Tehát előző órán láttuk, hogy u_k és v_k -ra az alábbi feltételek adódtak: $u_k^2 - v_k^2 = 1$ és $\left[e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})\right]u_k v_k + nv(\mathbf{k})\left(u_k^2 + v_k^2\right) = 0$. Utóbbi abból jött, hogy azt akartuk, hogy $\alpha_{\mathbf{k}}$ és $\alpha_{\mathbf{k}}^+$ bevezetésével a Hamilton operátor diagonális legyen, azaz a $H = U + H_{11} + H_{20}$ egyenletből a H_{20} tagra $H_{20} = 0$ fennálljon.

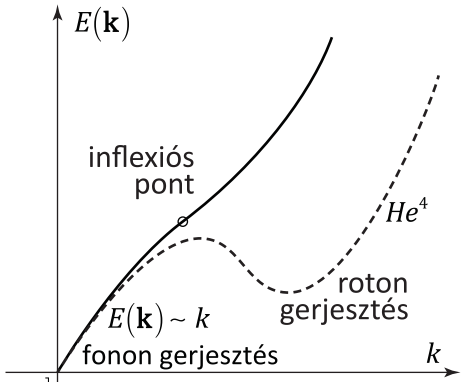
$u_k = \mathrm{ch}\,\chi_k$ és $v_k = \mathrm{sh}\,\chi_k$ választással $u_k^2 - v_k^2 = 1$ egyenletet azonnal kielégítjük. A sh és ch függvények azonosságait felhasználva vegyük észre, hogy $2u_k v_k = \mathrm{sh}(2\chi_k)$ és $u_k^2 + v_k^2 = \mathrm{ch}(2\chi_k)$!

Felhasználva, hogy H -t diagonálisnak szeretnénk, $\mathrm{th}(2\chi_k) = -\dfrac{nv(\mathbf{k})}{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}$ adódik. Ebből ???hogyan???

$\mathrm{sh}(2\chi_k) = -\dfrac{nv(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})}$ és $\mathrm{ch}(2\chi_k) = \dfrac{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})}$ adódik. Ebből már kifejezhető $E(\mathbf{k})$:

$E(\mathbf{k}) = \sqrt{\left[e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})\right]^2 + n^2 v^2(\mathbf{k})} = E_{\mathbf{k}}$, továbbá $u_k^2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} + 1\right]$, $u_k^2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e_{\mathbf{k}} + nv(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} - 1\right]$.

Ábrázolhatjuk az $E(\mathbf{k})$ függvényt. Kicsi $\mathbf{k}$ esetén $E_{\mathbf{k}} \approx \sqrt{2nv(0)e_{\mathbf{k}}} \sim k$, mivel $e_{\mathbf{k}} \sim \mathbf{k}^2$, tehát lineárisként indul a függvény. Ezeket a gerjesztéseket nevezhetjük fononoknak. A közelítésben feltettük, hogy a kölcsönhatás gyenge, így az erős kölcsönhatásokat nem tudja leírni, ami pl. a rotonokat okozza (pl He^4 esetében). Állítás, hogy a gyenge kölcsönhatású közelítés az inflexiós pontot jól leírja.



A kondenzátumon kívüli atomok száma:

$$N' = \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\langle BEC|a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}|BEC\rangle = \sum_{\mathbf{k}\neq 0}\left[v_k^2 + \langle BEC|u_k^2\alpha_{\mathbf{k}}^+\alpha_{\mathbf{k}} + \underbrace{v_k^2\alpha_{\mathbf{k}}^+\alpha_{\mathbf{k}}^+}_{\text{0 járulék}} + \ldots|BEC\rangle\right] = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} v_k^2 = V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}v_k^2$$

. ???Miért 0??? Ahol az összegre vonatkozó közelítést (határátmenetet) alkalmaztuk.

A szög szerinti integrálást elvégezve $N' = V\dfrac{4\pi}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_0^\infty dk \cdot k^2 \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{e_k + nv(0)}{E_k}\right]$. Használjuk a $\dfrac{e_k}{nv(0)} = z^2$ helyettesítést, ekkor $z = k\xi_B$ és $\xi_B = \dfrac{\hbar}{\sqrt{2mnv(0)}}$, így

$N' = \dfrac{V}{4\pi^2}\dfrac{1}{\xi_B^3}\displaystyle\int_0^\infty dz \cdot z^2\left[-1 + \frac{z^2+1}{\left(z^4 + 2z^2\right)^{1/2}}\right] = \frac{8N}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3} + \ldots$, ahol a szórási hosszt a $v(0) = \dfrac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ egyenlet definiálja. Ez a potenciál az $\mathbf{r}$ helyen: $v(\mathbf{r}) = \dfrac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta^{(3)}(\mathbf{r})$. Láthatjuk, hogy $a = 0$ esetén – ami a kölcsönhatás nélküli gáznak felel meg – nincs a kondenzátumon kívül részecske, azaz $N' = 0$.

$$N_0 = N - N' = N\left[1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\cdot\underbrace{\sqrt{na^3}}_{\text{D.lan param, }\ll 1} + \ldots\right]$$

Kondenzált Bose rendszerek véges hőmérsékleten

Perturbációszámítás, nem ideális gáz vizsgálata

A Hamilton operátor: $H=\sum_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}}+\frac{1}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3) a_{\mathbf{k}_1}^{+} a_{\mathbf{k}_2}^{+} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}$, ahol $v(\mathbf{k})=4\pi\hbar^2 a/m$.

$K=H-\mu N$.

$T<T_c$ esetén előírjuk, hogy $\langle a_0\rangle=\sqrt{N_0}$. Ez persze csalás, de nem baj. Milyen szimmetria sérül ezáltal? Nézzük az $a_{\mathbf{k}} \mapsto a_{\mathbf{k}} e^{i\Theta}$ és a $a_{\mathbf{k}}^{+} \mapsto a_{\mathbf{k}}^{+} e^{-i\Theta}$ transzformációt! Ez a globális ???a globális itt jelent valamit??? $U(1)$ szimmetria (ha a transzformációt elvégezhetjük a mérhető paraméterek változása nélkül). A megadott előírás ezt sérti. Goldstone tétele szerint pedig sérülő folytonos szimmetria gap nélküli gerjesztéseket eredményez.

Vezessük be a $b_{\mathbf{k}}=a_{\mathbf{k}}-\sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}$ és a $b_{\mathbf{k}}^{+}=a_{\mathbf{k}}^{+}-\sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}$ jelöléseket! Most írjuk be ezt a Hamilton operátorba! Vigyázat, hosszú lesz!

$$\sum_{\mathbf{k}}(e_k-\mu) a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}}=\sum_{\mathbf{k}}(e_k-\mu)\left(b_{\mathbf{k}}^{+}+\sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}\right)\left(b_{\mathbf{k}}+\sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}\right)=$$
$$=\sum_{\mathbf{k}}(e_k-\mu)\left[b_{\mathbf{k}}^{+} b_{\mathbf{k}}+N_0\left(b_{\mathbf{k}}^{+}+b_{\mathbf{k}}\right)\delta_{\mathbf{k},0}+N_0\delta_{\mathbf{k},0}\right]=\underbrace{\sum_{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}}-\mu) b_{\mathbf{k}}^{+} b_{\mathbf{k}}}_{K_0}-\underbrace{\mu\sqrt{N}\left(b_0+b_0^{+}\right)}_{K_1'}-\underbrace{\mu N_0}_{K_0'}$$

A kölcsönhatási rész: $\frac{v(0)}{2V} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} a_{\mathbf{k}_1}^{+} a_{\mathbf{k}_2}^{+} a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4}=K_{I,4}+K_{I,3}+K_{I,1}+K_{I,0}$, ahol

$$K_{I,4}=\frac{1}{2V}\cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} b_{\mathbf{k}_1}^{+} b_{\mathbf{k}_2}^{+} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3),$$

$$K_{I,3}=\frac{\sqrt{N_0}v(0)}{2V}\cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} \left(b_{\mathbf{k}_1}^{+} b_{\mathbf{k}_2}^{+} b_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_4,0}+b_{\mathbf{k}_1}^{+} b_{\mathbf{k}_2}^{+} b_{\mathbf{k}_4}\delta_{\mathbf{k}_3,0}+b_{\mathbf{k}_1}^{+} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4}\delta_{\mathbf{k}_2,0}+b_{\mathbf{k}_2}^{+} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4}\delta_{\mathbf{k}_1,0}\right),$$

$$K_{I,2}=\frac{N_0}{2V}\cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} \begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}_1}^{+} b_{\mathbf{k}_2}^{+}\delta_{\mathbf{k}_3,0}\delta_{\mathbf{k}_4,0}+b_{\mathbf{k}_1}^{+}\delta_{\mathbf{k}_2,0} b_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_4,0}+\delta_{\mathbf{k}_1,0} b_{\mathbf{k}_2}^{+} b_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_4,0}+ \\ +\delta_{\mathbf{k}_1,0} b_{\mathbf{k}_2}^{+}\delta_{\mathbf{k}_3,0} b_{\mathbf{k}_4}+b_{\mathbf{k}_1}^{+}\delta_{\mathbf{k}_2,0}\delta_{\mathbf{k}_3,0} b_{\mathbf{k}_4}+\delta_{\mathbf{k}_1,0}\delta_{\mathbf{k}_2,0} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} \end{pmatrix} v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3),$$

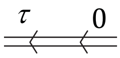
$K_{I,1}=\frac{N_0^{3/2}}{2V} v(0)\left(2b_0^{+}+2b_0\right)$, valamint

$K_{I,0}=\frac{N_0^2}{2V} v(0)$.

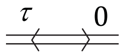
Így tömör írásmódban $U=K_0+\sum_{i=0}^{4} K_{I,i}+K_0'+K_1'$.

Green-függvény

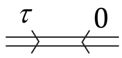
$G_{1,1}(\mathbf{k},\tau):=-\left\langle T_\tau\left[b_{\mathbf{k}}(\tau)\cdot b_{\mathbf{k}}^{+}(0)\right]\right\rangle$, ahol az operátor τ függése ezt jelenti: $O(\tau)=e^{\frac{K\tau}{\hbar}} O_S e^{-\frac{K\tau}{\hbar}}$, várható értéke $\langle O\rangle=Sp(\rho_G O)$, ahol $\rho_G=e^{\frac{-\beta K}{Z_G}}$???Nem őrzi meg a részecskeszámot, anomális várható értékek jelennek meg; ez mit jelent??? Soktestprobéma I órán ezt a Green-függvényt használtuk. Ábrája



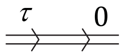
$G_{1,2}(\mathbf{k},\tau) = -\left\langle T_\tau\left[b_{-\mathbf{k}}(\tau) b_{\mathbf{k}}(0)\right]\right\rangle$,



$G_{2,1}(\mathbf{k},\tau) = -\left\langle T_\tau\left[b^+_{-\mathbf{k}}(\tau) b^+_{\mathbf{k}}(0)\right]\right\rangle$,



$G_{2,2}(\mathbf{k},\tau) = -\left\langle T_\tau\left[b^+_{-\mathbf{k}}(\tau) b_{-\mathbf{k}}(0)\right]\right\rangle$,



T_τ időrendező operátor: a nagyobb argumentumú kerül „balra”, azonos argumentum esetén pedig a keresztes kerül „balra”. Vegyük észre, hogy $G_{2,1}(\mathbf{k},\tau) = G_{1,2}(-\mathbf{k},-\tau)$ és $G_{1,1}(\mathbf{k},\tau) = G_{2,2}(-\mathbf{k},\tau)$???ezek miért igazak???. Ezeket a függvényeket mátrixba foglalhatjuk:

$$G(\mathbf{k},\tau) = \begin{pmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} \\ G_{2,1} & G_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Általános összefüggés, hogy $G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},i\omega_n) = \int_0^{\beta\hbar} G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\tau) e^{i\omega_n\tau} d\tau$, ahol $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta\hbar}$, mivel valamennyi $G_{\alpha,\beta}$ periodikus $\beta\hbar$-ban, illetve $G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k},\tau) = \frac{1}{\beta\hbar}\sum_n G(\mathbf{k},i\omega_n) e^{-i\omega_n\tau}$.

A szabad Green-függvények: hhh

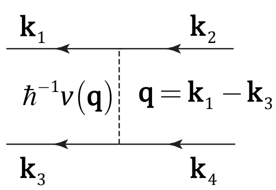
$$G^{(0)}_{1,1}(\mathbf{k},i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k - \mu)}$$

$$G^{0}_{2,2}(\mathbf{k},i\omega_n) = \frac{1}{-i\omega_n - \hbar^{-1}(e_k - \mu)}$$

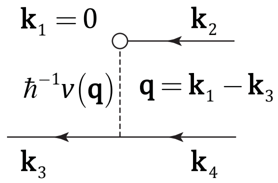
$$G^{0}_{1,2}(\mathbf{k},i\omega_n) = 0 = G^{0}_{2,1}(\mathbf{k},i\omega_n).$$

Milyen Feynman-digramok fordulhatnak elő? A perturbáció most K_1' és $K_{I,i}$, $i \in \{1,\dots,4\}$ (Soktestprobléma II-ben csak a $K_{I,4}$ volt).

$K_{I,4} = \frac{1}{2V} \cdot \sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} b^+_{\mathbf{k}_1} b^+_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4} v(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)$, ehhez tartozik

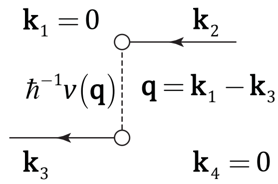


Az egyik tagja a $K_{I,3}$ -nak: $\frac{\sqrt{N_0}v(0)}{2V}\cdot\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} b^+_{\mathbf{k}_1}b^+_{\mathbf{k}_2}b_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_4,0}$ ehhez tartozik:

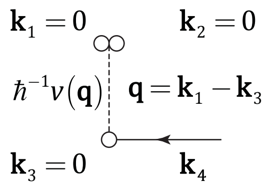


ahol kör egy $\sqrt{N_0}$ szorzót ad csak.

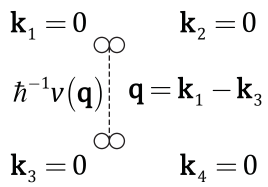
Az egyik tagja a $K_{I,2}$ -nek: $\frac{N_0}{2V}\cdot\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4}} \delta_{\mathbf{k}_1,0}b^+_{\mathbf{k}_2}b_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_4,0}v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)$ hez tartozik:



$K_{I,1}$ eltüntető részéhez tartozik a $\frac{N_0^{3/2}}{2V}v(0)b_0$, melynek ábrája:



$K_{I,0} = \frac{N_0^2}{2V}v(0)$ -hoz tartozik:



K_1' egyik tagja (az eltüntető operátorral) $(-\mu)\sqrt{N_0}b_0$: 

ahol a háromszög a $-\mu$ -vel való szorzást jelöli

K_1' másik tagja (a keltő operátorral): $(-\mu)\sqrt{N_0}b_0^+$ 

K_0':