Analízis II

Simon László előadása alapján

ELTE, 2009. április

Ajánlott irodalom: Szőkefalvi Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

Előadó e-mail címe: simonl a ludens.elte.hu-nál

Ez a jegyzet **nem** szakirodalom s nem garantált, hogy az órai anyagot teljesen lefedi, az előadásokra bejárni ajánlott.

Ha a jegyzetben helyesírási, tartalmi vagy formai hibát találsz, kérlek jelezd az előadónak vagy a tuzesdaniel@gmail.com e-mail címen!

02. 12.

Binomiális sor

Emlékeztető: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ ahol $n \in \mathbb{N}$ (binomiális tétel alapján).

Legyen $f(x) := (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > -1$! Írjuk fel ennek az f függvénynek a 0 körüli Taylor-sorát!

$f(x) = (1+x)^\alpha$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$f'(0) = \alpha$
$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(j)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)(1+x)^{\alpha-j}$	$f^{(j)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)$

Ekkor f függvény Taylor sora 0 körül: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!} x^j$.

Jelölés: tetszőleges valós α esetén $\binom{\alpha}{j} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}$, ezt használva $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j$. Most belátjuk, hogy a kapott sor konvergencia sugara 1. Ehhez célszerű használni a hányados kritériumot.

$$a_j := \binom{\alpha}{j} x^j, \text{ ekkor } \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j)}{(j+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}} \frac{x^{j+1}}{x^j} = \frac{\alpha-j}{j+1} x \Rightarrow \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \underbrace{\left|\frac{\alpha-j}{j+1}\right|}_{\to 1 \text{ ha } j\to\infty} \cdot |x| \text{, ezért } |x|<1$$

esetén az abszolút értékekből álló sorra valóban teljesül a hányados kritérium, így a sor konvergens, mert abszolút konvergens is.

Állítás: $|x| < 1$ esetén a Taylor sor előállítja f-et, vagyis $(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j$.

Bizonyítás: legyen $f(x) := (1+x)^\alpha$, illetve $g(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j$, így $f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$, sőt, mivel g hatványsorról előbb láttuk be, hogy konvergens $|x| < 1$ esetén, így hatványsorról lévén szó, a sor és a tagonkénti deriválással nyert sor egyenletesen konvergens minden 1-nél kisebb sugarú intervallumban, tehát a deriválást és az összegzést felcserélhetjük, vagyis $g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x)$. Látjuk, hogy $f(0) = 1$ és $g(0) = 1$, ebből további átalakításokkal és tételek felhasználásával következik, hogy $f(x) = g(x)$:
$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{1+x} = \frac{d}{dx}[\ln(1+x)^\alpha]$, melyből következik, hogy $\ln g(x) = \ln(1+x)^\alpha + c$. c, mivel az egyenlőség x esetén is fenn kell állnia. Ezekből már következik, hogy g.

Alkalmazás:

- $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1/2}{j} x^j$
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-1/2}{j} \left(-x^2\right)^j$
- $g(x) = \ln(1+x)$ sorfejtése 0 körül: $g'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j$. Mivel a hatványsor mindig egyenletesen

  konvergens a konvergencia-intervallumnál kisebb intervallumon, ezért integrálhajuk minkét oldalt 0-tól ξ -ig, vagyis $|\xi| < 1$ esetén
  $$\int_0^\xi g'(x)dx = \int_0^\xi \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j dx = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int_0^\xi x^j dx \Rightarrow \ln(1+\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\xi^{j+1}}{j+1}.$$

Taylor formula többváltozós függvényekre

Legyen X normált tér $f: X \to \mathbb{R}$ és k+1-szer differenciálható az $a \in X$ egy ρ sugarú környezetében. Ekkor egy $h \in X$, $\|h\| < \rho$ esetén szeretnénk kifejezni az a+h helyen a függvényértéket az a helyen felvettel: $f(a+h) = f(a) + \ldots$. Mi kerül ... helyére? Legyen $\delta > 0, t \in (-\delta, 1+\delta)$, $g: \mathbb{R} \to X, g(t) = a + t \cdot h$, $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \phi(t) = (f \circ g)(t) = f(a+th)$ és ϕ függvény k+1-szer differenciálható $(-\delta, \delta+1)$ intervallumon elég kis $\delta > 0$ esetén. Megjegyezzük, hogy ekkor $g'(t) \in \underbrace{L(\mathbb{R}, X)}_{t \mapsto th \text{ leképezés}} \Leftrightarrow h \in X$, sőt, ezt az azonosítást elhagyva: $g'(t) := h$. Alkalmazzuk a Taylor formulát ϕ-re:

$\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} 1 + \frac{\phi''(0)}{2!} 1^2 + \ldots + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{\phi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} 1^{k+1}$, ahol $0 < \tau < 1$. Ennek első tagjáról tudjuk, hogy $\phi(0) = f(a)$. Mi a többi? $\phi(t) = f(a+th)$, illetve $\phi = f \circ g$. Ekkor a deriváltja:

$\phi'(t) = \underbrace{f'(g(t))}_{\in L(X,\mathbb{R})} \underbrace{g'(t)}_{\in L(\mathbb{R},X)} \in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g'(t) = h$, így $\phi'(t) = f'(g(t))g'(t) = \underbrace{f'(a+th)}_{\in L(X,\mathbb{R})} \underbrace{h}_{\in X} \in \mathbb{R}$, ezért

$\phi'(0) = f'(a)h \in \mathbb{R}$. Továbbá $\phi''(t) = \underbrace{\left[f''(a+th)h\right]}_{\in L(X,\mathbb{R})} h = f''(a+th)(h,h)$ így $\phi''(0) = f''(a)\underbrace{(h,h)}_{\in X \times X} \in \mathbb{R}$. Tovább folytatva: $\phi^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+th)(h,h,\ldots,h) \in \mathbb{R}$, ezért $\phi^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)(h,h,\ldots,h)$.

$\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} 1 + \frac{\phi''(0)}{2!} 1^2 + \ldots + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{\phi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)} 1^{k+1}$, így

$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)(h,h)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)(h,h,\ldots,h)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a+\tau h)(h,h,\ldots,h)}{(k+1)}$, ahol $0 < \tau < 1$. Speciális eset, mikor $k = 1$, $X = \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ekkor

$$f'(a) = ((\partial_1 f)(a), (\partial_2 f)(a), \ldots, (\partial_n f)(a))$$

$$f''(a) = \begin{pmatrix} \left(\partial_1^2 f\right)(a) & (\partial_2 \partial_1 f)(a) & \ldots & (\partial_n \partial_1 f)(a) \\ (\partial_1 \partial_2 f)(a) & \left(\partial_2^2 f\right)(a) & \ldots & (\partial_n \partial_2 f)(a) \end{pmatrix}$$

$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} \sum_{j=1}^{n} \left(\partial_j f\right)(a) h_j + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\partial_j \partial_k f\right)(a+\tau h) h_j h_k$, ahol $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Megjegyzés: legyenek X, Y normált terek! Bebizonyítható, hogy ha $f: X \to Y$ és k-szor differenciálható $B_\delta(a)$-n, akkor a Taylor formula $\|h\| < \delta$ esetén: $f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)(h,h,\ldots,h)}{k!} + R_k$, ahol R_k a maradéktag, amelyre $\|R_k\| \le \frac{\|h\|^k}{k!} \cdot \sup_{\xi \in B_\delta(a)} \left\|f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(a)\right\|$.

Többváltozós függvények lokális szélsőértéke

<u>**Definíció**</u>: legyen X normált tér, $f: X \to \mathbb{R}$, és értelmezve van az $a \in X$ pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban lokális minimuma van, ha $\exists \delta > 0: x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \ge f(a)$. Ha $x \in B_\delta(a) \backslash \{a\} \Rightarrow f(x) > f(a)$,

akkor szigorú lokális minimumról beszélünk.

Tétel: tfh f differenciálható az a-ban és f-nek a-ban lokális szélsőértéke van (minimuma vagy maximuma), $\Rightarrow f'(a) = 0$ (ahol $f'(a) \in L(X, \mathbb{R})$).

Bizonyítás: legyen $h \in X$ tetszőleges rögzített pont. Belátjuk, hogy $\underbrace{f'(a)}_{\in L(X,\mathbb{R})} h = 0 \in \mathbb{R}$. Mivel f differenciálható a-ban, ezért elég kicsi t esetén $f(a+th) - f(a) = f'(a)(t \cdot h) + \eta(t \cdot h)$, ahol $\lim\limits_{t\to 0} \frac{|\eta(th)|}{\|th\|} = 0 = \lim\limits_{t\to 0} \frac{|\eta(th)|}{|t| \cdot \|h\|}$, ahol $\|h\| \neq 0$, ezért $\lim\limits_{t\to 0} \frac{|\eta(th)|}{|t|} = 0$. Ha $f'(a)h \neq 0$ lenne, pl. $f'(a)h > 0$ (h rögzített), akkor $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = f'(a)h > 0$. Ekkor $\exists \delta_1 > 0, 0 < t < \delta_1 \Rightarrow f(a+th) - f(a) > 0$, illetve $\exists \delta_2 > 0, -\delta_2 < t < 0 \Rightarrow f(a+th) - f(a) < 0$, ez utóbbi kettő pedig ellentmondás, merthogy szélsőérték esetén $f(a+th) - f(a)$ előjele ugyanaz kell, hogy legyen.

Definíció: legyen X normált tér, $g : X \times X \to \mathbb{R}$, (folytonos) bilineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy

- g pozitív definit, ha $g(h,h) > 0, \forall h \in X \backslash \{0\}$,
- negatív definit, ha $g(h,h) < 0, \forall h \in X \backslash \{0\}$,
- pozitív szemidefinit, ha $g(h,h) \geq 0, \forall h \in X$,
- negatív szemidefinit, ha $g(h,h) \leq 0, \forall h \in X$,
- szigorúan pozitív definit, ha $\exists c > 0$ állandó, hogy $g(h,h) \geq c\|h\|^2$, $\forall h \in X$.

Megjegyzés: ha $X = \mathbb{R}^n$, ekkor abból, hogy g pozitív definit, következik, hogy szigorúan pozitív definit. Végtelen dimenziós vektorterekben általában ez nem igaz. Előbbi igazolása: legyen $X = \mathbb{R}^n$, ekkor tekintsük az $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ halmazt, ekkor ez sorozatkompakt (mert korlátos és zárt). Legyen $G(h) := g(h,h)$! Ekkor G függvény folytonos. $h \in S_1$, így $G : S_1 \to \mathbb{R}$ folytonos, S_1 sorozatkompakt, ezért G felveszi az infinimumát (minimumát), vagyis $\exists h_0 \in S_1 : G(h) \geq G(h_0), h \in S_1$. Mivel g pozitív definit, $c := G(h_0) > 0$, ahol $h_0 \neq 0$. Ekkor $x \in X \backslash \{0\}$ esetén $g(x,x) = g\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|, \frac{x}{\|x\|}\|x\|\right) = \|x\|^2 \underbrace{g\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)}_{\geq c > 0} \geq c\|x\|^2$.

Megjegyzés: $X = \mathbb{R}^n$ esetén egy $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezés egy négyzetes mátrixszal adható meg, $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Ha $a_{jk} = a_{kj}$ – vagyis ha a mátrix szimmetrikus –, akkor ha A összes sajátértéke nagyobb mint 0, akkor A pozitív definit, sőt, szigorúan pozitív definit.

Tétel: tfh f kétszer differenciálható az $a \in X$ egy környezetében (X normált tér) és $f'' \in C(a)$.

1. Ha f-nek a-ban lokális minimuma van $\Rightarrow f'(a) = 0$, és $f''(a)$ pozitív szemidefinit.
2. Ha $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ szigorú pozitív definit, akkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

Bizonyítás: alkalmazzuk a Taylor formulát az $f: X \to \mathbb{R}$ függvényre a 2. deriváltig. Legyen $h \in X, t \in \mathbb{R}, |t|$ elég kicsi, ekkor $f(a+th) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} th + \frac{f''(a+\tau th)}{2!}(th, th)$, ahol τ alkalmasan választott, valamilyen $0 < \tau < 1$ szám.

1. tfh f-nek a-ban lokális minimuma van. Tudjuk, hogy ekkor $f'(a) = 0$, így
   $0 \le \frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} = \frac{f''(a+\tau th)}{2!}(h,h) = \frac{f''(a)}{2!}(h,h) + \underbrace{\left[\frac{f''(a+\tau th)}{2!} - \frac{f''(a)}{2!}\right]}_{\text{bizbe: } \to 0 \text{ ha } t \to 0}(h,h) \to \frac{f''(a)}{2!}(h,h)$, ugyanis ekkor
   $t \to 0$ esetén $a + \tau th \to a$, $f'' \in C(a)$, és
   $\left|\frac{1}{2}\left[f''(a+\tau th) - f''(a)\right](h,h)\right| \le \frac{1}{2} \underbrace{\left\|f''(a+\tau th) - f''(a)\right\|}_{\to 0 \text{ ha } t \to 0 \text{ mert } f'' \in C(a)} \cdot \underbrace{\|h,h\|}_{\text{rögz}} \Rightarrow \frac{f''(a)}{2!}(h,h) \ge 0$.
2. felhasználva, hogy $f'(a) = 0$, 02. 19.
   $\frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} = \frac{1}{2} f''(a+\tau th)(h,h) = \frac{1}{2} f''(a)(h,h) + \frac{1}{2}\left[f'' a + \tau th - f''(x)\right](h,h)$. Legyen
   $h \in X, \|h\| := c_1 > 0$! Egyrészt $f''(a)(h,h) \ge c_2 \|h\|^2 = c_1{}^2 c_2 > 0, \forall h \in X$ mert f'' szigorú pozitív definit, másrészt $\left|\left[f''(a+\tau th) - f''(a)\right](h,h)\right| \le \underbrace{\left\|f''(a+\tau th) - f''(a)\right\|}_{\to 0 \text{ ha } t \to 0, \text{ mert } f'' \in C(a)} \cdot \underbrace{\|h\|^2}_{\text{rögz}}$, ami tart 0-hoz ha t tart 0-hoz, így $\frac{f(a+th)-f(a)}{t^2} = \frac{1}{2} f''(a)(h,h) + \frac{1}{2}\left[f''(a+\tau th) - f''(a)\right](h,h) > 0$, ha t elég kicsi.

Implicit függvénytétel

Probléma: adott egy $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény. Egy $\Phi(x,y) = 0$ egyenlet milyen feltételek mellet határoz meg egy $y = f(x)$ függvényt? Tekintsük a következő példákat!

- $\Phi(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$, ennek egy kör pontjai felelnek meg. Plusz feltétel lehet, hogy a megoldás valamelyik pont egy környezetében legyen, de még ekkor is lehet 2 megoldás ((1,0) és (−1,0) környezetében).
- $\Phi(x,y) := x^2 + y^2 + 1 = 0$, ennek viszont nincs megoldása.
- $\Phi(x,y) := y^2 - x^2 = 0$, ennek két egyenes tesz eleget. Ha még le is szűkítjük az értelmezési tartományt úgy, hogy csak az egyik egyenes egy része legyen megoldás, akkor ugyan lokálisan függvényünk lesz (vagyis egyértelmű lesz y), de ilyet nem tudnánk csinálni az origó környezetében, mert ott metszik

egymást az egyenesek. Ez azzal függ össze, hogy $\partial_2 \Phi(x,y) = 2y \Rightarrow \partial_2 \Phi(0,0) = 0$.

Tétel: legyen $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-be képező függvény, amely értelmezve van és folytonos valamilyen $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ pont egy környezetében és $\Phi(a,b) = 0$, továbbá $\exists\, \partial_{n+1} \Phi$ és folytonos is (a,b) egy környezetében, és $\partial_{n+1} \Phi(a,b) \neq 0$. Ekkor létezik az a pontnak olyan $B_r(a)$, az b pontnak olyan $(b-d, b+d)$ környezete és $f: B_r(a) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy
$\{(x,y): \Phi(x,y) = 0, x \in B_r(a), y \in (b-d, b+d)\} = \{(x, f(x)): x \in B_r(a)\}$.

Bizonyítás:

- tekintsük az $n = 1$ esetet (könnyebb szemléletesen látni)! Pl tfh $\partial_{n+1} \Phi(a,b) > 0$! Mivel $\partial_{n+1} \Phi$ folytonos $\Rightarrow (a,b)$-nek van olyan környezete, ahol $\partial_{n+1} \Phi(x,y) > 0 \Rightarrow \forall x \in B_{r_1}(a)$ rögzített x esetén $y \mapsto \Phi(x,y)$ szigorú monoton nő. $\Phi(a,b) = 0, y \mapsto \Phi(x,y)$ szigorúan monoton nő
 $\Rightarrow \Phi(a, b-d) < 0 < \Phi(a, b+d)$. Mivel Φ folytonos $(a, b+d)$ és $(a, b-d)$ pontok között
 $\Rightarrow \exists r: 0 < r \leq r_1$, hogy $x \in B_r(a)$ esetén és $\Phi(x, b-d) < 0 < \Phi(x, b+d)$.
 Alkalmazzuk a Bolzano-tételt rögzített $x \in B_r(a)$ esetén $y \mapsto \Phi(x,y)$ függvényre! A tétel szerint ekkor $\exists f(x)$, hogy $b - d < f(x) < b + d$ esetén $\Phi(x, f(x)) = 0$. Mivel $y \mapsto \Phi(x,y)$ szigorú monoton nő, $f(x)$ egyértelmű.
- Be kell látnunk még, hogy f folytonos $B_r(a)$-n. Legyen $x_0 \in B_r(a)$, és (a,b) helyett tekintsük az $(x_0, f(x_0))$ pontot! Ekkor $b - d < f(x_0) < b + d$. Azt szeretnénk belátni, hogy f folytonos x_0-ban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám! Az előző állítás miatt $\exists \varepsilon': 0 < \varepsilon' < \varepsilon$, hogy ε' számot elég kicsire választva $b - d \leq f(x_0) - \varepsilon' < f(x_0) + \varepsilon' \leq b + d$. Ez utóbbit másképp felírva: $[f(x_0) - \varepsilon', f(x_0) + \varepsilon'] \subset [b-d, b+d]$. $\Phi(x_0, f(x_0)) = 0$, ezért mivel Φ folytonos, $\exists \rho: x \in B_\rho(x_0)$ esetén $\Phi(x, f(x_0) - \varepsilon') < 0 < \Phi(x, f(x_0) + \varepsilon')$. Ekkor a Bolzano tétel segítségével
 $\exists!\, y: \Phi(x,y) = 0, f(x_0) - \varepsilon' < y < f(x_0) + \varepsilon'$, node $y = f(x)$ és $\varepsilon' < \varepsilon$ miatt, minden $x \in B_\rho(x_0)$ pontra $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, tehát f folytonos x_0 -ban.

A tétel általánosítása $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ függvényekre:

Tétel: tfh $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\Phi(a,b) = 0$, értelmezve van (a,b) pont egy környezetében és itt folytonos is, továbbá $y \mapsto \Phi(x,y)$ folytonosan differenciálható (a,b) valamilyen környezetében. Továbbá legyen

$$\Phi := (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m).\ \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \Phi_1 & \partial_{y_2} \Phi_1 & \cdots & \partial_{y_m} \Phi_1 \\ \partial_{y_1} \Phi_2 & \partial_{y_2} \Phi_2 & \cdots & \partial_{y_m} \Phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} \Phi_m & \partial_{y_2} \Phi_m & \cdots & \partial_{y_m} \Phi_m \end{pmatrix} =: F$$

, és tegyük fel, hogy $\det(F(a,b)) \neq 0$. Ekkor $\exists (a,b)$-nek olyan $B_r(a) \times B_\rho(b)$ környezete, és $f: B_r(a) \to B_\rho(b) \subset \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, hogy

$\{(x, y) \in B_r(a) \times B_\rho(b): \Phi(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)): x \in B_r(a)\}$.

Tétel: tfh teljesülnek az előbbi tétel feltételei és $x \mapsto \Phi(x, y)$ függvény is folytonosan differenciálható az a környezetében, akkor $f: B_r(a) \to \mathbb{R}^m$ differenciálható.

Megjegyzés: ha tudjuk, hogy f differencálható, akkor f deriváltja kiszámolható. $\Phi(x, f(x)) = 0$-t $x \in B_r(a)$ szerint deriválva $0 = \partial_x \Phi(x, f(x)) + \partial_y \Phi(x, f(x)) f'(x) \Rightarrow f'(x) = -\left[\partial_y \Phi(x, f(x))\right]^{-1} [\partial_x \Phi(x, f(x))]$.

Inverz függvény tétel

Tétel: legyen $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mely értelmezve van és folytonosan differenciálható a $b \in \mathbb{R}^n$ egy környezetében, továbbá az alábbi mátrix determinánsa nem 0 a b-ben. $g := (g_1, g_2, ..., g_n)$, $g' = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \partial_2 g_1 & \cdots & \partial_n g_1 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 & \cdots & \partial_n g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n & \partial_2 g_n & \cdots & \partial_n g_n \end{pmatrix}$.

Legyen $a := g(b)$. Ekkor $\exists B_r(a), B_r(b), g^{-1}: B_r(b) \to B_r(a)$, folytonosan differenciálható függvény, hogy $\{(x, y) \in B_r(a) \times B_r(b): x = g(y)\} = \left\{\left(x, g^{-1}(x)\right): x \in B_r(a)\right\}$.

Megjegyzés: a tétel szerint a g függvénynek létezik lokális inverze, azaz g függvényt a b egy elég kis környezetére leszűkítve, létezik az inverz.

Bizonyítás: legyen $\Phi(x, y) := x - g(y)$, ekkor $\Phi(a, b) = a - g(b) = 0$, $\partial_y \Phi(x, y) = -g'(y)$ és $\det\left(g'(b)\right) \neq 0$. Az előbbi képlet szerint $\left[g^{-1}\right]'(x) = \left[g'\left(g^{-1}(x)\right)\right]^{-1}$ (mátrix inverz).

Feltételes szélsőérték

Definíció: legyen $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$-be képező függvény, $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ és $\Phi(a, b) := 0$. Azt mondjuk, hogy az F függvénynek a $\Phi(x, y) := 0$ feltétel mellett lokális minimuma van az (a, b) pontban, ha $\exists \delta > 0: x \in B_\delta(a), y \in B_\delta(b), \Phi(x, y) = 0$ esetén $F(x, y) \geq F(a, b)$.

Kérdés: milyen szükséges feltétel adható a feltételes szélsőérték létezéséhez? Az implicit függvénytétel segítségével a feltételes szélsőérték visszavezethető egy szokásos szélsőértékre (feltétel nélkülire). Feltesszük, hogy implicit függvény differenciálhatóságáról szóló tétel feltételei teljesülnek. A tétel feltételei: Φ folytonosan differenciálható (a, b) egy környezetében és $\det\left(\partial_y \Phi(a, b)\right) \neq 0$. Tfh (a, b)-n F-nek feltételes szélsőértéke van.

Tudjuk (az implicit függvénytételből), hogy ekkor

$\exists \delta_1 > 0: \{(x,y) \in B_{\delta_1}(a) \times B_{\delta_1}(b): \Phi(x,y) = 0\} = \{(x, f(x)) \in B_{\delta_1}(a)\}$, ahol $f: B_{\delta_1}(a) \to B_{\delta_1}(b)$ folytonosan differenciálható, $\delta_2 := \min\{\delta, \delta_1\}$ jelöléssel $x \in B_{\delta_2}(a)$ esetén $F(x, f(x)) \geq F(a, f(a))$, tehát az $x \mapsto F(x, f(x))$ függvénynek a-ben lokális minimuma van.

$g(x) = F(x, f(x))$, $g'(x) = \partial_x F(x, f(x)) + \partial_y F(x, f(x)) \cdot f'(x)$, a lokális minimumból következik, hogy $0 = g'(a) = \partial_x F(a,b) + \partial_y F(a,b) f'(a)$ $f'(a) = -\left[\partial_y \Phi(a,b)\right]^{-1} \cdot [\partial_x \Phi(a,b)]$, ezt az előzőbe visszahelyettesítve $g'(a) = \partial_x F(a,b) \underbrace{- \partial_y F(a,b)\left[\partial_y \Phi(a,b)\right]^{-1}}_{:=\lambda} [\partial_x \Phi(a,b)] = 0$. Jelölés:

$G(x,y) = F(x,y) + \lambda \Phi(x,y)$

Észrevétel: $0 = g'(a) = \partial_x F(a,b) + \lambda \partial_x \Phi(a,b) = \partial_x G(a,b)$, másrészt $\lambda = -\left[\partial_y F(a,b)\right]\left[\partial_y \Phi(a,b)\right]^{-1}$ 02. 26. így írható: $\partial_y G(a,b) = \lambda\left[\partial_y \Phi(a,b)\right] + \left[\partial_y F(a,b)\right] = 0$. Ezen kívül tudjuk, hogy $\Phi(a,b) = 0$.

Tétel: tfh F és Φ folytonosan differenciálható (a,b) egy környezetében, továbbá $\Phi(a,b) = 0$, $\partial_y \Phi(a,b)$ mátrix determinánsa nem 0. Ha $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek (a,b) -ben lokális szélsőértéke van a $\Phi(x,y) = 0$ feltétel mellett, akkor a $G(x,y) = F(x,y) + \lambda \Phi(x,y)$ függvényre $0 = \partial_x G(a,b) = \partial_x F(a,b) + \lambda \partial_x \Phi(a,b)$ és $0 = \partial_y G(a,b) = \partial_y F(a,b) + \lambda \partial_y \Phi(a,b)$. Itt $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Megjegyzés: a fentiek szerint az $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ismeretlenekre $n + 2m$ egyenletet nyertünk. Ennek egyértelmű megoldására van esély.

Vonalintegrál

Rövid összefoglalás a Reimann-integrálról.

Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény! Tekintsük $[a,b]$ egy véges felosztását!

$a := x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n := b$. Legyen $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, ekkor definiáljuk:

$t(\tau) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ (ahol τ jelöli a felosztást). Az f függvényt Reimann szerint integrálhatónak nevezzük, ha $t(\tau) \to I$, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk. Ez azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > \exists \delta > 0$, hogy ha a felosztás δ-nál finomabb (minden részintervallum $< \delta$), akkor $|t(\tau) - I| < \varepsilon$. Cél: röviden bizonyítjuk, hogy ha f folytonos, akkor f Reimann integrálható.

Felső összeg: $S(\tau) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$, ahol $M_k := \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$, alsó összeg: $s(\tau) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$, ahol $m_k := \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$.

Állítás: bármilyen τ felosztáshoz tartozó $s(\tau)$ alsó összeg $\leq$ bármely τ' felosztáshoz tartozó $S(\tau')$ felső összeg.

Következmény: a felső összegek halmaza alulról korlátos, az alsó összegek halmaza felülről korlátos. Ebből következik, hogy $\exists \inf_{\tau} S(\tau) \geq \sup_{\tau} s(\tau)$.

Megjegyzés: $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \Rightarrow s(\tau) \leq t(\tau) \leq S(\tau)$.

Definíció: oszcillációs összeg: $O(\tau) := S(\tau) - s(\tau)$.

Tétel: tfh $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Ekkor az $O(\tau)$ oszcillációs összeg tart 0-hoz, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, azaz $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogy ha a felosztást δ-nál finomabb, akkor $0 \leq O(\tau) \leq \varepsilon$.

Bizonyítás: az egyenletes folytonosság tétele (Heine) szerint ($[a, b]$ korlátos és zárt, tehát sorozatkompakt) f egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$. Ezért δ-nál finomabb felosztást választva $O(\tau) = S(\tau) - s(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\leq \varepsilon}(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon \cdot (b - a)$.

Következmény: ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Reimann integrálható, azaz $t(\tau) \to I$ ha a felosztást finomítjuk. Ugyanis a tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy ha a felosztást δ-nál finomabb, akkor $0 \leq S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon \Rightarrow \inf_{t} S(\tau) = \sup_{\tau} s(\tau) := I$. Ekkor $s(\tau) \leq t(\tau) \leq S(\tau)$, $|t(\tau) - I| < \varepsilon$, ha τ felosztás δ-nál finomabb.

Megjegyzés: $S(\tau)$ és $s(\tau)$ is tart I-hez.

Folytonosan differenciálható út, illetve görbe, ívhossz kiszámítása

Legyen egy $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható! Ekkor azt mondjuk, hogy ϕ egy folytonosan differenciálható L utat határoz meg az $\mathbb{R}^n$ térben. $t \in [\alpha, \beta]$, $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$, a mozgó pont a t időben a $\phi(t)$ helyen van.

Állítás: a fönt értelmezett út hossza: $\int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\phi}(t)| dt.$

Bizonyítás: a legyen $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_m = \beta$! Az ívhossz definíció szerint a felosztáshoz tartozó törött vonal hosszának limesze, miközben a felosztást finomítjuk. A törött vonal hossza $\sum_{k=1}^{m} |\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\phi_j(t_k) - \phi_j(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right]^2} (t_k - t_{k-1})$, mely a

Lagrange-féle középértéktétellel $= \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\dot{\phi}_j(\tau_{jk})\right)^2} (t_k - t_{k-1})$, ahol $t_{k-1} \le \tau_{jk} \le t_k$. Jó lenne, ha e helyett

ilyen alakú összeg lenne: $\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \dot{\phi}_j(\tau_k)^2} (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} |\dot{\phi}(\tau_k)| (t_k - t_{k-1})$, ez nem mást, mint $t \mapsto |\dot{\phi}(t)|$

integrál közelítő összege. Mivel ez a függvény folytonos, az integrál közelítő összeg tart az integrálhoz. Belátható, hogy a kétféle összeg különbsége tart 0-hoz, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk.

Definíció: legyen $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, ϕ injektív, $\dot{\phi}(t) \neq 0, \forall t \in [\alpha, \beta]$. Ekkor azt mondjuk, hogy ϕ egyszerű, folytonosan differenciálható L utat határoz meg. Ekkor $\Gamma := R_\phi \subset \mathbb{R}^n$ halmazt egyszerű, folytonosan differenciálható görbének nevezzük.

Tétel: ha ϕ és $\tilde{\phi}$ olyan $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ függvények, melyek egyszerű folytonosan differenciálható utat határoznak meg és $R_\phi = R_{\tilde{\phi}}$, továbbá $\phi(\alpha) = \tilde{\phi}(\alpha)$ és $\phi(\beta) = \tilde{\phi}(\beta)$, akkor $\int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\phi}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\tilde{\phi}}(\tilde{t})| d\tilde{t}$. Ezt nevezzük $\Gamma = R_\phi$ egyszerű folytonosan differenciálható görbe ívhosszának.

Megjegyzés: ha $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, akkor egyszerű zárt folytonosan differenciálható útról (illetve görbéről) beszélünk.

Definíció: legyen $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható! Ez meghatároz egy L folytonosan differenciálható utat. Legyen $\Gamma := R_\phi$ és $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Értelmezni akarjuk az f függvénynek az x_k változó szerinti vonalintegrálját. Tekintsük a következő közelítő összeget: $\sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k)) \left[\phi_j(t_k) - \phi_j(t_{k-1})\right]$,

ahol $\tau \in [t_{k-1}, t_k] \subset [\alpha, \beta]$. Ha ez tart valamely I véges számhoz, miközben a felosztást finomítjuk, akkor ezt nevezzük f-nek x_j szerinti vonalintegráljának, s így jelöljük: $\int_L f(x)dx_j$. Számoljuk ki a limeszt!

$$\sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k))\left[\phi_j(t_k)-\phi_j(t_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k))\frac{\phi_j(t_k)-\phi_j(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}(t_k-t_{k-1}),$$ mely a Lagrange-féle

középértéktétel segítségével $= \sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k))\dot{\phi}_j(\tau_k^*)(t_k-t_{k-1})$, ahol $t_{k-1} < \tau_k^* < t$. Ha e helyett a következő

összeg lenne, az nagyon jó volna: $\sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k))\dot{\phi}_j(\tau_k)(t_k-t_{k-1}) \to \underbrace{\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\dot{\phi}_j(t)dt}_{\int_\alpha^\beta (f\circ\phi)\cdot\dot{\phi}_j} := \int_L f(x)dx_j$. Belátható,

hogy a két összeg különbsége 0-hoz tart, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk.

Állítás: ha Γ egyszerű folytonosan differenciálható görbe, amelyet egy valamely L egyszerű folytonosan differenciálható úttal járunk be, akkor a vonalintegrál értéke független a ϕ paraméterezés megválasztásától, ha rögzítettek a kezdő és végpontok (a bejárás iránya is adott).

Definíció: $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, L folytonosan differenciálható út, $\Gamma = R_\phi$, $g:\Gamma\to\mathbb{R}^n$ folytonos. Tekintsük $\sum_{k=1}^{m}\langle g(\phi(\tau_k)), \phi(t_k)-\phi(t_{k-1})\rangle \to$? Ha a limesz létezik, akkor ezt így jelöljük: $\int_L g dx$.

$\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, ekkor ez egy L folytonosan differenciálható utat határoz 03. 05.
meg. $\Gamma := R_\phi \subset \mathbb{R}^n$. Ha ϕ injektív és $\dot{\phi}(t)\neq 0$ minden t-re, akkor egyszerű folytonosan differenciálható utat határoz meg, Γ -t egyszerű folytonosan differenciálható görbének nevezzük. (Ekkor a fenti integrált a Γ görbén vett integrálnak nevezzük.)

1. Legyen $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor nevezzük a $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k))\left[\phi_j(t_k)-\phi_j(t_{k-1})\right] := \int_L f(x)dx_j$ mennyiséget f-nek j-edik változója szerinti vonalintegráljának. A felosztást finomítva a fenti közelítő összeg tart $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\dot{\phi}_j(t)dt = \int_\alpha^\beta (f\circ\phi)\dot{\phi}_j$ integrálhoz.
2. Legyen $g:\Gamma\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Tekintsük a következő mennyiséget:

$\sum_{k=1}^{m} \langle g(\phi(\tau_k)), \phi(t_k) - \phi(t_{k-1}) \rangle$. Kérdés: ennek van-e limesze, miközben a felosztást finomítjuk? A vizsgált mennyiséget átírva:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} g_j(\phi(\tau_k))\left(\phi_j(t_k) - \phi_j t_{k-1}\right) \right] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{m} g_j(\phi(\tau_k))\left(\phi_j(t_k) - \phi_j(t_{k-1})\right) \right]}_{\to \int_L g_j(x) dx_j = \int\limits_a^b (g_j \circ \phi) \dot{\phi}_j} \text{ ahol } g = (g_1, g_2, ..., g_n).$$

Felcserélve az összegzést az integrálással, a vizsgált mennyiség határértéke $\int\limits_\alpha^\beta \sum_{j=1}^{n} \left(g_j \circ \phi\right) \dot{\phi}_j = \int\limits_\alpha^\beta \langle g(\phi(t)), \dot{\phi}(t) \rangle dt = : \int_L g(x) dx$. Ez mennyiség elég fontos fizikai alkalmazásokban, ezért mi is sokat fogunk vele foglalkozni. Szemléletes jelentést társíthatunk hozzá, ha $g(x)$ az x pontban ható erő. Ekkor az integrál értéke a görbén végigmozogva az erőtér által végzett munka.

3. Ívhossz szerinti vonalintegrál. Az előzőhöz képest csak $f: \Gamma \to \mathbb{R}$ a változás. Ekkor tekintsük a következő összeget: $\sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k)) |\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})|$. Ez mihez tart?

$$\sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k)) |\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{m} f(\phi(\tau_k)) \underbrace{\left| \frac{\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right|}_{\text{Lagrange: } = \dot{\phi}\left(\tau_k^*\right)} (t_k - t_{k-1}) \to \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t)) \left|\dot{\phi}(t)\right| dt : = \int_L f \, ds$$

Megjegyzések: mind a 3 esetben ha Γ egyszerű folytonosan differenciálható görbe, akkor a Γ -n vett integrál a paraméterezéstől függetlenül mindig ugyanaz, ha rögzítjük a kezdő és végpontokat (vagyis a bejárás irányát is megtartjuk). Célszerű értelmezni a szakaszonként folytonosan differenciálható utat (egyszerű szakaszonként folytonosan differenciálható görbét)

<u>**Definíció**</u>: legyen $\phi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonos és $\dot{\phi}$ szakaszonként folytonos függvény, azaz legyen olyan $\alpha < \alpha_1 < ... < \alpha_l < \alpha_{l+1} < ... < \alpha_r = \beta$ felosztás, hogy létezzen $\dot{\phi}\big|_{(\alpha_{k-1}, \alpha_k)}$ és folytonos is $\forall k \in \{1,2,...,r\}$ -ra, és a végpontokban létezzen egyoldali határértéke. Ekkor azt mondjuk, hogy ϕ szakaszonként folytonosan differenciálható utat határoz meg. Értelmezhető az egyszerű szakaszonként folytonosan differenciálható út. A fenti 3 definíció és állítások átvihetők erre az esetre. Legyen $\Gamma : = R_\phi$ és $g: \Gamma \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.

$$\int_L g(x) dx = \int\limits_\alpha^\beta \underbrace{\langle g(\phi(t)), \dot{\phi}(t) \rangle}_{\text{szakaszonként folytonos}} \, dt.$$

A vonalintegrál alaptulajdonságai

1. Legyen $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ (szakaszonként) folytonosan differenciálható függvény, $\Gamma:=R_\phi$ és $g,h:\Gamma\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvények. Ekkor $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ esetén $\int_L(\lambda g+\mu h)(x)dx=\lambda\int_L g(x)dx+\mu\int_L h(x)dx$
2. Legyenek $\phi_1:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ és $\phi_2:[\beta,\gamma]\to\mathbb{R}^n$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvények, és legyen $\phi_1(\beta)=\phi_2(\beta)$. Ekkor legyen $\phi(t):=\begin{cases}\phi_1(t) & t\in[\alpha,\beta]\\ \phi_2(t) & t\in[\beta,\gamma]\end{cases}$, vagyis $\phi:[\alpha,\gamma]\to\mathbb{R}^n$. Ekkor ϕ is szakaszonként folytonosan differenciálható függvény lesz. $\Gamma:=R_\phi$ illetve legyen $g:\Gamma\to\mathbb{R}^n$ függvény folytonos! Ekkor $\int_L g(x)dx=\int_{L_1}g(x)dx+\int_{L_2}g(x)dx$
3. Legyen $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ (szakaszonként) folytonosan differenciálható függvény, ez meghatároz egy L szakaszonként folytonosan differenciálható utat, $\Gamma:=R_\phi\subset\mathbb{R}^n$, $g:\Gamma\to\mathbb{R}^n$. Ekkor

$$\left|\int_L g(x)dx\right|=\left|\int_L\langle g(\phi(t)),\dot\phi(t)\rangle dt\right|\le\int_\alpha^\beta\left|\langle g(\phi(t)),\dot\phi(t)\rangle\right|dt\le\int_\alpha^\beta\underbrace{|g(\phi(t))|}_{\le\sup_\Gamma|g|}\cdot|\dot\phi(t)|dt,\text{ azaz}$$

$$\left|\int_L g(x)dx\right|\le\sup_\Gamma|g|\cdot\int_\alpha^\beta|\dot\phi(t)|dt=\sup_\Gamma|g|\cdot[L\text{ ívhossza}].$$

A vonalintegrál úttól való függetlensége

Adott valamilyen $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ tartomány (nyílt és összefüggő). Legyen $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvény.

Kérdés: milyen feltételek mellet lesz igaz, hogy az Ω két tetszőleges pontját összekötő szakaszonként folytonosan differenciálható út mentén vett $\int_L f(x)dx$ integrálja *f*-nek nem függ az úttól egészében, csak annak végpontjaitól?

Tétel: tfh $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ folytonos függvény és $\int_L f(x)dx$ értéke csak a kezdő és végpontoktól függ bármely Ω-ban haladó L út esetén. Legyen $a\in\Omega$ és $\xi\in\Omega$ tetszőleges pontok, a rögzített. Tekintsünk egy tetszőleges, olyan Ω-ban haladó szakaszonként folytonosan differenciálható utat, amely a-t összeköti ξ-vel. (Mi az, hogy összeköti? Azt jelenti ez, hogy $\exists\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$, mely szakaszonként folytonosan differenciálható és $\phi(t)\in\Omega$, $\forall t\in[\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha)=a$ és $\phi(\beta)=\xi$.) Legyen $F(\xi):=\int_L f(x)dx=\int_a^\xi f(x)dx$. Ekkor $\partial_j F(\xi)=f_j(\xi)$, azaz $F'(\xi) = f(\xi)$.

Bizonyítás: legyen $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $h^{(j)} := (0,0,...h,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ (a j-edik komponense a h). Az a-tól a $\xi + h^{(j)}$-ig terjedő utat definiálja a következő függvény: $\psi(t) := \begin{cases} \phi(t) & \alpha \le t \le \beta \\ (\xi_1,...,\xi_j + t - \beta,...,\xi_n) & \beta \le t \le \beta + h \end{cases}$! Ekkor $\beta \le t \le \beta + h$ esetén $\dot{\psi}(t) = (0,...,1,...,0)$. Ekkor

$$\frac{F(\xi + h^{(j)}) - F(\xi)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{\xi + h^{(j)}} f(x)dx - \int_a^{\xi} f(x)dx\right] = \frac{1}{h}\int_{\xi}^{\xi + h^{(j)}} f(x)dx = \frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta + h} \langle f(\psi(t)), \dot{\psi}(t)\rangle dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta + h} f_j(\xi_1,...,\xi_j + t - \beta,...,\xi_n)dt = f_j(\xi_1,...,\xi_j + \tau - \beta,...,\xi_n) \to f_j(\xi_1,...,\xi_j,...,\xi_n)$$ ahol τ valamilyen

alkalmasan választott $\beta < \tau < \beta + h$ szám (az egyenlőség az integrálszámítás középérték tételéből következik).

Definíció: legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (egyszerűség kedvéért) folytonos, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Ha $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényre $\Phi' = f$, akkor Φ-t f primitív függvényének nevezzük.

Megjegyzés:

1. ha f folytonos, akkor $\Phi' = f$ az Ω-n azzal ekvivalens, hogy $\partial_j \Phi = f_j$, $\forall j$. Az állítás fordítottja is igaz, mert ha $\partial_j \Phi$ létezik és folytonos Ω-n $\Rightarrow \Phi$ differenciálható Ω-n, $f = [\partial_1 \Phi,...,\partial_n \Phi]$. (Ha $\partial_j \Phi$ létezik Ω-n $\not\Rightarrow \Phi$ diffható, csak ha folytonos is $\partial_j \Phi$, $\forall j$)
2. A fenti tétel úgy is fogalmazható, hogy ha $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényre $\int_L f(x)dx$ csak L kezdő és végpontjától függ, akkor f-nek létezik primitív függvénye, mégpedig F, amelyre $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)dx$.
3. Ha Φ függvény f-nek primitív függvénye $\Rightarrow \Phi + c$ is primitív függvénye, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Tétel: tfh $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos és $\Phi' = f$ (vagyis f-nek létezik primitív függvénye). Ekkor $\int_L f(x)dx$ értéke csak L kezdő és végpontjától függ, minden Ω-n haladó szakaszonként folytonosan differenciálható L út esetén.

Bizonyítás: egyszerűség kedvéért először tfh L folytonosan differenciálható, $\phi : [\alpha, \beta] \to \Omega$ folytonosan differenciálható, $\phi(\alpha) = a$ és $\phi(\beta) = b$. $\int_L f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \langle f(\phi(t)), \dot{\phi}(t)\rangle dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{j=1}^{n} f_j(\phi(t))\dot{\phi}_j(t)dt =$

$$= \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n \partial_j \Phi(\phi(t))\dot{\phi}_j(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d\Phi(\phi(t))}{dt}dt,$$ mely a Newton-Leibniz formula felhasználásával

$$= \Phi(\phi(\beta)) - \Phi(\phi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Tétel: legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges tartomány, $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Ekkor $\int_L f(x)dx$ értéke csak L-nek kezdő és végpontjától függ bármely Ω-ban haladó, szakaszonként folytonosan differenciálható L út esetén $\Leftrightarrow$ f-nek létezik primitív függvénye.

Megjegyzés: $\int_L f(x)dx$ értéke csak a kezdő és végpontoktól függ $\Leftrightarrow$ bármely szakaszonként folytonosan differenciálható zárt út mentén az integrál értéke 0.

Állítás: legyen Φ az f folytonos függvény primitív függvénye és $F(\xi) := \int_a^\xi f(x)dx$. Ekkor $\Phi - F =$ áll az Ω-n.

Bizonyítás: az előbbi bizonyítás szerint $\Phi' = f$ esetén ha $\phi(\beta) = \xi$, $\phi(\alpha) = a$,

$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{d\Phi(\phi(t))}{dt}dt = \Phi(\xi) - \Phi(a)$, vagyis $\Phi(\xi) - F(\xi) = \Phi(a)$ konstans.

Kérdés: milyen jól használható feltételt tudunk mondani a primitív függvény létezésére? Tfh $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható (vagyis $\partial_k f_j$ folytonos minden k, j-re). Ekkor $\exists \Phi$, hogy $\Phi' = f$, azaz $f_j = \partial_j \Phi \Rightarrow \partial_k f_j = \partial_k\left(\partial_j \Phi\right)$, mely a Young tétel szerint $= \partial_j(\partial_k \Phi) = \partial_j f_k$.

Tétel: tfh $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény. Ha f-nek létezik primitív függvénye $\Rightarrow \partial_k f_j = \partial_j f_k$ az Ω-n.

Kérdés: a feltétel elegendő-e, azaz ha $\partial_k f_j = \partial_j f_k$, abból következik-e, hogy létezik f-nek primitív függvénye? Általában nem. Tekintsük a következő példát: $\Omega := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 2\right\}$. Legyen $f := (f_1, f_2)$, $f_1(x_1, x_2) := \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}$ és $f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$. Belátjuk, hogy $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$, ugyanis

$\partial_2 f_1(x_1, x_2) = \frac{-\left(x_1^2+x_2^2\right)+2x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}$. $\partial_1 f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2+x_2^2-2x_1^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}$, de $\int_{S_1} f(x)dx \neq 0$, ahol S_1 az egységkör, ami egy $[0,2\pi) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ függvény által meghatározott út.

03. 12.

Előző óráról: $\int_L f(x)dx = \int_\alpha^\beta \langle f(\phi(t)), \dot{\phi}(t)\rangle dt$. Azt vizsgáltuk, hogy mi volt a feltétele, hogy az integrál értéke csak a kezdő és végpontoktól függjön, azaz $a = \phi(\alpha)$ és $b = \phi(\beta)$ értékektől. Azt tudtuk mondani, hogy akkor függ csak a kezdő és végpontoktól, hogyha $\exists \Phi' = f \Leftrightarrow \partial_j \Phi = f_j$ és $\partial_j \Phi$ folytonos (minden j-re).

Tétel: tfh $f:\Omega \to$ ℝ^n folytonosan differenciálható függvény. Ha f-nek létezik primitív függvénye $\Rightarrow \partial_k f_j = \partial_j f_k$ az Ω -n.

Kérdés: abból, hogy $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ az Ω-n, következik-e, hogy f-nek van primitív függvénye (azaz az integráljának értéke csak a kezdő és végpontoktól függ)? Általában nem. Példa: legyen $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2\}$, $f_1(x_1, x_2) := \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $f_2 := \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$. Láttuk már, hogy $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$. Most belátjuk, hogy az egységkörvonalon az integrál értéke nem 0 (ami ellentmond annak, hogy az integrál értéke csak a kezdő és végpontokból függ, ami azt jelentené, hogy létezik f-nek primitív függvénye). $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, $\phi_1(t) := \cos t, t \in [0,2\pi)$, $\phi_2(t) := \sin t, t \in [0,2\pi)$. Ekkor $\dot{\phi}_1(t) = -\sin t$ és $\dot{\phi}_2(t) = \cos t$.

$$\int_{S_1} f(x)dx = \int_0^{2\pi} \langle f(\phi(t)), \dot{\phi}(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\cos t\right] dt = 2\pi \neq 0.$$

Kvázi definíció: egy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományt egyszeresen összefüggőnek nevezünk, ha tetszőleges, a tartományban levő egyszerű zárt (szakaszosan) folytonos differenciálható görbét folytonos mozgatással ponttá lehet húzni úgy, hogy végig a tartományban maradjunk.

Definíció: egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományt csillagszerűnek nevezzük, ha $\exists a \in \Omega$, hogy $\forall x \in \Omega$ esetén az a-t x-szel összekötő egyenes szakasz végig benne van Ω-ban. (Egyenes szakasz a és x pontok között: $L_{a,x} = \{a + t(x-a) : t \in [0,1]\}$)

Tétel: legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagszerű tartomány, $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható. Ha $\partial_j f_k = \partial_k f_j, \forall j,k \Rightarrow f$-nek létezik primitív függvénye.

Megjegyzés: a tétel kiterjeszthető egyszeresen összefüggő tartományokra is.

Paraméteres integrálok

Definíció: tfh $f:[a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ adott legalább folytonos függvény. Értelmezzük a g függvényt:

$g(x) := \int_c^d f(x,y)dy$. Ezt nevezzük f paraméteres integráljának. Miket tud ez?

Tétel: ha $f \in C([a,b] \times [c,d]) \Rightarrow g \in C[a,b]$.

Bizonyítás: legyen $x_0 \in [a,b]$ tetszőleges rögzített!

$|g(x) - g(x_0)| = \left|\int_c^d f(x,y)dy - \int_c^d f(x_0,y)dy\right| = \left|\int_c^d (f(x,y) - f(x_0,y))dy\right| \leq \int_c^d |f(x,y) - f(x_0,y)|dy$. Mivel f folytonos, $D_f = [a,b] \times [c,d]$ korlátos és zárt halmaz (ezért sorozatkompakt is), ezért f egyenletesen folytonos (Heine tétel). Véve egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot, ehhez

$\exists \delta > 0 : |(x,y) - (x^*, y^*)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x^*, y^*)| < \varepsilon$. Speciel $x^* = x_0$, $y^* = y$. Tehát

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon, \forall y \in [c,d] \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon(d-c)$.

Tétel: ha f folytonos $[a,b] \times [c,d]$-n és $\exists\, \partial_1 f$ az $(a,b) \times (c,d)$-n és létezik folytonos kiterjesztése $[a,b] \times [c,d]$-re, akkor g függvény folytonosan differenciálható $[a,b]$-n, és $g'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)dy$ (vagyis felcserélhetjük a deriválást és az integrálást).

Bizonyítás: legyen $x_0 \in (a,b) \ni x \neq x_0$! $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0} dy =$ a Lagrange-féle középérték-tétel felhasználásával $= \int_c^d \partial_1 f\left(\xi_y, y\right) dy$, ahol ξ_y x és x_0 között van.

$\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d \partial_1 f(x_0,y)dy\right| = \left|\int_c^d \left(\partial_1 f\left(\xi_y, y\right) - \partial_1 f(x_0,y)\right)dy\right| \leq \int_c^d \left|\partial_1 f\left(\xi_y, y\right) - \partial_1 f(x_0,y)\right|dy \to 0$, mert $\partial_1 f$ egyenletesen folytonos.

A vonalintegrálról szóló tétel bizonyítása

Tfh $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagszerű tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, továbbá $\partial_j f_k = \partial_k f_j$, $\forall j,k$-ra az Ω-n. Belátjuk, hogy f-nek van primitív függvénye. Célszerű feltétel, hogy legyen $a = 0$, válasszunk egy $x \in \Omega$-t, ekkor $L_{a,x} = \{t \cdot x : t \in [0,1]\}$. Az a-t x-szel összekötő, folytonosan differenciálható utat a következő $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvény határozhatja meg: $\phi(t) := t \cdot x, t \in [0,1], x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Legyen

$$F(x) := \int_{L_{0,x}} f(\xi)d\xi = \int_0^1 \langle f(\phi(t)), \dot{\phi}(t)\rangle dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n f_k(\phi(t)) \cdot x_k \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n f_k(t \cdot x) \cdot x_k \right) dt.$$ Belátjuk,

hogy $\partial_j F(x) = f_j(x)$. Most $F(x)$-et differenciáljuk x_j paraméter szerint. $F(x) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k(t \cdot x) x_k dt$.

$j \neq k$ esetén $\partial_j \int_0^1 f_k(t \cdot x) x_k dt = \int_0^1 \partial_j f_k(t \cdot x) t \cdot x_k dt,$

$j = k$ esetén $\partial_k \int_0^1 f_k(t \cdot x) x_k dt = \int_0^1 [\partial_k f_k(t \cdot x) t \cdot x_k + f_k(t \cdot x)] dt$

Ezért $\partial_j F(x) = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \partial_j f_k(t \cdot x) t \cdot x_k + f_j(t \cdot x) \right] dt = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \partial_k f_j(t \cdot x) t \cdot x_k + f_j(t \cdot x) \right] dt$. Legyen

$g_j(t) := f_j(t \cdot x)t$, ekkor $\dot{g}_j(t) = \sum_{k=1}^n \partial_k f_j(t \cdot x) x_k \cdot t + f_j(t \cdot x)$, így

$$\partial_j F(x) = \int_0^1 \dot{g}_j(t) dt = g_j(1) - g_j(0) = f_j(x) - 0 = f_j(x).$$

Komplex függvénytan

<u>Definíció</u>: tfh $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ értelmezve van egy $z_0 \in \mathbb{C}$ pont egy környezetében. Azt monjduk, hogy f differenciálható z_0-ban, ha $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ és véges. A limeszt a valós függvények deriváláshoz hasonlóan így jelöljük: $f'(z_0)$. A komplex differenciálhatóságnak van geometriai szemléletes jelentése is. $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, és a komplex számok trigonometrikus jelölésével legyen ez $f'(z_0) := r(\cos\phi + i \sin\phi)$. Tfh ez nem 0.
$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = r(\cos\phi + i \sin\phi)$, így z_0 környezetében $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \approx r$, másképp: $|f(z) - f(z_0)| \approx r|z - z_0|$.
Erre azt mondjuk, hogy f leképezés limeszben körtartó. Másrészt $\arg \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \approx \phi$,
$\arg[f(z) - f(z_0)] - \arg(z - z_0) \approx \phi$, $\arg[f(z) - f(z_0)] \approx \phi + \arg(z - z_0)$, ez egy z_0 körüli ϕ szögű forgatás.

A komplex differenciálhatóság szükséges feltétele

Nézzük meg, hogy mit jelent az, hogy g komplex változós függvény differenciálható egy $z \in \mathbb{C}$ pontban! Így definiáltuk: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = g'(z)$. Két esetet vizsgálunk, $h := h_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ az első esetben illetve $h := ih_2, h_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ a második esetben. Tehát $\lim\limits_{h_1 \to 0} \frac{g(z+h_1)-g(z)}{h_1} = \lim\limits_{h_2 \to 0} \frac{g(z+ih_2)-g(z)}{ih_2}$. Tudunk $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}^2$ között egy bijekciót létesíteni: $J : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, x+iy \mapsto (x,y)$ ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Bizonyítható, hogy J lineáris bijekció. Mint definiáltuk, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, és legyen $z := x_1 + ix_2$ ahol x_1 és $x_2 \in \mathbb{R}$, továbbá $g(x_1+ix_2) := g_1(x_1+ix_2) + ig_2(x_1+ix_2)$, ahol $g_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ és $g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. A korábbi J bijekció alapján legyen $\tilde{g}_1(x_1,x_2) := g_1(x_1+ix_2)$ és $\tilde{g}_2(x_1,x_2) := g_2(x_1+ix_2)$, így $\tilde{g}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $\tilde{g}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$\frac{g(z+h_1)-g(z)}{h_1} = \frac{\tilde{g}_1(x_1+h_1,x_2)-\tilde{g}_1(x_1,x_2)}{h_1} + i\frac{\tilde{g}_2(x_1+h_1,x_2)-\tilde{g}_2(x_1,x_2)}{h_1} \to \quad \to \partial_1 \tilde{g}_1(x_1,x_2) + i\partial_1 \tilde{g}_2(x_1,x_2)$,

$\frac{g(z+ih_2)-g(z)}{ih_2} = \frac{\tilde{g}_1(x_1,x_2+h_2)-\tilde{g}_1(x_1,x_2)}{ih_2} + i\frac{\tilde{g}_2(x_1,x_2+h_2)-\tilde{g}_2(x_1,x_2)}{ih_2} \to \quad \to -i\partial_2 \tilde{g}_1(x_1,x_2) + \partial_2 \tilde{g}_2(x_1,x_2)$ Ezért kell, hogy $\partial_1 \tilde{g}_1 = \partial_2 \tilde{g}_2, \ -\partial_2 \tilde{g}_1 = \partial_1 \tilde{g}_2$ legyen. Ezek a Cauchy-Riemann (parciális differenciál) egyenletek.

Cauchy-alaptétel: tfh $\Omega \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő és $g : \Omega \to \mathbb{C}$ differenciálható Ω-n. Ekkor g integrálja bármely szakaszonként folytonosan differenciálható, Ω-ban haladó egyszerű zárt görbén 0.

Bizonyítás: legyen $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, mely egy egyszerű szakaszonként folytonosan differenciálható zárt Γ görbét határoz meg, $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, $\phi(t) \in \Omega$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Definíció szerint $\int_\Gamma g(z)dz := \int_\alpha^\beta g(\phi(t))\dot{\phi}(t)dt$ (itt az integrandus komplex értékű). $\phi(t) = \phi_1(t) + i\phi_2(t)$ (ahol ϕ_1, ϕ_2 valós-valós függvények), $g(x_1+ix_2) = g_1(x_1+ix_2) + ig_2(x_1+ix_2)$. Ezek alapján $\int_\alpha^\beta g(\phi(t))\dot{\phi}(t)dt = \int_\alpha^\beta [g_1(\phi_1(t)+i\phi_2(t)) + ig_2(\phi_1(t)+i\phi_2(t))] \cdot [\dot{\phi}_1(t) + i\dot{\phi}_2(t)]dt$. Definiáljuk ψ függvényt-t a következőképp: $J(\phi(t)) = J(\phi_1(t)+i\phi_2(t)) = (\phi_1(t), \phi_2(t)) := \psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\phi_1(t), \phi_2(t))$, így az előző integrálban a szorzást elvégezve

$$\int_\Gamma g(z)dz = \int_\alpha^\beta \left[g_1(\phi(t))\dot{\phi}_1(t) - g_2(\phi(t))\dot{\phi}_2(t)\right]dt + i\int_\alpha^\beta \left[g_1(\phi(t))\dot{\phi}_2(t) + g_2(\phi(t))\dot{\phi}_1(t)\right]dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\tilde{g}_1(\psi(t))\dot{\phi}_1(t) - \tilde{g}_2(\psi(t))\dot{\phi}_2(t)\right]dt + i\int_\alpha^\beta \left[\tilde{g}_1(\psi(t))\dot{\phi}_2(t) + \tilde{g}_2(\psi(t))\dot{\phi}_1(t)\right]dt.$$

Belátjuk, hogy mindkét tag 0.

$f := (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Először legyen $f_1 := \tilde{g}_1$, $f_2 := -\tilde{g}_2$. Ekkor $\partial_2 f_1 = \partial_2 \tilde{g}_1$ és $\partial_1 f_2 = -\partial_1 \tilde{g}_2$, (a Cauchy-Riemann egyenletekből pedig) $\partial_2 \tilde{g}_1 = -\partial_1 \tilde{g}_2$, azaz $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$. Így a valós vonalintegrálokról szóló tétel szerint $0 = \int_L f(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[f_1(\psi(t))\dot{\phi}_1(t) + f_2(\psi(t))\dot{\phi}_2(t)\right]dt = \int_\alpha^\beta \left[\tilde{g}_1(\psi(t))\dot{\phi}_1(t) - \tilde{g}_2(\psi(t))\right]\dot{\phi}_2 dt.$

Másodszor $f_1 := \tilde{g}_2$, $f_2 := \tilde{g}_1$, ebből kapjuk, hogy a második integrál is 0. A Cauchy-Riemann egyenletekből most $\partial_1 \tilde{g}_1 = \partial_2 \tilde{g}_2$ illetve $-\partial_2 \tilde{g}_1 = \partial_1 \tilde{g}_2$. Ekkor $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$, így

$$0 = \int_L f(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[f_1(\psi(t))\dot{\phi}_1(t) + f_2(\psi(t))\dot{\phi}_2\right]dt = \int_\alpha^\beta \left[\tilde{g}_2(\psi(t))\dot{\phi}_1(t) + \tilde{g}_1(\psi(t))\dot{\phi}_2\right]dt.$$

Megjegyzés: a bizonyításokban felhasználtuk, hogy g folytonosan differenciálható, így felhasználtuk a valós vonalintegrálról szóló tételt és megjegyzését.

A Cauchy alaptétel közvetlen következményei 03. 19.

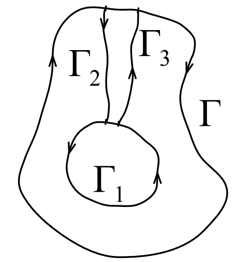
Tfh $\phi: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény egyszerű zárt utat határoz meg, $\Gamma := R_\phi$ egy egyszerű zárt szakaszonként folytonosan differencálható görbe $\mathbb{C}$-n.

Tétel: egy $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ nyílt halmaz két összefüggő komponensből (részből) áll, a két komponens közül az egyik korlátos, a másik nem. A korlátos komponenst nevezzük Γ belsejének, a nem korlátos komponenst Γ külsejének.

Megjegyzés: a tétel állítása triviálisnak tűnhet, bizonyítása mégsem könnyű.

Tétel: legyen $\Gamma, \Gamma_1 \subset \mathbb{C}$ egyszerű zárt szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, legyen Γ_1 a Γ görbe belsejében. Tfh $\Omega \supset (\Gamma \cup \Gamma_1 \cup (\text{belseje}(\Gamma) \backslash (\Gamma_1 \cup \text{belseje}(\Gamma_1))))$, vagyis hogy Ω tartalmazza Γ, Γ_1-t és a kettejük közötti tartományt. Legyen $g: \Omega \to \mathbb{C}$ differenciálható függvény. Ekkor $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz$.

Bizonyítás: a Cauchy alaptételt alkalmazva a $\Gamma, \Gamma_2, -\Gamma_1, \Gamma_3$ utakból álló szakaszonként folytonosan differenciálható zárt görbére: $0 = \int_\Gamma f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_3} f(z)dz$, mely limeszben ($\Gamma_2 \to \Gamma_3$) $0 = \int_\Gamma f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz$. (Az ábrán a körüljárást láthatjuk, Γ, Γ_1 irányítása azonos, óramutató járásával ellentétes irányú. Ez a bizonyítás csupán vázlatos, szemléletes.)



Tétel: legyenek $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ egyszerű zárt szakaszonként folytonosan differenciálható görbék, $\Gamma_j \subset$ belseje(Γ) és $\Gamma_l \subset$ külseje(Γ_j) ha $l \neq j$, $\forall j, l \in \{0,1,\ldots,k\}$. Legyen g függvény differenciálható egy olyan tartományban, mely tartalmazza $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$-t és belseje$(\Gamma) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} \text{belseje}(\Gamma_j) \right)$-t is. Ekkor $\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} f(z)dz$.

Cauchy-féle integrálformula

Tétel: legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $\Gamma \subset \Omega$ egyszerű zárt szakaszonként folytonosan differenciálható görbe (ekkor belseje$(\Gamma) \subset \Omega$) és g diffható Ω-n. Ekkor Γ belsejében fekvő bármely z esetén
$$g(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Bizonyítás: legyen $K_\rho := \{\zeta \in \mathbb{R} : |\zeta - z| = \rho\}$ a z középpontú, ρ sugarú körvonal. ρ-t olyan kicsinek választjuk, hogy $K_\rho \subset \Gamma$ belseje lesz már. Ekkor a Cauchy alaptétel közvetlen következménye szerint
$\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, másrészt $\int_{K_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$, ugyanis $\zeta = z + \rho\cos t + i\rho\sin t$ paraméterezés mellett $\zeta - z = \rho\cos t + i\rho\sin t$ – erre valóban teljesül a $K_\rho = \{\zeta \in \mathbb{R} : |\zeta - z| = \rho\}$ kitétel –, így K_ρ előáll a $\phi : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\phi(t) = z + \rho\cos t + i\rho\sin t$ függvény segítségével (ekkor $\phi'(t) = -\rho\sin t + i\rho\cos t$): $K_\rho = R_\phi$, továbbá $\int_{K_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho\cos t + i\rho\sin t} [-\rho\sin t + i\rho\cos t] dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$. Ezek szerint

$g(z) = \frac{1}{2\pi i} g(z) 2\pi i = \frac{1}{2\pi i} g(z) \int_{K_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{g(z)}{\zeta - z} d\zeta$. Vizsgáljuk a következő mennyiséget:
$$\left| \tfrac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - g(z) \right| \leq \tfrac{1}{2\pi} \left| \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{K_\rho} \frac{g(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \tfrac{1}{2\pi} \left| \int_{K_\rho} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq$$
$\leq \frac{1}{2\pi}$ kerület$(K_\rho) \cdot \sup_{\zeta \in K_\rho} \left| \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} \right| < \varepsilon$ ugyanis $|g(\zeta) - g(z)| < \varepsilon$ ha $\rho < \rho_0$, $|\zeta - z| = \rho =$ állandó, kerület$(K_\rho) = 2\pi\rho$, tehát $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - g(z) \right| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = g(z)$.

Cauchy-típusú integrál

Definíció: legyen Γ egyszerű (nem feltételen zárt) szakaszonként folytonosan differenciálható görbe. Legyen $g:\Gamma \to \mathbb{C}$ folytonos függvény! Legyen $G(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, ezt nevezzük Cauchy-típusú integrálnak, ha $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$.

Tétel: G függvény a $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ nyílt halmazon akárhányszor differenciálható és $G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta$.

Bizonyítás: csak a $k = 1$ esetet látjuk be, teljes indukcióval a tétel igazolható. Tehát ezt szeretnénk igazolni: $G'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$.

$$\frac{G(z+h)-G(z)}{h} = \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z - h}\,d\zeta - \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{h}\left[\frac{g(\zeta)}{\zeta - z - h} - \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\right]d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\zeta)\frac{(\zeta - z) - (\zeta - z - h)}{h(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\,.$$

Vizsgáljuk: $I = \left|\frac{G(z+h)-G(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma g(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right]d\zeta\right| = \;= \frac{1}{2\pi}$ $\left|\int_\Gamma g(\zeta)\frac{(\zeta - z) - (\zeta - z - h)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}\,d\zeta\right| = \frac{|h|}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}\,d\zeta\right| \le \frac{|h|}{2\pi}\cdot \text{ívhossz}(\Gamma)\cdot \sup_{\zeta\in\Gamma}\frac{1}{|\zeta - z - h|\cdot|\zeta - z|^2}$. $\Gamma \subset \mathbb{C}$ korlátos és zárt, ezért sorozatkompakt is, így a $\zeta \mapsto |\zeta - z|, \zeta \in \Gamma$ folytonos függvényhez $\exists \zeta_0 \in \Gamma : 0 < \underbrace{|\zeta_0 - z|}_{:=2d} = \inf_{\zeta\in\Gamma}|\zeta - z| \Rightarrow |\zeta - z| \ge 2d$ ha $\zeta \in \Gamma$. Ha $|h| \le d \Rightarrow |\zeta - z - h| \ge d$, ugyanis $\zeta - z = (\zeta - z - h) + h \Rightarrow |\zeta - z| \le |\zeta - z - h| + |h| \Rightarrow |\zeta - z - h| \ge |\zeta - z| - |h| = d$.

$I \le \frac{|h|}{2\pi}\cdot \text{ívhossz}(\Gamma)\frac{1}{d\left(2d^2\right)} \to 0$, ha $h \to 0$. Tehát $\frac{G(z+h)-G(z)}{h} \to \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = G'(z)$.

Spec eset: $\Gamma \subset \mathbb{C}$ egyszerű zárt szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, $z \in \text{belseje}(\Gamma)$, g differenciálható egy Γ-t tartalmazó egyszeresen összefüggő tartományon. Ekkor $g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, az utóbbi tétel szerint pedig $\exists g^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta$. Eszerint ha egy komplex függvény egyszer differenciálható, akkor akárhányszor differenciálható.

A primitív függvény és a vonalintegrál kapcsolata

Tétel: tfh g folytonos egy $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartományon, továbbá $\int_\Gamma g(z)dz$ vonalintegrál értéke tetszőleges Ω-ban haladó egyszerű szakaszonként folytonosan differenciálható görbe esetén annak csak a kezdő és végpontjaitól függ.

Legyen $a \in \Omega$ rögzített, $z \in \Omega$ változó pont, $\Phi(z) := \int\limits_a^z g(\zeta)d\zeta$. Ekkor $\Phi'(z) = g(z)$.

Bizonyítás: $\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int\limits_a^{z+h} g(\zeta)d\zeta - \int\limits_a^{z} g(\zeta)d\zeta\right] = \frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} g(\zeta)d\zeta$. Vizsgáljuk: $\left|\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h} - g(z)\right| = =$

$\left|\frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} g(\zeta)d\zeta - \frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} g(z)d\zeta\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int\limits_z^{z+h} (g(\zeta)-g(z))d\zeta\right| \le \frac{1}{|h|}|h| \sup\limits_{\zeta \in L(z,z+h)} |g(\zeta)-g(z)|$, mely 0-hoz tart, ha $|h|$ is.

Következmény: (Morera tétele) tfh g egy Ω tartományon értelmezett folytonos függvény, amelynek az Ω -ban haladó egyszerű szakaszonként folytonosan differenciálható görbéken vett integrálja csak a kezdő és végpontoktól függ. Ekkor g differenciálható Ω-n (vagyis akárhányszor differenciálható). Ugyanis előbbi tétel szerint a $\Phi(z) = \int\limits_a^z g(\zeta)d\zeta$ függvényre Φ differenciálható és $\Phi'(z) = g(z)$,tehát Φ egyszer differenciálható, ezért akárhányszor, így g is akárhányszor.

Definíció: ha f az $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány minden pontjában differenciálható, akkor f-et holomorfnak nevezzük 03. 26. Ω -n.

Taylor-sorfejtés komplex függvényeken

Lemma: legyen $\Gamma \subset \mathbb{C}$ egyszerű, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, s legyenek $f_k : \Gamma \to \mathbb{C}$ folytonos függvények, $k \in \mathbb{N}$. Tfh a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k = f$ sor egyenletesen konvergens. Ekkor f is folytonos (valósban bizonyítottuk, de állítás, hogy komplexben is így van). Ekkor $\int f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int f_k(z)dz$, vagyis az integrálás és az összegzés felcserélhető.

Bizonyítás: legyen $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $R_\phi = \Gamma$, ϕ szakaszonként folytonosan differenciálható. Ekkor

$\int_\Gamma f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\dot{\phi}(t)$ és $\int_\Gamma f_k(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f_k(\phi(t))\dot{\phi}(t)$, így

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta [f(\phi(t))]\dot\phi(t)dt = \int_\alpha^\beta \underbrace{\left[\sum_{k=1}^\infty f_k(\phi(t))\dot\phi(t)\right]}_{\text{szakaszonként folytonos}} dt = \sum_{k=1}^\infty \int_\alpha^\beta f_k(\phi(t))\dot\phi(t)dt = \sum_{k=1}^\infty \int_\Gamma f_k(z)dz.$$

Egyenletes konvergencia

Weierstrass-tétele komplex függvényekre

Definíció: legyen $f_k : \Omega \to \mathbb{C}, f_k \in C\left(D_{f_k}\right), \Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^\infty f_k = f$ az Ω belsejében egyenletesen konvergens, ha $\forall K \subset \Omega$ sorozatkompakt halmaz esetén a sor K-n egyenletesen konvergens.

Weierstrass tétele: legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ függvények holomorfak, továbbá $\sum_{k=1}^\infty f_k$ sor a Ω belsejében egyenletesen konvergens. Ekkor

1. $f := \sum_{k=1}^\infty f_k$ is holomorf
2. $f' = \sum_{k=1}^\infty f_k'$
3. az utóbbi sor is egyenletesen konvergens Ω belsejében

Következmény: $f^{(j)} = \sum_{k=1}^\infty f_k^{(j)}$ is egyenletesen konvergens Ω belsejében.

Bizonyítás:

1. egyrészt tudjuk, hogy $f = \sum_{k=1}^\infty f_k$ folytonos Ω-n (hiszen a sor Ω belsejében egyenletesen konvergens).

   Legyen $z_0 \in \Omega$ rögzített pontja. Belátjuk, hogy f differenciálható z_0 egy kis $K_r(z_0)$ környezetében. Vegyünk egy $K_r(z_0)$-ban haladó, egyszerű szakaszonként folytonosan differenciálható zárt Γ görbét. Belátjuk, hogy $\int_\Gamma f(z)dz = 0 \Rightarrow f$ holomorf $K_r(z_0)$-n (Morera tétele miatt). Az előbbi lemma alapján

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)}_{\Gamma\text{-n egyenl. konv.}} dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Gamma f_k(z)dz = 0.$$

2. a Cauchy-féle integrálformula szerint ha z a $K_r(z_0) := \{z : |z - z_0| = r\}$ körvonal belsejében van, akkor $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Ekkor

   $$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} f_k{}'(z)$$ (itt is felhasználtuk a sor egyenletes konvergenciáját $K_r(z_0)$-n).

További következmény: tekintsük a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ hatványsort! Tfh ennek konvergencia sugara $R > 0$. Tudjuk, hogy $|z - z_0| < R$ esetén a sor konvergens, ill minden R-nél kisebb sugarú, z_0 középpontú körben a hatványsor egyenletesen konvergens. Mivel $f_k(z) = c_k(z - z_0)^k$ holomorf függvény, és az f_k függvényekből álló sor a konvergencia sugár belsejében egyenletesen konvergens, így a Weierstrass tételből következően a sor összege is holomorf, és a sor tagonként akárhányszor deriválható. Továbbá $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, mivel a sor most is (komplex értelemben) tagonként differenciálható, ezért egyszerű számolással kapjuk: $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Definíció: tfh f holomorf függvény z_0 egy környezetében. Ekkor az f függvény Taylor sorát így értelmezzük: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$.

Tétel: legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány, tfh f holomorf Ω-n, $z_0 \in \Omega$. Tekintsük az f függvény Taylor-sorát z_0 körül! Ekkor $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$, ahol $z \in B_R(z_0)$, $B_R(z_0) := \{z : |z - z_0| < R\}$ az a maximális sugarú z_0 középpontú kör, amely $B_R(z_0) \subset \Omega$.

Példa: legyen $f(z) := \frac{1}{1 - z}$, ekkor f holomorf az $\mathbb{C} \backslash \{1\}$ tartományon. Fejtsük Taylor-sorba f-t a $z_0 = 0$ körül! Ekkor $\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k$. A sor $|z| < 1$ esetén konvergens, $|z| \geq 1$ esetén divergens, tehát csak akkor igaz az előbbi egyenlőség, ha $|z| < 1$.

Bizonyítás: legyen $z \in B_R(z_0)$, ekkor r-t úgy választjuk, hogy $|z - z_0| < r < R$. Jelöljük:

$K_r(z_0) := \{z : |z - z_0| = r\}$. Alkalmazzuk a Cauchy- féle integrálformulát $K_r(z_0)$-ra és z-re:

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. A nevező: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$ (ez azért jó, mert $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$, ugyanis

$|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$). Tehát $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$. A sor egyenletesen konvergens, ha

$\zeta \in K_r(z_0)$ a Weierstrass kritérium szerint. Így

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta}_{:= c_k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Ugyanis

tudjuk, hogy $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Következmény: tfh f, g holomorf függvények $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartományon és $\exists z_j, j \in \mathbb{Z}^+, z_j \in \Omega \backslash \{z_0\} : f(z_j) = g(z_j)$, ahol $\lim z_j = z_0 \in \Omega$. Ekkor $f(z) = g(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Bizonyítás:

1. először belátjuk, hogy $f(z) = g(z), z \in B_R(z_0) \subset \Omega$. Fejtsük Taylor-sorba mindkét függvény, f-t és g-t is z_0 körül. $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$, $f(z_j) = g(z_j)$, így

   $f(z_j) = c_0 + \underbrace{c_1 (z_j - z_0) + c_2 (z_j - z_0)^2 + \ldots}_{\to 0 \text{ ha } z_j \to z_0, \text{ mivel a } f \in C(z_0)} = d_0 + \underbrace{d_1 (z_j - z_0) + d_2 (z_j - z_0)^2 + \ldots}_{\to 0} = g(z_j) \Rightarrow c_0 = d_0$

   , így $c_1 (z_j - z_0) + c_2 (z_j - z_0)^2 + .., = d_1 (z_j - z_0) + d_2 (z_j - z_0)^2 + \ldots$ Mivel $z_j \neq z_0$, ezért oszthatunk $z_j - z_0$-lal: $c_1 + c \underbrace{{}_2 (z_j - z_0) + \ldots}_{\text{folytonos}, \longrightarrow 0} = d_1 + \underbrace{d_2 (z_j - z_0) + \ldots}_{\text{folytonos}, \to 0} \Rightarrow c_1 = d_1$, és így tovább, tehát $c_k = d_k, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f(z) = g(z), \forall z \in B_R(z_0)$.
2. legyen $z \in \Omega$ tetszőleges! Kössük össze z_0-t és z-t egy véges sok egyenes szakaszból álló Γ törött vonallal. $\inf\{\rho(\zeta, \partial\Omega) : \zeta \in \Gamma\} := \beta > 0$. Most z-t és z_0-t összekötjük egy β sugarú körökből álló körlánccal, ezeken $f(z) = g(z)$, az egymás utáni körökön. Spec eset: $g(z) \equiv 0$, $f(z_j) = 0, z_j \in \Omega \backslash \{z_0\}, j \in \mathbb{Z}^+, \lim z_j = z_0 \in \Omega \Rightarrow f(z) = 0, \forall z$.

Definíció: legyen f holomorf függvény Ω tartományon, $z_0 \in \Omega$ Azt mondjuk, hogy z_0 az f függvénynek n-szeres gyöke, ha $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Állítás: z_0 az f-nek n-szeres gyöke $\Leftrightarrow f(z)=(z-z_0)^n g(z)$, ahol g holomorf z_0 egy környezetében és $g(z_0)\neq 0$.

Bizonyítás:

- $\Rightarrow$ irányban: tfh $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)=0, f^{(n)}(z_0)\neq 0$. Fejtsük Taylor-sorba z_0 körül: $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=(z-z_0)^n\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n}}_{g(z)}$. g holomorf z_0 környezetében: $g(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$.
- $\Leftarrow$ irányban: $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$, g holomorf és $g(z_0)\neq 0$. g-t sorba fejtjük z_0 körül: $g(z)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(z-z_0)^l, c_0\neq 0\Rightarrow$

  $\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^n g(z)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(z-z_0)^{l+n}=c_0(z-z_0)^n+c_1(z-z_0)^{n+1}+\ldots$ Leolvashatjuk, hogy f Taylor sorfejtésénél az első n db együttható 0. $\Rightarrow f(z_0)=0, f'(z_0)=0,\ldots,f^{(n-1)}(z_0)=0$, $f^{(n)}(z_0)\neq 0$, mivel $c_0\neq 0$.

Egész függvények, Liouville tétele

Definíció: ha f függvény holmorf $\mathbb{C}$-n, akkor f-t egész függvénynek nevezzük.

Liouville tétele: ha f egész függvény korlátos $\Rightarrow f$ állandó.

Bizonyítás: tudjuk, hogy f holomorf $\mathbb{C}$-n. Fejtsük Taylor-sorba $z_0=0$ körül! Legyen

$K_r:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}, M_r:=\sup\{|f(\zeta)|,|\zeta|=r\}$, ekkor $\forall z\in\mathbb{C}$-re $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$,

$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta\Rightarrow|c_k|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_r}\frac{f(\zeta)}{z^{k+1}}d\zeta\right|\leq\frac{1}{2\pi}2\pi r\frac{M_r}{r^{k+1}}=\frac{M_r}{r^k}$. Ha speciel f korlátos, $M_r\leq M$ (r-től függetlenül), így $|c_k|\leq\frac{M}{r^k}, \forall r\Rightarrow k\geq 1$ esetén $c_k=0$, $f(z)=c_0$.

Az algebra alaptétele

04. 02.

Tétel: legyen P egy legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinom! Ekkor mindig $\exists z_0\in\mathbb{C}:P(z_0)=0$.

Bizonyítás: indirekt feltesszük, hogy $P(z)\neq 0,\forall z\in\mathbb{C}$. Ekkor $\frac{1}{P}$ holomorf függvény. Belátjuk, hogy korlátos is. $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0, n\geq 1, a_n\neq 0$. $\left|\frac{1}{P(z)}\right|=\frac{1}{|P(z)|}=\frac{1}{z^n\underbrace{|a_n+a_{n-1}z^{-1}+\ldots+a_1 z^{-n+1}+a_0 z^{-n}|}_{\to|a_n|\text{ ha } z\to\infty}}$, így

$\exists r$, hogy $\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq \frac{|a_n|}{2}$ ha $|z| \geq r$, tehát $\exists \rho > 0$: $|z| > \rho \Rightarrow \frac{1}{|P(z)|} \leq 1$. $|z| \leq \rho$ esetén $\left|\frac{1}{P(z)}\right|$ korlátos a Weierstrass-tétel miatt, hiszen $\left|\frac{1}{P}\right|$ folytonos, a ρ sugarú kör sorozatkompakt. $\frac{1}{P}$ korlátos, másrészt holomorf $\Rightarrow$ (Liouvielle-tétel) $\frac{1}{P} =$ áll. $\Rightarrow P =$ áll., de ez meg ellentmond annak, hogy $n \geq 1$.

Az exponenciális, a szinusz és koszinusz függvények komplex változókon

(Kalkuluson szó volt az exponenciális, a szinusz és koszinusz hatványsoráról a valósban. Ezeket kaptuk: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a konvergencia sugár végtelen. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... +, -$ illetve $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... +, -$ Akkoriban lehetett volna így is definiálni a függvényeket, és az akkori definíciókat meg igazolni. Ha így tettük volna, a komplexes általánosítás könnyebb volna.)

Legyen **<u>definíció</u>** szerint $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, a konvergencia sugár ugyanaz, mint valósban, valamint $\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... +, -$ továbbá $\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... +, -$. A hatványsoros definíciós segítségével belátható, hogy $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!}$. A sor abszolút konvergens, így szabadon cserélgethetők a szorzótényezők:. $e^{z_1+z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right]$, ahol felhasználtuk a binomiális tételt.

Következmény: legyen $z \in \mathbb{C}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, z := x + iy$. Ekkor $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$,

$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + ... = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - ... +, -\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - ... +, -\right) = \cos y + i \sin y$, így

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, valamint $|e^z| = e^x = e^{\Re(z)}$, $\arg e^z = y = \Im(z)$,

$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... +, -\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... +, -\right)$,

$e^{-iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... +, -\right) + i\left(-\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + ... -, +\right)$, így $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... +, - = \cos z$,

valamint $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... +, - = \sin z$. Ezek igazak $\forall z \in \mathbb{C}$. Komplexben is igaz, hogy

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, merthogy

$\sin^2 z + \cos^2 z = \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right]^2 + \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right]^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} = \frac{2+2}{4} = 1$, valamint az összes többi formula, ami valósban is igaz volt (periodicitás, paritás). e^z periodikus $2\pi i$ szerint, ugyanis

$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = e^z$. Ami másképp van: valósban $|\sin x| \leq 1 \geq |\cos x|$, mert $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $\sin^2 x \geq 0, \cos^2 x \geq 0$, de komplexben ez így nem igaz. Megemlítendő, hogy $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, mert $e^z = \underbrace{e}_{>0}{}^x \underbrace{(\cos y + i\sin y)}_{\text{abszolút értéke 1}}$.

Izolált szinguláris pontok, Laurent-sorfejtés

Definíció: ha $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f:\Omega \to \mathbb{C}$ holomorf egy $z_0 \in \Omega$ pont kivételével, akkor $z_0 - t$ izolált szinguláris pontnak nevezzük. Cél: f-et szeretnénk valamilyen sorba fejteni z_0 körül.

Tfh z_0 egy izolált szinguláris pont, f holomorf a $\Omega := \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z_0 - z| < R\}$ tartományon, ahol $0 < R \leq \infty$. Válasszuk r_1, r_2 számokat: $0 < r_1 < r_2 < R$. $z \in \Omega$ esetén r_1, r_2 megválasztható úgy, hogy $0 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Nem nehéz belátni, hogy a Cauchy-féle integrálformula szerint

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$. $\zeta \in S_{r_2}$ esetén

$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$, a sor egyenletesen konvergens

$\zeta \in S_{r_2}$ esetén. Ha $\zeta \in S_{r_1}$,

$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}}$. Vezessük be az

$m + 1 =: -n \Leftrightarrow m =: -n - 1$ új indexváltozót, így $\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$. Ekkor

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}} f(\zeta)\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta + \sum_{n=-1}^{-\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta =$$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta =: \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z - z_0)^n$, ahol $c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta, 0 < r < R$.

(A Cauchy-alaptétel következménye miatt vehetünk S_{r_1}, S_{r_2} helyett S_r-et.)

Tétel: tfh f holomorf az $\Omega := \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < R\}$ tartományon, ($0 < R \leq \infty$). Ekkor $\forall z \in \Omega$ esetén

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, ahol $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$. Ezt nevezzük f Laurent sorfejtésének.

Megjegyzés: a Laurent sorfejtés egyértelmű. Ugyanis nem nehéz belátni, hogy ha

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \Rightarrow d_n = c_n$. A Laurent sorfejtés egyenletesen konvergens

belseje(Ω)-n, azaz minden Ω-ban fekvő sorozatkompakt halmazon.

Az izolált szinguláris pontok osztályozása

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n}_{\text{főrész}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{reguláris rész}}.$$

1. Ha $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}^-$ esetén, akkor z_0 megszüntethető szingularitás, $f(z_0) := c_0 < \infty$.
2. Ha véges sok negatív indexű együttható nem 0, akkor z_0-t pólusnak nevezzük (az ilyen együtthatók száma a pólus rendje).
3. Ha végtelen sok negatív indexre az együttható nem 0, akkor z_0-t lényeges szingularitásnak nevezzük.

Definíció: a Laurent sorfejtésben a c_{-1} együtthatót a függvény z_0-beli reziduumának nevezzük.

$\mathrm{Rez}_{z_0} f := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} f(\zeta) d\zeta$

Megjegyzés: $\int_{S_r} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}_{z_0} f$.

Reziduum-tétel: tfh f holomorf az Ω tartományon a $z_1, z_2, ..., z_k$ izolált szinguláris pontok kivételével. Ekkor véve olyan egyszerű zárt szakaszonként folytonosan differenciálható Γ görbét, amely Ω-ban van a belsejével együtt, $z_1, z_2, ..., z_k \in$ belseje(Γ) $\Rightarrow \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}_{z_j} f$. Bizonyítás:

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^{k} 2\pi i Rez_{z_j} f .$$

Reziduum kiszámítása pólus esetén

Tfh f függvénynek z_0-ban m-edrendű pólusa van:

$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1 (z - z_0) + ... \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + ... + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + c_1(z-z_0)^{m+1} + ...$ Ez már hatványsor. $\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)\right]_{z=z_0} = c_{-1}(m-1)! \Rightarrow \mathrm{Rez}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)\right]_{z=z_0}$

.

Állítás: az f függvénynek z_0-ban m-edrendű pólusa van $\Leftrightarrow g(z) := f(z)(z-z_0)^m$ holomorf és $g(z_0) \neq 0$.

Ugyanis $f(z)(z-z_0)^m = \underbrace{c_{-m}}_{\neq 0} + c_{-m+1}(z-z_0) + ...$

Állítás: ha h holomorf függvény z_0-ban és h-nak z_0-ban m-szeres gyöke van, akkor az $f = \frac{1}{h}$ függvénynek a z_0-ban m-edrendű pólusa van.

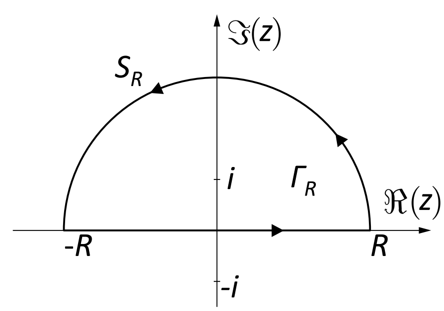
Bizonyítás: $h(z) = (z-z_0)^m h_1(z)$, $h_1(z_0) \neq 0$, h_1 holomorf. $f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m h_1(z)}$,

$g(z) := f(z)(z-z_0)^m = \frac{1}{h_1(z)}$ holomorf, $g(z_0) = \frac{1}{h_1(z_0)} \neq 0$.

A reziduum kiszámításának két egyszerű esete:

1. tfh h-nak z_0-ban egyszeres gyöke van, vagyis $h(z) = (z-z_0)h_1(z)$, $h_1(z_0) \neq 0$. $f = \frac{1}{h}$-nak z_0-ban elsőrendű pólusa van. $m = 1$ esetre
   $Rez_{z_0} f = [f(z)(z-z_0)]_{z=z_0} = \left[\frac{z-z_0}{h(z)}\right]_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{h(z) - \underbrace{h(z_0)}_{0}} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{\underbrace{h'(z_0)}_{\neq 0}}$.
2. tfh $f = \phi\psi$, ahol ϕ holomorf z_0-ban, viszont ψ-nek elsőrendű pólusa van itt. $\mathrm{Rez}_{z_0} f = ?$
   $\phi(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ...$, $\psi = \frac{d_{-1}}{z-z_0} + d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + ...$, így
   $f(z) = \phi(z)\cdot\psi(z) = \frac{c_0 d_{-1}}{z-z_0} + (c_0 d_0 + c_1 d_{-1}) + (c_2 d_{-1} + c_1 d_0 + c_0 d_1)(z-z_0) + ...$,
   $\mathrm{Rez}_{z_0} f = c_0 d_{-1} = \phi(z_0)\cdot \mathrm{Rez}_{z_0}\psi$.

Alkalmazás: a reziduum tétel alkalmazása a (valós) improprius integrálok kiszámítására



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx.\ z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

izolált szingularitás $z = \pm i$-ben, máshol holomorf.

04. 16.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$. Legyen Γ_R az S_R -rel jelölt félkörvonal és a $[-R, R]$ intervallum

egymásutánja, ekkor $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz + \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$, tehát

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \left(\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz - \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \right)$ A reziduum tétel alapján

$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}_i\left(z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}\right)$. A reziduum kiszámításához vegyük észre, hogy

$\underbrace{\frac{e^{iz}}{1+z^2}}_{f} = \underbrace{e^{iz}}_{\phi} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+z^2}}_{\psi} \Rightarrow \mathrm{Rez}_i(\phi \cdot \psi) = \phi(i) \cdot \mathrm{Rez}_i(\psi) = \phi(i) \, . \frac{1}{h'(i)}$, ahol $h(z) = 1 + z^2$, így

$Rez_i(f) = e^{-1}\,\frac{1}{2i} \Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{1}{e \cdot 2i} = \frac{\pi}{e}$.

Most belátjuk, hogy $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} = 0$. A számítás során felhasználjuk, hogy $\left|e^{iz}\right| = e^{\Re(iz)} \le 1$, és hogy

$\left|1+z^2\right| \ge \left|z^2\right| - 1 = |z|^2 - 1$. $\left|\int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| \le \pi R \cdot \sup\limits_{z\in S_R} \left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \le \pi R \frac{1}{|z|^2-1} = \pi R \frac{1}{R^2-1} \to 0$, ha $R \to \infty$, így

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi}{e}$.

Komplex függvények inverze

Először az ún. lokális inverz létezését vizsgáljuk.

Állítás: tfh f holomorf a z_0 pont egy környezetében.

- Ha $f'(z_0) = 0$, akkor f-nek nincs lokális inverze, semmilyen kis környezetében,
- ha $f'(z_0) \neq 0$, akkor f-t a z_0 pont elég kis környezetére leszűkítve, f-nek létezik inverze, az inverz függvény értelmezve és holomorf a $w_0 = f(z_0)$ pont egy környezetében.

Megjegyzés: abból, hogy $\exists f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega \not\Rightarrow f$ injektív. Például nézzük az $f(z) = e^z$ függvényt, mely $2\pi i$ szerint periodikus, vagyis $f(z + 2\pi i) = f(z)$. Ez a függvény tehát nem injektív, pedig $f'(z) = (e^z)' = e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Állítás: az $f(z)=e^z$ függvény injektív az $\Omega:=\{\mathbb{C}\ni z=x+iy: x\in\mathbb{R}, 0\le y<2\pi\}$ -n és $R_f=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Bizonyítás: legyen $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ és $e^z=w$. $z=x+iy\Rightarrow e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, valamint $w=r\cdot e^{i\phi}=r\cdot(\cos\phi+i\sin\phi)$, ahol $r=|w|$, $[0,2\pi)\ni\phi=\arg w$. $e^x=r=|w|\Leftrightarrow x=\ln|w|$, $y=\phi=\arg w$, tehát $e^z=w\Leftrightarrow z=x+iy=\ln|w|+i\arg w$.

Az előbbiek alapján szeretnénk definiálni a természetes alapú logaritmust a komplex számokon.

Definíció: $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ esetén legyen $\log w:=\ln|w|+i\arg w$. (A logaritmus függvény értelmezhető minden olyan tartományon, ahol az argumentum egyértelműen értelmezhető. Mivel $\log(z)=\ln z$, ha z tisztán valós, olykor $\log z$ helyett $\ln z$ jelölést használjuk, még ha z nem is tisztán valós.)

Konform leképezések

Definíció: legyen $\Omega\subset\mathbb{C}$ tartomány. Ha $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorf és $f'(z)\ne 0,\forall z\in\Omega$, akkor f-t konform leképezésnek nevezzük.

Konform leképezések alaptétele: legyen $\Omega\subset\mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, melynek legalább 2 határpontja van. Ekkor létezik egyetlen f konform leképezés, amely Ω -t a $\mathbb{C}$ egységkörére képezi injektív módon úgy, hogy egy adott $z_0\in\Omega$ pontra $f(z_0)=0$, $\arg f'(z_0)=\phi$ adott.

Példa: félsík konform leképezése az egységkörre. $\Omega:=\{z\in\mathbb{C}:\Im(z)>0\}$, $K_1:=\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}$. $f(z):=\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}e^{i\phi}$, ahol a felülvonás a komplex konjugálás. Láthatjuk, hogy f holomorf Ω -n, és $\Im(z)>0$ miatt $\frac{|z-z_0|}{|z-\overline{z_0}|}<1\Leftrightarrow\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\in K_1\Rightarrow w\in K_1$. Ha $\Im(z)=0$, akkor $\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|=1$, ha $\Im(z)<0\Rightarrow\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|>1$, vagyis ekkor w a K_1 -en kívül van.

Alkalmazás áramlástani feladatokra

Síkbeli az áramlás, ha az áramlás sebessége egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban $(\tilde{u}(x,y),\tilde{v}(x,y))$, ahol $\tilde{u}(x,y):=u(x+iy)$, $\tilde{v}(x,y):=v(x+iy)$, $\tilde{w}(x,y):=(\tilde{u}(x,y),\tilde{v}(x,y))$, $w(x+iy):=u(x+iy)+iv(x+iy)$, $\overline{w}(x+iy)=u(x+iy)-i\cdot v(x+iy)$.

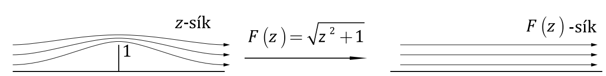
Bizonyos fizikai feltételek teljesülése esetén az áramlás divergencia- és rotációmentes, vagyis $0=\operatorname{div}\tilde{w}:=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}$ és $0=\operatorname{rot}\tilde{w}=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}$. A $\overline{w}$ függvényre teljesülnek a Cauchy-Reimann parciális differenciálegyenletek $\Rightarrow\overline{w}$ holomorf függvény ($\tilde{u}$ és $\tilde{v}$ folytonosan differenciálható). A $\overline{w}$ függvénynek létezik primitív függvénye, $f'(z) := \overline{w}$, $F := f + ig$. Ekkor $\left.\begin{array}{l} F' = \overline{w} = u - iv \\ F' = \frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial g}{\partial x} \end{array}\right\} u = \frac{\partial f}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial g}{\partial x}$. Mivel F holomorf, ezért F-re is teljesülnek a C-R egyenletek: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow u = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. A fizikában f-et a sebesség potenciáljaként definiáljuk. Belátjuk, hogy g az áramvonalak mentén állandó. Áramvonal: olyan $(\phi, \psi) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható görbe, melynél $\left(\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t)\right) \parallel (\widetilde{u}(\phi(t), \psi(t)), \widetilde{v}(\phi(t), \psi(t)))$, $t \in [\alpha, \beta]$, vagyis melynél a görbe érintővektora párhuzamos a helyi sebességvektorral. Ekkor

$$\widetilde{u}(\phi(t), \psi(t)) = \lambda(t) \cdot \dot{\phi}(t) \qquad / \cdot \dot{\psi}(t)$$

$$\widetilde{v}(\phi(t), \psi(t)) = \lambda(t) \cdot \dot{\psi}(t) \qquad / \cdot \dot{\phi}(t)$$

$$\widetilde{u}(\phi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t) - \widetilde{v}(\phi(t), \psi(t))\dot{\phi}(t) = 0$$

A C-R egyenletekből következőket felhasználva, majd a közvetett függvény deriválására vonatkozó összefüggésből $\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial y}(\phi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t) + \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial x}(\phi(t), \psi(t))\dot{\phi}(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[\widetilde{g}(\phi(t), \psi(t))] = 0$, tehát a $t \mapsto \widetilde{g}(\phi(t), \psi(t))$ függvény állandó.



Lebesgue-integrál

A Reimann integrál hátrányai:

- csak véges intervallumon és korlátos függvények esetén értelmezhető közvetlenül
- az integrál és a limesz felcserélhetősége csak egyenletes konvergencia esetén lehetséges
- nevezetes függvényterek nem vezethetők be

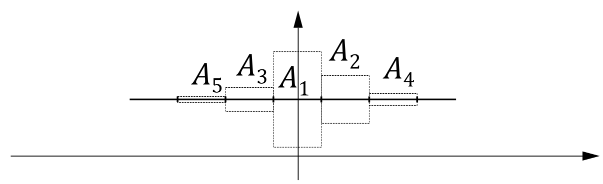
<u>Definíció</u>: legyen I valamilyen $\mathbb{R}^n$ -beli intervallum, azaz $I := I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, ahol $I_j = \left[a_j, b_j\right] \in \mathbb{R}$ egydimenziós intervallumok. Ekkor az I Lebesgue mértéke: $\lambda(I) := \lambda(I_1) \cdot \lambda(I_2) \cdot ... \cdot \lambda(I_n)$, ahol $\lambda\left(I_j\right) = b_j - a_j$.

<u>Definíció</u>: egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt nullmértékűnek nevezünk, ha $\forall \varepsilon > 0$ szám esetén az A halmaz lefedhető megszámlálhatóan (véges vagy végtelen) sok intervallummal úgy, hogy azok mértékének összege $\leq \varepsilon$, vagyis

$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I^k,\ I^k \subset \mathbb{R}^n\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\left(I^k\right) \leq \varepsilon\ .$

Példák:

1. minden megszámlálhatóan (véges vagy végtelen) sok pontból álló halmaz $\mathbb{R}^n$ -ben nullmértékű. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az *i*-edik pontot lefedjük egy I_i kis intervallummal úgy, hogy mértéke $\frac{\varepsilon}{2^i}$ legyen, tehát az első pontot például egy $\frac{\varepsilon}{2}$ mértékű intervallummal. Mivel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$, így az említett halmaz valóban nullmértékű
2. $\mathbb{R}^2$ -ben egy egyenes szakasz nullmértékű, ugyanis lefedhető tetszőlegesen kis magasságú téglalappal
3. $\mathbb{R}^2$ -ben minden egyenes is nullmértékű. Ehhez belátjuk, hogy megszámlálhatóan végtelen sok nullmértékű halmaz uniója is nullmértékű: $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, ekkor az első ponthoz hasonlóan A_j -t befedjük egy legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2^j}$ mértékűvel, vagyis A_1 -t egy legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2}$ -vel, A_2 -t egy legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2^2}$ -tel... Így felhasználva ismét a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$ összefüggést, láthatjuk, hogy az említett halmaz valóban nullmértékű.



Tehát láttuk, hogy $\mathbb{R}^2$ -ben megszámlálhatóan sok nullmértékű halmaz unója is nullmértékű. De ez nem csak $\mathbb{R}^2$ -ben igaz, az érvelés hasonló általános esetben. Legyen A_j nullmértékű, belátjuk, hogy $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ nullmértékű. 04. 23.

$$A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{1,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{1,k}) \le \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{2,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{2,k}) \le \tfrac{\varepsilon}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j,k},\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\left(I_{j,k}\right) \le \tfrac{\varepsilon}{2^j}$$

$$\vdots$$

Ezek az $I_{j',k}$ intervallumok megszámlálhatóan végtelen sokan vannak, mert sorba rendezhetjük őket (táblázatba rendezve őket, az átlók mentén a sorrend: $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{2,1}$, $I_{1,3}$, $I_{2,2}$, $I_{3,1}$ …), ekkor pedig $\sum_{j'=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j'}} = \varepsilon$ miatt az unió is nullmértékű.

Előző órán láttuk, hogy $\mathbb{R}^2$ -ben egy egyenes nullmértékű, ugyanis megszámlálhatóan végtelen sok nullmértékű halmaz uniója. Hasonlóan, $\mathbb{R}^3$ -ben egy sík nullmértékű...

Lépcsős függvények integrálja

Definíció: legyen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy véges sok intervallumban nem 0 állandó, máshol 0. Ekkor *f*-t lépcsős függvénynek nevezzük.

Definíció: legyen *f* lépcsős függvény, mely az I_k intervallumon c_k -val egyenlő. Ekkor $\int f := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda(I_k)$.

Belátható, hogy a definíció egyértelmű.

A lemma Legyen $\left(f_j\right)$ lépcsős függvények monoton csökkenő sorozata, amelyre $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0, \forall x \in \{\mathbb{R} \backslash A\}$, ahol *A* nullmértékű halmaz. Ezt úgy mondjuk, hogy a limesz majdnem *x*-re vagy majdnem mindenütt 0. Ekkor az integrálok $\lim_{j\to\infty} \int f_j = 0$ sorozata . (Bizonyítás nélkül.)

B lemma Legyen $\left(f_j\right)$ lépcsős függvények egy monoton növő sorozata, amelyre az integrálok sorozata $\int f_j$ felülről korlátos, $\int f_j \le C \in \mathbb{R}, \forall j \Leftrightarrow \lim \int f_j$ véges. Ekkor majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$ pontra $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ is véges.

Bizonyítás: legyen $M_0 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = \infty \right\}$! Ekkor belátandó, hogy M_0 nullmértékű. Tetszőleges rögzített $\varepsilon > 0$ esetén legyen $M_{\varepsilon,j} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) > \frac{C}{\varepsilon} \right\}$! Mivel (f_j) monoton növő, ezért $M_{\varepsilon,1} \subset M_{\varepsilon,2} \subset M_{\varepsilon,3} \subset \ldots \Rightarrow M_{\varepsilon,N} = \bigcup\limits_{j=1}^{N} M_{\varepsilon,j}$. Jelöljük: $M_\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists j \in \mathbb{N} : f_j(x) > \frac{C}{\varepsilon} \right\}$. Ekkor

$M_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_{\varepsilon,j}$, $M_0 \subset M_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. $M_{\varepsilon,j}$ véges sok diszjunkt intervallum egyesítése, melyek mértékének

összege $\leq \varepsilon, \forall j$, mert ha nem így lenne, akkor az $\int f_j > \varepsilon \dfrac{C}{\varepsilon} = C$ ellentmondásra vezetne. Tehát

$M_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_{\varepsilon,j}$ megszámlálhatóan végtelen sok intervallum uniója,

$M_{\varepsilon,1} \subset M_{\varepsilon,2} \subset \ldots \Rightarrow \lambda(M_{\varepsilon,1}) \leq \lambda(M_{\varepsilon,2}) \leq \ldots \leq \varepsilon \Rightarrow \lambda(M_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_{\varepsilon,j} \right) \leq \varepsilon$. $M_0 \subset M_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow M_0$

nullmértékű.

<u>Definíció</u>: jelölje C_1 az olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények összességét, amelyekhez léteznek lépcsős függvények monoton növekedő olyan (f_j) sorozata, hogy $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ majdnem minden x-re és $\left(\int f_j \right)$ sorozat felülről korlátos $\Leftrightarrow \exists \lim \int f_j < \infty$.

Megjegyzés: tfh $f \in C_1$. Ekkor az $\int f$ -t így szeretnénk értelmezni: $\int f := \lim\limits_{j\to\infty} \int f_j$. Kérdés:

1. egy ilyen definíció egyértelmű lenne-e, vagyis függ-e az (f_j) sorozat megválasztásától?
2. Ha spec. f lépcsős függvény, akkor a régi és az új definíció azonos-e?

<u>Tétel</u>: legyenek $f, g \in C_1$, $f \leq g$, (f_j) és (g_j) lépcsős függvények monoton sorozata úgy, hogy $\lim(f_j) = f$, $\lim(g_j) = g$, továbbá $\int f_j$ és $\int g_j$ korlátos. Ekkor $\lim \int f_j \leq \lim \int g_j$.

Bizonyítás: jelöljük egy $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény pozitív illetve negatív részét: $h^+(x) := \begin{cases} h(x) & \text{ha } h(x) > 0 \\ 0 & \text{ha } h(x) \leq 0 \end{cases}$,

$h^-(x) := \begin{cases} h(x) & \text{ha } h(x) < 0 \\ 0 & \text{ha } h(x) \geq 0 \end{cases}$. Tekintsük rögzített $j \in \mathbb{N}$ esetén a következő függvénysorozatot:

$(f_j - g_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Mivel (g_k) monoton növő, $(f_j - g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton csökkentő függvénysorozat.

$\lim\limits_{k\to\infty} (f_j - g_k) = f_j - g$ majdnem mindenütt. Mivel (f_j) monoton növő és $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt

$\Rightarrow f_j \le f \le g \Rightarrow f_j \le g$, vagyis $f_j - g \le 0$ majdnem mindenütt. $\lim\limits_{k\to\infty}(f_j - g_k) = f_j - g \le 0$. Tekintsük $(f_j - g_k)^+_{k\in\mathbb{N}}$-t, ez is lépcsős függvénysorozat, ez is monoton csökkenő, $\lim\limits_{k\to\infty}(f_j - g_k)^+ = (f_j - g)^+ = 0$ majdnem mindenütt. Alkalmazzuk az A lemmát az $(f_j - g_k)^+_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatra $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\int (f_j - g_k)^+ = 0$. Nyilván $h^- \le h \le h^+ \Rightarrow f_j - g_k \le (f_j - g_k)^+ \Rightarrow \int (f_j - g_k) \le \int (f_j - g_k)^+ \Rightarrow \int f_j - \int g_k \le \int (f_j - g_k)^+$.
Ekkor $k \to \infty$ esetre $\int f_j - \lim\limits_{k\to 0}\int g_k \le 0 \Rightarrow \int f_j \le \lim\limits_{k\to\infty}\int g_k, \forall j$, ezért $\lim\limits_{j\to\infty}\int f_j \le \lim\limits_{k\to\infty}\int g_k$.

Következmények:

1. Ha $f = g \in C_1$ és (f_j) és (g_j) lépcsős függvények monoton növekedő sorozata, amelyekre $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt és $\lim(g_j) = g$ majdnem mindenütt, akkor $\Rightarrow \lim\int f_j = \lim\int g_j$. Most már lehet definiálni: $\int f := \lim\int f_j$, ahol $f \in C_1$.
2. Ha f spec. lépcsős függvény, akkor a régi és az új integrál definíciója azonos, ugyanis választható $f_j = f$-nek.
3. $f, g \in C_1$ és $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$.

Az integrál tulajdonságai C_1-ben

1. Ha $f, g \in C_1 \Rightarrow (f+g) \in C_1$ és $\int (f+g) = \int f + \int g$.
2. Tfh $f \in C_1, \lambda \ge 0$ állandó $\lambda \cdot f \in C_1$ és $\int \lambda f = \lambda \int f$.
3. Ha $f \in C_1 \Rightarrow f^+ \in C_1, f^- \in C_1$.

Bizonyítás:

1. Definíció szerint $\exists (f_j)$ és $\exists (g_j)$ monoton növekedő lépcsős függvénysorozatok, melyekre $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt, $\lim(g_j) = g$ majdnem mindenütt és $\int f = \lim\int f_j$ valamint $\int g = \lim\int g_j$.
$(f_j + g_j)$ lépcsős függvények monoton növő sorozata, $\lim(f_j + g_j) = f + g$.
$\lim\int (f_j + g_j) = \lim\left[\int f_j + \int g_j\right] = \lim\int f_j + \lim\int g_j \Rightarrow$
$\Rightarrow \int (f+g) = \lim\int f_j + \lim\int g_j = \int f + \int g$.
2. $f \in C_1 \Rightarrow \exists (f_j)$ lépcsős függvények monoton növő sorozata, hogy $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt.
Ekkor $\lim\int f_j = \int f \Rightarrow (\lambda f_j)$ lépcsős függvények monoton sorozata,

$$\lim \int \lambda f_j = \lambda \lim \int f_j = \lambda \int f \Rightarrow \int \lambda f = \lambda \int f.$$

3. $(f_j) \to f$ monoton növekvő, $(f_j^+) \to f^+$ monoton növekvő, és $(f_j^-) \to f^-$ szintén

Definíció: $(f \cup g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$, $(f \cap g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$.

Állítás: ha $f, g \in C_1 \Rightarrow (f \cup g) \in C_1, (f \cap g) \in C_1$.

Integrálás a C_2 osztályában

Definíció: ha $f = f_1 - f_2$, ahol $f_1, f_2 \in C_1$, akkor $f \in C_2$. Ekkor legyen $\int f := \int f_1 - \int f_2$.

Állítás: az integrál definíciója egyértelmű.

Bizonyítás: legyen $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, ahol $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1$. $\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$ ugyanis $\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$, mert $f_1 + g_2 = g_1 + f_2 \Rightarrow \int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$.

A C_2 -beli integrál tulajdonságai:

1. ha $f, g \in C_2 \Rightarrow f + g \in C_2$ és $\int f + g = \int f + \int g$
2. $f \in C_2, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot f \in C_2$ és $\int \lambda f = \lambda \int f$
3. $f, g \in C_2$, $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$
4. Ha $f \in C_2$, akkor egy nullmértékű halmazon megváltoztatva szintén továbbra is $\in C_2$ marad, és az integrál értéke nem változik
5. Ha $f \in C_2 \Rightarrow f^+, f^-, |f| \in C_2$.
6. Ha $f \in C_2 \Rightarrow \left|\int f\right| \leq \int |f|$.
7. Legyen $f \in C_2$, ekkor $\exists (f_j)$ lépcső függvényekből álló sorozat (nem feltétlen monoton), hogy $(f_j) \to f$ majdnem mindenhol és $\int f_j \to \int f$

Bizonyítás:

1. $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$, ahol $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_1 \Rightarrow f + g = \underbrace{(f_1 + g_1)}_{\in C_1} - \underbrace{(f_2 + g_2)}_{\in C_1}$,

$$\int (f + g) = \int (f_1 + g_1) - \int (f_2 + g_2) = \left[\int (f_1) + \int (g_1)\right] - \left[\int (f_2) + \int (g_2)\right] =$$

$$= \left(\int f_1 - \int f_2\right) + \left(\int g_1 - \int g_2\right) = \int f + \int g$$

2. $f = f_1 - f_2, f_1 \in C_1$, ekkor $\lambda f = \lambda f_1 - \lambda f_2$. Ha $\lambda \geq 0$, akkor $\lambda f = \underbrace{\lambda f_1}_{\in C_1} - \underbrace{\lambda f_2}_{\in C_1}$. Ha $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda f = \underbrace{(-\lambda)}_{>0} f_2 - \underbrace{(-\lambda)}_{>0} f_1$.
3. $f \leq g \Rightarrow g - f \geq 0$. Azt kellene igazolni, hogy ekkor $\int \underbrace{(g-f)}_{=h} \geq 0$. $h \geq 0$, $h: = h_1 - h_2$, $h_j \in C_1 \Rightarrow h_1 \geq h_2 \Rightarrow \int h_1 \geq \int h_2 \Rightarrow \int h_1 - \int h_2 \geq 0 \Rightarrow \int h \geq 0$.
5. $f = f_1 - f_2, f_j \in C_1$. $|f| = \underbrace{(f_1 \cup f_2)}_{\in C_1} - \underbrace{(f_1 \cap f_2)}_{\in C_1}$. $f^+ = (f_1 \cup f_2) - f_2$, $f^- = \underbrace{(f_1 \cup f_2)}_{\in C_1} - \underbrace{f_1}_{\in C_1}$
6. $-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$.
7. $f \in C_2 \Rightarrow \exists g, h: f = g - h$, ahol $g, h \in C_1 \Rightarrow \exists \left(g_j\right)$ (monoton növő) lépcsős függvénysorozat, hogy $\left(g_j\right) \to g$ majdnem mindenütt és $\lim \int g_j = \int g$ továbbá $\exists \left(h_j\right)$ (monoton növő) lépcsős függvénysorozat, hogy $\left(h_j\right) \to h$ majdnem mindenütt és $\lim \int h_j = \int h \Rightarrow \lim\left(g_j - h_j\right): = \lim\left(f_j\right) = g - h = f$ majdnem mindenütt, $\int \lim\left(g_j - h_j\right) = \int \left(\lim g_j - \lim h_j\right) = \lim \int g_j - \lim \int h_j = \int g - \int h = \int f$.

Állítás: ha $f, g \in C_2 \Rightarrow (f \cup g) \in C_2, (f \cap g) \in C_2$.

Bizonyítás: $f \cup g = \underbrace{(f-g)^+}_{\in C_2} + \underbrace{g}_{\in C_2}$, $f \cap g = \underbrace{f}_{C_2} - \underbrace{(f-g)^+}_{C_2}$

Beppo Levi tétele (monoton sorozatokból, illetve nemnegatív tagú sorokról)

1. Tfh $f_j \in C_2$ (integrálható), $\left(f_j\right)$ monoton nő és $\lim \int f_j$ véges ($\Leftrightarrow \int f_j$ felülről korlátos). Ekkor $f(x): = \lim\left(f_j(x)\right)$ véges majdnem minden x-re, továbbá f is integrálható, $\int f = \lim \int f_j$.
2. Sorokra: tfh $g_j \in C_2$, $g_j \geq 0$ és $\sum_{j=1}^{\infty} \int g_j < \infty$. Ekkor majdnem minden x-re $C_2 \ni f(x): = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) < \infty$ (a sor konvergens) és $\int f = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$.

A két állítás egymással ekvivalens, ugyanis legyen $f_k := \sum_{k=1}^{k} g_j$. Az f_k monoton nő $\Leftrightarrow g_j \geq 0$,

$\lim \int f_k = \lim \int \sum_{j=1}^{k} g_j = \lim \sum_{j=1}^{k} \int g_j$. A sorokra vonatkozó formáját fogjuk bizonyítani.

Beppo Levi tételének bizonyítása

04.30

Két részre bontjuk a bizonyítást, első részben $g_j \in C_1$.

Ez azt jelenti, hogy $\exists h_{j_k} : \lim_{k\to\infty} \left(h_{j_k}\right) = g_j$ majdnem mindenütt, ahol h_{j_k} lépcsős függvények, monoton nőnek, továbbá $\int g_j = \lim_{k\to\infty} \int h_{j_k}$. Mivel $g_j \geq 0$, ezért feltehető, hogy $h_{j_k} \geq 0$, ugyanis h_{j_k} helyett választhatnánk a $h_{j_k}^{+}$ függvényeket is. 5let: jelöljük $H_k := \sum_{j=1}^{k} h_{j_k}$, ekkor H_k is lépcsős függvény és (H_k) monoton növő sorozat, ugyanis $H_{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1} h_{j_{k+1}} \geq \sum_{j=1}^{k} h_{j_{k+1}} \geq \sum_{j=1}^{k} h_{j_k} = H_k$, továbbá $h_{j_k} \leq g_j$, mert $\left(h_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növőleg tart g_j -hez. $H_k = \sum_{j=1}^{k} h_{j_k} \leq G_k := \sum_{j=1}^{k} g_j \Rightarrow \int H_k \leq \int G_k = \int \sum_{j=1}^{k} g_j = \sum_{j=1}^{k} \int g_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j < \infty$.

Alkalmazzuk a B lemmát a (H_k) sorozatra. Eszerint $\exists H : \lim(H_k) = H \Rightarrow H \in C_1$ majdnem mindenütt, és $\int H = \lim \int H_k$. Legyen $m > k$, ekkor $H_m = \sum_{j=1}^{m} h_{j_m} \geq \sum_{j=1}^{k} h_{j_m}$. Ha most $m \to \infty$, akkor $H_m \to H, h_{j_m} \to g_j$ majdnem mindenütt, így $H \geq \sum_{j=1}^{k} g_j = G_k$. Tehát $H_k \leq G_k \leq H$. Ha most $k \to \infty$, akkor $H_k \to H$, így $G_k \to H$. $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} g_j(x) = H(x) =: f(x)$, vagyis $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) = f(x)$. $H \in C_1 \Leftrightarrow f \in C_1$.

$H_k \leq G_k \leq H \Rightarrow \int H_k \leq \int G_k \leq \int H$, ahol $\int H_k \to \int H$, így $\int G_k \to \int H = \int f$.

$\int \sum_{j=1}^{k} g_j = \sum_{j=1}^{k} \int g_j \to \int f$.

Most a második része a bizonyításnak: általános estben vizsgálódunk, mikor $g_j \in C_2$. Észrevétel: $\forall \varepsilon > 0 \forall \phi \in C_2 \exists \phi_1, \phi_2 \in C_1 : \phi = \phi_1 - \phi_2, \phi_2 \geq 0, \int \phi_2 \leq \varepsilon$. Ugyanis tetszőleges $\phi \in C_2$ esetén ϕ

előállítható $\phi = \phi_1 - \phi_2$ formában, ahol $\phi_1, \phi_2 \in C_1$. Mivel $\phi_2 \in C_1$, ezért $\exists(\psi_k)$ monoton növő lépcsős függvény sorozat, amelyre $\lim(\psi_k) = \phi_2$ majdnem mindenütt , $\lim \int (\psi_k) = \int \phi_2$. $\phi_2 \geq \psi_k \Rightarrow \phi_2 - \psi_k \geq 0, \forall k$. $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : \int \left(\phi_2 - \psi_{k_0}\right) \leq \varepsilon$. Így $\phi = \underbrace{\left(\phi_1 - \psi_{k_0}\right)}_{\in C_1} - \underbrace{\left(\phi_2 - \psi_{k_0}\right)}_{\geq 0, \in C_1, \int \left(\phi_2 - \psi_{k_0}\right) \leq \varepsilon}$.

Alkalmazzuk tehát az észrevételt $g_j \in C_2$ függvényekre: $g_j = g_{j,1} - g_{j,2}$, ahol $g_{j,1}, g_{j,2} \in C_1$ és $g_{j,2} \geq 0$, $\int g_{j,2} \leq \frac{1}{2^j}$. Tehát $g_{j,2} \geq 0$, $g_{j,2} \in C_1$, $\sum_{j=1}^{\infty} \int g_{j,2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty$. A $g_{j,2}$ tagokból álló sorra alkalmazható a bizonyítás első része, így $\sum_{j=1}^{\infty} g_{j,2}(x) := g_2^*(x)$ konvergens majdnem minden x-re, $g_2^* \in C_1$, $\int g_2^* = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_{j,2}$. Másrészt $g_{j,1} = g_j + g_{j,2} \geq 0$, $g_{j,1} \in C_1$. $\int g_{j,1} = \int g_j + \int g_{j,2}$, így $\sum_{j=1}^{\infty} \int g_{j,1} = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j + \sum_{j=1}^{\infty} \int g_{j,2}$, ezért a $g_{j,1}$ tagokból álló sorra is alkalmazható a bizonyítás első része $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} g_{j,1}(x) := g_1^*(x)$ konvergens majdnem minden x-re, $g_1^* \in C_1$, $\int g_1^* = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_{j,1}$, így $\sum_{j=1}^{\infty} g_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(g_{j,1} - g_{j,2}\right) = g_1^* - g_2^* =: f$ konvergens majdnem minden x-re és $f \in C_2$, mert $g_1^* \in C_1$ és $g_2^* \in C_1$; továbbá $\int f = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$.

Következmények (a vizsgán a tételek következményei legalább oly fontosak, mint a bizonyítások):

1. tfh $f_j \in C_2$, $\left(f_j\right)$ monoton nő, $\lim\left(f_j\right) = f$ majdnem mindenütt, ahol $f \in C_2$, ekkor $\int f = \lim \int f_j$.
   Ugyanis a feltevésekből következik, hogy $f_j \leq f \Rightarrow \int f_j \leq \int f$, így a Beppo-Levi tétel miatt $\int f = \lim \int f_j$.
2. tfh $g_j \in C_2$, $g_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} g_j = f$ majdnem mindenütt, vagyis konvergens, ahol $f \in C_2$. Ekkor
   $\int f = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$. (A részletösszegekre alkalmazzuk az 1-t.)

3. ha $g_j \in C_2$, de nem teszem fel róluk, hogy nemnegatívak, de $\sum_{j=1}^{\infty} \int |g_j| < \infty \Rightarrow$ majdnem minden x-re

$\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) = f(x)$, vagyis a sor majdnem mindenütt konvergens, ahol $f \in C_2$, $\int f = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j$.

Bizonyítás: $-|g_j| \le g_j^- \le g_j \le g_j^+ \le |g_j| \Rightarrow \int g_j^+ \le \int |g_j|, \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j^+ < \infty$.

$-g_j^- \le |g_j| \Rightarrow \int (-g_j^-) \le \int |g_j| \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \int (-g_j^-) \le \sum_{j=1}^{\infty} \int |g_j| < \infty$. A Beppo Levi tétel alkalmazható

g_j^+ , illetve a $(-g_j^-)$ tagokból álló sorra. Tehát $\exists \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} (-g_j^-) := -f_-$ és $\exists \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} g_j^+ := f_+$, így

$g_j = g_j^+ + g_j^- \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} g_j = \sum_{j=1}^{\infty} (g_j^+ + g_j^-) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j^+ + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^- = f_+ + f_- := f$, valamint

$$\int f = \int (f_- + f_+) = \int \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j^- + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^+ \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j^- + \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j^+ .$$

4. ha $f \in C_2$, $f \ge 0$, $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$ majdnem mindenütt.

   Bizonyítás: alkalmazzuk a Beppo Levi tételt $g_j := f$ $\forall j$ -re: $g_j \ge 0$, $g_j \in C_2$,

   $\int g_j = \int f = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \int g_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{g_j(x)}_{f(x)}$ konvergens majdnem minden x-re $\Rightarrow f(x) = 0$ majdnem

   minden x-re.

Lebesgue tétel

Kérdés: ha $f_j \in C_2$, $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt, akkor igaz-e, hogy $\Rightarrow f \in C_2$, $\int f = \lim \int f_j$.

Válasz: általában nem, de más megszorítást alkalmazva már igen.

Példák:

1. $f_j(t) = (j+1)t^j, t \in [0,1], j \in \mathbb{N}$. Ekkor $\lim_{j\to\infty} f_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \in [0,1) \\ \infty & \text{ha } t = 1 \end{cases}$, vagyis $\lim f_j = 0$ majdnem

mindenütt a [0,1] intervallumon. $\lim_{j\to\infty}\int_0^1 f_j(t) = \left[t^{j+1}\right]_0^1 = 1 \neq \int_0^1 \lim_{j\to\infty} f_j(t) = 0$.

2. $f_j(t) = (j+1)^2 t^j, t \in [0,1], j \in \mathbb{N}$, ekkor megint $\lim f_j = 0$ majdnem mindenütt, de $\int_0^1 f_j(t) = (j+1) \to \infty.$

Tétel (Lebesgue tétel): tfh $f_j \in C_2$, $\lim f_j = f$ majdnem mindenütt, $\exists g \in C_2 : \left|f_j(x)\right| \leq g(x)$ majdnem minden x-re, $\forall j$. Ekkor $f \in C_2$ és $\int f = \lim \int f_j$.

Bizonyítás: jelöljük: $h_j(x) := \sup\left\{f_j(x), f_{j+1}(x), ...\right\} = \bigcup_{k=j}^{\infty} f_k(x)$. Mivel $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ majdnem mindenütt, ezért $\lim_{j\to\infty} h_j(x) = f(x)$ majdnem minden x-re, $\left(h_j\right)$ monoton csökkenő sorozat. Belátandó először, hogy $h_j \in C_2, \forall j$. Pl.: $h_1(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), ...\}$, $h_{1,k} := \sup\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\} = \bigcup_{j=1}^{k} f_j$. $h_{1,k} \in C_2$, $(h_{1,k})$ növő, $\int h_{1,k} \leq \int g \Rightarrow \lim_{k\to\infty} h_{1,k}$ véges majdnem mindenütt (Beppo Levi monoton (növő) sorozatokra), így $h_1 = \lim_{k\to\infty} h_{1,k} \Rightarrow h_1 \in C_2$. $\left(h_j\right) \in C_2$, monoton csökkenő sorozat, $\int h_j \geq -\int g \Rightarrow \lim h_j = f$ integrálható (Beppo Levi monoton (csökkenő) sorozatokra), továbbá $\int f = \lim \int h_j$. Észrevétel: $f_j \leq h_j \Rightarrow \int f_j \leq \int h_j$. Most fordítva: $\phi_j(x) := \inf\left\{f_j(x), f_{j+1}(x), ...\right\}$. Ekkor $\lim \phi_j = f$ majdnem mindenütt, $\left(\phi_j\right)$ monoton növő. Ekkor az előbbiekhez hasonló módon belátható, hogy $\phi_j \in C_2, \forall j$. $\phi_j \leq f_j \leq g \Rightarrow \int \phi_j \leq \int g$. Ekkor a Beppo Levi tételét alkalmazva monoton (növő) sorozatokra, $\lim\left(\phi_j\right) = f$ integrálható, $\int f = \lim \int \phi_j$, $\phi_j \leq f_j \leq h_j \Rightarrow \int \phi_j \leq \int f_j \leq \int h_j \Rightarrow \lim \int f_j = f$.

Spec eset: (kis Lebesgue tétel) tfh $\left(f_j\right) \to f$ majdnem mindenütt, $\exists a > 0 : |x| > a$ esetén $f_j(x) = 0$ és $\exists K > 0 : |x| \leq a$ esetén $\left|f_j(x)\right| \leq K$, $\forall j$. Ekkor $f \in C_2$ és $\int f = \lim \int f_j$.

Bizonyítás: a $g(x) := \begin{cases} K & \text{ha } |x_k| \leq a, \forall k \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$ függvényt bevezetve az állítást visszavezettük az előző tételre.

Tétel (Fatou lemma): tfh $f_j \in C_2$, $\lim\left(f_j\right) = f$ majdnem mindenütt, továbbá $0 \leq f_j$ majdnem mindenütt, $\int f_j$

viszont felülről korlátos. Ekkor $f \in C_2$, $\int f \leq \liminf \int f_j$. (Bizonyítás lehetséges a Lebesgue tétel bizonyításának gondolatmenetével.)

Tétel: tfh $f_j \in C_2$, $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt és $\exists g \in C_2 : |f| < g$. Ekkor $f \in C_2$.

Bizonyítás: visszavezetjük a Lebesgue tételre. Legyen $g_j(x) := \begin{cases} f_j(x) & \text{ha } |f_j(x)| \leq g(x) \\ g(x) & \text{ha } f_j(x) > g(x) \\ -g(x) & \text{ha } f_j(x) < -g(x) \end{cases}$. Ekkor $|g_j| \leq g \in C_2$. Mivel $|f| \leq g$ és $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt $\Rightarrow \lim(g_j) = f$ majdnem mindenütt a definícióból következően. Alkalmazzuk a (g_j) sorozatra a Lebesgue tételt, melyből következik, hogy $f \in C_2$.

Mérhető függvények

Definíció: egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt (Lebesgue szerint) mérhetőnek nevezünk, ha előállítható lépcsős függvények konvergens sorozatának határértékeként majdnem mindenütt.

Állítás: ha $f \in C_2 \Rightarrow f$ mérhető. Ezt láttuk korábbról már. (C_2 osztály tárgyalása során.)

Állítás: ha f mérhető és $\exists g \in C_2 : |f| \leq g \Rightarrow f \in C_2$. Ez következik az előző tételből.

Példa: mérhető, de nem integrálható függvényre: $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x_k| \leq j,\ \forall k = 1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$.

Ekkor $f_j \in C_2$ lépcsős függvény, $\lim f_j(x) = f(x), \forall x \Rightarrow f$ mérhető, de $\int f_j \to \infty$, vagyis f nem integrálható, ugyanis (f_j) monoton nő, ezért ha f integrálható lenne, akkor Beppo Levi miatt $\int f = \lim \int f_j = \infty$ lenne.

Állítás: ha f, g mérhetőek, akkor

1. $f + g$ is mérhető,
2. $f \cdot g$ is mérhető,
3. $\frac{f}{g}$ is mérhető, ha $g \neq 0$ majdnem mindenütt.

Bizonyítás:

1. $f = \lim(f_j)$ majdnem mindenütt, f_j lépcsős függvény, $g = \lim(g_j)$ majdnem mindenütt, g_j lépcsős függvény, $f + g = \lim(f_j + g_j)$ majdnem mindenütt, $f_j + g_j$ is lépcsős függvény.

3. $\frac{1}{g}$ -re látjuk be, mellyel a 3. állítás 2-ból igazolható: $g = \lim(g_j)$ majdnem mindenütt,

$$h_j := \begin{cases} \frac{1}{g(x)} & \text{ha } g_j(x) \neq 0 \\ 0 & \text{ha } g_j(x) = 0 \end{cases}$$, melyből következik, hogy $\lim(h_j) = \frac{1}{g}$ majdnem mindenütt.

Tétel: tfh f_j mérhető, $\lim(f_j) = f$ majdnem mindenütt $\Rightarrow f$ mérhető. 05.14

Bizonyítás: legyen $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $g(x) > 0, \forall x$ és $g \in C_2$. Értelmezzük a h_j függvényeket az alábbiak szerint: $h_j := \frac{f_j g}{|f_j| + g}$, h_j mérhető és $|h_j| \leq g \Rightarrow h_j \in C_2$. $\lim(h_j) = \frac{fg}{|f|+g} := h$ majdnem mindenütt. Alkalmazzuk a Lebesgue tételt a (h_j) sorozatra! $h = \frac{fg}{|f|+g} \in C_2$, így a fenti összefüggés szerint $\frac{fg}{|f|+g} = h \Rightarrow fg - |f|h = gh \Leftrightarrow fg - f|h| = gh$ mert $\operatorname{sgn} h = \operatorname{sgn} f$, így $f = \frac{gh}{g - |h|}$, ez pedig mérhető, mert a számláló mérhető, ugyanis g és h is mérhetők, és mert a nevező is mérhető, továbbá $g - |h| > 0$, ugyanis $|h| = \frac{|f|g}{|f|+g} < g$.

Tétel: tfh $f_1, f_2, \ldots, f_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető, $g:\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ folytonos! Ekkor $h := g \circ (f_1, f_2, \ldots, f_r) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető.

Bizonyítás: f_k mérhető $\Rightarrow \exists (\phi_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ lépcsős függvénysorozat, hogy $(\phi_{k,j})_{j \in \mathbb{N}} \to f_k$ majdnem mindenütt. $h_j := g \circ (\phi_{1,j}, \phi_{2,j}, \ldots, \phi_{r,j})$ véges sok intervallumon állandó. $g(0,0,\ldots,0) \neq 0$ esetén h_j helyett vesszük a $h_j^*(x) = \begin{cases} h_j(x) & \text{ha } |x| \leq j \\ 0 & \text{ha } |x| > j \end{cases}$ függvényt. Mivel $h_j(x) \to h(x)$ minden x-re $\Rightarrow h_j^*(x) \to h(x)$ majdnem minden x-re, h_j^* lépcsős függvény.

Mérhető halmazok, mérték

Definíció: legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz. Az A halmaz karakterisztikus függvényének nevezzük:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$. Látható, hogy ekkor $\chi_A(x) \geq 0$.

Definíció: Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt mérhetőnek nevezünk, ha $\chi_A(x)$ mérhető függvény. Ekkor az A halmaz mértékét így értelmezzük: $\lambda(A) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A & \chi_A \in C_2 \\ \infty & \chi_A \notin C_2 \end{cases}$ (korábban lehagytuk, hogy milyen halmazon integrálunk, mert egyértelmű volt). Láthatjuk, hogy $\lambda(A) \geq 0$.

Állítás: két mérhető halmaz különbsége, véges és megszámlálhatóan végtelen sok mérhető halmaz uniója és metszete is mérhető.

Bizonyítás: $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$ mérhető függvény. $\chi_{\overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} A_j} = \overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} \chi_{A_j}$, ahol χ_{A_j} mérhető függvények (felső burkoló). $\chi_{\overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} A_j} = \lim\limits_{k\to\infty} \overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} \chi_{A_j}$

Állítás: egy $A \subset \mathbb{R}^n$ nullmértékű $\Leftrightarrow \lambda(A) = 0$, azaz $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A = 0$.

Bizonyítás: $\Rightarrow$ irányba: ha A nullmértékű, $\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A = 0$ mert $\chi_A = 0$ majdnem mindenütt, ha A nullmértékű.

$\Leftarrow$ irányba: ha $\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A = 0$, $\chi_A \geq 0 \Rightarrow \chi_A = 0$ majdnem mindenütt $\Rightarrow A$ nullmértékű.

Tétel: ha $A = \overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} A_j$ és A_j mérhetők, páronként diszjunktak $\Rightarrow \lambda(A) = \lambda\left(\overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} A_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda(A_j)$. Ezt úgy mondjuk, hogy a mérték additív halmazfüggvény.

Bizonyítás: ugyanis ha a fentiek teljesülnek, akkor $\chi_A = \chi_{\overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} A_j} = \sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{A_j} \Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A}_{\lambda(A)} = \sum\limits_{j=1}^{k} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_j}}_{\lambda(A_j)}$.

Tétel: ha $A = \overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} A_j$, A_j mérhetők, páronként diszjunktak $\Rightarrow \lambda(A) = \lambda\left(\overset{k}{\underset{j=1}{\cup}} A_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$. Ezt úgy mondjuk, hogy a mérték σ additív.

Bizonyítás: csak vázolva: $\chi_{\overset{\infty}{\underset{j=1}{\cup}} A_j} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}$, most pedig a Beppo Levi tételt alkalmazzuk.

Integrálás mérhető halmazokon

Eddig $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények (Lebesgue) integrálját értelmeztük.

Definíció: legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz, $f: A \to \mathbb{R}$ függvény. Legyen $\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$. Ha $\widetilde{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény integrálható, akkor azt mondjuk, hogy az $f: A \to \mathbb{R}$ függvény integrálható és $\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}$.

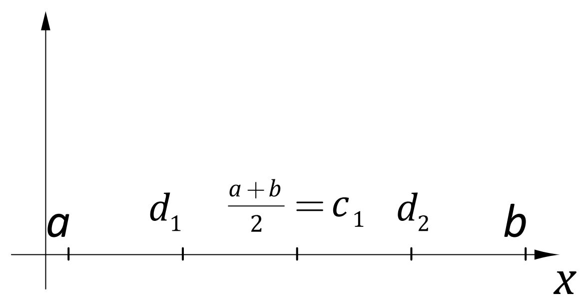
Megjegyzés:

- ha $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény integrálható és $A \subset \mathbb{R}^n$ mérhető, akkor $h := g|_A : A \to \mathbb{R}$ integrálható, ugyanis $\widetilde{h} := \begin{cases} h(x) & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$, ekkor $\widetilde{h} := g \cdot \chi_A$ mérhető, továbbá $|\widetilde{h}| \leq |g|$ integrálható $\Rightarrow \widetilde{h}$ is integrálható.
- Ha $f: A \to \mathbb{R}^n$ integrálható, B mérhető, $B \subset A \Rightarrow f|_B$ is integrálható.

A Lebesgue és Riemann integrál kapcsolata

Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Tétel: ha f egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaz kivételével folytonos, akkor f függvény Riemann és Lebesgue szerint is integrálható, és a kétféle integrál egyenlő.



Bizonyítás: először belátjuk, hogy az f Lebesgue integrálható (sőt, $f \in C_1$).

$$\phi_1 := \begin{cases} \inf\left\{ f(x): a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \right\} & \text{ha } x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \inf\left\{ f(x): \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \right\} & \text{ha } x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

$$\phi_2 := \begin{cases} \inf\{ f(x): a \leq x \leq d_1 \} & \text{ha } x \in [a, d_1] \\ \inf\{ f(x): d_1 < x \leq c_1 \} & \text{ha } x \in (d_1, c_1] \\ \vdots & \vdots \\ \inf\{ f(x): d_2 < x \leq b \} & \text{ha } x \in (d_2, b] \end{cases}$$

... és így tovább (vagyis az egyes intervallumokat mindig felezzük), valamint $\phi_k(x) := 0$ ha $x \notin [a,b], \forall k$. Ekkor ϕ_k -k lépcsős függvények, (ϕ_k) monoton növő. Mivel f folytonos egy nullmértékű halmaz kivételével, ezért $\phi_k(x) \to f(x)$ majdnem mindenütt (ahol f folytonos). $\int_L \phi_k \leq (b-a)M$, ahol M olyan szám, amelyre $|f(x)| \leq M$, ezért $f \in C_1$, $\int_L f = \lim \int_L \phi_k$ (Lebesgue integrál).

Az f függvény egy Riemann féle felső összege $\int_L \psi_k$, ahol

$$\psi_1(x) := \begin{cases} \sup\left\{f(x): a \le x \le \frac{a+b}{2}\right\} & ha \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \sup\left\{f(x): \frac{a+b}{2} < x \le b\right\} & ha \quad x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

ψ_k -k lépcsős függvények, monoton csökkenők, $(\psi_k) \to f$ majdnem mindenütt.

$\int_{\mathrm{R}} \psi_k \ge -(b-a)M \Rightarrow -f \in C_1$, $\int_{\mathrm{L}} f = \lim \int_{\mathrm{R}} \psi_k$ (ahol előbbi a Lebesgue integrál, utóbbi a Riemann féle integrál felső összege), $\lim \int_{\mathrm{L}} \phi_k = \int_{\mathrm{L}} f$, $\lim \int_{\mathrm{R}} \psi_k = \int_{\mathrm{R}} f \Rightarrow f$ Reimann és Lebesgue integrálható, és az integrálok értéke megegyezik.

Tétel: ha $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann szerint integrálható $\Rightarrow f$ folytonos majdnem mindenütt. (bizonyítás nélkül)

Megjegyzés: ha egy f függvény Riemann szerint improprius integrálja konvergens $\not\Rightarrow f$ Lebesgue integrálható.

Példa: a $[0,\infty)$ intervallumon értelmezzük az f függvényt: $f(x) := (-1)^j \frac{1}{j}$ ha $j-1 \le x < j$, $j \in \mathbb{N}$. $\int_0^\infty f(x)dx$ improprius integrálja konvergens, mert $\sum_{j=1}^\infty (-1)^j \frac{1}{j}$ konvergens. $\int_0^\infty |f(x)|dx$ divergál, mert $\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j}$ divergál. Ha f Lebesgue szerint integrálható $\Rightarrow |f|$ is integrálható Lebesgue szerint. Tehát a fenti f függvény improprius integrálja konvergens, de nem Lebesgue-integrálható.

Másik példa: $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Ekkor f Lebesgue szerint integrálható ($\mathbb{Q}$ egy nullmértékű halmaz), de Riemann szerint nem integrálható.

Tétel (Fubini tétel) (bizonyítás nélkül): tfh $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ képező, integrálható függvény. Ekkor majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $y \mapsto f(x,y)$ integrálható $\mathbb{R}$ -en, továbbá $x \mapsto \int f(x,y)dy$ is integrálható $\mathbb{R}$ -en és $\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right] dy$. Ha f nemnegatív és mérhető, akkor a Fubini tétel mindig érvényes (ilyenkor az integrál ∞ is lehet).

Az $L^2(M)$ függvénytér

Jelöljük: legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ -beli mérhető halmaz, ekkor $L^2(M)$ jelölje az $f: M \to \mathbb{R}$ olyan mérhető függvények összességét, melyekre a függvénynek az abszolútérték négyzete integrálható (ez a témakör nagyon fontos a fizikában is)..

Állítás: ez az $L^2(M)$ vektortér a szokásos műveletekkel.

Bizonyítás: tfh $f, g \in L^2(M) \Rightarrow f, g$ mérhető

- $\Rightarrow f+g \in L^2(M)$, azaz az összeadás nem visz ki a halmazból. Láttuk már, hogy ekkor $f+g$ is mérhető, ha f és g mérhetőek. Továbbá $\underbrace{|f+g|^2}_{\text{mérhető}} \le (|f|+|g|)^2 \le 2\left(|f|^2+|g|^2\right)$. Ez viszont integrálható, így $|f+g|^2$ is integrálható.
- Skalárral való szorzás: $f \in L^2(M) \Rightarrow \lambda f$ mérhető, továbbá $|\lambda f|^2 = |\lambda|^2 |f|^2$ integrálható, így $\lambda f \in L^2(M)$.

Állítás: $f, g \in L^2(M)$ integrálható.

Bizonyítás: $f \cdot g$ mérhető (mérhető függvények szorzata mérhető, korábbról láttuk),
$|f \cdot g| = |f| \cdot |g| \le \frac{1}{2} \underbrace{\left(|f|^2+|g|^2\right)}_{\text{integrálható}}$.

Definíció: legyen $f, g \in L^2(M)$! Értelmezzük a két függvényen az alábbi művelet: $\langle f, g\rangle := \int_M f \cdot g$.

Állítás $L^2(M)$ a fenti művelettel valós euklideszi tér, ahol a skalárszorzat a fent jelölt művelet.

Bizonyítás: $L^2(M)$ valós vektortér, a fent jelölt szorzás művelet skalárszorzás, ugyanis teljesíti:

- $\langle f_1+f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$
- $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
- $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$
- $\langle f, f\rangle = \int_M |f|^2 \ge 0$ és $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ majdnem mindenütt.

Az $L^2(M)$ térben a norma: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_M |f|^2}$.

Megjegyzés: itt is igaz a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, vagyis
$\left|\int_M f \cdot g\right| = |\langle f, g\rangle| \le \|f\| \cdot \|g\| = \sqrt{\int_M |f^2|} \cdot \sqrt{\int_M |g^2|}$.

Definíció: Hilbert térnek a teljes euklideszi teret nevezzük.

Riesz-Fischer tétel (bizonyítás nélkül): az $L^2(M)$ tér teljes, vagyis $L^2(M)$ tér Hilbert tér.

Az $L^p(M)$ függvénytér

Jelölés: legyen $1 \leq p < \infty$, $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz. Jelölje $L^p(M)$ az olyan $f : M \to \mathbb{R}$ mérhető függvények összességét, amelyekre $|f|^p$ integrálható M-n.

Állítás: az $L^p(M)$ vektortér a szokásos műveletekkel.

Bizonyítás: $f, g \in L^p(M) \Rightarrow f + g$ is mérhető, az abszolút érték p-dik hatványa is mérhető (a folytonos p-edik hatványfüggvény és mérhető függvény kompozíciója). $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ integrálható, tehát $f + g \in L^p(M)$. Ha $f \in L^p(M) \Rightarrow \lambda f \in L^p(M)$ nyilvánvaló.

Definíció: vezessük be az $L^p(M)$ vektortérben a következő normát: $\|f\| := \left\{ \int_M |f|^p \right\}^{1/p}$.

Állítás: az $L^p(M)$ tér a fenti művelettel, mint normával, normált tér.

Bizonyítás:

- $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ majdnem mindenütt.
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$.
- A háromszög egyenlőtlenség bizonyításához szükséges a Hölder egyenlőtlenség és a Young egyenlőtlenség.

Állítás (Young): legyen $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = \frac{p}{p-1}$). Ekkor $\forall a, b \geq 0$ számokra: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Bizonyítás: a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens: $ab^{1-q} \leq \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q}$, feltéve, hogy $b \neq 0$. (A $b = 0$ eset triviális.) $c := ab^{1-q}$ jelöléssel $c^p = a^p b^{(1-q)p} = a^p b^{-q}$. Vagyis az állítás: $c \leq \frac{c^p}{p} + \frac{1}{q}$. $g(c) := \frac{c^p}{p} - c + \frac{1}{q}$, $g(1) = 0$, $g'(c) = c^{p-1} - 1$. Ez kisebb 0-nál, ha $c < 1$, és nagyobb nullánál, ha $c > 1$ (tehát $c = 1$ -ben minimuma van), tehát $g(c) \geq 0$.

Tétel (Hölder-egyenlőtlenség): tfh $f \in L^p(M), g \in L^q(M)$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow f \cdot g$ integrálható, és $\left| \int_M f \cdot g \right| \leq \int_M |f| \cdot |g| \leq \|f\|_{L^p(M)} \cdot \|g\|_{L^q(M)}$.

Bizonyítás: alkalmazzuk a Young egyenlőséget: $a := \frac{|f(x)|}{\|f\|}$, $b := \frac{|g(x)|}{\|g\|}$. $\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(M)}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(M)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q}$.

Integrálva mindekét oldalt M-re: $\frac{\int_M |f| \cdot |g|}{\|f\| \cdot \|g\|} \leq \frac{1}{p} 1 + \frac{1}{q} 1 = 1$.

Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség): ha $f, g \in L^p(M) \Rightarrow \|f+g\|_{L^p(M)} \leq \|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}$.

Bizonyítás: $p = 1$ esetére triviális. $p > 1$ esetén:

$$\|f+g\|^p = \int_M |f+g|^p = \int_M |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \leq \int_M |f+g|^{p-1} \cdot |f| + \int_M |f+g|^{p-1} \cdot |g| \leq \text{(Hölder)}$$

$$\leq \left\{ \int_M |f+g|^{(p-1)q} \right\}^{1/q} \cdot \left\{ \int_M |f|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \int_M |f+g|^{(p-1)q} \right\}^{1/q} \cdot \left\{ \int_M |g|^p \right\}^{1/p} =$$

$\left(\|f+g\|_{L^p(M)} \right)^{p/q} \cdot \left[\|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)} \right]$, $p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \frac{1}{p} = 1$. Így az előbbi egyenlőtlenségből $\|f+g\|_{L^p(M)} = \|f+g\|_{L^p(M)}^{p-p/q} \leq \|f\|_{L^p(M)} + \|g\|_{L^p(M)}$. Tehát $L^p(M)$ tér normáltságának utolsó feltételét is igazoltuk, azaz $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, tehát $L^p(M)$ normált tér.

Tétel (bizonyítás nélkül): $L^p(M)$ teljes normált tér, azaz Banach ($1 \leq p < \infty$).