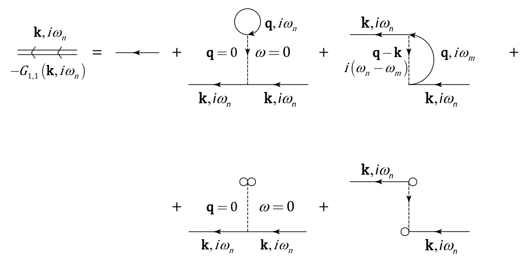
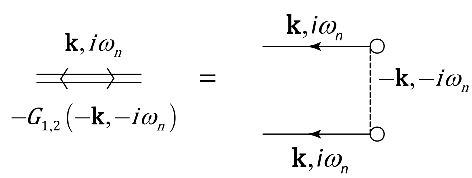
A kölcsönható rendszer Green-függvénye:



$$-G_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = -G_{(0)}(\mathbf{k}, i\omega_n) + \left(-\hbar^{-1}\right) v(0) \left[-G_{(0)}(\mathbf{k}, i\omega_n)\right]^2 \frac{1}{\beta\hbar} \sum_m \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} \left[-G_{(0)}(\mathbf{q}, i\omega_n)\right] e^{i\omega_n \eta} +$$

$$+\left(-\hbar^{-1}\right) \left[-G_{(0)}(\mathbf{k}, i\omega_n)\right]^2 \frac{1}{\beta\hbar} \sum_m \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{q}} v(\mathbf{q}-\mathbf{k}) \left[-G_{(0)}(\mathbf{q}, i\omega_n)\right] e^{i\omega_n \eta} +$$

$$+\left(-\hbar^{-1}\right) \left[-G_{(0)}(k, i\omega_n)\right]^2 v(0) \frac{N_0}{V} + \left(-\hbar^{-1}\right) \left[G_0(\mathbf{k}, i\omega_n)\right]^2 \frac{N_0}{V} v(-\mathbf{k})$$

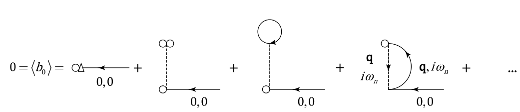


$$-G_{1,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left(-\hbar^{-1}\right) \left[-G_0(\mathbf{k}, i\omega_n)\right] \left[-G_0(-\mathbf{k}, -i\omega_n)\right] \cdot \frac{N_0}{V} v(-\mathbf{k})$$

ebből láthatjuk, hogy az anomális Green-függvénynek nincs 0. rendje, azaz ha $v = 0 \Rightarrow G_{1,2} = 0$. $G_{1,2}$ akkor is eltűnik, ha nincs kölcsönhatás.

N_0 meghatározása

N_0 -t eddig paraméterként használtuk a $b_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} - \sqrt{N_0}\delta_{\mathbf{k},0}$ egyenletben, ahol $\langle a_0^+ a_0 \rangle \overset{Bogo.}{\approx} \langle a_0 \rangle^2 = N_0$, így $\langle a_0 \rangle = \sqrt{N_0} \Rightarrow \langle b_0 \rangle = 0$. Most erre szeretnénk felírni perturbációs sort:



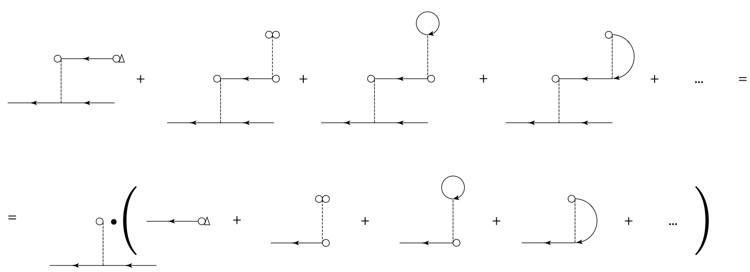
$$0=\left(-\hbar^{-1}\right)\left[\sqrt{N_0}(-\mu)+N_0^{3/2}v(0)+\frac{\sqrt{N_0}}{V}\sum_{\mathbf{q}}(v(0)+v(\mathbf{q}))\underbrace{\frac{-1}{\beta\hbar}\sum_m G_{(0)}(\mathbf{q},i\omega_n)}_{n'_{\mathbf{q}}=1/\left(e^{\beta(e_{\mathbf{q}}-\mu)}-1\right)}\right]$$

$$\mu=\frac{N_0}{V}v(0)+\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}[v(0)+v(\mathbf{q})]n'_{\mathbf{q}}+...$$

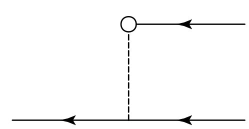
0 hőmérsékleten, ha n' elhanyagolható, ekkor a Bogoljubov kémiai potenciál: $\mu^{(B)}=n_0 v(0)$, ahol $n_0=N_0/V$.

Megjegyzés

1: $\langle b_0\rangle=0$, $\langle b_0^+\rangle=0$, vagyis az összes olyan Feynman diagram összege, amibe csak 1 vonal fut be, 0.



Az ábráról látható következmény, hogy sose kell 3 keltő vagy eltüntető operátort tartalmazó diagramot számolni, mert azok összege 0. (Kiemelve azokból azt a részt, amibe csak 1 vonal fut be, azok összege 0.) Azaz az alábbi diagramokat nem kell számolni:



2: ha $v(0)>0$, ekkor $\mu>0$, azaz $\mu=n_0 v(0)+...$

$$G_{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n)=\frac{1}{i\omega_n-\hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}}-\mu)}\Rightarrow n'_{\mathbf{k}}=\frac{-1}{\beta\hbar}\sum_m G_{(0)}(\mathbf{k},i\omega_n)e^{i\omega_n\eta}=\frac{1}{e^{\beta(e_{\mathbf{k}}-\mu)}-1}$$

és ha ebbe behelyettesítjük a pozitív kémiai potenciált, akkor $n'_{\mathbf{k}}$ negatív értéket is felvehet, és a szabad Green-függvény pedig divergál, és ez a kezelhetetlenné teszi a szabad Green-függvényt.

$$K_0=\sum_{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}}-\mu)b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}=\underbrace{\sum_{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}}-\mu_0)b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}}_{K_0'}+\underbrace{\sum_{\mathbf{k}}(\mu_0-\mu)b_{\mathbf{k}}^+b_{\mathbf{k}}}_{K_2'}$$

Utóbbi tag diagramja:

vagyis μ -t perturbációnak vesszük. Így a szabad Green-függvényünk:

$$G_{(0)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{i\omega_n - \hbar^{-1}\, e_{\mathbf{k}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{-i\omega_n - \hbar^{-1}\, e_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}$$

Dyson-Beljajev (Beliaiev) egyenlet

$$G_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}, i\omega_n) = G_{(0);\,\alpha,\beta}(\mathbf{k}, i\omega_n) + G_{(0);\,\alpha,\gamma}(\mathbf{k}, i\omega_n)\Sigma_{\gamma,\delta}(\mathbf{k}, i\omega_n)G_{\delta,\beta}(\mathbf{k}, i\omega_n)$$

mátrixos írásmódban ugyanezt kiírva:

$$\mathbf{G}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{k}, i\omega_n) + \mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{k}, i\omega_n)\mathbf{\Sigma}(\mathbf{k}, i\omega_n)\mathbf{G}(\mathbf{k}, i\omega_n)$$

melyből szeretnénk $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ -t kifejezni. A kifejezéshez invertálni kell egy 2×2-es mátrixot, ami nem akadály:

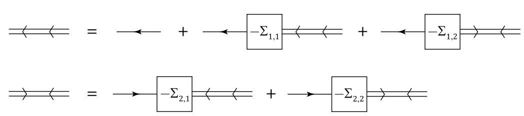
$$G_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \hbar^{-1}\, e_{\mathbf{k}} + \Sigma_{2,2}(\mathbf{k}, i\omega_n)}{D(\mathbf{k}, i\omega_n)}$$

$$G_{2,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{-\Sigma_{2,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)}{D(\mathbf{k}, i\omega_n)}$$

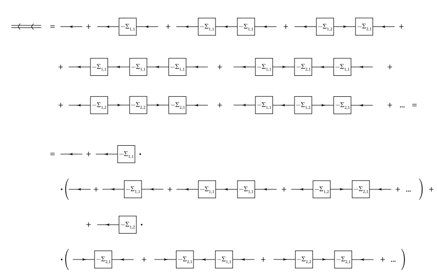
ahol $D(\mathbf{k}, i\omega_n)$ a determináns:

$$D(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \hbar^{-1}\, e_{\mathbf{k}} - \Sigma_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)\right]\left[i\omega_n + \hbar^{-1}\, e_{\mathbf{k}} + \Sigma_{2,2}(\mathbf{k}, i\omega_n)\right] + \Sigma_{1,2}(\mathbf{k}, i\omega_n)\Sigma_{2,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)$$

Grafikusan szemléltetve a következőt láthatjuk:



A felső sor, $G_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n)$ -hoz tartozó eredmény grafikus bizonygatása:

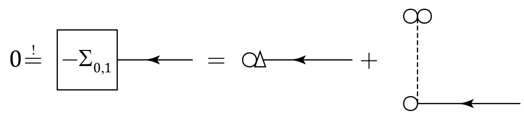


Vegyük ugyanis észre a zárójelezésben a Green-függvényeket! Behelyettesítve őket adódik az eredmény.

Bogoljubov-közelítés

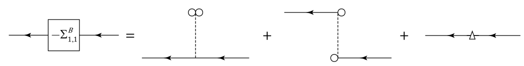
Kémiai potenciál és n_0 kapcsolata

$-\Sigma^{B}_{0,1}$ annak a sajátenergiája, amibe csak 1 vonal fut be:

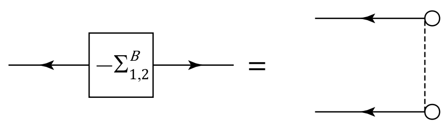


vagy is $-\mu^B + v(0)n_0 = 0 \Leftrightarrow \mu^B = n_0 v(0)$

$$\Sigma^B_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar^{-1}\, n_0 v(\mathbf{k})$$



$$\Sigma^B_{1,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \hbar^{-1}\, n_0 v(\mathbf{k})$$



$$\Sigma^B_{2,2}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma^B_{1,1}(-\mathbf{k}, -i\omega_n)$$

$$\Sigma^B_{2,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \Sigma^B_{1,2}(-\mathbf{k}, -i\omega_n)$$

$$D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k}))\right]\left[i\omega_n + \hbar^{-1}(e_{\mathbf{k}} + n_0 v(\mathbf{k}))\right] + \left(\hbar^{-1}\, n_0 v(\mathbf{k})\right)^2$$

$$G^{(B)}_{1,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n\, \hbar^{-1}(e_k + n_0 v(\mathbf{k}))}{D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)}$$

$$G^{(B)}_{2,1}(\mathbf{k}, i\omega_n) = \frac{-\hbar^{-1}\, n_0 v(\mathbf{k})}{D^{(B)}(\mathbf{k}, i\omega_n)}$$