Analízis III

Simon László előadása alapján

ELTE, 2009. December

Előadó e-mail címe: simonl a ludens.elte.hu-nál

Ez a jegyzet **nem** szakirodalom s nem garantált, hogy az órai anyagot teljesen lefedi, az előadásokra bejárni ajánlott.

Ha a jegyzetben helyesírási, tartalmi vagy formai hibát találsz, kérlek jelezd az előadónak vagy a tuzesdaniel@gmail.com e-mail címen!

Differenciálegyenletek

09.07

(Simon Péter helyettesít) Mi a differenciálegyenlet?

Pl

1. $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$
2. $\ddot{x}(t) = F(t) \big/ m$
3. $\partial_t u = \Delta u$
4. $\dot{x}(t) = x(t-1)$

Ezeket lehet rendszerezni: ODE (ordenary differential equation, azaz közönséges differenciál-egyenlet, 1-es és 2-es), PDE (partial differential equation, 3-as), FDE (functional differential equation, 4-es).

Most az ODE-val foglalkozunk. Mi a közönséges differenciál-egyenlet?

Definíció: legyen F : ℝ$^{n+2}$ $\to$ ℝ, n-edrendű közönséges differenciálegyenlet: $\forall\, t$ -re $0 = F\left(t,\, x(t),\, \dot{x}(t),\, \ddot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right)$

Megjegyzés: egy ilyen n-edrendű egyenlet átírató elsőrendű rendszerré. Pl: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ egyenletet átírjuk: $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = \dot{x}(t)$. Ekkor y-ra az alábbi elsőrendű, kétismeretlenes rendszer áll fenn:

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$$
$$\dot{y}_2(t) = -\omega^2 \cdot y_1(t)$$

n-edrendűnél: $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$, … , $y_n = x^{(n-1)}$. Ekkor $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ -re elsőrendű rendszert kapunk.

Definíció: legyen f : ℝ × ℝ^n $\to$ ℝ^n, $\dot{x}(t) = f(t,\, x(t))$ elsőrendű (explicit) közönséges differenciálegyenlet-rendszer. Ismeretlen az x : ℝ $\to$ ℝ^n függvény. Koordinátánként kiírva:

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left(t,\, x_1(t),\, x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2\left(t,\, x_1(t),\, x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = f_n\left(t,\, x_1(t),\, x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)$$

Mivel foglalkozik a közönséges differenciálelmélet?

1. Mi a megoldás? Azaz számítsuk ki a megoldást. (Ezt már tanultuk.) Vannak:
    a. képlettel megoldhatók
    b. képlettel nem megoldhatók (de numerikusan közelíthetők)
2. Megoldás létezésének, egyértelműségének keresése, függése a paraméterektől
3. Milyen a megoldás? Pl periodikus-e, korlátos-e… A megoldást szeretnénk jellemezni annak kiszámítása nélkül. Pl $\dot{x} = x$ és $x(0) > 0$. Ekkor egyből látjuk, hogy x szigmon nő, akkor is, amikor még nem tudtuk, hogy konkrétan mi a megoldás.

Közönséges differenciálegyenlet megoldásának létezése és egyértelműsége

Pl: $\dot{x}(t) = x(t)$, ennek egy jó megoldása $x(t) = c \cdot e^t$, $c \in$ ℝ, azaz végtelen sok megoldás van. Legyen kezdeti feltétel: $x(0) = a \in$ ℝ adott. Ekkor már csak 1 megoldás van az ilyen fajtákból: $c \cdot e^0 = a \Rightarrow c = a$, vagyis a megoldás $x(t) = a \cdot e^t$. De más fajtából lehetne még megoldás? Nem, ugyanis:

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

$$\dot{x}(t) \cdot e^{-t} - x(t)e^{-t} = 0$$

$$\left(x(t) \cdot e^{-t}\right)' = 0 \Rightarrow x(t) \cdot e^{-t} = c$$

Az implikáció csak akkor igaz, ha $D(x)$ (azaz a differenciáloperátor) egy intervallumon van értelmezve. Tehát $\exists\ k \in$ ℝ : $x(t)e^{-t} = k \Leftrightarrow x(t) = k \cdot e^t$. A megoldás egyértelmű, mert bármilyen kezdőfeltételt adok meg, lesz pontosan 1 megoldás.

Másik példa: $\dot{x}(t) = \sqrt{|\, x(t)\, |}$. Mi a megoldás $x > 0$ -ra?

$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x(t)} = t + c \Rightarrow x(t) = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$. Hamis gyökök a parabolák „bal oldalai”.

$x < 0$ esetén a megoldás „lefelé fordított parabolák bal oldalai”, hamis megoldás a parabolák „jobb oldalai”. $x = 0$ esetén mindkét fajta megoldás jó. Így adott kezdeti feltétel mellett végtelen sok megoldás létezik. Ha $x(t_0) = a$ a kezdeti feltétel, akkor $a > 0$ esetén a megoldás csak lokálisan egyértelmű, de globálisan nem.

Mitől lesz a megoldás egyértelmű?

Tétel: ha $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ közönséges diffegyenletben az f függvény az x változóban teljesíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor a megoldás egyértelmű. Vagyis ha minden pont egy alkalmas környezetéhez $\exists$ $L \in$ ℝ$^{+}$: $|f(t, p) - f(t, q)| \leq L \cdot |p - q|$, akkor a megoldás egyértelmű.

Pl: $g(x) = 5x$, vagy $g(x) = x^2$ teljesítik a lokális Lipschitz feltételt, de a $g(x) = \sqrt{|x|}$ már nem. Ez utóbbi 0-ban nem lok. Lip, csak 1-ben pl.

Észrevétel: ha a derivált létezik, és korlátos minden pont környezetében, akkor lok. Lip.

A tétel bizonyítása az alábbi lemmán alapszik: Gronwall lemma (egyszerű eset): legyen $u : [a, b] \to$ ℝ diffható, melyhez $\exists$ $k \in$ ℝ$^{+}$: $\dot{u}(t) \leq k \cdot u(t)\ \forall\ t \in [a, b]$. Ekkor $u(t) \leq u(a) \cdot e^{k(t-a)}\ \forall\ t \in [a, b]$.

Bizonyítás: beszorzunk e^{-kt}-vel:

$$\dot{u}(t) \cdot e^{-kt} - k \cdot u(t) \cdot e^{-kt} \leq 0$$

$$\left(u(t)e^{-kt}\right)' \leq 0$$

$$u(t)e^{-kt} \leq u(a)e^{-ka}$$

$$u(t) \leq u(a)e^{k(t-a)}$$

Tétel bizonyítása: legyen x és y két megoldás, amelyekhez $\exists$ $\tau \in$ ℝ : $x(\tau) = y(\tau)$.

Belátjuk, hogy $x(t) = y(t)\ \forall\ t$. Bizonyítás $n = 1$ esetre: $u(t) = (x(t) - y(t))^2$,

$$\dot{u}(t) = 2(x(t) - y(t)) \cdot \left(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\right) = 2(x(t) - y(t))(f(t, x(t)) - f(t, y(t))).$$

$$\dot{u}(t) \leq \left|\dot{u}(t)\right| = 2\,|x(t) - y(t)| \cdot |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq 2\,|x(t) - y(t)| \cdot L \cdot |x(t) - y(t)| = 2L \cdot u(t$$

Gronwall alkalmazása: $u(t) \leq u(a) \cdot e^{2L(t-a)}$,

$u(\tau) = 0 \Rightarrow u(t) = (x(t) - y(t))^2 \leq 0 \Rightarrow x(t) = y(t)\ \forall\ t \geq \tau$. Hasonlóan igaz a $t \leq \tau$-ra is.

09.14

A Hilbert tér geometriája, Fourier sorfejtés

Kiegésztés: fogalmaink használatához be kell vezetni a komplex Euklideszi tér fogalmát. Komplex vektortér: a definíció analóg a valós vektortér definíciójával, kivéve: komplex számmal való szorzás is értelmezve van, a műveleti tulajdonságok ugyanazok.

Komplex Euklideszi tér: komplex vektortér (az alaptest a komplex számok halmaza, $\mathbb{C}$), plusz 2 elem skalárszorzata is értelmezve van, értéke komplex szám. A műveleti tulajdonságok analógok, eltérés: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (a felülhúzás a komplex konjugálás), ekkor amúgy $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ és $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$. (Vegyük észre, hogy a komplex vektortereken értelmezett skaláris szorzás kétféleképp definiálható. Itt - és a matematikában általában - a skaláris szorzás az első változójában lineáris és a másodikban konjugált lineáris. Fizikában fordítva, azaz az első változójában lineáris, a másodikban konjugált lineáris:$\langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$, illetve $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.)

Megjegyzés, példák komplex euklideszi térre:

- $\mathbb{C}^n$ esetén $x = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$, $x_j \in \mathbb{C}$, akkor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$, $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$
- $L^2(M)$ tér (komplex esetben), ha $M \subset$ ℝ^n mérhető halmaz: legyen $f : M \to \mathbb{C}, f = f_1 + i \cdot f_2$. Legyen továbbá f_1, f_2 valós függvények. f mérhetősége azt jelenti, hogy f_1, f_2 mérhető $\Rightarrow \int_M f := \int_M f_1 + i\int_M f_2$. $f : M \to \mathbb{C}$ integrálható $\Leftrightarrow\ |f|$ integrálható, $|f| : M \to$ ℝ mérhető.

  <u>**Definíció**</u>: jelölje $L^2(M)$ az olyan $f : M \to \mathbb{C}$ mérhető függvények összességét, amelyekre $|f|^2$ integrálható. Könnyen belátható, hogy $L^2(M)$ komplex vektortér. Vezessük be ebben a következő skalárszorzatot: $\langle f, g\rangle := \int_M f\overline{g}$. Így egy Euklideszi teret kapunk. Sőt, a tér teljes, vagyis $L^2(M)$ Hilbert tér.

- Komplex l^2 tér, $x := (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots)$, $x_j \in \mathbb{C}$, l^2 komplex euklideszi tér, ebben a skaláris szorzás $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$. Bizonyítható, hogy teljes is.

Ortogonális kiegészítő altér

Definíció: legyen X Hilbert tér (vagy akár Banach is). Egy $Y \subset X$ halmazt altérnek nevezzük, ha az összeadás és számmal való szorzás nem vezet ki belőle és zárt részhalmaz (a konvergencia nem vezet ki).

Definíció: legyen X Hilbert tér, s két eleme x és y. Ezek merőlegesek, vagyis $x \perp y$, ha $\langle x, y\rangle = 0$.

Definíció: legyen X Hilbert tér, $Y \subset X$ altér. Azt mondjuk, hogy az $x \in X$ elem Y ortogonális, ha $\forall\, y \in Y$ -ra $\langle x, y\rangle = 0$.

Definíció: legyen X Hilbert tér, $Y \subset X$ altér. Az Y altér ortogonális kiegészítő altérét, $Y^{\perp}$ -t így értelmezzük: $Y^{\perp} := \left\{x \in X : x \perp Y\right\}$.

Állítás: $Y^{\perp} \subset X$ is altér.

Bizonyítás: az összeadás és számmal való szorzás nem vezet ki belőle, ugyanis tfh $y_1, y_2 \in Y^{\perp}$, $x \in Y$ tetszőleges. Ekkor $\langle \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, x\rangle = \lambda_1\langle y_1, x\rangle + \lambda_2\langle y_2, x\rangle = 0$. $Y^{\perp}$ zárt halmaz, ugyanis legyen $y_j \in Y^{\perp}$, $\lim(y_j) = y \in X$. Tudjuk, hogy $\langle y_j, x\rangle = 0\ \forall\, x \in Y$.
$y_j \to y \Rightarrow \langle y_j, x\rangle \to \langle y, x\rangle$ minden rögzített x-re, ugyanis a skalárszorzat a tényezőktől folytonosan függ, tehát $\langle y, x\rangle = 0$, $\forall\, x \in X$ -re, vagyis $y \in Y^{\perp}$.

Megjegyzés: komplex Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, azaz $\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ bizonyítása:

$$0 \le \langle x+\lambda y,\, x+\lambda y\rangle = \langle x,\, x\rangle + \lambda\langle y,\, x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,\, y\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y,\, y\rangle$$

$$0 \le \langle x,\, x\rangle + \lambda\langle y,\, x\rangle + \bar{\lambda}\left[\langle x,\, y\rangle + \lambda\langle y,\, y\rangle\right]$$

A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot válasszuk meg úgy, hogy $\bar{\lambda}$ együtthatója 0 legyen. Ez teljesül, ha $\lambda = -\frac{\langle x,\, y\rangle}{\langle y,\, y\rangle}$ ($y = 0$ triviális eset, így feltesszük, hogy $y \neq 0$), behelyettesítve:

$$0 \le \langle x,\, x\rangle - \frac{\langle x,\, y\rangle}{\langle y,\, y\rangle}\langle y,\, x\rangle = \langle x,\, x\rangle - \frac{\left|\langle x,\, y\rangle\right|^2}{\langle y,\, y\rangle} \Rightarrow \left|\langle x,\, y\rangle\right|^2 \le \langle x,\, x\rangle\langle y,\, y\rangle.$$

Riesz-féle felbontási tétel: legyen X Hilbert tér, Y egy altere, $Y^{\perp}$ az Y-nak ortogonális kiegészítő altere! Ekkor $\forall\ x \in X$ elemre $x = y + z$, ahol $y \in Y$, $z \in Y^{\perp}$ és a felbontás egyértelmű.

Lemma (paralelogramma egyenlőség): legyen X egy Hilbert tér. Ekkor $\forall\ a,\ b \in X$ esetén $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.

Bizonyítás (lemmáé): $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = \langle a+b,\, a+b\rangle + \langle a-b,\, a-b\rangle =$
$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a,\, b\rangle + \langle b,\, a\rangle + \|a\|^2 + \|b\|^2 - \langle a,\, b\rangle - \langle b,\, a\rangle = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.$

Bizonyítás (tételé): legyen $d := \inf\left\{\|x-y\| : y \in Y\right\} \ge 0$ (d véges). Belátjuk, hogy $\exists\ y_0 \in Y: \|x-y_0\| = d$. Az infimum definíciója miatt
$\exists\ y_j \in Y: d^2 \le \|x-y_j\|^2 < d^2 + 1/j \quad j \in \mathbb{N}$. Tekintsük az (y_j) sorozatot!
Állítás: (y_j) Cauchy sorozat. Ehhez felhasználjuk a paralelogramma egyenlőséget:
$a := x - y_j,\ b := x - y_k.$

$$\|(x-y_j) + (x-y_k)\|^2 + \|(x-y_j) - (x-y_k)\|^2 = 2\|x-y_j\|^2 + 2\|x-y_k\|^2,$$

$$\|y_k - y_j\|^2 = 2\|x-y_j\|^2 + 2\|x-y_k\|^2 - \underbrace{\|2x - (y_j+y_k)\|^2}_{4\left\|x - \frac{y_j+y_k}{2}\right\|^2} \le$$

$$\le 2\left(d^2 + 1/j\right) + 2\left(d^2 + 1/k\right) - 4d^2 = \frac{2}{j} + \frac{2}{k} < \varepsilon, \text{ ha } j,\ k \ge j_0.$$

Mivel X tér teljes $\Rightarrow\ \exists\ y_0 \in X: \lim\limits_{j\to\infty}\|y_j - y_0\| = 0$. Mivel Y altér zár halmaz

$\Rightarrow y_0 = \lim(y_j) \in Y.$

Másrészt $d = \inf\{ \| x - y \| : y \in Y \}$, $d^2 \leq \| x - y_j \|^2 < d^2 + \frac{1}{j}$ és

$\lim(y_j) = y_0 \Rightarrow \| x - y_0 \|^2 = d^2$, mivel $\| x - y_0 \| = \lim \| x - y_j \|$. Legyen $z_0 = x - y_0$. Be kellene még látni, hogy $z_0 \perp Y$, vagyis $x = y_0 + z_0$, ahol $y_0 \in Y$, $z_0 \in Y^{\perp}$.

Legyen $y \in Y$! Mivel d a fenti infinimum, ezért tetszőleges $\lambda \in$ 𝕂 esetén

$d^2 = \| x - y_0 \|^2 \leq \| x - y_0 - \lambda y \|^2 =$

$= \| z_0 - \lambda y \|^2 = \langle z_0 - \lambda y, z_0 - \lambda y \rangle = \| z_0 \|^2 - \lambda \langle y, z_0 \rangle - \overline{\lambda}\left[\langle z_0, y \rangle - \lambda \| y \|^2\right]$. Most λ -t megint úgy választjuk, hogy $\overline{\lambda}$ együtthatója 0 legyen, vagyis legyen $\lambda = \frac{\langle z_0, y \rangle}{\| y \|^2}$ (megint feltehetjük, hogy $y \neq 0$). Tehát $d^2 \leq d^2 - \lambda \langle y, z_0 \rangle = d^2 - \frac{\langle z_0, y \rangle}{\| y \|^2} \langle y, z_0 \rangle = d^2 - \frac{\left| \langle z_0, y \rangle \right|^2}{\| y \|^2}$, 0.

Tehát z_0, vagyis valóban lehetséges ilyen felbontás.

Indirekt bizonyítjuk, hogy a felbontás egyértelmű. Tfh két alakban is felírható x:

$x = y_0 + z_0 = y_1 + z_1$, ahol $y_1, y_2 \in Y$ és $z_1, z_2 \in Y^{\perp}$. $Y \ni (y_0 - y_1) : = a = (z_1 - z_0) \in Y^{\perp}$.

$\langle y_0 - y_1, z_1 - z_0 \rangle = \| a \|^2 = 0 \Rightarrow y_0 - y_1 = z_0 - z_1 = 0 \Rightarrow y_0 = y_1,\ z_0 = z_1$

09.21

Ortogonális rendszerek

Definíció: egy X vektortérben az M halmaz elemei lineárisan függetlenek, ha bármely véges sok lineárisan független.

Definíció: legyen X normált tér! X dimenziója az olyan lineárisan független elemek maximális száma, amelyek véges lineárkombinációi mindenütt sűrűn vannak X-ben (egy $A \subset X$ sűrű X-ben, ha $\overline{A} = X$, ahol a halmaz felülvonása a lezárást jelenti, ez amúgy ekvivalens azzal, hogy $\forall\, x \in X$ -nek minden környezetében van A-beli elem). Másképp fogalmazva: jelöljük ℒ$(x_1, x_2, ...)$ -val azt a lineáris teret, amely az $x_1, x_2, ...$ elemek véges lineárkombinációjaként előáll. (Az előálló lineáris tér egyértelmű, de egy teret több ilyen vektorrendszer is előállíthat.) Ekkor X tér dimenziója az olyan lineárisan független elemek maximális száma, melyekre ℒ$(x_1, x_2, \ldots) = X$. A D dimenziószám egyértelmű, $0 \le D \le \infty$.

Definíció: egy X normált teret szeparábilisnak nevezünk, ha benne megadható megszámlálhatóan sok (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok) lineárisan független elem, amelyek véges lineárkombinációi sűrűn vannak X-ben.

Definíció: legyen X Hilbert-tér! Azt mondjuk, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ elemek ortogonális rendszert alkotnak, ha $\forall\, x_j, x_k \neq 0$ esetén $\langle x_j, x_k \rangle = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \text{nem}0 & j = k \end{cases}$. A rendszer ortonormált, ha $\forall\, x \in X$ esetén $\| x \| = 1$.

Kérdés: ha az X Hilbert-térben $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ lineárisan függetlenek, akkor lehet-e ezekből ortonormált rendszert konstruálni, és ha igen, hogyan? Válasz: lehet, az ún. Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással.

Tétel: az $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ lineárisan független elemekhez megkonstruálhatók az $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ elemek úgy, hogy az utóbbiak ortonormált rendszert alkossanak, mégpedig úgy, hogy $\forall\, k$ -ra ℒ$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ = ℒ$(y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

Bizonyítás:

1. legyen $x_1 = \frac{y_1}{\| y_1 \|}$, ekkor $\| x_1 \| = 1$. $y_1 \neq 0$, mert $y_1, y_2, \ldots$ lineárisan függetlenek.
2. $z_2 := y_2 - \lambda_1 x_1$, ahol $\lambda_1 \in$ ℝ. Ezt hogy válasszuk meg, hogy $z_2 \perp x_1$ teljesüljön?

   $0 = \langle z_2, x_1 \rangle = \langle y_2 - \lambda_1 x_1, x_1 \rangle = \langle y_2, x_1 \rangle - \lambda_1 \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle}_{=1} \Rightarrow \lambda_1 = \langle y_2, x_1 \rangle$. Ekkor

   $z_2 \neq 0$, mert y_1, y_2 lineárisan függetlenek. $x_2 := \frac{z_2}{\| z_2 \|}$, ekkor $\| x_2 \| = 1$ és $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

3. $z_3 : = y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2$, ahol $\mu_1, \mu_2 \in$ ℝ. Ezeket hogy válasszuk meg, hogy $z_3 \perp x_1, x_2$ teljesüljenek?

   $0 = \langle y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2, x_1 \rangle = \langle y_3, x_1 \rangle - \mu_1 - 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \langle y_3, x_1 \rangle$

   $0 = \langle y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2, x_2 \rangle = \langle y_3, x_2 \rangle - 0 - \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 = \langle y_3, x_2 \rangle$. $z_3 \neq 0$ y_1, y_2, y_3 lineáris függetlensége miatt, ezért $x_3 : = \frac{z_3}{\| z_3 \|}$ jó választás, így $\| x_3 \| = 1$ és $x_3 \perp x_1, x_2$.

Nem nehéz belátni, hogy az eljárás folytatható $\forall\, k$ -ra és

ℒ$(y_1, y_2, \ldots, y_k) =$ ℒ$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Ortogonális sorok, Fourier-sorok

A továbbiakban legyen X szeparábilis Hilbert-tér, véges vagy végtelen dimenziós! Tudjuk, hogy ekkor X-ben megadható $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ ortonormált rendszer. Egy $\sum_k c_k x_k$ alakú sort (összeget) – ahol $c_k \in$ 𝕂 – ortogonális sornak nevezünk.

Tételek:

1. egy $\sum_k c_k x_k$ sor konvergens $\Leftrightarrow \sum_k | c_k |^2 < \infty$
2. ha $x = \sum_k c_k x_k$, akkor $c_l = \langle x, x_l \rangle$
3. $\| x \|^2 = \sum_k | c_k |^2$ (végtelen dimenziós Pitagorasz tétel).

Bizonyítás:

1. Véges dimenzióban triviális, így tegyük fel, hogy végtelen sok elemű az ortonormált rendszer! Legyen $s_j : = \sum_{k=1}^{j} c_k x_k$! A sor konvergenciája azt jelenti, hogy (s_j) sorozat konvergens $\Leftrightarrow (s_j)$ Cauchy sorozat.

$$\| s_j - s_l \|^2 = \langle s_j - s_l, s_j - s_l \rangle = \left\langle \sum_{k=l+1}^{j} c_k x_k, \sum_{k=l+1}^{j} c_k x_k \right\rangle = \sum_{k=l+1}^{j} c_k \overline{c_k} \underbrace{\langle x_k, x_k \rangle}_{=1} = \sum_{k=l+1}^{j} | c_k |^2$$

. Ez a $\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2$ sor egy „szelete”. Tehát (s_j) X-beli sorozatra teljesül a

Cauchy-kritérium $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2$ sorra teljesül a Cauchy-kritérium $\Leftrightarrow$ (s_j)

X-beli sorozat konvergens $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2$ sor konvergens.

2. tfh $x = \sum_k c_k x_k$, x_l -lel szorozzuk skalárisan (jobbról) az egyenlőséget (ezt megtehetjük, hisz nem nehéz belátni, hogy egy konvergens sor tagonként szorozható skalárisan), $\langle x, x_l \rangle = \left\langle \sum_k c_k x_k, x_l \right\rangle = \sum_k c_k \langle x_k, x_l \rangle = c_l$

3. $\| x \|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_k c_k x_k, x \right\rangle = \sum_k c_k \underbrace{\langle x_k, x \rangle}_{\overline{c_k}} = \sum_k | c_k |^2$

Definíció: legyen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ortonormált rendszer, $x \in X$ adott elem! Értelmezzük az x elem k-adik Fourier-együtthatóját: $c_k := \langle x, x_k \rangle$. Az így adódó $\sum_k c_k x_k$ „sort” az x elem Fourier-sorának nevezzük.

Kérdés: egy x elem Fourier-sora konvergens-e? Ha igen, mi az összege?

Tétel: egy $x \in X$ elem Fourier sora mindig konvergens, ugyanis teljesül az ún. Bessel-egyenlőtlenség: $\sum_k | c_k |^2 \leq \| x \|^2$. A sor összege pontosan akkor x, ha teljesül az ún Parseval egyenlőség, azaz $\sum_k | c_k |^2 = \| x \|^2$.

Bizonyítás: $s_j := \sum_{k=1}^{j} c_k x_k$, ekkor

$$0 \leq \| x - s_j \|^2 = \langle x - s_j, x - s_j \rangle = \| x \|^2 - \langle s_j, x \rangle - \langle x, s_j \rangle + \| s_j \|^2 =$$

$$= \| x \|^2 - \left\langle \sum_{k=1}^{j} c_k x_k, x \right\rangle - \left\langle x, \sum_{k=1}^{j} c_k x_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{j} c_k x_k, \sum_{k=1}^{j} c_k x_k \right\rangle =$$

$$= \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{j} c_k \overline{c_k} - \sum_{k=1}^{j} \overline{c_k} c_k + \sum_{k=1}^{j} c_k \overline{c_k} = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{j} | c_k |^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{j} | c_k |^2 \leq \| x \|^2 \Rightarrow \sum_{k=}^{\infty}$$

, másrészt a fentiek szerint $\| x - s_j \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{j} | c_k |^2$. Ebből láthatjuk, hogy

$s_j \to x \Leftrightarrow \| x \|^2 - \sum_{k} | c_k |^2 = 0$, vagyis a sor összege pontosan akkor x, ha

$\| x \|^2 - \sum_{k} | c_k |^2 = 0$.

Tétel: legyen $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ ortonormált rendszer. Ekkor egy $x \in X$ elem Fourier-sorának összege az x elemnek az $X_0 := \overline{\text{\ℒ}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)} \subset X$ alterén vett merőleges vetülete.

Bizonyítás: jelölje $x^* := \sum_{k} c_k x_k$, ahol $c_k := \langle x, x_k \rangle$. Azt kellene belátni, hogy $x^* \in X_0$

és $(x - x^*) \perp X_0$. $x^* \in X_0$, ugyanis $\sum_{k=1}^{j} c_k x_k \in \text{\ℒ}(x_1, x_2, \ldots, x_j)$, így $\sum_{k} c_k x_k \in X_0$.

$(x - x^*) \perp X_0$ ugyanis először legyen $y \in \text{\ℒ}(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ tetszőleges! Belátjuk, hogy

$\langle x - x^*, y \rangle = 0$. $y = \sum_{j=1}^{l} d_j x_j$,

$$\langle x - x^*, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x^*, y \rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^{l} d_j x_j \right\rangle - \left\langle \sum_{k} c_k x_k, \sum_{j=1}^{l} d_j x_j \right\rangle =$$

$\sum_{j=1}^{l} \overline{d_j} \underbrace{\langle x, x_j \rangle}_{c_j} - \sum_{j=1}^{l} \overline{d_j} \underbrace{\left\langle \sum_k c_k x_k, x_j \right\rangle}_{c_j} = 0$. Most legyen $y \in X_0 = \overline{\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots)}$,

szeretnénk, ha ekkor $\langle x - x^*, y \rangle = 0$ is igaz lenne. Ehhez vegyünk egy (y_ν), $\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots)$ -beli konvergens sorozatot, melyre $y_\nu \to y$. Ekkor $\langle x - x^*, y_\nu \rangle = 0$. Így, mivel $y_\nu \to y$, $\langle x - x^*, y \rangle = 0$, ugyanis

$$\left| \langle x - x^*, y \rangle \right| = \left| \langle x - x^*, y \rangle - \langle x - x^*, y_\nu \rangle \right| = \left| \langle x - x^*, y - y_\nu \rangle \right| \leq \| x - x^* \| \cdot \underbrace{\| y - y_\nu \|}_{\to 0} \to$$

.

Definíció: az $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszert zártnak nevezzük, ha $\overline{\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots)} = X$.

Következmény: ha az $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszer zárt, akkor $\forall\, x \in X$ elem Fourier-sorának összege x.

Definíció: egy $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszert teljesnek nevezzük, ha $x \perp x_k\ \forall\, k \Rightarrow x = 0$.

Tétel (bizonyítás nélkül): egy $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszer teljes $\Leftrightarrow$ zárt.

09.28

Példák zárt (teljes) ortonormált rendszerekre

Észrevétel: ha $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ lineárisan független olyan rendszer, hogy $\overline{\mathcal{L}(y_1, y_2, \ldots)} = X$ (X Hilbert-tér, a lineárisan független rendszer zárt), akkor ebből a Schmidt ortogonalizálási eljárással zárt (teljes) ortonormált rendszert kapunk.

1. **Konkrét pl:** $X := L^2(a, b)$, **ahol** (a, b) **véges intervallum.**

Tétel: ebben az $t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \ldots, t \mapsto t^k, \ldots$ lineárisan független függvények zárt rendszert alkotnak.

Bizonyítás (vázlat): egyrészt a függvényrendszer lineárisan független:

$\sum_{j=0}^{k} a_j t^j = 0 \Leftrightarrow a_j = 0$. (Egy valós k-ad fokú polinomnak legfeljebb k db gyöke lehet $k \geq 1$.) Az, hogy a rendszer zárt, következik a Weierstrass approximációs tételéből. Eszerint tetszőleges $f : [a, b] \rightarrow$ ℝ folytonos függvényhez $\exists\ P_k$ polinom sorozat, amely egyenletesen tart f-hez. Legyen $g : (a, b) \rightarrow$ ℝ, $g \in L^2(a, b)$. A Lebesgue integrál felépítéséből kiolvasható, hogy $g : [a, b] \rightarrow$ ℝ folytonos függvények sűrűn vannak $L^2(a, b)$ -n. A g folytonos függvényt Weierstrass approximációs tétele szerint tetszőleges előírt pontossággal meg lehet közelíteni polinomokkal, a szuprémum normában $\Rightarrow$ ezek közelítik g-t L^2 normában is.

2. **Komplex trigonometrikus rendszer** $X : = L^2(0,2\pi)$,
   $\phi_k(t) : = e^{ikt}$, $t \in (0,2\pi)$, $k \in$ ℤ.

Tétel: a fenti függvények egy zárt ortogonális rendszert alkotnak (biz. nélkül). Belátjuk, hogy $(\phi_k)_{k \in}$ ℤ ortogonális.

$\int_0^{2\pi} \phi_k(t)\overline{\phi_l(t)}dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} = \left[\frac{e^{i(k-l)t}}{i(k-l)}\right]_{t=0}^{2\pi} = 0$ ha $k \neq l$. $\psi_k : = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi_k$ már ortonormált rendszer.

3. **valós trigonometrikus rendszerek.**

Legyen az X alaphalmaz a valós $L^2(0,2\pi)$. $e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$, $\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$, $\sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}$. Egyszerű számolással adódik, hogy $1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(kt), \sin(kt), \ldots$ függvények páronként merőlegesek. Tehát ezek ortogonális rendszert alkotnak a valós $L^2(0,2\pi)$ -ben. Abból, hogy a komplex trigonometrikus rendszer zárt $\Rightarrow$ a fenti rendszer valós ortogonális zárt rendszer.

A fentiekből következik, hogy egy tetszőleges $f \in L^2(0,2\pi)$ függvénynek akár a komplex, akár a valós trigonometrikus rendszer szerint Fourier sora előállítja a függvényt L^2 normában.

4. Az $1, \cos t, \cos(2t), \ldots, \cos(kt), \ldots$ függvényrendszer zárt és ortogonális a $L^2(0,\pi)$ -ben. A szinuszos ugyanígy.

Lineáris és korlátos operátorok

Állítás: legyen X, Y normált terek! Korábban bizonyítottuk, hogy $A : X \to Y$ lineráis operátor folytonos $\Leftrightarrow$ A korlátos.

Definíció: egy $A : X \to Y$ lineáris operátort korlátosnak nevezzük, ha $\exists\, c \geq 0 : \| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X \forall\, x \in X.$

Tétel: legyen X normált tér, Y teljes normált tér (Banach tér), $A : M \to Y$ korlátos lineáris operátor, ahol $M \subset X$ lineáris altér, de nem kell zártnak lennie. Ekkor az A-nak egyértelműen létezik korlátos lineáris kiterjesztése az $\overline{M}$ -ra (M lezárására). Más szóval: $\exists\,!\, \tilde{A} : \overline{M} \longrightarrow Y$ korlátos lineáris operátor, amelyre $\tilde{A}x = Ax$, $\forall\, x \in M$. Spec eset, mikor $\overline{M} = X$.

Bizonyítás (vázlatos): legyen $x \in \overline{M}$. Ehhez $\exists\, x_k \in M : \lim(x_k) = x$. Tekintsük az $(Ax_k)_{k \in}$ℕ sorozatot Y-ban! Belátjuk, hogy ez Cauchy sorozat.
$\| Ax_k - Ax_l \|_Y = \| A(x_k - x_l) \|_Y \leq c \cdot \| x_k - x_l \|_X$. Legyen $\varepsilon > 0$, $\exists\, k_0 : \forall\, k, l > k_0$ esetén $\| x_k - x_l \| < \varepsilon \Rightarrow \| Ax_k - Ax_l \| \leq c \cdot \varepsilon$. Y teljes $\Rightarrow \exists\, y \in Y : \lim(Ax_k) = y$. y csak x-től függ, nem függ (x_k) -tól és egyértelmű. $\tilde{A}(x) := y$, $\tilde{A}$ lineáris, korlátos (és folytonos).

Hahn-Banach tétel: legyen X Banach tér, $X_0 \subset X$ valódi (zárt lineáris) altér, $f : X_0 \to$ 𝕂 korlátos lineáris funkcionál (azaz számértékű operátor). Ekkor $\exists\, \tilde{f} : X \longrightarrow$ 𝕂 korlátos lineáris kiterjesztés, és $\| \tilde{f} \| = \| f \|$.

Korlátos lineáris funkcionálok, duális tér (Hilbert tér esetén)

Észrevétel: legyen X Hilbert tér, $y \in X$ tetszőleges rögzített elem. Értelmezzük az $f : X \to \mathbb{K}, f(x) := \langle x, y\rangle$ funkcionált.

Állítás: ekkor f korlátos lineáris funkcionál. f linearitása triviális, és korlátos is, ugyanis $|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Tétel (Riesz): legyen X Hilbert tér (valós vagy komplex), f egy korlátos lineáris funkcionál X-en. Ekkor létezik egyetlen $y \in X$, hogy $f(x) = \langle x, y\rangle \ \forall x \in X$.

Bizonyítás: jelölje $X_0 := \{x \in X : f(x) = 0\}$ -vel f magterét. X_0 altér X-ben, azaz az algebrai műveletek nem vezetnek ki X_0 -ból, és zárt részhalmaz X-ben. Utóbbi azért igaz, mivel f folytonos, azaz ha $x_k \in X_0, (x_k) \to x \Rightarrow x \in X_0$. $f(x_k) \to f(x) \Rightarrow f(x) = 0$, mivel jelen esetben $f(x_k) = 0$.

1. Ha $X_0 = X, f(x) = 0 \ \forall x \in X$, triviális eset. Ekkor legyen $y = 0$.
2. X_0 valódi altér $\Rightarrow$ (Riesz-féle felbontási tétel) $\exists\, x_1 \neq 0 : x_1 \in X_0^{\perp}$. Legyen $x \in X$ tetszőleges, tekintsük az $X \ni y_1 := f(x)x_1 - f(x_1)x$ elemet. Ekkor
   $f(y_1) = f(x)f(x_1) - f(x_1)f(x) = 0 \Rightarrow y_1 \in X_0 \Rightarrow \langle y_1, x_1\rangle = 0$. Más szóval
   $0 = \langle y_1, x_1\rangle = \langle f(x)x_1 - f(x_1)x, x_1\rangle = f(x)\|x_1\|^2 - f(x_1)\langle x, x_1\rangle \Rightarrow$
   $$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{f(x_1)\langle x, x_1\rangle}{\|x_1\|^2} = \left\langle x, \frac{\overline{f(x_1)}x_1}{\|x_1\|^2}\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \exists\, y, \text{ nevezetesen } y = \frac{\overline{f(x_1)}}{\|x_1\|^2}x_1.$$
3. y egyértelmű. Tfh
   $\langle x, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \ \forall x \in X \Rightarrow \langle x, y - y^*\rangle = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow y - y^* = 0 \Rightarrow y = y^*$.

10.05

Korlátos lineáris funkcionálok

Legyen X Hilbert tér $y \in X$ egy rögzített eleme, $f(x) := \langle x, y \rangle$. Ekkor a CS-ből következik: $\| f \| \leq \| y \|$.

Megjegyzés: $\| f \| = \| y \|$, ugyanis egyrészt

$\left| f(x) \right| = \left| \langle x, y \rangle \right| \leq \| x \| \cdot \| y \| \Rightarrow \| f \| \leq \| y \|$. Másrészt

$\| f \| = \sup\left\{ \left| f(x) \right| : \| x \| = 1 \right\}$. Válasszuk $x := \frac{y}{\| y \|}$ ($y \neq 0$, máskülönben triviális),

ekkor $\| x \| = 1$, $\left| f(x) \right| = \left| \left\langle \frac{y}{\| y \|}, y \right\rangle \right| = \| y \|$. Tehát $\| f \| = \| y \|$.

Spec eset: $X := L^2(M)$, $M \subset$ ℝ^n mérhető halmaz. Ekkor egy tetszőleges f korlátos lineáris funkcionál ilyen alakú: $f(\phi) := \langle \phi, \psi \rangle = \int_M \phi \overline{\psi}$, ahol $\psi \in L^2(M)$ rögzített.

$\psi_0 := \overline{\psi} \in L^2(M)$ jelöléssel $f(\phi) = \int_M \phi \psi_0$, $\forall\ \phi \in L^2(M)$.

Korlátos lineáris funkcionálok $L^p(M)$ -en, ahol $1 < p < \infty$ (azaz $L^\infty(M)$ teret nem tárgyaljuk)

Legyen $\psi \in L^q(M)$ tetszőleges rögzített, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$! Értelmezzük az f funkcionált: $f(\phi) := \int_M \phi \psi$, ahol $\phi \in L^p(M)$.

Állítás: f korlátos lineáris funkcionál $L^p(M)$ -en.

Bizonyítás: tudjuk, hogy $\phi \in L^p(M)$, $\psi \in L^q(M) \Rightarrow \phi \psi \in L^1(M)$, tehát a funkcionál értelmezve van az egész $L^p(M)$ -n, nyilván lineáris. A Hölder egyenlőtlenség szerint

$\left| \int_M \phi \psi \right| \leq \| \phi \|_{L^p(M)} \cdot \| \psi \|_{L^q(M)} \Rightarrow \| f \| \leq \| \psi \|_{L^q(M)}$, vagyis korlátos is és normája $\leq \| \psi \|_{L^q(M)}$

Tétel: $\| f \| = \| \psi \|_{L^q(M)}$.

Tétel: legyen $1 < p < \infty$. Ekkor tetszőleges $f : L^p(M) \to$ 𝕂 korlátos lineáris funkcionálhoz $\exists\,!\ \psi \in L^q(M) : f(\phi) = \int_M \psi\phi$.

Duális (konjugált) tér

Definíció: legyen X normált tér! Az X-en értelmezett korlátos lineáris funkcionálok terét X duálisának nevezzük és X'-vel jelöljük (van, ahol *-gal jelölik).

Megjegyzés: $X' = L(X,$ 𝕂$)$. Tudjuk, hogy $X' = L(X,$ 𝕂$)$ normált tér (norma az operátor normája), X' tér teljes, mivel 𝕂 alaptest teljes, így X' Banach tér.

Értelmezzük az előbbieket ezen fogalom rögzítésével!

X Hilbert tér. Tudjuk, hogy $\forall f \in X' \exists\, y \in X : f(x) = \langle x, y\rangle,\ \| f \| = \| y \|$. Fordítva, $y \in X$ esetén $f(x) := \langle x, y\rangle,\ x \in X$! Tehát ha X Hilbert tér, bijekció létesíthető X' és X között. Jelöljük: $\Phi(y) := f, f(x) := \langle x, y\rangle$. $\Phi : X \to X'$ bijekció. Ennek tulajdonságai:

- $\Phi(y_1 + y_2) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2)$. $f_1(x) = \langle x, y_1\rangle, f_2(x) = \langle x, y_2\rangle$.
  $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle = \langle x, y_1 + y_2\rangle$, vagyis $f_1 + f_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$.
- $\lambda \in$ 𝕂 esetén $\Phi(\lambda y) = \overline{\lambda}\Phi(y)$.
  $f(x) = \langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle = \overline{\lambda} f(x) = \left(\overline{\lambda} f\right)x$, vagyis $\lambda y \leftrightarrow \overline{\lambda} f$, tehát Φ konjugált lineáris.

$X = L^p(M)$ esete, mikor $1 \le p \le \infty$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tudjuk, hogy tetszőleges $\psi \in L^q(M)$ esetén $f(\phi) := \int_M \phi\psi,\ \phi \in X$ mellett $f \in \left(L^p(M)\right)'$, $\| f \| = \| \psi \|$. Továbbá $\left(L^p(M)\right)'$ minden eleme ilyen alakú $p < \infty$ esetén.

$L^q(M) \ni \psi \leftrightarrow f \in \left(L^p(M)\right)'$. Könnyen belátható, hogy az eddigiek alapján Φ bijekció, sőt, Φ lineáris. $L^p(M)$ izomorf és izometrikus (normatartó) $L^q(M)$ -vel, ha $p < \infty$.

X'' tér, más szóval biduális, reflexív tér

<u>Definíció</u>: legyen X normált tér. Ekkor definíció szerint $X'' := (X')'$.

<u>Állítás</u>: ha X Hilbert tér, akkor X'' izomorf, izometrikus az X térrel.

<u>Definíció</u>: legyen X Banach tér! Ha X'' izomorf és izometrikus X-szel, akkor X''-t reflexívnek nevezzük.

<u>Állítás</u>: legyen $X = L^p(M)$, ahol $1 < p < \infty$! Ekkor $L^p(M)$ reflexív.

Vizsgáljuk X''-t általános esetben, mikor X Banach tér! Tekintsük egy tetszőleges, rögzített $x \in X$ elemet, ehhez rendeljük hozzá a következő, $F_x \in X''$ elemet! $F_x(f) := f(x)$, $\forall f \in X'$. Ekkor F_X jól definiált funkcionál X'-n, nyilván lineáris, korlátos is.

$\left| F_x(f) \right| = \left| f(x) \right| \leq \| f \| \cdot \| x \|_X, \forall f \in X'. \Rightarrow \| F_x \| \leq \| x \|$.

<u>Állítás</u>: $\| F_x \| = \| x \|$.

<u>Bizonyítás</u>: (definíció szerint $\| F_x \| = \sup\limits_{f \in X'} \left\{ \left| F_x(f) \right| = \left| f(x) \right| : \| f \| = 1 \right\}$) azt kellene belátni, hogy $\exists f \in X' : \| f \| = 1$, melyre igaz, hogy $\left| F_x(f) \right| = \| x \|$ bármely rögzített x esetén. Tekintsük a következő f_0 funkcionált X következő, 1 dimenziós alterén: $X_0 := \left\{ \lambda x : \lambda \in \text{\𝕂} \right\}$, ahol $x \in X$ rögzített. Legyen $f_0(\lambda x) := \lambda \| x \|$. f_0 korlátos is, $\left| f_0(\lambda x) \right| = |\lambda| \, \| x \| = \| \lambda x \| \cdot 1 \Rightarrow \| f_0 \| = 1$. A Hahn-Banach tétel szerint az X_0 altéren definiált f_0 korlátos lineáris funkcionál kiterjeszthető a korlátosság és linearitás megtartásával az egész X térre úgy, hogy $\| f \| = \| f_0 \|$ (ezt persze nem bizonyítottuk). Jelölje ezt f! $f \in X'$, $\| f \| = \| f_0 \| = 1$. Erre

$\left| F_x(f) \right| = \left| f(x) \right| = \left| f\left(1 \cdot x\right) \right| = f_0\left(1 \cdot x\right) = 1 \cdot \| x \| = \| x \|$.

Általános esetben X'' egy részhalmaza izomorf és izometrikus X-szel. X''-nek lehetnek más elemei is (ha nem reflexív).

Gyenge konvergencia

<u>Definíció</u>: legyenek X, Y normált terek, és tfh $A_j \in L(X,\ Y)$, $j \in$ ℕ (A_j korlátos lineáris operátor X-n). Azt mondjuk, hogy ez az A_j sorozat gyengén konvergál az A operátorhoz, ha $\forall\ x \in X$ elemre $\left(A_j x\right)_{j \in}$ ℕ $\longrightarrow\ Ax$ (pontonkénti konvergencia). (Y-beli norma szerinti konvergencia).

<u>Állítás</u>: ha $\lim \| A_j - A \| = 0$, azaz $\left(A_j\right) \longrightarrow A$ az $L(X,\ Y)$ norma szerint, akkor $\left(A_j\right) \longrightarrow A$ gyengén, de fordítva nem mindig igaz.

Bizonyítás: tfh $\lim \| A_j - A \| = 0$. Ekkor

$$\| A_j x - Ax \|_Y = \| \left(A_j - A\right)x \| \leq \underbrace{\| A_j - A \|}_{\to 0} \cdot \| x \| \quad \Rightarrow \quad 0 .$$

Speciális eset: $Y =$ 𝕂, $L(X,\ Y) = X'$. $\left(f_j\right) \longrightarrow f$ gyengén X' -ben, ha bármely rögzített $x \in X$ esetén $\left(f_j(x)\right) \longrightarrow f(x)$.

Példa X'-beli gyengén konvergens sorozatra, amely norma szerint nem konvergens. Legyen X szeparábilis, végtelen dimenziós Hilbert tér! Legyen ebben egy $y_1,\ y_2,\ldots,y_j,\ldots$ ortonormált, teljes rendszer! $f_j(x) :\ = \langle x,\ y_j\rangle$. Ekkor $\langle x,\ y_j\rangle$ az $x \in X$ elem j-edik Fourier-egyeütthatója y_j ortonormált rendszer szerint, $c_j :\ = \langle x,\ y_j\rangle$. Tudjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\ c_j\ |^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\left(c_j\right) = 0, \text{ azaz } \lim_{j \to \infty} f_j(x) = 0,\ \forall\ x \in X.$$ Más szóval $\left(f_j\right)$ X'-beli sorozat gyengén tart $f = 0$ funkcionálhoz. Másrészt $\| f_j \| = \| y_j \|_X = 1$, így $\left(f_j\right)$ nem tart a norma szerint az $f = 0$ funkcionálhoz. (Bebizonyítható, hogy véges dimenzióban a gyenge konvergencia egybeesik a norma szerinti konvergencia fogalmával.)

<u>Tétel</u>: tfh $A_j \in L(X,\ Y)$, ahol X, Y Banach terek, $\left(A_j\right) \longrightarrow A$ gyengén. Ekkor $\left(\| A_j \| \right)_{j \in}$ ℕ korlátos. Ez a tétel következik az alábbi tételből.

Egyenletes korlátosság tétele (Banach-Steinhaus tétel, bizonyítás nélkül): legyenek X, Y Banach terek, $A_j \in L(X,\ Y)$. Ha az A_j operátor sorozat pontonként korlátos, azaz ha

$\forall\, x \in X$ esetén $\sup\limits_{j\, \in}$ ℕ $\left\{ \| A_j x \| \right\} < \infty \Rightarrow \left(\| A_j \| \right)$ korlátos.

Megjegyzés (gyenge kompaktsági kritérium): tekintsük a $X' = L(X,$ 𝕂$)$ speciális esetet az egyszerűség kedvéért. Ha $f_j \in X'$ korlátos sorozatot alkot (X most Banach tér), akkor (f_j) -ból kiválasztható egy gyengén konvergens részsorozat.

Gyenge konvergencia X-ben

10.12

Definíció: legyen X normált tér! Azt mondjuk, hogy egy $(x_j)_{j\, \in}$ ℕ X-beli sorozat gyengén konvergál egy $x \in X$ ponthoz, ha $\forall\, f \in X'$ funkcionálra $\left(f(x_j)\right)_{j\, \in}$ ℕ $\to f(x)$.

Megjegyzés: ha X reflexív Banach-tér, akkor minden korlátos X-beli sorozatnak létezik gyengén konvergens részsorozata. Ugyanis ekkor $X = X'' = (X')'$.

Inverz operátor

Emlékeztető: egy függvénynek létezik inverze, ha injektív. Tudjuk továbbá, hogy egy $A : X \to Y$ lineáris operátornak létezik inverze (azaz injektív) $\Leftrightarrow$ a magtér csak a 0-ból áll, azaz $Ax = 0_Y \Leftrightarrow x = 0_X$. Továbbá, ha A^{-1} létezik, akkor A^{-1} lineáris operátor. Egy A operátor folytonos x_0 -ban, ha $\forall\ \varepsilon > 0 \exists\ \rho > 0 :\ \| x - x_0 \|_X < \rho \Rightarrow \| Ax - Ax_0 \|_Y < \varepsilon$.

Kérdés: ha X, Y normált terek, $A : X \to Y$ lineáris és injektív $\overset{?}{\Rightarrow} A^{-1}$ korlátos is? Általában nem, akkor sem, ha A korlátos.

Nyílt leképezések tétele (bizonyítás nélkül): legyenek X, Y Banach terek, $A : X \to Y$ korlátos lineáris operátor és $R_A = Y$, vagyis ráképezés. Ekkor A operátor X minden nyílt halmazát Y nyílt halmazába képezi. Ebből következik:

Tétel (Banach): legyenek X, Y Banach terek, $A : X \to Y$ korlátos és lineáris, $R_A = Y$ és A injektív! Ekkor A^{-1} korlátos (azaz folytonos).

Bizonyítás: legyen tetszőleges $y_0 \in Y = R_A = D_{A^{-1}}$. $x_0 := A^{-1}y_0$. Belátjuk, hogy az A^{-1} folytonos y_0 -ban. Tekintsük $x_0 = A^{-1}y_0$ egy tetszőleges $B_r(x_0)$ nyílt környezetét! Ennek képe is nyílt az Y-ban az előbbi tétel szerint. Mivel $y_0 \in A(B_r(x_0))$, ami nyílt, ezért y_0 -nak van olyan környezete, melyre $B_\rho(y_0) \subset A(B_r(x_0))$. Ez azt jelenti, hogy ha $y \in B_\rho(y_0) \Rightarrow A^{-1}y \in B_r(x_0)$. Eszerint A^{-1} folytonos y_0 -ban.

Zárt gráf (grafikon) tétel

Definíció: legyenek X, Y normált terek, $A : M \to Y$ lineáris operátor, $M \subset X$. Ekkor A operátor gráfja, grafikonja az alábbi halmaz: $G_A := \{(x, Ax) : x \in M = D_A\}$.

Definíció: egy $A : M \to Y$ lineáris operátort zártnak nevezünk, ha a $G_A \subset X \times Y$ zárt halmaz $X \times Y$ -ban. $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Megjegyzés: a szorzattéren értelmezett műveletek:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$
- $\|(x, y)\|_{X \times Y} := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, $X \times Y$ normált tér tehát.

Legyenek X, Y normált terek, $A : M \to Y$ lineáris operátor, $D_A = M \subset X$. A zárt $\Leftrightarrow$ ha minden $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ M-beli sorozatra, melyre $\lim(x_j) = x \in X$ és $\exists \lim(Ax_j) = y \in Y$, akkor $x \in M$ és $y = Ax$. Ezért ha A folytonos, akkor zárt is.

Példa zárt, lineáris, de nem folytonos (nem korlátos) operátorra: $X := C[0,1]$, $M = D_A = C^1[0,1]$, $A\phi := \phi'$, vagyis a differenciáloperátor. $(\phi_j) \to \phi$ egyenletesen ($C[0,1]$ -beli konvergencia) és $(\phi'_j) \to \psi$ egyenletesen $\Rightarrow \psi = \phi'$, tehát A valóban zárt, lineáris (de nem korlátos, így nem is folytonos, ezt láttuk korábban).

Zárt gráf tétel: legyenek X, Y Banach terek, $A : X \to Y$ zárt, lineáris operátor (tehát $D_A = X$). Ekkor A folytonos (korlátos).

Bizonyítás: $G_A := \{(x, Ax) : x \in D_A = X\} \subset X \times Y$ (utóbbi Banach-tér), ugyanis G_A zárt halmaz $X \times Y$-ban, az $X \times Y$ vektortenérnek altere:
$(x_1, Ax_1) + (x_2, Ax_2) = (x_1 + x_2, A(x_1 + x_2)) \in G_A$, $\lambda(x, Ax) = (\lambda x, A(\lambda x)) \in G_A$. G_A az $X \times Y$ Banach tér zárt lineáris altere $\Rightarrow$ G_A Banach-tér. Tekintsük a következő két operátort:
$U(x, Ax) := x$, $V(x, Ax) := Ax$, ahol $(x, Ax) \in G_A$. Ekkor $U : G_A \to X$, $R_U = X$,
$V : G_A \to Y$. Most U-ra alkalmazható a Banach tétel (az inverz operátor korlátosságáról):
$D_U = G_A$, $R_U = X$, U korlátos és injektív $\Rightarrow$ $U^{-1} : X \to G_A$ korlátos (folytonos),
$A = VU^{-1}$, mert $U^{-1}x = (x, Ax)$, $V(U^{-1}(x)) = V(x, Ax) = Ax$. $V : G_A \to Y$ korlátos
$\Rightarrow$ $A = VU^{-1}$ is korlátos.

Sajátérték, reguláris érték, spektrum

Legyenek X, Y normált terek, $A : M \to Y$ lineáris operátor, $M \subset X$, $b \in Y$ adott elem.

1. Elsőfajú egyenlet: melyik az a $x \in M = D_A : Ax = b$?
2. Másodfajú egyenlet: legyen $Y = X$. Melyik az a $x \in X$, melyre $(\lambda I - A)x = b$, ahol $\lambda \in$ 𝕂, I az identitás. Ha $(\lambda I - A)$ nem injektív, azaz nem létezik az inverzre, akkor λ -t az A operátor sajátértékének nevezzük. Ez azt jelenti, hogy $\exists\ x_0 \neq 0 : (\lambda I - A)x_0 = 0 \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda x_0$.

Definíció: ha $\exists\ (\lambda I - A)^{-1}$, ez korlátos és $R_{\lambda I - A}$ értelmezési tartománya sűrű halmaz X-ben, akkor λ -t reguláris értéknek nevezzük.

Állítás: ha A zárt operátor, akkor reguláris érték esetén $D_{(\lambda I - A)^{-1}} = X$, azaz $R_{\lambda I - A} = X$.

Megjegyzés: ekkor reguláris értéke esetén $(\lambda I - A)x = b$ egyenletnek $\forall\ b \in X$-hez $\exists\,!\ x$ megoldás, és x folytonosan függ b-től, azaz $x = \underbrace{(\lambda I - A)^{-1}}_{\text{folytonos}} b$

<u>Definíció</u>: az A operátor spektruma a reguláris értékek halmazának a komplementere az alaptestben. A sajátértékek halmaza része a spektrumnak.

Korlátos lineáris operátorok reguláris értékei

<u>Tétel</u>: legyen X Banach tér! Legyen $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor. Ekkor $r_\sigma(A) := \lim\limits_{k \to \infty} \| A^k \|^{1/k}$, ez létezik és véges. Ha $\lambda \in$ 𝕂 számra teljesül, hogy $|\lambda| > r_\sigma(A)$, akkor λ reguláris érték (A-ra nézve).

<u>Definíció</u>: $r_\sigma(A)$ számot az A korlátos lineáris operátor spektrálsugarának nevezzük.

Megjegyzések:

- $A, B \in L(X, X)$ esetén $\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|$, ugyanis
  $\| (AB)x \| = \| A(Bx) \| \leq \| A \| \cdot \| Bx \| \leq \| A \| \cdot \| B \| \cdot \| x \|$ minden x-re,
  $\Rightarrow \| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|$
- $\| A^k \| \leq \| A \|^k$. $\| A^k \|^{1/k} \leq \left(\| A \|^k \right)^{1/k} = \| A \| \Rightarrow r_\sigma(A) \leq \| A \|$.

  Következmény: ha $|\lambda| > \| A \| \Rightarrow \lambda$ reguláris érték.

<u>Lemma 1</u>: legyen Z Banach-tér, $z_k \in Z$. Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| z_k \| < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergens Z Banach-téren.

Bizonyítás: legyen $s_j := \sum\limits_{k=1}^{j} z_k$ részlet összeg!

$\| s_j - s_l \| = \| \sum\limits_{k=l+1}^{j} z_k \| \leq \sum\limits_{k=l+1}^{j} \| z_k \| < \varepsilon$, ha $l, j > j_0$, tehát teljesül a Cauchy kritérium. Mivel Z Banach-tér, azaz teljes normált tér, ezért minden Cauchy-sorozatnak van határértéke Z-ben.

Lemma 2: tfh $B_k \in L(X, X)$, $\sum_{k=1}^{\infty} B_k$ konvergens $L(X, X)$ -en. Ekkor $\forall\ C \in L(X, X)$ operátorra $C \sum_{k=1}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^{\infty} CB_k$. A bizonyítás egyszerű a részletösszegek segítségével.

Tétel: legyen X Banach-tér, $A : X \to X$ korlátos, lineáris operátor. Ekkor létezik és 10.19
véges: $r_\sigma(A) := \lim_{k \to \infty} \| A^k \|^{1/k}$. Továbbá $|\lambda| > r_\sigma(A) \Rightarrow \lambda$ reguláris érték,
$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k$. Ez a sor – a Neumann-sor – $L(X, X)$ normában konvergens.

Bizonyítás:

1. jelöljük: $r := \inf\left\{ \| A^k \|^{1/k} : k \in \text{\ℕ} \right\} \geq 0$, ez véges. Belátjuk, hogy $r_\sigma(A) = \lim_{k \to \infty} \| A^k \|^{1/k} = r = \inf\left\{ \| A^k \|^{1/k} : k \in \text{\ℕ} \right\} \geq 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az alsó határ definíciójából következik, hogy $\exists\ m \in \text{\ℕ} : r \leq \| A^m \|^{1/m} < r + \varepsilon$. Ezen m mellett válasszunk egy $k > m$ számot, melyre $k = pm + q$, ahol $p \in \text{\ℕ}$ és $0 \leq q < m$ (ez k-nak m-vel vett maradékos osztása, q a maradéktag). Ekkor $A^k = A^{pm+q} = \left(A^p\right)^m \cdot A^q$, így
$\| A^k \| \leq \| A^m \|^p \cdot \| A \|^q \Rightarrow \| A^k \|^{1/k} \leq \| A^m \|^{p/k} \cdot \| A \|^{q/k} \leq (r + \varepsilon)^{mp/k} \| A \|^{q/k}$. Vegyük észre, hogy $\lim_{k \to \infty} \frac{mp}{k} = 1$, mert $\lim_{k \to \infty} \frac{q}{k} = 0$, így a fenti egyenlőtlenség jobb oldala $\to r + \varepsilon$. Ebből következik, hogy
$$\exists\ k_0 : k > k_0 \Rightarrow r \leq \| A^k \|^{1/k} \leq r + 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \| A^k \|^{1/k} = r.$$
2. Belátjuk, hogy a Neumann-sor $L(X, X)$ -ben konvergens. Az 1. lemma szerint ehhez elég bizonyítani, hogy a sor tagjainak normáiból alkotott sor konvergens, azaz $\sum_{k=0}^{\infty} \| \lambda^{-k-1} A^k \| < \infty$. Válasszunk egy olyan r_1 számot, melyre $|\lambda| > r_1 > r_\sigma(A)$! Mivel $r_\sigma(A) = \lim_{k \to \infty} \| A^k \|^{1/k}$ és $r_1 > r_\sigma(A)$, ezért
$\exists\ k_1 \in \text{\ℕ} : k > k_1 \Rightarrow r_1 > \| A^k \|^{1/k}$, így

$\| \lambda^{-k-1} A^k \| = \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} \| A^k \| < \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} r_1^k = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{r_1}{|\lambda|}\right)^k$. Ezeket összegezve k szerint egy mértani sort kapunk, melynek kvóciense $0 < \frac{r_1}{|\lambda|} < 1$, így a sor konvergens, azaz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{r_k}{|\lambda|}\right)^k < \infty$.

3. jelöljük $B := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k \in L(X, X)$. Előbb láttuk, hogy ez konvergens.
   Ebből következni fog, hogy $(\lambda I - A)^{-1}$ létezik és egyenlő B-vel. A 2. lemmát felhasználva:
   $(\lambda I - A)B = \lambda B - AB = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k - A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^{k+1} = I$
   . Hasonlóképpen, $B(\lambda I - A) = I$. Következtetésképpen $(\lambda I - A)^{-1}$ létezik és egyenlő B-vel.

Következmény: $|\lambda| > r_\sigma(A)$ esetén a $(\lambda I - A)x = b$ másodfajú egyenletnek létezik egyetlen x megoldása, mégpedig

$x = (\lambda I - A)^{-1} b = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k\right) b = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda^{-k-1} A^k\right) b = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}\left(A^k b\right)$, ez a sor

pedig X normában konvergens. A sor összege így is írható: $\frac{1}{\lambda} b + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k b$. A fentiek még inkább érvényesek, ha $|\lambda| > \| A \|$.

Bizonyítható (de nem tesszük) tétel: $r_\sigma(A) = \sup\left\{ |\lambda| : \lambda \in A_{spektrum} \right\}$.

Alkalmazás, példák.

1. példa: négyzetesen integrálható magú integráloperátorok.

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ egy Lebesgue szerint mérhető halmaz, $X := L^2(M)$, ez ugye Hilbert tér. Legyen $\mathcal{K} \in L^2(M \times M)$ az úgynevezett magfüggvény, s $\phi \in L^2(M)$. Definiáljuk: $\psi(x) := \int_M \mathcal{K}(x, y) \phi(y) dy$.

<u>Állítás</u>: $\psi \in L^2(M)$, továbbá a $K(\phi) := \psi$ képlettel értelmezett $K : L^2(M) \to L^2(M)$ operátor lineáris, korlátos. A K operátort négyzetesen integrálató magú integráloperátornak nevezzük.

Bizonyítás: a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség szerint majdnem minden x-re

$$|\psi(x)| \le \int_M |\text{\𝒦}(x, y)| \cdot |\phi(y)|\, dy \le \left\{\int_M |\text{\𝒦}(x, y)|^2 dy\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_M |\phi(y)|^2 dy\right\}^{1/2}$$

. Mivel $\text{\𝒦} \in L^2(M \times M) \Rightarrow \int_{M \times M} |\text{\𝒦}(x, y)|^2 dxdy < \infty$. Fubini tételt használva

$$\int_M \underbrace{\int_M |\text{\𝒦}(x, y)|^2 dy}_{\text{véges m. m. } x\text{-re}} dx < \infty,$$ így

$$|\psi(x)|^2 \le \int_M |\text{\𝒦}(x, y)|^2 dy \cdot \left[\int_M |\phi(y)|^2 dy\right] < \infty.$$ Integrálva:

$$\int_M |\psi(x)|^2 dx \le \left[\int_M \int_M |\text{\𝒦}(x, y)|^2 dydx\right] \cdot \left[\int_M |\phi(y)|^2 dy\right] < \infty \Rightarrow \psi \in L^2(M).$$ K linearitása triviális. K korlátos, ugyanis

$$\|K\phi\|^2_{L^2(M)} = \|\psi\|^2_{L^2(M)} \le \left\{\int_{M \times M} |\text{\𝒦}(x, y)|^2 dxdy\right\} \cdot \|\phi\|^2 \Rightarrow$$ K korlátos, sőt:

$$\|K\| \le \left\{\int_{M \times M} |\text{\𝒦}(x, y)|^2 dxdy\right\}^{1/2} = \|\text{\𝒦}\|_{L^2(M \times M)}.$$

Következmény: $|\lambda| > \|\text{\𝒦}\|_{L^2(M \times M)}$ esetén λ reguláris érték. Tudjuk, hogy $|\lambda| > r_\sigma(K)$ esetén λ reguláris érték és $(\lambda I - K)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-1-k} K^k$.

Kérdés: K integrál operátor hatványai hogyan számolhatók?

<u>Állítás</u>: legyen $\text{\𝒦}, \text{\ℒ} \in L^2(M \times M)$ és K, L a megfelelő integráloperátorok. Ekkor $P := KL$ szintén négyzetesen integrálható magú operátor, amelynek magfüggvénye $\text{\𝒫}(x, y) := \int_M \text{\𝒦}(x, t)\text{\ℒ}(t, y)dt$.

Bizonyítás: $\phi \in L^2(M)$ esetén

$$(P\phi)(x) = [K(L\phi)](x) = \int_M \mathscr{K}(x,\ t)\left[\int_M \mathscr{L}(t,\ y)\phi(y)dy\right]dt =$$

$$= \int_M \Big[\underbrace{\int_M \mathscr{K}(x,\ t)\mathscr{L}(t,\ y)dt}_{\mathscr{P}(x,\ y)}\Big]\phi(y)dy,$$ ahol Fubini-tételt ismét alkalmaztuk.

$\mathscr{P} \in L^2(M \times M)$, merthogy

$$|\ \mathscr{P}(x,\ y)\ | \ \leq \left\{\int_M |\ \mathscr{K}(x,\ t)\ |\ ^2 dt\right\}^{1/2}\left\{\int_M |\ \mathscr{L}(t,\ y)\ |\ ^2 dy\right\}^{1/2},$$ így

integrálva:

$$\int_{M \times M} |\ \mathscr{P}(x,\ y)\ |\ ^2 dxdy \leq \underbrace{\int_M \left[\int_M |\ \mathscr{K}(x,\ t)\ |\ ^2 dt\right]dx}_{<\infty} \cdot \underbrace{\int_M \left[\int_M |\ \mathscr{L}(t,\ y)\ |\ ^2 dt\right]dy}_{<\infty} < \infty$$

.

Következmény: $\left(K^j\phi\right)(x) = \int_M \mathscr{K}_j(x,\ y)\phi(y)dy$, $j = 1,2,...,$ ahol $\mathscr{K}_1 := \mathscr{K}$,

$\mathscr{K}_2(x,\ y) = \int_M \mathscr{K}(x,\ t)\mathscr{K}_1(t,\ y)dt.$

$\mathscr{K}_j(x,\ y) = \int_M \mathscr{K}(x,\ t)\mathscr{K}_{j-1}(t,\ y)dt.$ Ebből következik, hogy

$$(\lambda I - K)^{-1}b = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1}K^j b.$$

$$\left[(\lambda I - K)^{-1}b\right](x) = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1}K^j b\right](x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1}\left(K^j b\right)(x) = \frac{b(x)}{\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1}\int_M \mathscr{K}_j(x,\ y)b(y)dy \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \frac{b(x)}{\lambda} + \int_M \Big[\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1}\mathscr{K}_j(x,\ y)}_{\in L^2(M \times M)}\Big]b(y)dy.$$ A sor $L^2(M)$ normában konvergál. Az

egyenlőséget a következő órán látjuk be.

A korábbiak szerint $(\lambda I - A)x = b$ egyenletnek van egyértelmű megoldása x-re és

$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}\left(A^k b\right)$, ha λ reguláris érték, ugyanis ekkor a jobb oldal konvergens $X \ni x$ -ben.

Az előző példában $X := L^2(M)$ volt, (ahol $M \subset \ℝ^n$ mérhető halmaz),

$\𝒦 \in L^2(M \times M)$, $\psi(x) := (K\phi)(x) = \int_M \𝒦(x, y)\phi(y)dy$ ahol $K : L^2(M) \to L^2(M)$

korlátos lineáris operátor és $r_\sigma(K) \le \| K \| \le \| \𝒦 \|_{L^2(M \times M)}$.

$(\lambda I - K)\phi = b$, $b \in L^2(M)$ adott esetén mi a megoldás $\phi \in L^2(M)$ -re? Az egyenlet

ekvivalens: $\lambda\phi(x) - \int_M \𝒦(x, y)\phi(y)dy = b(x)$ majdnem minden $x \in M$ -re. Ha

$$| \lambda | > r_\sigma(K) \Rightarrow \phi = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} K^j b = \tfrac{b}{\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1} K^j b.$$

$\left(K^j b\right)(x) = \int_M \𝒦_j(x, y)b(y)dy$, $\𝒦_j(x, y) = \int_M \𝒦_{j-1}(x, t)\𝒦(t, y)dt$ és

$\𝒦_1 = \𝒦$. Így

$$\phi(x) = \tfrac{b(x)}{x} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1} \int_M \𝒦_j(x, y)b(y)dy = \frac{b(x)}{\lambda} + \int_M \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1}\𝒦_j(x, y)\right]}_{R_\lambda(x, y) \in L^2(M \times M) \text{ rezolv. op magfgve}} b(y)dy$$

. A sor $L^2(M \times M)$ -ben konvergens, ha $| \lambda | > r_\sigma(\𝒦)$.

A bizonyítás alapja: $\𝒦_j(x, y) = \int_M \𝒦_{j-1}(x, t)\𝒦(t, y)dt \Rightarrow K^{j-1}$ operátor

alkalmazva $t \mapsto \𝒦(t, y)$ függvényre (y rögzített):

$$\left\{\int_M | \𝒦_j(x, y) |^2 dx\right\}^{1/2} \le \| \𝒦^{j-1} \| \left\{\int_M | \𝒦(t, y) |^2 dt\right\}^{1/2} \Rightarrow \int_M | \𝒦_j(x, y) |^2 dx \le \| \ldots$$

. Integrálva y szerint:

$$\int_{M \times M} | \𝒦_j(x, y) |^2 dxdy \le \| K^{j-1} \|^2 \int_{M \times M} | \𝒦(t, y) |^2 dtdy.$$

$$\int_{M \times M} \frac{1}{|\lambda|^{2(j+1)}} \left|\mathcal{K}_j(x, y)\right|^2 dxdy \le \underbrace{\frac{1}{\left|\lambda^{2(j+1)}\right|} \|K^{j-1}\|^2}_{\sum_{j=1}^{\infty} \text{sor konv. ha } |\lambda| > r_\sigma(K)} \cdot \|\mathcal{K}\|^2_{L^2(M \times M)},$$

így a bal oldalból képzett számsor (ami ≥ 0) is konvergens.

2. példa: folytonos magú integráloperátorok.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány (azaz nyílt és összefüggő), $X := C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\overline{\Omega} \to \mathbb{K}$ folytonos függvények (a felülvonás a lezárást jelenti), tehát $C\left(\overline{\Omega}\right)$ az Ω korlátos tartomány lezárásán értelmezett folytonos függvények tere a $\|\phi\| = \sup_{\Omega} |\phi|$ normával. Legyen $\mathcal{K} \in C\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right)$, $\psi(x) := (K\phi)(x) := \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}(x, y)\phi(y)dy$.

Állítás: $K : C\left(\overline{\Omega}\right) \to C\left(\overline{\Omega}\right)$ korlátos, lineáris operátor.

Bizonyítás:

$$|\psi(x)| = \left|\int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}(x, y)\phi(y)dy\right| \le \int_{\overline{\Omega}} |\mathcal{K}(x, y)| \cdot |\phi(y)|\, dy \le \|\phi\| \int_{\overline{\Omega}} |\mathcal{K}(x, y)|\, dy \le$$

. Itt is igaz: $\left(K^j\phi\right)(x) = \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}_j(x, y)\phi(y)dy$.

$\mathcal{K}_j(x, y) = \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}_{j-1}(x, t)\mathcal{K}(t, y)dt$, K_j folytonos.

3. példa

Az előbbi spec esete: $\overline{\Omega} = [a, b] \subset \mathbb{R}$, ekkor $\mathcal{K} \in C([a, b] \times [a, b])$, továbbá

$\mathcal{K}(x, y) = 0$, ha $y > x$. $(K\phi)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x, y)\phi(y)dy = \int_a^x \mathcal{K}(x, y)\phi(y)dy$

Voltera típusú operátor. Erre is igaz, hogy $\mathcal{K} : C[a, b] \to C[a, b]$ folytonos lineáris operátor.

Állítás: $r_\sigma(K) = 0$, így $\lambda \neq 0$ esetén λ reguláris érték, azaz létezik egyértelmű megoldása a

$\lambda\phi(x) - \int_a^x \𝒦(x, y)\phi(y)dy = b(x)$ másodfajú egyenletlnek bármely folytonos $b(x)$

esetén.

Bizonyítás: $\𝒦_j(x, y) = \int_a^b \𝒦_{j-1}(x, t)\𝒦(t, y)dt$, speciálisan

$\𝒦_2(x, y) = \int_a^b \underbrace{\𝒦(x, t)}_{0 \text{ ha } t > x}\underbrace{\𝒦(t, y)}_{0 \text{ ha } y > t}dt = \int_y^x \𝒦(x, t)\𝒦(t, y)dt$, mert csak

$y \le t \le x$ esetén nem 0 az integrandus. Így $\𝒦_2(x, y) = 0$, ha $y > x$.

$\𝒦_3(x, y) = \int_y^x \𝒦_2(x, t)\𝒦(t, y)dt = 0$ ha $y > x$. Ekkor

$\| K \| \le \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b | \𝒦(x, y) | dy \le \alpha(b - a)$, ugyanis

$\𝒦 \in C([a, b] \times [a, b]) \Rightarrow \𝒦$ korlátos és így

$| \𝒦(x, y) | \le \alpha, \quad \forall\, x, y \in [a, b]$.

$\| K^2 \| \le \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b | \𝒦_2(x, y) | dy = \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x | \𝒦_2(x, y) | dy$. Az integrandusra

$$| \𝒦_2(x, y) | = \left| \int_y^x \𝒦(x, t)\𝒦(t, y)dt \right| \le \int_y^x \underbrace{| \𝒦(x, t) |}_{< \alpha} \underbrace{| \𝒦(t, y) |}_{\le \alpha} dt \le \alpha^2(x -$$

ha $x > y$. Így $\| K^2 \| \le \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x | \𝒦_2(x, y) | dy \le \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x \alpha^2(x - y)dy =$

$$= \alpha^2 \sup_{x \in [a, b]} \left[-\frac{(x - y)^2}{2} \right]_{y = a}^x = \alpha^2 \sup_{x \in [a, b]} \frac{(x - a)^2}{2} = \alpha^2 \frac{(b - a)^2}{2}.$$

$\| K^3 \|$ -re hasonló módon járunk el. Ekkor

$$| \𝒦_3(x, y) | = \left| \int_y^x \𝒦(x, t)\𝒦_2(t, y)dt \right| \le \int_y^x \underbrace{| \𝒦(x, t) |}_{\le \alpha} \underbrace{| \𝒦_2(t, y) |}_{\le \alpha^2(t - y)} dt \le \alpha^{3}\frac{(x -}{}$$

. Így

$$\| K^3 \| \le \sup_{x \in [a,\, b]} \int_a^x \left| \,\text{\𝒦}_3(x,\, y)\, \right| dy \le \sup_{x \in [a,\, b]} \int_a^x \alpha^3 \frac{(x-y)^2}{2} dy = \alpha^3 \sup_{x \in [a,\, b]} \frac{(x-a)^3}{3\,!} \le \alpha^3 \frac{(b-a)^3}{3\,!}$$

. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy $\| K^j \| \le \alpha^j \frac{(b-a)^j}{j\,!} \Rightarrow \| K^j \|^{1/j} = \alpha \frac{b-a}{(j\,!)^{1/j}} \to 0,$

ha $j \to \infty$.

Hilbert tér operátorai

Az adjungált operátor

Legyen X Hilbert tér, $A : D_A \to X$ lineáris operátor, ahol D_A az A-nak az értelmezési tartománya, $D_A \subset X$, $y \in X$ elem.

Kérdés: létezik-e illetve hány $y^* \in X$ létezik, melyre $\langle Ax,\, y\rangle = \langle x,\, y^* \rangle$, $\forall\, x \in D_A$ esetén? Mi az egyértelműség feltétele?

Állítás: legfeljebb egy y^* létezik $\Leftrightarrow$ $\overline{D_A} = X$, vagyis ha az értelmezési tartomány sűrű X-ben.

Bizonyítás: legfeljebb egy y^* létezik $\Leftrightarrow$ hogy ha $\langle x,\, y^* \rangle = \langle x,\, \tilde{y} \rangle$, $\forall\, x \in D_A$ -ból következik, hogy $y^* = \tilde{y}$. $\langle x,\, y^* \rangle = \langle x,\, \tilde{y} \rangle$, $\forall\, x \in D_A$ pontosan azt jelenti, hogy $\langle x,\, y^* - \tilde{y} \rangle = 0$, $\forall\, x \in D_A$. Ebből következik: $y^* = \tilde{y} \Leftrightarrow \overline{D_A} = X$. (Felhasználjuk, hogy a skalárszorzat folytonosan függ a tényezőktől.)

Definíció: legyen X Hilbert tér, $A : D_A \to X$ lineáris operátor, $\overline{D_A} = X$. Ekkor A operátor adjungáltját, A^* operátort így értelmezzük:

$$D_{A^*} := \left\{ y \in X : \exists\, y^* \in X : \langle Ax,\, y\rangle = \langle x,\, y^* \rangle\ \forall\, x \in D_A \right\} \text{ és } A^*(y) := y^* .$$

Megjegyzés: $0 \in D_{A^*}$, ugyanis $\langle Ax, 0\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$, $\forall\, x \in D_A$.

Állítás: A^* lineáris operátor.

Bizonyítás: legyen $y_1, y_2 \in D_{A^*}$! Ekkor $\langle Ax, y_1\rangle = \langle x, A^*(y_1)\rangle, \forall x \in D_A$ és $\langle Ax, y_2\rangle = \langle x, A^*(y_2)\rangle, \forall x \in D_A$. Így $\langle Ax, y_1\rangle + \langle Ax, y_2\rangle = \langle x, A^*(y_1)\rangle + \langle x, A^*(y_2)\rangle$. $\langle Ax, y_1 + y_2\rangle = \langle x, A^*(y_1) + A^*(y_2)\rangle, \forall x \in D_A$. Ebből következik, hogy $A^*(y_1 + y_2) = A^*(y_1) + A^*(y_2)$. Hasonlóan igazolható $A^*(\lambda g) = \lambda A^*(g)$.

Tétel: legyen $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor. Ekkor $A^* : X \to X$ korlátos lineáris operátor és $\|A^*\| = \|A\|$.

Bizonyítás: tekintsünk tetszőleges, rögzített $y \in X$ elemet! Ekkor $f(x) := \langle Ax, y\rangle, f$ lineáris funkcionál korlátos is:

$|f(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \le \|Ax\| \cdot \|y\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = (\|A\| \|y\|) \cdot \|x\|$, így $\|f\| \le \|A\| \cdot \|y\|$. A Riesz-tételből most következik, hogy $\exists\,!\, y^* \in X : f(x) = \langle x, y^*\rangle$, azaz $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle, \forall x \in X$-re. Így $D_{A^*} = X, A^* y = y^*$. Továbbá $\|A^* y\| = \|y^*\| = \|f\| \le \|A\| \cdot \|y\|$, ezért A^* korlátos és $\|A^*\| \le \|A\|$. Az egyenlőség abból fog következni, hogy $(A^*)^* = A \Rightarrow \|A\| = \|(A^*)^*\| \le \|A^*\|$.

Legyen $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor! Láttuk már, hogy $A^* : X \to X$ operátor korlátos és lineáris, és $\|A^*\| \le \|A\|$. 11.09

Tétel: legyenek $A, B : X \to X$ korlátos lineáris operátor! Ekkor

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$
2. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
3. $(A^*)^* = A$
4. $I = I^*, 0^* = 0$
5. $(AB)^* = B^* A^*$.

Bizonyítás: legyenek $x, y \in X$!

1. $\langle (A+B)x,\, y\rangle = \langle Ax + Bx,\, y\rangle = \langle Ax,\, y\rangle + \langle Bx,\, y\rangle = \left\langle x,\, A^* y\right\rangle + \left\langle x,\, B^* y\right\rangle =$

   $= \left\langle x,\, A^* y + B^* y\right\rangle = \left\langle x,\, \left(A^* + B^*\right) y\right\rangle$

3. $\langle Ax,\, y\rangle = \left\langle x,\, A^* y\right\rangle = \left\langle A^* y,\, x\right\rangle = \left\langle y,\, \left(A^*\right)^* x\right\rangle = \left\langle \left(A^*\right)^* x,\, y\right\rangle$,tehát $Ax = \left(A^*\right)^* x$,

   $\forall\, x \in X \Rightarrow A = \left(A^*\right)^*$,így $\| A^* \| \le \| \left(A^*\right)^* \| = \| A \|$,így az előző tétellel

   együtt: $\| A \| = \| A^* \|$.

5. $\left\langle x,\, (AB)^* y\right\rangle = \langle ABx,\, y\rangle = \left\langle Bx,\, A^* y\right\rangle = \left\langle x,\, B^* A^* y\right\rangle$

Megjegyzés: mi a helyezet a lineáris operátorok esetén (ha nem korlátos)? D_A, $D_B \subset X$, $\overline{D_A} = \overline{D_B} = X$.

Jelölés: ha $A^* x = Ax$, $\forall\, x \in D_A$, $D_A \subset D_{A^*}$, akkor A^* kiterjesztése A-nak s ezt így jelöljük: $A \subset A^*$. Ezzel a jelöléssel: $(A+B)^* \supset A^* + B^*$ és $D_{A^* + B^*} = D_{A^*} \cap D_{B^*}$. Ugyanis $\forall\, y \in \left(D_{A^*} \cap D_{B^*}\right)$ esetén $\langle (A+B)x,\, y\rangle = \left\langle x,\, \left(A^* + B^*\right) y\right\rangle$, $\forall\, x \in \left(D_A \cap D_B\right)$. Továbbá $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, $(AB)^* \supset B^* A^*$, $\left(A^*\right)^* \supset A$ és 1 $A \subset B \Rightarrow A^* \supset B^*$.

Példák:

$X :=$ 𝕂^n. Tudjuk, hogy ekkor minden lineáris operátor korlátos.

A : 𝕂^n $\to$ 𝕂^n lineáris korlátos operátor. Tudjuk, hogy A reprezentálható egy 𝒜 (valós vagy komplex elemekből alkotott), $n \times n$ -es mátrixszal úgy, hogy 𝒜$x = Ax$. Ekkor A^* : 𝕂^n $\to$ 𝕂^n korlátos lineáris operátor. Kérdés: mi a lesz ennek a mátrixa?

𝒜 $= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{jk} \in$ 𝕂. Ekkor x, $y \in$ 𝕂^n esetén

$$\langle \text{\𝒜}x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right]\overline{y_j} = \sum_{k=1}^{n} x_k\left[\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\overline{y_j}\right] = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{\left[\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{jk}}y_j\right]} = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{\left[\sum_{j=1}^{n} a^{*}_{kj}y_j\right]} = \left\langle x, \text{\&As}\right.$$

, vagyis $a^{*}_{kj} = \overline{a_{jk}}$, vagyis $\text{\𝒜}^{*} = \begin{pmatrix} a^{*}_{11} & \cdots & a^{*}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{*}_{n1} & \cdots & a^{*}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$.

Négyzetesen integrálható magú integrál operátorok valós vagy komplex függvényeken

Legyen $X := L^2(M)$, $M \subset \text{\ℝ}^n$ mérhető halmaz, $\text{\𝒦} \in L^2(M \times M)$, $(K\phi)(x) := \int_M \text{\𝒦}(x, y)\phi(y)dy$. Tudjuk, hogy $K : L^2(M) \to L^2(M)$ lineáris operátor, node mi K^*? Legyen $\phi, \psi \in L^2(M)$, ekkor $\langle K\phi, \psi\rangle = \int_M (K\phi)(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_M\left[\int_M \text{\𝒦}(x, y)\phi(y)dy\right]\overline{\psi(x)}dx$, ami a Fubini-tétel alkalmazásával

$= \int_M \phi(y)\left[\int_M \text{\𝒦}(x, y)\overline{\psi(x)}dx\right]dy = \int_M \phi(y)\overline{\left[\int_M \overline{\text{\𝒦}(x, y)}\psi(x)dx\right]}dy =$ (felcserélve x-t és y-t) $= \int_M \phi(x)\overline{\left[\int_M \underbrace{\overline{\text{\𝒦}(y, x)}}_{:= \text{\𝒦}^*(x, y)}\psi(y)dy\right]}dx = \int_M \phi(x)\overline{\left[\int_M \text{\𝒦}^*(x, y)\psi(y)dx\right]}dy$. A bevezetett jelöléssel konzekvensen $\left(K^*\psi\right)(x) := \int_M \text{\𝒦}^*(x, y)\psi(y)dy$, így az korábbiakkal együtt: $\langle K\phi, \psi\rangle = \int_M \phi(x)\overline{\left(K^*\psi\right)(x)}dx = \left\langle \phi, K^*\psi\right\rangle$.

Állítás: tetszőleges A lineáris operátor esetén (melyre $D_A \subset X, \overline{D_A} = X$) A^* zárt operátor.

Bizonyítás: azt kellene belátni, hogy ha $y_j \in D_{A^*}$, $(y_j)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow y$ X-ben, továbbá $\left(A^* y_j\right) \longrightarrow z$ X-ben $\Rightarrow$ $y \in D_{A^*}$ és $A^* y = z$. Tudtuk, hogy $\langle Ax, y_j\rangle = \left\langle x, A^* y_j\right\rangle$, $\forall\, x \in D_A$, $\forall\, j$, így $j \longrightarrow \infty$ esetén $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$, $\forall\, x \in D_A$. Ez azt jelenti, hogy $y \in D_{A^*}$ és $z = A^* y$.

Tétel: legyen X Hilbert tér, $A : X \longrightarrow X$ korlátos lineáris operátor és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $\overline{R_{(\lambda I - A)}}^{\perp} = S_{\bar{\lambda}}\left(A^*\right) := \left\{x \in X : \left(\bar{\lambda} I - A^*\right)x = 0\right\}$, ahol R az értékkészletet jelöli.

Bizonyítás: világos, hogy $R_{(\lambda I - A)}$ lineáris altér, ezért $\overline{R_{(\lambda I - A)}}$ zárt altér. Másrészt $S_{\bar{\lambda}}\left(A^*\right)$ is zárt altér. Az $S_{\bar{\lambda}}\left(A^*\right)$ halmaz azért zárt, mert A^* folytonos lineáris operátor.

- Először tfh $y \in \overline{R_{\lambda I - A}}^{\perp}$,ekkor $0 = \left\langle \underbrace{(\lambda I - A)x}_{\in R_{\lambda I - A} \subset \overline{R_{\lambda I - A}}}, y \right\rangle = \left\langle x, (\lambda I - A)^* y\right\rangle$,ez igaz

  $\forall\, x \in X$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(\lambda I - A)^*}_{= \bar{\lambda} I - A^*} y = 0$,vagyis $y \in S_{\bar{\lambda}}\left(A^*\right)$.

- tfh $y \in S_{\bar{\lambda}}\left(A^*\right)$,azaz $\left(\bar{\lambda} I - A^*\right)y = 0$, $\forall\, x \in X$,így

  $\langle(\lambda I - A)x, y\rangle = \left\langle x, (\lambda I - A)^* y\right\rangle = 0$,vagyis $y \perp R_{\lambda I - A}$ minden elemére

  $\Rightarrow$ $y \perp \overline{R_{\lambda I - A}}$ minden elemére.

Megjegyzés: spec eset, mikor $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz, azaz $R_{\lambda I - A} = \overline{R_{\lambda I - A}}$. Ekkor a fenti tételből következik: $(\lambda I - A)x = b$ másodfajú egyenletnek létezik $x \in X$ megoldása pontosan akkor, ha $b \in R_{\lambda I - A} = S_{\bar{\lambda}}\left(A^*\right)^{\perp}$, azaz $\langle b, y\rangle = 0$ a $(\lambda I - A)^* y = 0$ egyenlet $\forall\, y \in X$ megoldására. Később látni fogjuk, hogy ha A ún. kompakt lineáris operátor, akkor $\lambda \neq 0$ esetén az $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz.

Szimmetrikus és önadjungált operátorok

Definíció: legyen X Hilbert tér, $D_A \subset X$ és $\overline{D_A} = X$ és $A : D_A \to X$ lineáris operátor. Ekkor A-t önadjungáltnak nevezzük, ha $A^* = A$ (ekkor ugyanott vannak értelmezve, $D_{A^*} = D_A$).

Definíció: legyen X Hilbert tér, $D_A \subset X$ és $\overline{D_A} = X$ és $A : D_A \to X$ lineáris operátor. Ekkor A-t szimmetrikusnak nevezzük, ha $A \subset A^*$. Tehát minden önadjungált operátor egyúttal szimmetrikus is.

Megjegyzés: ekvivalens definíció: A szimmetrikus, ha $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, $\forall\, x, y \in D_A$.

Példa: ha $X =$ 𝕂^n, akkor $A :$ 𝕂^n $\to$ 𝕂^n -nak megfelel egy 𝒜 mátrix. Tudjuk, hogy A^* mátrixa 𝒜*, melynek elemei $a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$. Ekkor A önadjungált $\Leftrightarrow$ $a^*_{jk} = a_{jk}$, azaz $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$.

Példa: legyen $X := L^2(M)$, $M \subset$ ℝ^n mérhető halmaz, $(K\phi)(x) := \int_M$ 𝒦$(x, y)\phi(y)dy$ korlátos operátor, ahol 𝒦 $\in L^2(M \times M)$. Ekkor $\left(K^*\phi\right)(x) = \int_M$ 𝒦$^*(x, y)\phi(y)dy$, vagyis 𝒦$^*(x, y) = \overline{\text{\𝒦}(y, x)}$. K önadjugnált pontosan akkor, ha 𝒦$(x, y) = \overline{\text{\𝒦}(y, x)}$ majdnem minden $x, y \in M$.

Példa: legyen $X := L^2(0,1)$, $(A\phi)(t) := \phi''(t)$, midőn $t \in [0,1]$, vagyis legyen A a második derivált operátor (ami lineáris)! $D_A := \left\{\phi \in C^2[0,1] : \phi(0) = 0, \phi(1) = 0\right\}$, erre belátható, hogy $\overline{D_A} = L^2(0,1)$.

Állítás: A szimmetrikus operátor (de nem önadjungált). Ennek igazolásához tekintsünk $\phi, \psi \in D_A$ tetszőleges függvényeket, ekkor parciális integrálással:

$$\langle A\phi, \psi\rangle = \int_0^1 (A\phi(t))\psi(t)dt = \int_0^1 \phi''(t)\psi(t)dt = \left[\phi'(t)\psi(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \phi'(t)\psi'(t)dt =$$

$$= -\left[\phi(y)\psi'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \phi(t)\psi''(t)dt = \langle \phi, A\psi\rangle$$

11.16

Állítás: legyen X komplex Hilbert tér! Ha $D_A \subset X$, $A : D_A \to X$ szimmetrikus operátor, akkor $\langle Ax, x\rangle$ értéke valós $\forall\, x \in$ 𝔻$_A$ esetén.

Bizonyítás: mivel A szimmetrikus, ezért $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$, $\forall\, x \in D_A$, másrészt a skaláris szorzat tulajdonságából következően: $\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle$ valós, így $\langle Ax, x\rangle$ is valós.

Megjegyzés: bebizonyítható, hogy ha X komplex Hilbert tér és $\langle Ax, x\rangle$ valós $\forall\, x \in D_A \Rightarrow A$ szimmetrikus.

Tétel: legyen X Hilbert tér (lehet valós is). Ha $D_A \subset X$, $A : D_A \to X$ szimmetrikus operátor, akkor A minden sajátértéke valós és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátelemek ortogonálisak.

Bizonyítás:

- tfh $Ax = \lambda x$ valamely $0 \neq x \in D_A$ elemre, $\lambda \in$ 𝕂. Ekkor

  $\Rightarrow \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\text{valós}} = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \| x \|^2$. A norma értéke valós, így a sajátérték is az, mert szorzatuk valós.
- tfh $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ és $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós sajátértékek. Szorozzuk skalárisan jobbról előbbit x_2 -vel! $\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \lambda_1\langle x_1, x_2\rangle$, illetve $\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle$, vagyis $\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$, így mivel $\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0$.

Tétel: legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ korlátos önadjungált operátor. Ekkor

$$\| A \| = \sup\left\{ \left| \langle Ax, x \rangle \right| : x \in X, \ \| x \| = 1 \right\}.$$

Bizonyítás: az operátor norma definíciója szerint $\| A \| = \sup\left\{ \| Ax \| : x \in X, \ \| x \| = 1 \right\}$.

Ezért egyrészt a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből

$\left| \langle Ax, x \rangle \right| \leq \| Ax \| \cdot \| x \| \leq \| A \| \cdot \| x \|^2 = \| A \|$, ha $\| x \| = 1$. Jelöljük:

$\alpha := \sup\left\{ \left| \langle Ax, x \rangle \right| : x \in X, \ \| x \| = 1 \right\}$. Az előbbiek szerint $\alpha \leq \| A \|$. Belátjuk a fordított egyenlőtlenséget. Tetszőleges $x, y \in X$ elemekre

$$\langle A(x+y), x+y \rangle = \langle Ax + Ay, x+y \rangle = \langle Ax, x \rangle + \underbrace{\langle Ay, x \rangle}_{= \langle y, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, y \rangle}} + \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, y \rangle =$$

$$= \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle + 2\Re\langle Ax, y \rangle$$

Hasonlóképpen: $\langle A(x-y), x-y \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Ay, y \rangle - 2\Re\langle Ax, y \rangle$. A kapott 1. egyenlőségből a 2-at kivonva:

$$4\Re\langle Ax, y \rangle = \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle \leq \left| \langle A(x+y), x+y \rangle \right| + \left| \langle A(x-y), x-y \rangle \right| \leq$$

$$\leq \alpha \| x+y \|^2 + \alpha \| x-y \|^2 = \alpha\left(\| x \|^2 + 2\langle x, y \rangle^2 + \| y \|^2 + \| x \|^2 - 2\langle x, y \rangle^2 + \| y \|^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Re\langle Ax, y \rangle \leq \tfrac{\alpha}{2}\left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right).$$

Tetszőleges $\lambda > 0$ számra:

$$\underbrace{\| Ax \|^2}_{\in \text{\ℝ}_0^+} = \langle Ax, Ax \rangle = \left\langle \underbrace{A(\lambda x)}_{:=f}, \underbrace{Ax/\lambda}_{:=g} \right\rangle = \underbrace{\langle Af, g \rangle}_{\geq 0} = \Re\langle Af, g \rangle \leq \tfrac{\alpha}{2}\left[\| f \|^2 + \| g \|^2 \right] =$$

$= \frac{\alpha}{2}\left[\| \lambda x \|^2 + \| \frac{Ax}{\lambda} \|^2 \right] = \frac{\alpha}{2}\left[\lambda^2 \| x \|^2 + \frac{\| Ax \|^2}{\lambda^2} \right]$. Válasszuk: $\lambda^2 := \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$, ekkor $\lambda > 0$ teljesül (feltéve, hogy $Ax \neq 0$), és

$\| Ax \|^2 \leq \frac{\alpha}{2}\left[\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \| x \|^2 + \frac{\| x \|}{\| Ax \|} \| Ax \|^2 \right] = \frac{\alpha}{2}\left[\| Ax \| \cdot \| x \| + \| x \| \cdot \| Ax \| \right] = \alpha \| Ax \| \cdot \| x \|$. $\| Ax \| = 0$ triviális esetet kivéve osztva $\| Ax \| > 0$ -val: $\| Ax \| \leq \alpha \cdot \| x \|$. Ez igaz $\| Ax \| = 0$ esetén is persze. Tehát $\| A \| \leq \alpha$. Előbb azt kaptuk, hogy $\alpha \leq \| A \|$, így a mostanival együtt: $\| A \| = \alpha$.

<u>Tétel</u> (bizonyítás nélkül): vezessük be $M := \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in X,\ \| x \| = 1\}$ és $m := \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in X,\ \| x \| = 1\}$. (Ekkor a fentiek miatt $[m, M] \subset [-\| A \|, \| A \|]$, és $\max\{ | m |, M\} = \| A \|$). Az A önadjungált korlátos operátor spektruma $\subset [m, M]$, más szóval, ha $\lambda \in$ 𝕂 -ra $\lambda \notin [m, M] \Rightarrow \lambda$ reguláris érték A-ra.

Megjegyzés: azt eddig is tudtuk, hogy $| \lambda | > \| A \|$ esetén λ reguláris érték (ha A korlátos). Azt is tudtuk, hogy ha A szimmetrikus és $\Im\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda$ nem lehet sajátérték.

<u>Definíció</u>: legyen $A : D_A \to X$ lineáris operátor, $D_A \subset X$, $\overline{\text{\𝔻}_A} = X$. Ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall\, x \in D_A$, akkor A-t pozitív operátornak nevezzük (konzekvensen pozitív szemidefinitnek kéne nevezni).

<u>Állítás</u>: ha A pozitív, akkor A minden sajátértéke ≥ 0.

Bizonyítás: $Ax = \lambda x \Rightarrow 0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \| x \|^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$, ha $\| x \|^2 \neq 0$.

Izometrikus és unitér operátorok

<u>Definíció</u>: legyen X Hilbert tér! Az $A : X \to X$ operátort izometrikusnak nevezzük, ha $\| Ax \| = \| x \|$, $\forall\, x \in X$. Ekkor látható, hogy A korlátos és $\| A \| = 1$.

<u>Állítás</u>: ha A izometrikus, akkor távolság és skalárszorzattartó (szögtartó).

Bizonyítás:

- $\| Ax - Ay \| = \| A(x - y) \| = \| x - y \|$.
- Belátjuk a skalárszorzattartást valós X Hilbert tér esetén.
  $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2\langle x, y\rangle + \| y \|^2$, $\| x - y \|^2 = \| x \|^2 - 2\langle x, y\rangle + \| y \|^2$.
  Ezeket egymásból kivonva:
  $\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 = 4\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = \frac{\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2}{4}$. Így

$\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}\left(\| Ax + Ay \|^2 - \| Ax - Ay \|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\| A(x+y) \|^2 - \| A(x-y) \|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\| x+y \|^2 - \| x -\right.$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle.$

- Komplex esetben $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x+iy \|^2 - i \| x-iy \|^2\right]$, így kicsit hosszabb a bizonyítás.

Következemény: ha $A : X \to X$ izometrikus operátor és $(x_1, x_2, \dots)$ ortonormált rendszer, akkor $(Ax_1, Ax_2, \dots)$ is ortonormált rendszer.

Kérdés: ha $(x_1, x_2, \dots)$ teljes ortonormált rendszer, akkor következik-e, hogy $(Ax_1, Ax_2, \dots)$ is teljes ortonormált rendszer? Általában sajnos nem.

Példa: legyen X végtelen dimenziós, szeparábilis Hilbert tér és $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ teljes ortonormált rendszer. Értelmezzük A-t! Egy $x \in X$ elemet fejtsük Fourier-sorba! $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots$, $Ax := \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{k+1} = c_1 x_2 + c_2 x_3 + \dots$. Ez egy jól definiált lineáris operátor. Tudjuk, hogy $\| Ax \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 = \| x \|^2$, tehát A izometrikus. Láthatjuk, hogy így $(Ax_1 = x_2, Ax_2 = x_3, \dots)$ nem teljes. Az is kiolvasható A definíciójából, hogy $R_A =$ ℒ$(x_2, x_3, \dots)$ az X-nek valódi altere, így $R_A \neq X$.

<u>Definíció</u>: $A : X \to X$ izometrikus operátort unitérnek nevezzük, ha $R_A = X$.

<u>Tétel</u>: egy $A : X \to X$ korlátos operátor unitér $\Leftrightarrow \exists A^{-1} = A^*$.

Bizonyítás:

- $\Rightarrow$ irányba: tfh A unitér. Ekkor A korlátossága lévén A^* értelmezve van X-n, továbbá $\| Ax \| = \| x \|$, $\forall x \in X \Rightarrow A$ injektív $\Rightarrow A^{-1}$ is létezik. Belátjuk, hogy $A^* = A^{-1}$. Egyrészt $D_{A^{-1}} = R_A = X$, mivel A unitér. Ekkor $\forall x, y \in X$ elemre

$\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^* Ay\rangle \Rightarrow y = A^* Ay$,

$\forall\, y \in X \Rightarrow A^* A = I \Rightarrow A^* AA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A^* = A^{-1}$

- $\Leftarrow$ irányba: tfh $A^* = A^{-1}$. Ekkor mivel $D_{A^*} = X \Rightarrow R_A = D_{A^{-1}} = X$, továbbá

  $\| Ax \|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^* Ax\rangle = \langle x, Ix\rangle = \| x \|^2$, tehát A izometrikus is.

11.23

Állítás: ha A unitér, akkor teljes ortonormált rendszer képe szintén teljes ortonormált rendszer.

Példák unitér operátorokra:

1. Triviális példa az identitás
2. $X :=$ 𝕂^n. Tudjuk, hogy egy $A :$ 𝕂$^n \to$ 𝕂^n lineáris korlátos operátor megadható egy 𝒜 négyzetes mátrixszal,

   𝒜 $= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$, 𝒜$^* = \left(\overline{\boldsymbol{a}}_1^T, \overline{\boldsymbol{a}}_2^T, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}}_n^T\right)$.

   A leképzés unitér

   $\Leftrightarrow A^* = A^{-1} \Leftrightarrow AA^* = I = A^* A \Leftrightarrow$ 𝒜𝒜* = ℐ = 𝒜*𝒜

   . 𝒜𝒜* elemei: $\boldsymbol{a}_j \overline{\boldsymbol{a}}_k^T = \langle a_j, a_k\rangle_{\text{𝕂}^n} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ ha } j = k \\ 0 \text{ ha } j \neq k \end{cases}$

   A sorvektorok tehát ortonormáltak, belátható az 𝒜*𝒜 = ℐ egyenletből, hogy az oszlopvektorok is. Az ilyen – unitér operátorokat megadó – mátrixokat ortogonális mátrixoknak is nevezzük.
3. Fourier-operátor (Fourier-transzformáció): $X := L^2($ℝ$)$ Hilbert tér! Az ℱ fourier operátort így értelmezzük az $\phi \in L^2($ℝ$) \cap L^1($ℝ$) \subset L^2($ℝ$)$ függvényeken:

   [ℱ$(\phi)](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \phi(y) dy$. Látható, hogy ennek csak akkor van értelme, ha $\phi(y)$ integrálható. Tudjuk, hogy $\left| e^{-ixy}\phi(y) \right| = \left| \phi(y) \right|$, mert

$\left| e^{-ixy} \right| = 1$. $\phi \in L^2(\ℝ)$ esetén

$$[\ℱ(\phi)](x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-ixy}\phi(y)dy \text{ az } L^2(\ℝ) \text{ normával.}$$

Tétel: az $\ℱ : L^2(\ℝ) \to L^2(\ℝ)$ operátor unitér,

$\ℱ^{-1} = \ℱ^{*}$ a következő képlettel adható meg:

$$\left[\ℱ^{-1}(\psi)\right](y) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{ixy}\psi(x)dx, \text{ ahol a limesz } L^2(\ℝ) \text{ norma}$$

szerinti.

Bizonyítás (vázlatos):

1. először értelmezzük $\ℱ$ -et a következő spec. alakú lépcsős függvényeken: $\phi_\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ 0 és } \alpha \text{ között van} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$.
   Egyszerű számolással $\left(\ℱ\phi_\alpha\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-i\alpha x}}{ix}$. Bevezetjük a $\𝒢$ operátort $\phi \in L^2(\ℝ) \cap L(\ℝ)$ függvényekre:
   $(\𝒢\phi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\phi(y)dy$. Hasonlóan adódik:
   $\left(\𝒢\phi_\alpha\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha x} - 1}{x}$. Állítás: tetszőleges ϕ_α, ϕ_β esetén
   $\left\langle \ℱ\phi_\alpha, \ℱ\phi_\beta \right\rangle = \left\langle \phi_\alpha, \phi_\beta \right\rangle$, $\left\langle \𝒢\phi_\alpha, \𝒢\phi_\beta \right\rangle = \left\langle \phi_\alpha, \phi_\beta \right\rangle$ és
   $\left\langle \ℱ\phi_\alpha, \phi_\beta \right\rangle = \left\langle \phi_\alpha, \𝒢\phi_\beta \right\rangle$ is igaz.
2. Kiterjesztjük az állítást lépcsős függvényekre, amik láthatóan ilyen függvények lineárkombinációi.
3. A lépcsős függvények sűrűn vannak $L^2(\ℝ)$ -ben. Hasonló állítást kapok ezen lépcsős függvényekre. $\ℱ$ és $\𝒢$-t a linearitás és korlátosság megtartásával egyértelműen kiterjeszthetjük $L^2(\ℝ)$ -re.
4. $\ℱ$ és $\𝒢$ képlete $L^2(\ℝ)$ -en megadandó.

Megjegyzés: $\ℱ$ operátor $\ℝ^n$ -ben:

$$(\ℱ\phi)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\ℝ^n} e^{-i\langle x, y \rangle}\phi(y)dy, \text{ ha } \phi \in L^2\left(\ℝ^n\right) \cap L^1(\ℝ), \text{ ekkor}$$

$\ℱ$ unitér.

Véges rendű operátorok

<u>Definíció</u>: legyen X Hilbert tér! Egy $A : X \to X$ korlátos operátort véges rendűnek nevezünk, ha R_A véges dimenziós.

Példa: legyenek $\phi_1,\ldots,\phi_m$ lineárisan függetlenek, akárcsak $\psi_1, \psi_2,\ldots,\psi_m$, mind X-beli elemek! Az A operátort így értelmezzük: $A : X \to X$, $A(f) := \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j\rangle\phi_j$. Látható, hogy ez véges rendű. Világos, hogy A operátor lineáris, $R_A =$ ℒ$\left(\phi_1, \phi_2,\ldots,\phi_m\right)$ véges dimenziós. A korlátos is: $\|Af\|_X \le \sum_{j=1}^{m} \|\langle f, \psi_j\rangle\phi_j\| = \sum_{j=1}^{m} \left|\langle f, \psi_j\rangle\right| \cdot \|\phi_j\|$, melyre a Cauchy-Schwarz szerint

$$\le \sum_{j=1}^{m} \|f\|_X \cdot \|\psi_j\|_X \cdot \|\phi_j\|_X = \|f\| \cdot \sum_{j=1}^{m} \|\psi_j\|_X \cdot \|\phi_j\|_X.$$

<u>Állítás</u>: legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ véges rendű operátor. Ekkor $\exists\ \phi_1, \phi_2,\ldots,\phi_m \in X$ lineárisan függetlenek és $\exists\ \psi_1, \psi_2,\ldots,\psi_m \in X$ lineárisan függetlenek a fentiek szerint, és A a fenti alakú.

Bizonyítás: R_A véges, m dimenziós lineáris altér. Legyenek $\phi_1, \phi_2,\ldots,\phi_m$ lineárisan független elemek, ℒ$\left(\phi_1, \phi_2,\ldots,\phi_m\right) = R_A$. Ezek választhatók úgy, hogy ortonormáltak legyenek (a Schmidt eljárással). Ekkor, ha $f \in X$, $Af = \sum_{j=1}^{m} c_j(f)\phi_j$.Ebben a c_j együtthatók egyértelműek, $c_j(f) = \langle Af, \phi_j\rangle$. Látjuk, hogy c_j lineáris funkcionál, továbbá korlátos is, és $\left|c_j(f)\right| = \left|\langle Af, \phi_j\rangle\right| \le \|Af\| \cdot \underbrace{\|\phi_j\|}_{=1} \le \|A\| \cdot \|f\|$. Riesz-tétel segítségével

$$\exists\,!\ \psi_j \in X : c_j(f) = \langle f, \psi_j\rangle \quad \Rightarrow \quad Af = \sum_{j=1}^{m} c_j(f)\phi_j = \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j\rangle\phi_j.$$ Nem nehéz belátni, hogy $\psi_1, \psi_2,\ldots,\psi_m$ is lineárisan függetlenek.

A másodfajú egyenlet véges rendű operátorokra

Legyen X Hilbert tér (véges vagy végtelen dimenziós), $A : X \to X$ véges rendű operátor. Tekintsük az A operátornak a másodfajú egyenletét: $(\lambda I - A)f = b$, ahol $b \in X$ adott és $f \in X$ keresett. Ezt az előbbiek szerint így írhatjuk: $\lambda f - \sum\limits_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j = b$. Belátjuk, hogy $\lambda \neq 0$ esetén ez az egyenlet ekvivalens egy lineáris algebrai egyenletrendszerrel.

Az előző egyenletet jobbról ψ_k -val skalárisan szorozva:

$\lambda \langle f, \psi_k \rangle - \sum\limits_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \langle \phi_j, \psi_k \rangle = \langle b, \psi_k \rangle,\ k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Keressük $\xi_j :\ = \langle f, \psi_j \rangle$ -t, adottak $a_{kj} :\ = \langle \phi_j, \psi_k \rangle,\ \beta_k :\ = \langle b, \psi_k \rangle$. Ezzel a jelöléssel: $\lambda \xi_k - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{kj} \xi_j = \beta_k,\ k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Ez egy lineáris egyenletrendszer ξ_k együtthatókra. $\xi :\ = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix},\ \beta :\ = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$,

𝒜 : $= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$, így ($\lambda$ℐ $-$ 𝒜)$\xi = \beta$. Ha f kielégíti a másodfajú egyenletet $\Rightarrow \xi$ kielégíti a kapott lineáris algebrai egyenletrendszert $\lambda = 0$ esetén is!

<u>Állítás</u>: legyen $\lambda \neq 0$ és tfh ξ kielégíti a lineáris algebrai egyenletrendszert! Ekkor $f :\ = \frac{1}{\lambda} b + \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_j \phi_j$ kielégíti a véges rendű operátorra vonatkozó másodafajú egyenletet.

Bizonyítás: behelyettesítünk a másodfajú egyenletbe, s kihasználjuk, hogy ξ kielégíti a lineáris algebrai egyenletrendszert.

Tétel: egy $f \in X$ elem kielégíti a véges rendű opertárra vonatkozó másodfajú egyenletet $\lambda \neq 0$ esetén $\Leftrightarrow$ $\xi_j = \langle f, \psi_j \rangle$ képlettel értelmezett koordinátákból álló ξ kielégíti a fenti lineáris algebrai egyenletrendszert. Ennek alapján a véges rendű operátorokra vonatkozó másodfajú egyenlet megoldhatóságának elmélete következik a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldhatóságának elméletéből. Két eset lehetséges:

1. ha $\lambda \neq 0$ szám az 𝒜 mátrixnak nem sajátértéke $\Leftrightarrow$ det | λℐ − 𝒜 | $\neq 0$, ekkor (λℐ − 𝒜)$\xi = \beta$ egyenletben $\forall\, \beta \in$ 𝕂$^n \exists\, !\, \xi$ megoldás $\Rightarrow \exists\, !\, f$ megoldás a $(\lambda I - A)f = b$ egyenletre. Nem nehéz belátni, hogy f folytonosan függ b-től. Ekkor $\lambda \neq 0$ reguláris érték A-ra.
2. ha $\lambda \neq 0$ az 𝒜 mátrixnak sajátértéke $\Rightarrow \lambda$ az A sajátéréke, s a kétféle rang egyenlő. $\lambda = 0$ végtelen rangú sajátértéke A-nak (ha X végtelen dimenziós).

11.30

Állítás: ha X végtelen dimenziós vektortér, akkor $\lambda = 0$ végtelen rangú sajátértéke az operátornak. $A\phi := \sum_{j=1}^{m} \langle \phi, \psi_j \rangle \phi_j$. $\lambda = 0$ sajátérték azt jelenti, hogy $A\phi = 0\phi = 0$ biztosan teljesül. Mivel ϕ_j -k lineárisan függetlenek, $\langle \phi, \psi_j \rangle = 0$, $\forall\, j \in \{1,2,\ldots,m\} \Leftrightarrow \phi \perp$ ℒ$(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$.

Összefoglalva: legyen X végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert tér! Ekkor egy A véges rendű operátor spektruma csak sajátértékekből áll, mégpedig a 0-tól különböző (véges sok) sajátérték véges rangú (ezek megegyeznek az 𝒜 mátrix sajátértékeivel, s ranguk is megegyezik), a 0 pedig végtelen rangú sajátérték. Minden más λ reguláris érték.

Példa véges rangú operátorokra (elfajult magú integrálegyenletek)

$X := L^2(M)$, ahol M mérhető halmaz. 𝒦$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\psi_j(y)$, ahol $\phi_j, \psi_j \in L^2(M) \Rightarrow$ 𝒦 $\in L^2(M \times M)$.

$$(K\phi)(x) = \int_M \text{\𝒦}(x, y)\phi(y)dy = \int_M \left[\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\psi_j(y)\right]\phi(y)dy = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\int_M \psi_j(y)\phi(y)dy.$$

Röviden: $K\phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j\langle\phi, \psi_j\rangle$.

Az előbbiek alapján egy elfajult magú (elsőfajú) integrálegyenlet megoldása kiszámolható egy lineáirs algebrai egyenletrendszer megoldásával.

Kompakt (teljesen folytonos) operátorok

Definíció: egy $M \subset Y$ halmazt feltételesen (vagy relatíve) sorozatkompaktnak nevezünk, ha lezárása sorozatkompakt.

Megjegyzés: M feltételesen sorozatkompakt, ha tetszőleges M-beli sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. $\text{\ℝ}^n$ -ben a feltételesen sorozatkompakt halmazok a korlátos halmazok.

Definíció: legyenek X, Y Banach terek! Egy $A : X \to Y$ lineáris operátort teljesen folytonosnak, avagy kompaktnak nevezünk, ha X tetszőleges korlátos halmazát feltételesen (avagy relatíve) sorozatkompakt halmazba képezi.

Megjegyzés: Ekkor A korlátos is, továbbá két kompakt operátor összege és számszorosa is kompakt.

Állítás: egy $A : X \to Y$ operátor kompakt $\Leftrightarrow \forall\ (x_k)_{k \in \text{\ℕ}},\ x_k \in X$ korlátos sorozatra $(Ax_k)_{k \in \text{\ℕ}}$ -ból kiválasztható konvergens részsorozat.

Állítás: legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ véges rendű operátor. Ekkor A kompakt.

Tétel: legyenek X, Y Banach terek, $A_j \in L(X,\ Y)$ operátorok kompaktak, és

$\exists\ A \in L(X,\ Y) :\ \lim\limits_{j \to \infty} A_j = A \ \Rightarrow\ A$ is kompakt operátor.

Bizonyítás: legyen $(x_k)_{k \in \text{\ℕ}}$ egy X-beli korlátos sorozat. Bizonyítani akarjuk, hogy $(Ax_k)_{k \in \text{\ℕ}}$ -nek van konvergens részsorozata Y-ban. Tudjuk, hogy $A \in L(X,\ Y)$. Mivel A_1 kompakt, ezért az $(A_1 x_k)_{k \in \text{\ℕ}}$ sorozatból kiválasztható Y-ban konvergens részsorozat, legyen ez $(A_1 x_{k1})_{k \in \text{\ℕ}}$! $(A_2 x_{k1})_{k \in \text{\ℕ}}$ -ből kiválasztható konvergens részsorozat, legyen ez $(A_2 x_{k2})_{k \in \text{\ℕ}}$. $(A_3 x_{k2})_{k \in \text{\ℕ}}$ -ből megint kiválasztható…

$$
\begin{array}{ccccccl}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & \\
A_1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_1 x_{k1})_{k \in \text{\ℕ}} \text{ konvergens} \\
A_2 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_2 x_{k2})_{k \in \text{\ℕ}} \text{ konvergens} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots \\
A_j & x_{1j} & x_{2j} & \cdots & x_{kj} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_j x_{kj})_{k \in \text{\ℕ}} \text{ konvergens} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots
\end{array}
$$

Tekintsük az $(x_{kk})_{k \in \text{\ℕ}}$ átlós sorozatot. Belátjuk, hogy $(Ax_{kk})_{k \in \text{\ℕ}}$ konvergens Y-ban. $(x_{kk})_{k \in \text{\ℕ}}$ az eredeti $(x_k)_{k \in \text{\ℕ}}$ sorozatnak olyan részsorozata, amely bármelyik sorban levő részsorozatnak a részsorozata, bizonyos indextől kezdve.

$$\| Ax_{kk} - Ax_{mm} \|_Y = \| [Ax_{kk} - A_j x_{kk}] + [A_j x_{kk} - A_j x_{mm}] + [A_j x_{mm} - Ax_{mm}] \|_Y \le$$

$$\le \| (A - A_j) x_{kk} \|_Y + \| A_j x_{kk} - A_j x_{mm} \|_Y + \| (A_j - A) x_{mm} \|_Y \le$$

$$\le \| A - A_j \|_{L(X,\ Y)} \| x_{kk} \|_X + \| A_j x_{kk} - A_j x_{mm} \|_Y + \| A_j - A \|_{L(X,\ Y)} \| x_{mm} \|_X.$$

$(x_{kk})_{k \in \text{\ℕ}}$ korlátos sorozat, ehhez $\exists\ c > 0 :\ \| x_{kk} \| \le c$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim\limits_{j \to \infty} \| A_j - A \| = 0$, ezért $\exists\ j_0 : j \ge j_0 \Rightarrow \| A_j - A \| \le \varepsilon$. Válasszuk pl: $j = j_0$. Mivel $(A_{j_0} x_{kk})_{k \in \text{\ℕ}}$ konvergens, ezért $\exists\ k_0 : k,\ l \ge k_0 \Rightarrow \| A_{j_0} x_{kk} - A_{j_0} x_{ll} \| \le \varepsilon$. Tehát $k,\ l \ge k_0$ esetén $\| Ax_{kk} - Ax_{ll} \|_Y \le c\varepsilon + \varepsilon + c\varepsilon = (2c + 1)\varepsilon \Rightarrow (Ax_{kk})$ Cauchy sorozat.

Következmény: kompakt operátorok alteret képeznek $L(X,\ Y)$ -ban.

Tétel: (bizonyítás nélkül) legyen X szeparábilis Hilbert tér. Ha $A : X \to X$ kompakt operátor, akkor $\exists\, A_j : X \to X$ véges rendű operátorok, hogy $\lim\limits_{j \to \infty} \| A_j - A \|_{L(X,\,X)} = 0$.

Összefoglalva: ha X szeparábilis Hilbert tér, akkor az $A : X \to X$ korlátos operátor kompakt $\Leftrightarrow$ előáll véges rendű operátorok sorozatának norma szerinti limeszeként.

Példa: legyen $X = L^2(M)$ Hilbert tér, $K : L^2(M) \to L^2(M)$ négyzetesen integrálható magú integráloperátor, $(K\phi)(x) := \int_M$𝒦$(x, y)\phi(y)dy$. Ez a K operátor kompakt. Ennek igazolásának alapgondolata: tudjuk, hogy $L^2(M)$ szeparábilis Hilbert tér (végtelen dimenziós). Legyenek ebben teljes ortonormált rendszerek $\psi_1, \psi_2, \ldots$ illetve $\phi_1, \phi_2, \ldots$.

Ekkor 𝒦$(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j,\,k \le m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y) \right)$,

𝒦$_N(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{N} \sum\limits_{j,\,k \le m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y)$, $\lim\limits_{N \to \infty} \|$ 𝒦$_N -$ 𝒦 $\|_{L^2(M \times M)} = 0$.

𝒦$_N$ -nek véges rendű operátorok felelnek meg. $\| K_N - K \|_{L\left(L^2(M),\, L^2(M)\right)} \to 0$, ha $N \to \infty$.

Másodfajú egyenlet kompakt operátorokra

Legyen X szeparábilis Hilbert tér, $A : X \to X$ kompakt operátor. Tekintsük a $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenletet, melyben $\lambda \neq 0$ rögzített. Tudjuk, hogy A kompakt operátor tetszőleges előírt pontossággal megközelíthető egy B véges rendű operátorral.

$\exists\, A_0 : X \to X$ véges rendű operátor, hogy $\| A - A_0 \| < |\lambda|$.

$B_0 := A - A_0 \Leftrightarrow A = A_0 + B_0$, ahol A_0 véges rendű, és $\| B_0 \| < |\lambda|$. Tehát a másodfajú egyenlet így írható: $\left[\lambda I - (A_0 + B_0)\right] f = b \Leftrightarrow (\lambda I - B_0)f = b + A_0 f$.

$|\lambda| > \| B_0 \| \Rightarrow |\lambda| > B_0$ korlátos operátor spektrálsugara $\Rightarrow \lambda$ reguláris érték B_0 operátorra nézve $\Rightarrow$ a legutóbbi egyenlet ekvivalens:

$f = (\lambda I - B_0)^{-1}(b + A_0 f) = \underbrace{(\lambda I - B_0)^{-1} b}_{\text{adott}} + (\lambda I - B_0)^{-1} A_0 f$. λ -val beszorozva, átrendezve:

$\lambda f - \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1} A_0}_{:=B\,:=B_\lambda} f = \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1} b}_{:=g}$. A bevezetett jelöléssel $(\lambda I - B_\lambda) f = g$. Észrevétel: B_λ véges rendű operátor, mert A_0 véges rendű operátor. Legyen $\delta > 0$ rögtített szám, és válasszuk A_0-t úgy, hogy $\| A - A_0 \| < \delta$ legyen. Ekkor az előbbi gondolatmenet érvényes $\forall\, \lambda$ -ra, A_0 nem függ λ -tól, ha $\lambda \geq \delta$ (de δ -tól igen). A_0 véges rendű operátor $\lambda \geq \delta$ esetén, és $A_0 f = \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j$ alakban írható.

$Bf = B_\lambda f = \lambda(\lambda I - B_0)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j$. A másodfajú egyenlet:

$\lambda f - \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j = g = g_\lambda$.

12.07

Tehát kaptuk, hogy $\lambda f - \sum_{j=1}^{m} \lambda \langle f, \psi_j \rangle (\lambda I - B_0)^{-1} \phi_j = g = g_\lambda$. Ez megfelel egy lineáris algebrai egyenletrendszernek: λℐ$\xi -$ ℬ$_\lambda \xi = \beta_\lambda$. Ekkor det(λℐ $-$ ℬ$_\lambda$) $= 0$ egyenlet gyökei a sajátértékek. A mátrix (ℬ$_\lambda$) és az operátor (B_λ) sajátértékei azonosak az eredeti operátor (A) sajátértékeivel, és rangjuk is azonos. Belátható, hogy a mátrix elemei a λ változónak holomorf függvényei! Így a determináns is holomorf függvénye λ -nak. Tudjuk, hogy egy holomorf függvény gyökei nem torlódhatnak egy véges pontban, hacsak nem az azonosan 0 függvény. Mivel $\lambda < \| A \|$, ezért csak véges sok gyök van. Tehát tetszőleges rögzített δ esetén A operátornak véges sok δ -nál nagyobb abszolút értékű sajátértéke van, s ezek véges rangúak.

Tétel: ha A kompakt operátor, akkor A-nak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke van, a 0-tól különböző sajátértékek véges rangúak, s a sajátértékek csak a 0-ban torlódhatnak. (Gondoljunk csak a $\delta := 1/k$, $k \in$ ℕ esetre!)

Tétel (biz. nélkül): minden $\lambda \neq 0$, ami nem sajátérték, az reguláris érték A (kompakt operátorra) nézve.

Következmény: ha $\lambda \neq 0$ nem sajátérték, $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenletnek $\forall\, b$ -re létezik egyetlen f megoldás, és ez folytonosan függ b-től.

Mi a helyzet, ha λ sajátérték?

Emlékeztető: tetszőleges korlátos lineáris operátor esetén

$\overline{R_{\lambda I - A}}^{\perp} = S_{\bar{\lambda}}(A^*) \Leftrightarrow \overline{R_{\lambda I - A}} = S_{\bar{\lambda}}(A^*)^{\perp}$. Ha $R_{\lambda I - A}$ zárt altér, akkor $R_{\lambda I - A} = \overline{R_{\lambda I - A}} = S_{\bar{\lambda}}(A^*)^{\perp}$.

Tétel: ha A kompakt operátor, akkor $\lambda \neq 0$ esetén $R_{\lambda I - A}$ zárt altér.

Bizonyítás: látható, hogy $R_{\lambda I - A}$ lineáris altér. Azt kell bizonyítani, hogy $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz. Legyen tetszőleges $\psi_j \in R_{\lambda I - A}$ és $\exists \lim \psi_j = \psi$, ekkor $\psi \in R_{\lambda I - A}$? Mivel $\psi_j \in R_{\lambda I - A} \Rightarrow \exists\, \phi_j \in X : (\lambda I - A)\phi_j = \psi_j$. Jelöljük: $S_\lambda(A) := \{\phi \in X : (\lambda I - A) = 0\}$. Ekkor $S_\lambda(A)$ zárt lineáris altér (A folytonos). A Riesz tétel következtében $X := S_\lambda(A) \oplus S_\lambda(A)^{\perp} \Leftrightarrow \forall\, x \in X \exists\, !\, x_1, x_2 : x_1 \in S_\lambda(A), x_2 \in S_\lambda(A)^{\perp}, x = x_1 + x_2$. Ennek megfelelően $X \ni \phi_j = f_j + g_j$, ahol $f_j \in S_\lambda(A)$. $g_j \in S_\lambda(A)^{\perp}$,

$\psi_j = (\lambda I - A)\phi_j = \underbrace{(\lambda I - A)f_j}_{=0} + (\lambda I - A)g_j \Rightarrow (\lambda I - A)g_j = \psi_j$. Kis állítás: $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ korlátos sorozat X-ben.

Bizonyítás (a tétel bizonyításán belül): indirekt feltesszük, hogy $\exists\, (g_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $\lim\limits_{k \to \infty} \| g_{j_k} \|_X = \infty$. Legyen $h_{j_k} = \frac{g_{j_k}}{\| g_{j_k} \|_X}$, ekkor $\| h_{j_k} \|_X = 1$.

$(\lambda I - A)g_{j_k} = \psi_{j_k}$ egyenletet osztva $\| g_{j_k} \|$ -val: $(\lambda I - A)h_{j_k} = \frac{\psi_{j_k}}{\| g_{j_k} \|_X} \to 0_X$, ugyanis

ψ_j konvergens $\Rightarrow$ korlátos. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\lambda h_{j_k} - Ah_{j_k}\right) = 0_X$. $\left(h_{j_k}\right)$ korlátos sorozat (mert $\| h_{j_k} \| = 1$), A kompakt operátor, ezért $\exists \left(\tilde{h}_{j_k}\right)$ részsorozat, amelyre $\left(A\tilde{h}_{j_k}\right)$ konvergens $\Leftrightarrow$ $\left(\lambda\tilde{h}_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ is konvergens. $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow$ $\left(\tilde{h}_{j_k}\right)$ konvergens, $\left(\tilde{h}_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \to h_0 \Rightarrow (\lambda I - A)\tilde{h}_{j_k} \to 0 \Rightarrow (\lambda I - A)h_0 = 0$. Ebből következik, hogy $h_0 \in S_\lambda(A)$. Másrészt $h_{j_k} = \frac{g_{jk}}{\| g_{jk} \|}$, $g_{j_k} \in S_\lambda(A)^\perp \Rightarrow h_{j_k} \in S_\lambda(A)^\perp \Rightarrow$ limeszben $h_0 \in S_\lambda(A)^\perp$. Másrészt $h_0 \in S_\lambda(A)$, így $h_0 = 0$, de ez meg nem lehet, mert $\| \tilde{h}_{j_k} \| = 1 \Rightarrow \| h_0 \| = 1$ kéne lennie.

Tehát $(\lambda I - A)g_j = \psi_j$, $\lim\left(\psi_j\right) = \psi$, $\| g_j \|_X$ korlátos. Mivel A kompakt és g_j korlátos $\Rightarrow$ $\exists\, \tilde{g}_{j_k}$ részsorozat, hogy $A\tilde{g}_{j_k}$ konvergens. ψ_{j_k} is konvergens $\Rightarrow$ λg_{j_k} is konvergens, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \left(g_{j_k}\right)$ konvergens. $g_{j_k} \to g_0$ X-ben, $g_0 \in X$. $(\lambda I - A)g_0 = \psi \Rightarrow \psi \in R_{\lambda I - A}$.

Tétel (bizonyítás nélkül): legyen $A : X \to X$ kompakt operátor. Ekkor A^* is kompakt. Továbbá $\lambda \neq 0$ az A-nak sajátértéke $\Leftrightarrow$ $\bar{\lambda}$ sajátértéke A^*-nak, és ekkor a rangok egyenlők.

Összefoglalás (Fredholm alternatíva): legyen $A : X \to X$ kompakt operátor, $\lambda \neq 0$ tetszőleges szám s $(\lambda I - A)f = b$ másodfajú egyenlet. Ekkor két eset lehetséges:

1. ha $\lambda \neq 0$ az A-nak nem sajátértéke (legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok, véges rangú, 0-ban torlódó sajátértékek), akkor a másodfajú egyenletnek $\forall\, b \in X$ esetén $\exists\,!\, f$ megoldása és ez folytonosan függ b-től ($(\lambda I - A)^{-1}$ folytonos)
2. ha $\lambda \neq 0$ sajátérték, akkor a másodfajú egyenletnek a megoldása nem egyértelmű, a homogén egyenletnek véges sok lineárisan független megoldása van. A megoldás pontosan létezik, ha $b \perp S_{\bar{\lambda}}\left(A^*\right)$ minden elemére. Ez annyi db ortogonalitási feltétel, amennyi a λ sajátérték rangja.

Önadjungált kompakt operátorok

Tétel: legyen X szeparábilis Hilbert tér, $A : X \to X$ kompakt és önadjungált operátor, $A \neq 0$. Ekkor $\exists\ \lambda_1$ sajátérték: $|\lambda_1| = \|A\| = \sup\left\{ |\langle Ax, x\rangle| : \|x\|_X = 1\right\}$.

Megjegyzés: ha λ_1 az A operátor olyan sajátértéke, amelyre $|\lambda_1| = \|A\|$ és x_1 olyan sajátelem, hogy $\|x_1\| = 1$, azaz $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $\|x_1\| = 1$, akkor $|\langle Ax_1, x_1\rangle| = |\langle\lambda_1 x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1\langle x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1| = \|A\| = \sup\left\{ |\langle Ax, x\rangle : \|x\|_X = 1| \right\}$. Más szóval, az $x \mapsto |\langle Ax, x\rangle|$, ahol $\|x\| = 1$, ez a függvény felveszi a suprémumot az $x = x_1$ sajátelemen, a maximum (ami most a suprémum is) értéke $= |\lambda_1|$. Fordítva: ha x^* olyan, hogy $\|x^*\| = 1$, és arra $|\langle Ax, x\rangle|$ maximális, akkor ez sajátelem és a maximum egyenlő a sajátérték abszolút értékével. Ugyanis $\left|\left\langle Ax^*, x^*\right\rangle\right| \leq \|Ax^*\| \cdot \|x^*\| \leq \|A\| \cdot \|x^*\|^2 = \|A\|$, a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor $Ax^* \parallel x^*$, azaz $Ax^* = const \cdot x^*$.

További sajátértékek, sajátelemek keresése.

Legyen $X_1 := \left\{x \in X : x \perp x_1\right\}$, ahol $A_1 := A|_{X_1}$, a leszűkítés, és $Ax_1 = \lambda_1 x_1$.

Állítás: X_1 invariáns altér, azaz $x \in X_1 \Rightarrow Ax \in X_1$.

Bizonyítás: tfh $x \in X_1$! $\langle Ax, x_1\rangle = \langle x, Ax_1\rangle = \langle x, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1\langle x, x_1\rangle = 0$, tehát $Ax \in X_1$. Az előbbi tételt alkalmazhatjuk az A_1 operátorra X_1 Hilbert térben. Ekkor $\exists\ \lambda_2$ sajátérték, hogy $|\lambda_2| = \|A_1\| = \sup\left\{\langle A_1 x, x\rangle : \|x\|_X = 1, x \in X_1\right\}$. A maximum helye x_2 sajátelem helyén van, $\lambda_2 x_2 = Ax_2$, $x_2 \perp x_1$. Így egymás után megkaphatjuk az A operátor sajátértékeit és sajátelemeit, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Ha A véges rendű, akkor az eljárás véges sok lépés után befejeződik.

Tétel: legyenek az A önadjungált operátor sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ és sajátelemei $x_1, x_2, \ldots$ A sajátelemekről feltehető, hogy ortonormált rendszert alkotnak. Ekkor $\forall\, x \in X$ elemre $Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$. Az (x_k) ortonormált rendszert kibővítve a $\lambda = 0$ -hoz tartozó sajátelemek ortonormált rendszerével, akkor ezek egy teljes ortonormált rendszert alkotnak.