}$ tetszőleges vektorok, akkor x és y előáll

$$x = P(x) + [x - P(x)], \qquad P(y) + [y - P(y)]$$

alakban, ahol $P(x), P(y) \in M$ és $x - P(x), y - P(y) \in M^{\perp}$, következésképp

$$x + y = [P(x) + P(y)] + [x - P(x) + y - P(y)],$$

ahol $P(x) + P(y) \in M$ és $x - P(x) + y - P(y) \in M^{\perp}$, ezért a 8.23 Riesz-féle felbontási tétel unicitás része alapján

$$P(x + y) = P(x) + P(y),$$

amivel P additivitását igazoltuk. Hasonlóan igazolható a P homogenitása.

Következő lépésben igazoljuk, hogy P folytonos: legyen ui. $x \in \mathscr{H}$ egy tetszőleges vektor, akkor a Pithagorasz-tétel szerint

$$\|Px\|^2 \le \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2,$$

amiből P folytonossága és egyúttal a $\|P\| \le 1$ normabecslés is következik.

Végül legyenek $x, y \in \mathscr{H}$ tetszőlegesek, akkor a $Px \perp y - Py$ és $Py \perp x - Px$ figyelembevételével

$$(Px \,|\, y) = (Px \,|\, Py + (y - Py)) = (Px \,|\, Py) = ((x - Px) + x \,|\, Py) = (x \,|\, Py),$$

vagyis $P = P^*$. A $P^2 = P$ egyenlőség pedig következik abból, hogy bármely $x \in \mathscr{H}$ esetén $Px = Px + 0$ a Px vektor M-szerinti ortogonális felbontása, következésképp $P^2x = P(Px) = Px$. □

12.32. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy valójában $M \ne \{0\}$ esetén $\|P\| = 1$ teljesül, ha ui. $x \in M$, $\|x\| = 1$, akkor $Px = x$ miatt $\|Px\| = 1$, és ezért $\|P\| \ge 1$.

12.6. Izometrikus és unitér operátorok

Az alábbiakban emlékeztetünk az izometrikus és unitér operátorok alábbi definíciójára:

12.33. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, akkor az $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátort *unitér operátornak* nevezzük, ha $U^*U = UU^* = I$. A $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ operátort *izometrikus operátornak* nevezzük, ha minden $\mathscr{H} \ni x$-re $\|Vx\| = \|x\|$.

Nem nehéz igazolni, hogy minden unitér operátor izometrikus, ui. bármely $x \in \mathscr{H}$ vektor esetén

$$\|Ux\|^2 = (U^*Ux \,|\, x) = (x \,|\, x) = \|x\|^2.$$

Ennek megfordítása általában nem igaz, ui. a definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden unitér operátor szürjektív, ugyanakkor egy végtelen dimenziós Hilbert-téren létezhetnek nem szürjektív izometrikus operátorok is (ilyen például ℓ^2-n a jól ismert „shift” operátor).

Az alábbiakban jellemzést adunk Hilbert-téren értelmezett izometrikus operátorokra:

12.34. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *V izometria,*
(ii) *V skalárszorzat tartó, azaz minden $x, y \in \mathscr{H}$ mellett $(Vx \,|\, Vy) = (x \,|\, y)$.*
(iii) *$V^*V = I$.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(iii): Legyen V izometria, akkor bármely $x \in \mathscr{H}$ esetén

$$\|x\|^2 = \|Vx\|^2 = (Vx \,|\, Vx) = (V^*Vx \,|\, x),$$

amiből az $I = V^*V$ egyenlőség komplex Hilbert-tér esetén a 12.9 Következmény alapján adódik. Valós Hilbert-tér esetén a polarizációs formula alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
4(x \,|\, y) &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \\
&= (V^*V(x+y) \,|\, x+y) - (V^*V(x-y) \,|\, x-y) \\
&= 2(V^*Vx \,|\, y) + 2(V^*Vy \,|\, x) \\
&= 4(V^*Vx \,|\, y) \\
&= 4(Vx \,|\, Vy),
\end{aligned}$$

azaz minden x, y vektor esetén fennáll, hogy $(x \,|\, y) = (V^*Vx \,|\, y)$, vagyis $I = V^*V$. A hiányzó (iii)$\Rightarrow$(ii) és (ii)$\Rightarrow$(i) implikáció nyilvánvaló. □

Az unitér operátorokra az alábbi hasonló jellemzés adható:

12.35. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, akkor a következő kijelentések egyenértékűek:*

(i) *U unitér operátor, vagyis $U^*U = UU^* = I$,*
(ii) *U izometrikus és szürjektív,*
(iii) *U és U^* mindketten izometrikus operátorok.*

Bizonyítás. Bármely U unitér operátor izometrikus, illetve az $UU^* = I$ összefüggésből látható, hogy U szürjektív is. Megfordítva, ha U izometrikus és szürjektív operátor, akkor U bijekció, továbbá az előző állítás szerint $U^*U = I = U^{-1}U$, amiből $U^{-1} = U^*$ következik, ami pontosan azt jelenti, hogy U unitér operátor. □

13. FEJEZET

Kompakt operátorok

13.1. A kompakt operátorok elemi tulajdonságai

Az alábbiakban emlékeztetünk a kompakt, sorozatkompakt és teljesen korlátos halmazok fogalmára.

13.1. Definíció. Legyen (X, ϱ) metrikus tér és $K \subseteq X$ egy adott halmaz.

(a) A K halmazt *kompaktnak* nevezzük, ha a K tetszőleges nyílt halmazokkal való befedéséből kiválasztható a K egy véges fedése.

(b) A K halmazt *sorozatkompaktnak* nevezzük, ha tetszőleges K-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatból kiválasztható olyan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, amely a K valamely $x \in K$ pontjához konvergál.

(c) A K halmazt *teljesen korlátosnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik véges sok $x_1, \ldots, x_n$ X-beli pont, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k). \tag{13.1}$$

A (13.1) relációnak eleget tevő bármely $x_1, \ldots, x_n$ pontrendszert a K halmazhoz tartozó véges ε-hálónak nevezzük.

A kompakt, sorozatkompakt és teljesen korlátos halmazok közti kapcsolatot tisztázza az alábbi

13.2. Tétel. *Legyen (X, ϱ) metrikus tér, akkor egy $K \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha sorozatkompakt. Ha (X, ϱ) teljes metrikus tér, akkor a $K \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt (vagy ami ugyanaz, sorozatkompakt), ha K teljesen korlátos és zárt.*

Az alábbiakban legyenek X és Y Banach-terek, illetve jelölje a rövidség kedvéért B az X-beli 0 közepű egy-sugarú zárt gömböt:

$$B := \bar{B}_1(0) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}.$$

13.3. Definíció. Ha X és Y Banach-terek, akkor egy $T : X \to Y$ lineáris operátort *kompakt operátornak* nevezünk, ha a

$$T\langle B\rangle := \{Tx \mid x \in B\}$$

halmaz teljesen korlátos részhalmaza Y-nak. Az X-en értelmezett Y-ba képező kompakt operátorok halmazát $\mathscr{K}(X;Y)$ jelöli.

A 13.2 Tétel alapján a $T : X \to Y$ operátor pontosan akkor kompakt operátor, ha a $\overline{T\langle B\rangle} \subseteq Y$ halmaz kompakt, vagy ami ugyanaz, sorozatkompakt. Ennek figyelembevételével egyszerűen igazolható az alábbi

13.4. Állítás. *Legyenek X és Y Banach terek, illetve legyen $T : X \to Y$ egy lineáris operátor. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek:*

(i) *T kompakt operátor,*
(ii) *bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható véges sok $y_1, \dots, y_m \in Y$ vektor, hogy minden $x \in B$ esetén $\|Tx - y_j\| < \varepsilon$ teljesül valamely $j = 1, \dots, m$ indexre,*
(iii) *bármely $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos X-beli sorozatból kiválasztható olyan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens.*

13.5. Tétel. *Legyenek X és Y Banach-terek, akkor minden kompakt operátor folytonos és $\mathscr{K}(X;Y) \subseteq \mathscr{B}(X;Y)$ az operátornorma szerint zárt lineáris altér.*

Bizonyítás. Minden teljesen korlátos halmaz korlátos, vagyis ha $T \in \mathscr{K}(X;Y)$, akkor $T\langle B\rangle$ korlátos halmaz, ami pedig ekvivalens azzal, hogy T folytonos. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathscr{K}(X;Y) \subseteq \mathscr{B}(X;Y)$.

Megmutatjuk, hogy $\mathscr{K}(X;Y)$ lineáris altér: legyenek ui. $S, T \in \mathscr{K}(X;Y)$, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy X-ben haladó korlátos sorozat, akkor S kompaktsága alapján létezik olyan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $y \in Y$ vektor, hogy $Sx_{n_k} \to y$. Akkor $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ismét korlátos sorozat, ezért T kompaktsága alapján létezik olyan $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $z \in Y$ vektor, hogy $Tx_{n_{k_l}} \to z$. Ekkor tehát $(S+T)x_{n_{k_l}} \to y + z$, amivel megmutattuk, hogy $S+T$ eleget tesz a fenti 13.4 Állítás (iii) feltételének, vagyis $S + T$ kompakt. Hasonlóan ellenőrizhető, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ szám és T kompakt operátor mellett λT is kompakt operátor.

Végül igazoljuk, hogy $\mathscr{K}(X;Y)$ zárt az operátornorma szerint. Legyen ui. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan csupa kompakt operátorokból álló sorozat, amely az operátornorma szerint tart valamely $T \in \mathscr{B}(X;Y)$ operátorhoz. Megmutatjuk, hogy $T \in \mathscr{K}(X;Y)$. Legyen ui. $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges pozitív szám és rögzítsünk egy $N \in \mathbb{N}$ indexet úgy, hogy $\|T - T_N\| < \frac{\varepsilon}{2}$, akkor T_N kompaktsága miatt létezik olyan $y_1, \dots, y_m$ véges Y-beli rendszer, hogy minden $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ vektor esetén valamely j-re $\|T_N x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, akkor

$$\|Tx - y_j\| \leq \|Tx - T_N x\| + \|T_N x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

ami azt jelenti, hogy T eleget tesz a 13.4 Állítás (ii) feltételének, azaz T kompakt. □

13.6. Állítás. *Legyen X Banach-tér és legyen $T \in \mathscr{K}(X)$ kompakt operátor, akkor bármely $A \in \mathscr{B}(X)$ korlátos operátor esetén $AT, TA \in \mathscr{K}(X)$.*

Bizonyítás. Elsőként igazoljuk, hogy $AT \in \mathscr{K}(X)$: legyen ui. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy X-beli korlátos sorozat, akkor a T kompaktsága miatt létezik olyan $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $y \in X$, hogy $Tx_{n_k} \to y$, akkor A folytonossága miatt $ATx_{n_k} \to Ay$, amiből AT kompaktsága már következik.

A TA operátor kompaktságának igazolásához legyen ismét $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy X-beli korlátos sorozat, akkor A folytonossága miatt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat, ezért T kompaktsága miatt létezik annak $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, hogy $Ty_{n_k} \to z$ valamely $z \in X$ vektorra, vagyis $TAx_{n_k} \to z$, amiből TA kompaktsága következik. □

Nyilvánvaló, hogy $T = 0$ operátor mindig kompakt, ugyanakkor látni fogjuk, hogy ha X nem véges dimenziós, akkor az X identikus operátora nem kompakt.

13.7. Állítás. *Legyenek X és Y Banach-terek és legyen $T \in \mathscr{B}(X;Y)$ egy véges rangú operátor, vagyis amelynek* $\operatorname{ran} T$ *képtere véges dimenziós. Akkor T kompakt operátor, vagyis $T \in \mathscr{K}(X;Y)$.*

Bizonyítás. Jelölje $Y_0 := \operatorname{ran} T$, akkor a feltétel szerint Y_0 véges dimenziós normált tér és $r := \|T\|$ választással $T\langle B\rangle \subseteq rB \cap Y_0$. Az $rB \cap Y_0$ halmaz korlátos és zárt az Y_0

véges dimenziós normált térben, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint kompakt. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy $\overline{T\langle B\rangle}$ kompakt, vagyis $T \in \mathscr{K}(X;Y)$. □

13.8. Definíció. Legyenek X és Y Banach-terek, akkor $\mathscr{B}_{00}(X;Y)$ jelöli az $A : X \to Y$ folytonos és véges rangú lineáris operátorok halmazát:

$$\mathscr{B}_{00}(X;Y) := \{A \in \mathscr{B}(X;Y) \mid \dim \operatorname{ran} A < +\infty\}.$$

A 13.7 Állítás szerint bármely X, Y Banach-terek esetén fennáll a

$$\mathscr{B}_{00}(X;Y) \subseteq \mathscr{K}(X;Y)$$

tartalmazás. Ezt az észrevételt a 13.5 Tétellel kombinálva kapjuk az alábbi eredményt:

13.9. Következmény. *Legyenek X és Y Banach-terek és legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{B}_{00}(X;Y)$-ban haladó sorozat, amely az operátornorma szerint konvergál az $A \in \mathscr{B}(X;Y)$ operátorhoz, akkor $A \in \mathscr{K}(X;Y)$.*

Bizonyítás. A 13.7 Állítás szerint $\mathscr{B}_{00}(X;Y) \subseteq \mathscr{K}(X;Y)$, továbbá a 13.5 Tétel szerint $\mathscr{K}(X;Y)$ az operátornorma szerint zárt, ezért fennáll a $\overline{\mathscr{B}_{00}(X;Y)} \subseteq \mathscr{K}(X;Y)$ tartalmazás is, amiből a bizonyítandó állítás már következik. □

13.2. Kompakt operátorok Hilbert-téren

13.10. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, legyenek $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozatok $\mathscr{H}$-ban, emellett legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathbb{K}$-beli zérus-sorozat (vagyis $\lambda_n \to 0$), akkor a*

$$Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n) f_n, \qquad x \in \mathscr{H}$$

egyenlőséggel definiált T operátor kompakt, azaz $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Bizonyítás. Mivel minden zérus-sorozat korlátos, azért a 12.12 Példa eredménye szerint T jól definiált korlátos operátor, továbbá T normájára fennáll a

$$\|T\| \leq \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\lambda_n| = \max_{n=0,1,2,\ldots} |\lambda_n|$$

becslés. Jelölje rögzített n esetén T_n a

$$T_n x := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x \mid e_k) f_k, \qquad x \in \mathscr{H}$$

egyenlőséggel definiált operátort, akkor T_n folytonos és T_n képtere része az $f_1, \ldots, f_n$ vektorok által kifeszített n-dimenziós altérnek, következésképp $T_n \in \mathscr{B}_{00}(X;Y)$. Másfelől minden x-re

$$(T - T_n)x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (x \mid e_k) f_k$$

ezért $\|T - T_n\| \leq \max_{k\in\mathbb{N}, k\geq n+1} |\lambda_k|$, amiből $\lambda_n \to 0$ figyelembevételével következik, hogy $\|T - T_n\| \to 0$. A 13.9 Következmény szerint $T \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$. □

13.11. Következmény. *Legyen $\mathscr{H}$ (valós vagy komplex) Hilbert-tér, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált sorozat $\mathscr{H}$-ban, emellett legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós zérus-sorozat, akkor az*

$$Ax := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n) e_n, \qquad x \in \mathscr{H} \tag{13.2}$$

egyenlőséggel definiált A leképezés kompakt önadjungált operátor.

A fejezet hátralévő részében a célunk a fenti következmény megfordításának igazolása: minden kompakt önadjungált operátor előáll a fenti (13.2) kanonikus alakban.

13.12. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, illetve legyen $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ önadjungált operátor. Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ az A sajátértéke, éspedig $e \in \mathscr{H}$, $\|e\| = 1$ sajátvektorral. Ekkor a $H := e^{\perp}$ altér zárt invariáns altere az A-nak (vagyis $A\langle H\rangle \subseteq H$), ha továbbá ha A_0 jelöli az A H-ra vett megszorítását, akkor A_0 maga is önadjungált operátor a H Hilbert-térben. Ha pedig P jelöli a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér H-ra való ortogonális projekcióját, akkor minden $x \in \mathscr{H}$ mellett*

$$Ax = \lambda(x \mid e)e + A_0 Px$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy H az A operátor invariáns altere. Legyen ugyanis $x \in H$, ekkor

$$(Ax \mid e) = (x \mid Ae) = (x \mid \lambda e) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $Ax \in H$. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $A\langle H\rangle \subseteq H$, ami éppen azt jelenti, hogy H az A invariáns altere. Az $A_0 := A|_H$ megszorított operátor tehát olyan folytonos lineáris operátor a H Hilbert-téren, hogy bármely $x, y \in H$ esetén

$$(A_0 x \mid y) = (Ax \mid y) = (x \mid Ay) = (x \mid A_0 y),$$

vagyis $A_0^* = A_0$.

Legyen végül P a H zárt altérre való ortogonális projekció, illetve legyen $x \in \mathscr{H}$, akkor x előáll

$$x = (x \mid e)e + [x - (x \mid e)e]$$

alakban, ahol $x - (x \mid e)e \in H$ és $(x \mid e)e \in \mathbb{K}e = H^{\perp}$, következésképp $Px = x - (x \mid e)e$, és ezért

$$Ax = A(x \mid e)e + A(x - (x \mid e)e) = (x \mid e)Ae + APx = \lambda(x \mid e)e + A_0 Px,$$

amivel a bizonyítás kész. □

13.13. Lemma. *Legyen $\mathscr{H}$ valós vagy komplex Hilbert-tér és $A \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ kompakt önadjungált operátor, akkor létezik az A-nak olyan λ (szükségképp valós) sajátértéke, amelyre $|\lambda| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = \|A\|$ szám és olyan $y \in \mathscr{H}$, $y \neq 0$ vektor, amelyre

$$Ay = \lambda y. \tag{13.3}$$

A 12.25 Tétel szerint $\|A\| = w(A)$, ezért létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{H}$-beli sorozat, hogy minden n-re $\|x_n\| = 1$, és

$$|(Ax_n \mid x_n)| \to \|A\|.$$

Alkalmas részsorozatra való áttérés után feltehetjük, hogy $(Ax_n \mid x_n) \to \lambda$ valamely $\lambda \in \mathbb{C}$ számra, ekkor szükségképp $|\lambda| = \|A\|$. Az A operátor kompaktságát kihasználva, újabb részsorozatra való áttérés után pedig azt is feltehetjük, hogy $Ax_n \to y$ valamely $y \in \mathscr{H}$ vektorra. Ekkor

$$0 \le \|Ax_n - (Ax_n \mid x_n)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - |(Ax_n \mid x_n)|^2 \le \|A\|^2 - |(Ax_n \mid x_n)|^2 \to 0,$$

amiből $Ax_n \to y$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(Ax_n \mid x_n)x_n \to y. \tag{13.4}$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\|y\| = \lim_{n\to\infty} |(Ax_n \,|\, x_n)| = \|A\|,$$

vagyis $y \neq 0$, feltéve hogy $A \neq 0$ (ha $A = 0$, akkor a lemma állítása triviális). Végezetül megmutatjuk, hogy $Ay = \lambda y$: egyfelől ui. (13.4) figyelembevételével

$$A(Ax_n \,|\, x_n)x_n \to Ay,$$

másrészt pedig $(Ax_n \,|\, x_n) \to \lambda$ és $Ax_n \to y$ folytán

$$A(Ax_n \,|\, x_n)x_n = (Ax_n \,|\, x_n)Ax_n \to \lambda y,$$

vagyis valóban $Ay = \lambda y$. □

A következő eredmény a kompakt önadjungált operátorok alaptétele:

13.14. A Hilbert-Schmidt tétel. *Legyen $\mathscr{H}$ végtelen dimenziós valós vagy komplex Hilbert-tér, és legyen $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ kompakt önadjungált operátor, akkor létezik az A sajátvektoraiból álló olyan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{H}$-ban haladó ortonormált sorozat és az A sajátértékeiből álló olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós nullsorozat, hogy*

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x \,|\, e_n) e_n, \qquad x \in \mathscr{H}. \tag{13.5}$$

Bizonyítás. A 13.13 Lemma szerint létezik az A operátornak olyan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ sajátértéke, hogy $|\lambda_0| = \|A\|$. Emiatt létezik olyan $e_0 \in \mathscr{H}$, $\|e_0\| = 1$ vektor, hogy

$$Ae_0 = \lambda_0 e_0.$$

Vezessük be a $H_0 := e_0^\perp$ jelölést, akkor a 13.12 Lemma szerint H_0 invariáns altere A-nak és $A_0 := A|_{H_0}$ kompakt önadjungált operátor a H_0 Hilbert-téren. Ha továbbá P_0 jelöli a H_0 altérre való ortogonális projekciót, akkor minden $x \in \mathscr{H}$ mellett Ax előáll

$$Ax = \lambda_0 (x \,|\, e_0) e_0 + A_0 P_0 x$$

alakban.

Tekintsük most az $A_0 : H_0 \to H_0$ kompakt önadjungált operátort, akkor az előzőeket A helyett A_0-ra alkalmazva kapjuk olyan $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| = \|A_0\|$ szám és $e_1 \in H_0$, $\|e_1\| = 1$ vektor létezését, amelyre $Ae_1 = A_0 e_1 = \lambda_1 e_1$. Vegyük észre, hogy e_0 és e_1 egymásra merőleges vektorok, és ha most H_1 jelöli az $\{e_0, e_1\}^\perp$ zárt alteret $\mathscr{H}$-ban, akkor

$$H_1 = \{e_0\}^\perp \cap \{e_1\}^\perp = \{x \in H_0 \,|\, x \perp e_1\},$$

vagyis H_1 megegyezik az $e_1 \in H_0$ vektor H_0 Hilbert-térbeli ortogonális kiegészítő alterével. A 13.12 Lemma alapján H_1 A_0-invariáns altere H_0-nak, ezért az $A_0 = A|_{H_0}$ azonosság miatt H_1 A-invariáns altere $\mathscr{H}$-nak. Jelölje P_1 a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér H_1 altérre való ortogonális projekcióját és A_1 az A H_1 altérre való megszorítását, akkor A_1 kompakt önadjungált operátor H_1 felett, és bármely $x \in \mathscr{H}$ esetén $(I - P_1)x = (x \,|\, e_0)e_0 + (x \,|\, e_1)e_1$ figyelembevételével Ax előáll

$$Ax = \lambda_0 (x \,|\, e_0) e_0 + \lambda_1 (x \,|\, e_1) e_1 + A_1 P_1 x$$

alakban. Az eljárást folytatva rekurzióval nyerjük olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat és $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{H}$-beli ortonormált sorozat létezését, hogy $H_n := \{e_0, \dots, e_n\}^\perp$ és $A_n := A|_{H_n}$ jelölések bevezetése mellett minden n-re fennállnak a következők:

- A_n kompakt önadjungált operátor és $A_{n+1} = A_n|_{H_{n+1}}$
- $|\lambda_0| = \|A\|$ és $|\lambda_{n+1}| = \|A_n\|$, illetve $Ae_n = \lambda_n e_n$,

- minden $x \in \mathscr{H}$ vektorra

$$Ax = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x \mid e_k) e_k + A_n P_n x,$$

ahol P_n a H_n altérre való ortogonális projekció. Vezessük be ezek után rögzített n index mellett a

$$B_n x := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x \mid e_k) e_k, \qquad x \in \mathscr{H}$$

egyenlőséggel értelmezett A_n operátort. Megmutatjuk, hogy $\|A - B_n\| \to 0$, amihez a

$$A - B_n = A_n P_n$$

azonosság és a $\|A_n P_n\| \leq \|A_n\| = |\lambda_{n+1}|$ összefüggés figyelembevételével elegendő azt igazolni, hogy $\lambda_n \to 0$. Vegyük észre, hogy a $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat alőállítása alapján $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$, ezért $|\lambda_n| \to \alpha$ valamely $\alpha \geq 0$ számra. Ha $\alpha > 0$ teljesülne, akkor az azt jelentené, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|\lambda_n| \geq \delta$ minden n-re, de akkor bármely $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ indexek mellett

$$\|Ae_n - Ae_m\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2\delta^2,$$

azaz $\|Ae_n - Ae_m\| \geq \sqrt{2}\delta$ volna. Ez azt jelentené, hogy az $(Ae_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak nem létezik konvergens részsorozata, ami viszont ellentmond az A operátor kompaktságának. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $B_n \to A$ az operátornorma szerint, amiből kapjuk, hogy

$$Ax = \lim_{n\to\infty} B_n x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (x \mid e_k) e_k, \qquad x \in \mathscr{H},$$

amivel a (13.5) formulát és egyúttal a tételt is igazoltuk. □

13.3. Kompakt operátorok Banach-téren

Ebben a fejezetben Banach-terek kompakt operátorainak spektrumával foglalkozunk.

13.15. Riesz-lemma. *Legyen X normált tér és legyen $Y \subsetneq X$ az X egy valódi zárt lineáris altere, akkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $x \in X$, $\|x\| = 1$, hogy $d_Y(x) \geq 1 - \varepsilon$.*

Bizonyítás. Egy tetszőleges $M \subseteq X$ halmaz esetén a $z \in \overline{M}$ kijelentés egyenértékű azzal, hogy $d_M(z) = 0$. Mivel az $Y \subsetneq X$ altér zárt, azért bármely $z \in X \setminus Y$ vektor esetén $d_Y(z) > 0$. Rögzítsünk egy ilyen z vektort, és legyen $\delta > 0$ egyelőre tetszőleges pozitív szám, akkor $d := d_Y(z)$ értelmezése alapján létezik $y_\delta \in Y$, hogy $\|z - y_\delta\| < d + \delta$. Legyen $x := \frac{z - y_\delta}{\|z - y_\delta\|}$, akkor $\|x\| = 1$ és bármely $y \in Y$-ra

$$\|x - y\| = \frac{1}{\|z - y_\delta\|} \cdot \Big\| z - (y_\delta + \|z - y_\delta\| \cdot y) \Big\|,$$

ahol $y' := y_\delta + \|z - y_\delta\| \cdot y$ vektorra $y' \in Y$ teljesül, ezért $\|z - y'\| \geq d$, következésképp

$$\|x - y\| > \frac{d}{d + \delta}.$$

Ha tehát $\delta > 0$ olyan, hogy $\frac{d}{d+\delta} \geq 1 - \varepsilon$, akkor

$$\inf_{y\in Y} \|x - y\| > 1 - \varepsilon,$$

azaz $d_Y(x) \geq 1 - \varepsilon$ teljesül. □

13.16. Tétel. *Ha X normált, akkor az X-beli 0 közepű egyéségsugarú zárt gömb pontosan akkor kompakt, ha X véges dimenziós.*

Bizonyítás. Véges dimenziós normált térben minden korlátos és zárt halmaz kompakt, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy ha X nem véges dimenziós, akkor $B := \overline{B}_1(0)$ nem kompakt. Legyen $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ egy tetszőleges vektor és jelölje X_0 az x_0 által generált egy-dimenziós alteret, akkor X_0 zárt és $X_0 \neq X$, ezért a Riesz-lemma alapján létezik olyan $x_1 \in X, \|x_1\| = 1$, hogy $d_{X_0}(x_1) > \frac{1}{2}$, speciálisan $\|x_0 - x_1\| > \frac{1}{2}$. Jelölje X_1 az x_0, x_1 vektorok által generált két dimenziós alteret, akkor X_1 zárt és $X_1 \neq X$ (hisz X végtelen dimezniós), ezért ismét a Riesz-lemma alapján létezik $x_2 \in X, \|x_2\| = 1$, hogy $d_{X_1}(x_2) > \frac{1}{2}$, speciálisan $\|x_2 - x_k\| > \frac{1}{2}$, $k = 0, 1$. Az eljárást folytatva olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa egy-normájú (következésképp B-beli) vektorokból álló sorozatot kapunk, hogy bármely $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ indexek esetén $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$. Világos, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat, vagyis B nem kompakt. □

13.17. Következmény. *Ha X végtelen dimenziós Banach-tér, akkor az X identikus operátora nem kompakt, vagyis $I \notin \mathscr{K}(X)$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző tételből. □

13.18. A kompakt operátorok Riesz-féle alaptétele. *Legyen X Banach-tér és legyen $T \in \mathscr{K}(X)$ kompakt operátor, akkor bármely $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ szám esetén a következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) *$T - \lambda I$ szürjektív, vagyis* $\operatorname{ran}(T - \lambda I) = X$,
(ii) *$T - \lambda I$ injektív, vagyis* $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$,
(iii) *λ reguláris értéke T-nek, vagyis $\lambda \in \varrho(T)$.*

A tétel bizonyítása meglehetősen hosszú és nehéz, ezért azt elhagyjuk. Megjegyezzük azonban, hogy ha X végtelen dimenziós Banach-tér, akkor az (i)-(iii) állítások ekvivalenciája $\lambda = 0$-ra nem igaz, ui. bármely $T \in \mathscr{K}(X)$ kompakt operátor esetén $0 \in \operatorname{Sp}(T)$, ui. ellenkező esetben a 13.6 Állítás szerint $I = T^{-1}T \in \mathscr{K}(X)$ teljesülne, ami lehetetlen. Ugyanakkor nem nehéz példát adni olyan T kompakt operátorra, amely injektív.

A $(T - \lambda I)x = b$ másodfajú egyenlet megoldhatóságával kapcsolatos az alábbi

13.19. Fredholm-féle alternatíva tétel. *Legyen X Banach-tér és $T \in \mathscr{K}(X)$ kompakt operátor, valamint $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. Akkor az alábbi két alternatíva közül pontosan az egyik teljesül:*

(a) *Bármely $b \in X$ vektor mellett a $(T - \lambda I)x = b$ egyenletnek létezik egyértelmű megoldása.*
(b) *$\lambda \in \operatorname{Sp}_p(T)$ és T-nek véges sok lineárisan független λ-hoz tartozó sajátvetkora van.*

A T kompakt operátor spektrumának szerkezetét írja le az alábbi

13.20. Tétel. *Ha X Banach-tér és $T \in \mathscr{K}(X)$ kompakt operátor, akkor T spektrumára fennállnak a következők:*

(a) *T minden nem-nulla spektrumpontja sajátérték, vagyis* $\operatorname{Sp}(T) \setminus \{0\} = \operatorname{Sp}_p(T) \setminus \{0\}$.
(b) *T spektruma véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, ez utóbbi esetben $\operatorname{Sp}(T)$ egyetlen torlódási pontja a 0.*
(c) *Minden $\lambda \in \operatorname{Sp}_p(T)$, $\lambda \neq 0$ sajátérték esetén a $\ker(T - \lambda I)$ saját altér véges dimenziós.*

14. FEJEZET

Nemkorlátos operátorok

14.1. Sűrűn definiált operátor adjungáltja

Az alábbiakban mindenütt legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek és $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ egy lineáris operátor, ahol az „$A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$" szimbólum azt jelenti, hogy A a $\mathscr{H}$-n nem feltétlenül mindenütt, hanem az eddigiektől eltérően annak csupán valamely $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathscr{H}$ lineáris alterén van értelmezve.

Elsőként a célunk az A operátor adjungáltjának értelmezése, éspedig úgy mint egy $A^* : \mathscr{K} \rightarrowtail \mathscr{H}$, $A^*y := y^*$ egyenlőséggel értelmezett operátor, ahol y^* eleget tesz az

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, y^*), \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(A) \tag{14.1}$$

azonosságnak. Elsőként vegyük észre, hogy adott $y \in \mathscr{K}$ mellett ilyen y^* vektor nem feltételenül egyértelműen létezik: ha ui. y^* eleget tesz az (14.1) azonosságnak és $z \in [\mathrm{dom}(A)]^\perp$ egy tetszőleges vektor, akkor $z^* = y^* + z$ választással szintén

$$(Ax \,|\, y) = (x \,|\, y^*) = (x \,|\, z^*), \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(A)$$

teljesül, amiből látható, hogy $[\mathrm{dom}(A)]^\perp \neq \{0\}$ esetén a (14.1) egyenlőségnek eleget tevő y^* vektor nem egyértelmű. Ha azonban $[\mathrm{dom}(A)]^\perp = \{0\}$ és y^* és z^* mindketten olyan vektorok, amelyekre (14.1) teljesül, akkor fennáll, hogy

$$(x \,|\, y^* - z^*) = 0, \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(A),$$

következésképp $y^* - z^* \in [\mathrm{dom}(A)]^\perp = \{0\}$, vagyis ilyenkor y^* egyértelmű. Ez azt jelenti, hogy adjungált operátort csak olyan $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ operátorokra tudunk értelmesen bevezetni, ahol $[\mathrm{dom}(A)]^\perp = \{0\}$, vagyis amelyek értelmezési tartománya *sűrű lineáris altér* $\mathscr{H}$-ban. Erre a tulajdonságra a továbbiakban úgy fogunk hivatkozni, hogy A „sűrűn definiált lineáris operátor".

Még kevésbé triviális kérdés adott $y \in \mathscr{K}$ vektorhoz alkalmas y^* létezése: látni fogjuk, hogy ez pontosan akkor garantált minden $y \in \mathscr{K}$ mellett, ha A korlátos operátor. Emiatt az A^* adjungált operátort az alábbi definícióval értelmezzük:

14.1. Definíció. Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek valamint $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, akkor a

$$\mathrm{dom}(A^*) := \{y \in \mathscr{K} \,|\, \exists y^* \in \mathscr{H} : \ (Ax \,|\, y) = (x \,|\, y^*), \ \ (\forall x \in \mathrm{dom}(A))\},$$
$$A^*y := y^*, \qquad y \in \mathrm{dom}(A^*)$$

egyenlőséggel értelmezett $A^* : \mathrm{dom}(A^*) \to \mathscr{H}$ leképezést az A *Neumann-adjungáltjának* (vagy röviden *adjungáltjának*) nevezzük.

14.2. Állítás. *Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek valamint $A : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, akkor* $\mathrm{dom}(A^*)$ *lineáris altér $\mathscr{H}$-ban és $A^* : \mathrm{dom}(A^*) \to \mathscr{H}$ lineáris operátor.*

Bizonyítás. Legyenek $y_1, y_2 \in \operatorname{dom}(A^*)$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tetszőlegesek, jelölje továbbá $y_j^* := A^* y_j$, $(j = 1, 2)$, akkor bármely $x \in \operatorname{dom}(A)$ vektorra

$$\begin{aligned}(Ax \,|\, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \overline{\lambda}_1 (Ax \,|\, y_1) + \overline{\lambda}_2 (Ax \,|\, y_2) \\ &= \overline{\lambda}_1 (x \,|\, y_1^*) + \overline{\lambda}_2 (x \,|\, y_2^*) \\ &= (x \,|\, \lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^*),\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \operatorname{dom}(A^*)$ és $A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2$. $\square$

Az alábbi állítás gyakran hasznos annak eldöntésében, hogy egy adott $y \in \mathscr{K}$ vektor benne van-e az A operátor adjungáltjának értelmezési tartományában:

14.3. Állítás. *Legyen $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, akkor egy adott $y \in \mathscr{K}$ vektorra ekvivalensek:*

(i) $y \in \operatorname{dom}(A^*)$,

(ii) *létezik olyan $M = M_y \geq 0$ állandó, hogy*

$$|(Ax \,|\, y)| \leq M_y \cdot \|x\|, \qquad x \in \operatorname{dom}(A),$$

(iii) *az $f_y(x) := (Ax \,|\, y)$ egyenlőséggel definiált $f_y : \operatorname{dom}(A) \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos.*

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii) és (ii)⇒(iii) implikációk nyilvánvalóak. Végül ha (iii) fennáll, akkor $\overline{\operatorname{dom}(A)} = \mathscr{H}$ és a 9.9 Következmény figyelembevételével f_y egyértelműen kiterjed $\mathscr{H}$-ra a folytonosság és a norma megtartása mellett. Jelölje $\tilde{f}_y \in \mathscr{H}'$ ezt a kiterjesztést, akkor a 9.3 Riesz reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen $y^* \in \mathscr{H}$, hogy $\tilde{f}_y(u) = (u \,|\, y^*)$, $(u \in \mathscr{H})$, következésképp

$$(Ax \,|\, y) = f_y(x) = (x \,|\, y^*), \qquad x \in \operatorname{dom}(A),$$

amiből $y \in \operatorname{dom}(A^*)$ és $A^* y = y^*$ következik. Ezzel a (iii)⇒(i) irányt és egyúttal az Állítást is igazoltuk. $\square$

14.4. Megjegyzés. Ha A és B mindketten sűrűn definiált lineáris operátorok, akkor értelmezhető azok $A + B$ összege, illetve AB szorzata. A korlátos esettel ellentétben azonban ezek adjungáltjaira általában nem teljesül az $(A + B)^* = A^* + B^*$, illetve $(AB)^* = B^* A^*$ egyenlőség, már csak azért sem, mert az $A + B$, illetve AB operátorok értelmezési tartománya szűkebb, így nem is feltétlenül sűrű altér $\mathscr{H}$-ban és ilyenkor az adjungált nem is értelmes.

14.5. Állítás. *Legyen $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ sűrűn definiált lineáris operátor, melynek A^* adjungáltja maga is sűrűn definiált, akkor $A \subset A^{**}$ (vagyis az A^{**} második adjungált operátor kiterjeszti A-t).*

Bizonyítás. Legyen $x \in \operatorname{dom}(A)$, akkor minden $y \in \operatorname{dom}(A^*)$ mellett

$$(A^* y \,|\, x) = (y \,|\, Ax),$$

ami azt jelenti, hogy $x \in \operatorname{dom}(A^{**})$ és $A^{**} x = Ax$, vagyis valóban $A \subset A^{**}$. $\square$

Az alábbi definícióban emlékeztetünk a zárt operátor definíciójára:

14.6. Definíció. Legyenek $\mathscr{H}$ és $\mathscr{K}$ Hilbert-terek, akkor az $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ lineáris operátort *zárt operátornak* nevezzük, ha $G(A) \subseteq \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ zárt.

A zárt halmazok sorozatokkal való jellemzése alapján egyszerűen ellenőrizhető az alábbi

14.7. Állítás. *Az* $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ *lineáris operátor pontosan akkor zárt, ha bármely* $\mathrm{dom}(A)$*-ban haladó* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatra és* $x \in \mathscr{H}$*,* $y \in \mathscr{K}$ *vektorokra* $x_n \to x$ *és* $Ax_n \to y$ *esetén fennáll, hogy* $x \in \mathrm{dom}(A)$ *és* $Ax = y$*.*

14.8. Állítás. *Sűrűn definiált lineáris operátor adjungáltja zárt operátor.*

Bizonyítás. Legyen A sűrűn definiált lineáris operátor és legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy $\mathrm{dom}(A^*)$-ban haladó sorozat, hogy $y_n \to y$ és $A^*y_n \to y^*$ teljesül valamely $y \in \mathscr{K}$ és $y^* \in \mathscr{H}$ vektorokra, akkor bármely $x \in \mathrm{dom}(A)$ mellett

$$(Ax \,|\, y) = \lim_{n\to\infty}(Ax \,|\, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x \,|\, A^*y_n) = \lim_{n\to\infty}(x \,|\, y^*),$$

amiből következik, hogy $y \in \mathrm{dom}(A^*)$ és $A^*y = y^*$. Ez pedig azt jelenti, hogy A^* zárt operátor. □

A fenti állítás és a Banach-féle zárt gráf tétel közvetlen következményeképp adódik az alábbi

14.9. Következmény. *Ha* $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ *olyan sűrűn definiált lineáris operátor, melynek adjungáltjára* $\mathrm{dom}(A^*) = \mathscr{K}$ *teljesül, akkor* A *korlátos operátor.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint A^* a $\mathscr{K}$-n mindenütt definiált zárt operátor, ezért a Banach-féle zárt gráf tétel értelmében A^* korlátos operátor, következésképp annak A^{**} adjungáltja szintén korlátos. A 14.5 Állítás szerint A^{**} kiterjeszti A-t, így A korlátos. □

A fentiekben láttuk, hogy ha A mellett az A^* adjungált operátor is sűrűn definiált, akkor fennáll az $A \subset A^{**}$ tartalmazás, azonban általában az $A = A^{**}$ egyenlőség nem teljesül (ui. itt a jobb oldalon álló operátor minden esetben zárt). Ugyanakkor az $A \subset A^{**}$ tartalmazás azt jelenti, hogy A-nak létezik zárt kiterjesztése. Ezzel kapcsolatos az alábbi

14.10. Definíció. Az $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ lineáris operátort lezárhatónak nevezzük, ha létezik olyan $\widetilde{A}$ zárt lineáris operátor, amelyre $A \subset \widetilde{A}$.

Könnyen látható, hogy ha A lezárható, akkor létezik az a tartalmazás tekintetében legkisebb $\bar{A}$ lineáris operátor, amely A-t kiterjeszti, vagyis az A bármely $\widetilde{A}$ kiterjesztésére $\bar{A} \subset \widetilde{A}$ teljesül, éspedig $\bar{A}$ az az operátor, amelynek gráfjára

$$G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$$

teljesül.

A 14.5 Állítás szerint minden olyan sűrűn definiált lineáris operátor lezárható, amelynek az adjungáltja is sűrűn definiált. Ennek a megfordítása is igaz, éspedig igaz a következő

14.11. Tétel. *Az* $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ *sűrűn definiált lineáris operátor pontosan akkor lezárható, ha* A^* *sűrűn definiált, és ilyenkor fennáll az*

$$\bar{A} = A^{**}$$

egyenlőség.

14.2. Szimmetrikus és önadjungált operátorok

14.12. Definíció. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, akkor az $S : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{H}$ lineáris operátort *szimmetrikusnak* nevezzük, ha

$$(Sx \,|\, y) = (x \,|\, Sy), \qquad x, y \in \mathrm{dom}(S). \tag{14.2}$$

14.13. Állítás. *Ha $S : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{H}$ sűrűn definiált operátor, akkor ekvivalensek:*

(i) *S szimmetrikus,*
(ii) *$S \subset S^*$.*

Bizonyítás. Ha S szimmetrikus, akkor (14.2) alapján világos, hogy bármely $y \in \mathrm{dom}(S)$ vektorra $y \in \mathrm{dom}(S^*)$ és $S^*y = Sy$ teljesül, vagyis $S \subset S^*$. Megfordítva, ha $S \subset S^*$, akkor minden $y \in \mathrm{dom}(S)$ esetén fennáll, hogy $y \in \mathrm{dom}(S^*)$ és $S^*y = Sy$, ezért bármely $x \in \mathrm{dom}(S)$ vektorra

$$(Sx \mid y) = (x \mid S^*y) = (x \mid Sy),$$

ami éppen azt jelenti, hogy S szimmetrikus. □

14.14. Hellinger–Toeplitz-tétel. *Ha S a $\mathscr{H}$-n mindenütt értelmezett szimmetrikus operátor, akkor $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ és $S^* = S$.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint $S \subset S^*$, következésképp $\mathrm{dom}(S^*) = \mathscr{H}$. A 14.9 Következmény szerint $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, és nyilván $S = S^*$. □

14.15. Definíció. Az $A : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{H}$ sűrűn definiált lineáris operátort önadjungáltnak nevezzük, ha $A = A^*$.

14.16. Állítás. *Minden önadjungált operátor szimmetrikus.*

Bizonyítás. Nyilvánvalós a 14.13 Állításból. □

14.17. Példa. Legyen $I := [0,1]$ és $\mathscr{H} := L^2(I)$. Tekintsük az alábbi

$$\mathrm{dom}(S) := \{f \in L^2(I) \mid f \in C^2(I), f(0) = f(1) = 0\},$$
$$Sf := f''$$

egyenlőséggel definiált $S : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{H}$ lineáris operátort. Igazolható, hogy $\mathrm{dom}(S)$ sűrű $L^2(I)$-ben, továbbá bármely $f, g \in \mathrm{dom}(S)$ mellett

$$(Sf \mid g) = \int_0^1 f'' \cdot \bar{g} = \Big[f' \cdot \bar{g}\Big]_0^1 - \int_0^1 f' \cdot g' = 0 - \left(\Big[f \cdot \bar{g}'\Big]_0^1 - \int_0^1 f \cdot \bar{g}''\right) = (f \mid Sg),$$

vagyis S szimmetrikus operátor. Ugyanakkor igazolható, hogy $S \neq S^*$, vagyis S nem önadjungált.

14.18. Példa. Legyen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ egy mérhető halmaz és tekintsük a $\mathscr{H} = L^2(M)$ Hilbert-téren rögzített $g : M \to \mathbb{K}$ mérhető függvény mellett a

$$\mathrm{dom}(T_g) := \{f \in L^2(M) \mid g \cdot f \in L^2(M)\},$$
$$T_g f = g \cdot f$$

egyenlőséggel értelmezett T_g operátort. Igazolható, hogy T_g sűrűn definiált és fennáll a

$$(T_g)^* = T_{\bar{g}}$$

egyenlőség. Speciálisan, ha g majdnem mindenütt valós értékű mérhető függvény, akkor $T_g = T_g^*$, azaz T_g önadjungált operátor.

Végezetül bizonyítás nélkül kimondunk két Neumann Jánostól származó tételt, melyek rendkívül fontos szerepet játszanak a nemkorlátos operátorok elméletében:

14.19. Tétel. *Legyenek* $\mathscr{H}$ *és* $\mathscr{K}$ *Hilbert-terek és* $T : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{K}$ *sűrűn definiált zárt operátor, akkor* T^*T *és* TT^* *mindketten önadjungált operátorok, emellett* $\operatorname{ran}(I + T^*T) = \mathscr{H}$, $\operatorname{ran}(I + TT^*) = \mathscr{K}$, *valamint* $(I + T^*T)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *és* $(I + TT^*)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{K})$.

14.20. Tétel. *Legyen* $\mathscr{H}$ *komplex Hilbert-tér, akkor az* $S : \mathscr{H} \rightarrowtail \mathscr{H}$ *szimmetrikus operátor pontosan akkor önadjungált, ha* $\operatorname{ran}(S + iI) = \operatorname{ran}(S - iI) = \mathscr{H}$, *és ekkor minden* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Im}\,\lambda \neq 0$ *szám esetén* $(S + \lambda I)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.