Analízis I

Előadásjegyzet fizikusoknak matematikusoktól

Izsák Ferenc Tarcsay Zsigmond Tüzes Dániel

Tartalomjegyzék

Ajánlott irodalom:

1. Komornik Vilmos: Valós analízis előadások
2. W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976. (angol nyelvű)
3. Mezei István, Faragó István, Simon Péter: Bevezetés az analízisbe

Ez a jegyzet az ELTE fizikus szakos hallgatóinak készült, a képzési tervükben szereplő Analízis I kurzusuk támogatására. Ez a jegyzet **nem** szakirodalom és nem garantált, hogy az órai anyagot teljesen lefedi, az előadásokra bejárni továbbra is ajánlott. Az eredeti jegyzet Simon László előadásai alapján készült, és lektorálta 2009-ben Simon László, majd frissítette az Analízis II és III órák jegyzeteivel együtt 2016-2018-ban Izsák Ferenc, Tarcsay Zsigmond és Tüzes Dániel.

Hibák a jegyzetben

Ha a jegyzetben helyesírási, tartalmi, vagy formai hibát találsz, kérlek jelezd az előadónak vagy a `tuzesdaniel@gmail.com` e-mail címen!

A jegyzet korábbi, nem következetes jelölésétől eltérően a következőkben törekszünk arra, hogy egy függvényt $f : X \to Y$ alakban adunk meg, akkor az azt jelenti, hogy az értelmezési tartománya X, nem pedig annak csak egy része. Ez utóbbira használjuk majd az $f : X \rightarrowtail Y$ jelölést.

1. Metrikus tér

A korábban (középiskolában) tanultakból általánosítunk. $\mathbb{R}^n$-ben éltünk eddig, ahol vektor alatt ezt értettük: $\mathbf{v} = (v_1, v_2 ... v_n)$ ahol $v_j \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Ezen vektorfogalmat fogjuk általánosítani úgy, hogy a már korábban tanult vektorok némely tulajdonságait kiválasztjuk, s egy halmaz ($\mathbb{V}$) elemeit (a, b és c) akkor fogjuk vektoroknak nevezni, ha az alább kiválaszott - és korábban (középiskolában) már tanult - tulajdonságokat (a műveletekkel) teljesítik.

- összeadás $+$
  $\mathbb{R}^n$-ben azt mondtuk, hogy

  $$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1, v_2 ... v_n) + (u_1, u_2 ... u_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2 ... v_n + u_n)$$

  Ezek tulajdonságaiból az alábbiakat általánosítjuk:

  1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)
  2. $\exists! 0 \in \mathbb{V} : a + 0 = 0 + a = a$ (egység, semleges elem létezése)
  3. $\forall a \in \mathbb{V} \exists! (-a) \in \mathbb{V} : a + (-a) = 0$ (inverz elem létezése)
  4. $a + b = b + a$ (kommutativitás)

  Az első három tulajdonsággal rendelkező struktúrát csoportnak, a negyedikkel is rendelkezőt Abel-csoportnak vagy kommutatív csoportnak nevezzük.
- Skalárral való szorzás $\cdot$
  Legyen $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$! $\mathbb{R}^n$-ben azt mondtuk, hogy $\lambda \mathbf{v} = \lambda (v_1, v_2 ... v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2 ... \lambda v_n)$, ezek tulajdonságaiból az alábbiakat általánosítjuk:

  1. $\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b, (\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ (disztributivitás)
  2. $\lambda (\beta a) = (\lambda \beta) a$
  3. $1a = a$

1.1. Vektortér

Definíció:
Ha egy halmazon értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás a fentiek szerint, akkor azt vektortérnek (avagy lineáris térnek) nevezzük.

Ismert művelet volt $\mathbb{R}^n$-ben a skaláris szorzás, ezt értettük alatta: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j u_j$. Erre érvényesek az alábbi tulajdonságok:

- $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$
- $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
- $\lambda \langle a, b \rangle = \langle \lambda a, b \rangle$
- $\langle a, a \rangle \geq 0$ és $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Definíció:
Legyen X vektortér, amelynek elemei között értelmezve van a skaláris szorzat (két

elem skaláris szorzata egy $\mathbb{R}$-beli szám) a fenti tulajdonságokkal. Ekkor X-t valós euklideszi (eukleidészi) térnek nevezzük.

Példa:
A $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények összessége (röviden $C\,[0,1]$) a szokásos összeadással, számmal való szorzással, ha a skaláris szorzat definíciója: $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f \cdot g$.

Definíció:
Legyen X valós euklideszi tér! Ekkor egy $a \in X$ elem normáját így határozhatjuk meg: $\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$.

1.2. Normált tér

A norma tulajdonságai:

1. $\|a\| \geq 0$ és $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (háromszög egyenlőtlenség), mert

$$\begin{aligned}\langle a+b, a+b\rangle &= \langle a, a\rangle + \langle b, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle \\ &\leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\| \cdot \|b\| \\ &= (\|a\| + \|b\|)^2.\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk az ún Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, mely szerint:

Tétel (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, CS):
Legyen X valós euklideszi tér! Ekkor $\forall a, b \in X$ esetén $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$.

Bizonyítás:
$0 \leq \langle a+\lambda b, a+\lambda b\rangle = \langle a, a\rangle + \langle \lambda b, a\rangle + \langle a, \lambda b\rangle + \langle \lambda b, \lambda b\rangle = \langle a, a\rangle + 2\lambda\langle a, b\rangle + \lambda^2\langle b, b\rangle$, ez teljesül minden λ értékre, így $4\langle a, b\rangle^2 - 4\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle \leq 0$, vagyis

$$\langle a, b\rangle^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle \Rightarrow |\langle a, b\rangle| \leq \sqrt{\langle a, a\rangle}\sqrt{\langle b, b\rangle} = \|a\| \cdot \|b\|.$$

$\square$

Definíció:
Legyen X vektortér, amelyen értelmezve van egy norma a fenti tulajdonságokkal, ekkor X-t normált térnek nevezzük.

Példa:
Adott vektortérhez többféleképp is értelmezhető norma. Folytonos függvényekre (amik vektorteret alkotnak) egy lehetséges norma a következő: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ vagy akár a következő: $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$. Ez utóbbira lássuk be a norma tulajdonságait!

1. $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ láthatóan teljesül.
2. $$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= \sup\{|\lambda f(t)| : t \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|\lambda|\,|f(t)| : t \in [0,1]\} \\ &= |\lambda| \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}&\|f+g\| = \sup\{|f+g|(t) : t \in [0,1]\} \\ &\leq \sup\{|f(t)| + |g(t)| : t \in [0,1]\} \\ &\leq \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} + \sup\{|g(t)| : t \in [0,1]\} \\ &= \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

Egy normált térben mindig értelmezhető az elemek ρ távolsága, $\rho(a,b) := \|a-b\|$. A távolság (metrika) tulajdonságai:

1. $\rho(a,b) \geq 0$ és $\rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $\rho(a,b) = \rho(b,a)$
3. $\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c)$ (háromszög egyenlőtlenség)

Definíció:
Legyen X valamilyen halmaz és tfh értelmezve van $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény (metrika, távolság) a fenti tulajdonságokkal! Ekkor X-t metrikus térnek nevezzük.

1.3. Topológiai alapfogalmak a metrikus térben

Definíció:
Legyen X metrikus tér! Egy $a \in X$ pont r sugarú környezete azon pontok összessége, amelyek a-tól r-nél kisebb távolságra vannak: $B_r(a) := \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$.

1.3.1. Pont és halmaz viszonya

Legyen $a \in X, M \subset X$!

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az a pont az M halmaznak belső pontja, ha létezik a-nak olyan r sugarú környezete, hogy $B_r(a) \subset M$. Jele: $a \in int(M)$.

Definíció:
Az a pont az M halmaznak külső pontja, ha létezik a-nak olyan r sugarú környezete, hogy $B_r(a) \cap M = \varnothing$. Jele: $a \in ext(M)$.

Definíció:
Az a pont M-nek határpontja, ha a minden r sugarú környezete esetén $B_r(a) \cap M \neq \varnothing$ és $B_r(a) \cap M^C \neq \varnothing$. Jele: $a \in \partial(M) = front(M)$.

Állítás:
$\partial(M), ext(M), int(M)$ halmazok diszjunktak, uniójuk kiadja X-et.

Definíció:
Egy $a \in X$ pontot az M halmaz torlódási pontjának nevezünk, ha az a pont minden környezetében van M-beli, de a-tól különböző pont, formailag: a torlódási pont, ha $\{B_r(a) \setminus \{a\}\} \cap M \neq \varnothing$. Az M halmaz torlódási pontjainak halmazát M '-vel jelöljük.

Megjegyzés:
Ha az a pont M-nek torlódási pontja, akkor a-nak minden környezete végtelen sok pontot tartalmaz az M halmazból.

Definíció:
Az M halmaz belső és határpontjainak összességét az M halmaz lezárásának nevezzük, $\overline{M} = int(M) \cup \partial M$.

Példák:

- $X = \mathbb{R}, M = (0,1) \Rightarrow M' = [0,1], \partial M = \{0,1\}, int(M) = (0,1), \overline{M} = [0,1]$
- $X = \mathbb{R}, M = \mathbb{Z} \Rightarrow M' = \varnothing, \partial M = \mathbb{Z}, int(M) = \varnothing, \overline{M} = \mathbb{Z}$
- $X = \mathbb{R}, M = [0,1] \Rightarrow M' = [0,1], \partial M = \{0,1\}, int(M) = (0,1), \overline{M} = [0,1]$

1.3.2. Nyílt és zárt halmazok

Definíció:
Egy $M \subset X$ halmazt nyíltnak nevezünk, ha $\forall x \in M$ esetén

$$x \in int(M) \Leftrightarrow M \subset int(M) \Leftrightarrow M \cap \partial M = \varnothing.$$

Definíció:
Egy M halmazt zártnak nevezünk, ha tartalmazza az összes határpontját $\Leftrightarrow \partial M \subset M$.

Példák:
Legyen $X := \mathbb{R}$, ekkor:

- $M = [0,1]$ zárt halmaz.
- $M = (0,1)$ nyílt halmaz.
- $M = (0,1]$ se nem nyílt, se nem zárt halmaz
- $M = \mathbb{Z}$ zárt halmaz.

Állítás:
Egy $M \subset X$ halmaz zárt $\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow M' \subset M$.

Tétel:
Tetszőleges M halmaz esetén $int(M)$ és $ext(M)$ nyílt halmaz.

Bizonyítás:
($int(M)$ nyílt halmaz): legyen $a \in intM$. Azt kellene megmutatni, hogy $\exists B_r(a) \subset int(M)$. $a \in int(M) \Rightarrow \exists B_R(a) \subset M$. Legyen $r := R/2$, ekkor

$B_r(a) \subset int(M)$, ugyanis ha $b \in B_r(a)$, akkor a háromszög egyenlőtlenség miatt $B_r(b) \subset B_R(a) \subset M, b \in int(M) \Rightarrow B_r(a) \subset int(M)$. □

Állítás:
$\partial M, \overline{M}, M'$ zárt halmazok.

Tétel:
Ha $M \subset X$ nyílt, akkor $M^C = X \backslash M$ zárt halmaz.

Bizonyítás:
Tfh M nyílt halmaz, ekkor $\partial M \cap M = \varnothing$, $\partial M = \partial(M^c)$, ezért

$$\partial M^C \cap M = \varnothing \Rightarrow \partial M^C \subset M^C \ ,$$

vagyis M^C zárt. □

Tétel:
Akárhány nyílt halmaz uniója nyílt halmaz, és véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

Bizonyítás:
Legyenek $M_{\gamma \in I}$ nyílt halmazok (I indexhalmaz)! Belátjuk, hogy $M := \bigcup\limits_{\gamma \in I} M_\gamma$ nyílt. Legyen $a \in M \Rightarrow \exists \gamma : a \in M_\gamma$. Mivel M_γ nyílt, ezért

$$\exists B_r(a) \subset M_\gamma \Rightarrow B_r(a) \subset M \ .$$

Legyenek $M_{j \in I}$ nyílt halmazok (I indexhalmaz)! Belátjuk, hogy $M := \bigcap\limits_{j=1}^{p} M_j$ nyílt halmaz. Legyen $a \in M \Rightarrow a \in M_j, \forall j = 1, 2...p$. Mivel M_j nyílt, ezért $\exists r_j :$ $B_{r_j}(a) \subset M_j$. Legyen $r = \min\{r_1, r_2, .., r_p\} \Rightarrow B_r(a) \subset \bigcap\limits_{j=1}^{p} M_j$. □

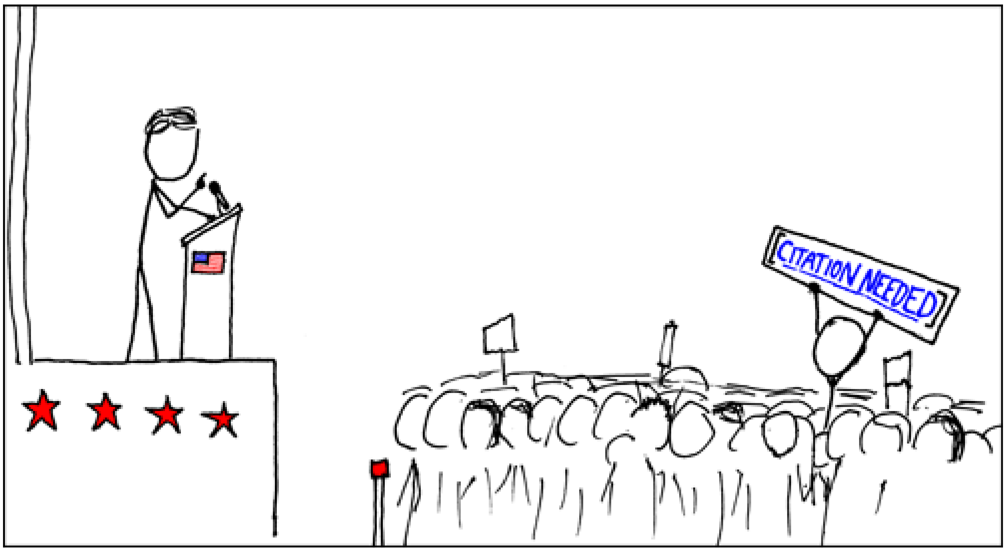
Tétel:
Akárhány zárt halmaz metszete zárt halmaz, és véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

Bizonyítás:
(Belátjuk, hogy metszetük zárt.) Tfh M_γ zárt! Ekkor M_γ^C nyílt halmaz. Ezért

$$\bigcap_{\gamma \in I} M_\gamma = \left(\bigcup_{\gamma \in I} M_\gamma^C \right)^C$$

zárt. Az unió esete hasonlóan bizonyítható. □

Megjegyzés: végtelen sok nyílt halmaz metszete általában nem nyílt, az alaphalmaz és az üres halmaz nyílt és zárt egyszerre.



xkcd, sometimes styled ***XKCD***,[‡ 1] is a webcomic created by Randall Munroe. The comic's tagline describes it as "A webcomic of romance, sarcasm, math, and language".[‡ 2][3] Munroe states on the comic's website that the name of the comic is not an acronym but "just a word with no phonetic pronunciation".

The subject matter of the comic varies from statements on life and love to mathematical and scientific in-jokes. Some strips feature simple humor or pop-culture references. Although it has a cast of stick figures,[4][5] the comic occasionally features landscapes and intricate mathematical patterns such as fractals, graphs and charts.[6] New comics are added three times a week, on Mondays, Wednesdays, and Fridays,[‡ 1][7] although on some occasions they have been added every weekday.

2. Sorozatok határértéke a metrikus térben

Definíció:
Egy $f : \mathbb{N} \to X$ (X metrikus tér) függvényt X-beli sorozatnak nevezünk. Jelölés: a sorozat k-adik tagja $a_k := f(k)$-nek, a sorozat $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := f(a_k) = f$.

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az (a_k) sorozat határértéke (limesze) $a \in X$, ha az a pont tetszőleges ε sugarú környezetéhez létezik olyan $k_0 \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $k > k_0, k \in \mathbb{N}$ esetén $a_k \in B_\varepsilon(a)$. Másképp: $\forall\varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \varepsilon$, ezt így jelöljük: $\lim(a_k) \equiv \lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$.

2.1. A limesz tulajdonságai

1. Ha $a_k = a$ (minden k-ra), akkor $\lim(a_k) = a$
2. Tfh $\lim(a_k) = a$, akkor (a_k) minden részsorozatának határértéke létezik és értékük a.
   Részsorozat: (a_k) véges vagy végtelen sok elemét elhagyom úgy, hogy még mindig végtelen sok maradjon, és a sorrenden nem változtatok. Másképpen: (a_k)

részsorozata (a_{g_k}), ahol $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő.

Bizonyítás:
$\lim(a_k) := a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \varepsilon$. Mivel $g_k \geq k \Rightarrow k > k_0$-ra $\rho(a_{g_k}, a) < \varepsilon$, hisz ekkor $g_k > k_0$. □

3. A határérték egyértelmű.

Bizonyítás:
Tfh (a_k) határértékei a és b (X elemei). Belátandó, hogy $a = b$. Ekkor egyrészt:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \varepsilon\ ,$$

másrészt $\forall\varepsilon > 0 \exists k_1 : k > k_1, \rho(a_k, b) < \varepsilon \Rightarrow k > \max\{k_0, k_1\}$ esetén $\rho(a_k, a) < \varepsilon, \rho(a_k, b) < \varepsilon$, így a háromszög egyenlőtlenség alapján $\rho(a, b) \leq \rho(a, a_k) + \rho(a_k, b) < 2\varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \Rightarrow \rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$. □

4. Ha $\lim(a_k) = a \Rightarrow (a_k)$ minden átrendezésének a határértéke szintén a
   Egy (a_k) átrendezése: veszek egy $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót, az átrendezett sorozat: (a_{g_k}).
5. Sorozatok összefésülése:
   $(a_k), (b_k)$ X-beli sorozatok összefésülése olyan (c_k) X-beli sorozat, melynek elemei $a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots$. Ha $\lim(a_k) = a = \lim(b_k) \Rightarrow \lim(c_k) = a$
6. Ha egy sorozatnak létezik a limesze, akkor korlátos is. (Korlátos: létezik olyan n dimenziós gömb, mely tartalmazza a sorozat összes elemét.)

Bizonyítás:
$\lim(a_k) = a \Rightarrow \varepsilon = 1 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < 1$, így

$$r := \max\{\rho(a, a_1), \rho(a, a_2), \ldots, \rho(a, a_{k_0})\}$$

esetén $a_k \in B_{r+1}(a)\, \forall k$. □

2.1.1. A limesz műveleti tulajdonságai normált terekben

A következőkben X mindig egy normált teret jelöl, (a_k), illetve (b_k) pedig egy-egy X-beli sorozatot.

A bizonyítások során az egész félévben külön hivatkozás nélkül használjuk azt a tényt, hogy ha egy $x_n \subset X$ sorozatra $\lim \|x_n\| \leq 0$, akkor $x_n \to 0$.

2.1.1.1. Összeadás

Tétel:
Ha $\lim(a_k) = a, \lim(b_k) = b \Rightarrow \lim(a_k + b_k) = a + b$.

Bizonyítás:
Mivel $\lim(a_k) = a$, ezért $\forall\varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow \rho(a, a_k) = \|a_k - a\| < \varepsilon$ és mivel

$\lim(b_k) = b$, ezért $\forall\varepsilon > 0 \exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow \rho(b, b_k) = \|b_k - b\| < \varepsilon$, így

$$\rho(a_k + b_k, a + b) = \|(a_k + b_k) - (a + b)\| =$$
$$\|(a_k - a) + (b_k - b)\| \leq \|a_k - a\| + \|b_k - b\| < 2\varepsilon,$$

ha $k > \max\{k_0, k_1\}$. □

2.1.1.2. Szorzás

Tétel:
Legyen X normált tér! Ha $\lim(\lambda_k) = 0$ és (a_k) korlátos, $\Rightarrow \lim(\lambda_k a_k) = 0$.

Bizonyítás:
Tudjuk, hogy ha $\|a_k\| \leq K$ teljesül minden k indexre, akkor

$$\lim\|\lambda_k a_k\| = \lim|\lambda_k\|a_k\|| \leq K \cdot \lim|\lambda_k| = 0,$$

ami éppen a tétel állítását adja. □

Tétel:
Tfh $\lim(a_k) = a$ és $\lim(\lambda_k) = \lambda$ $(\lambda_k \in \mathbb{R})$. Ekkor $\lim(\lambda_k a_k) = \lambda a$.

Bizonyítás:
A háromszög-egyenlőtlenséget, valamint az összeadásra vonatkozó állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|\lambda a - \lim(\lambda_k a_k)\| \leqslant \|\lambda a - \lim(\lambda a_k)\| + \|\lambda a_k - \lim(\lambda_k a_k)\|$$
$$= |\lambda| \cdot \|a - \lim(a_k)\| + |\lambda - \lim(|\lambda| \cdot \|a_k\|)| = 0,$$

hiszen az utolsó összeg első tagja definíció szerint nulla, a második meg az előző állítás miatt. Innen következik, hogy $\lambda a = \lim(\lambda_k a_k)$. □

2.1.1.3. Osztás

Tétel:
Legyen (a_k) egy valós vagy komplex sorozat. Ha $a = \lim(a_k) \neq 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a}$.

Bizonyítás:
Mivel $\lim(a_k) = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon$, így

$$\exists k_1 : k > k_1 \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon\,|a|^2/2 .$$

Legyen $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$, ekkor $\exists k_2 : k > k_2 \Rightarrow |a_k| > \frac{|a|}{2}$. Legyen $k > \max\{k_1, k_2\}$, ekkor

$$\left|\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_k|}{|a_k a|} < \frac{\varepsilon\,|a|^2/2}{|a_k|\,|a|} = \frac{\varepsilon\,|a|/2}{|a|/2} = \varepsilon.$$

□

2.1.2. Zárt halmazok jellemzése sorozatokkal

Emlékeztető: X metrikus térben egy M halmazt zártnak neveztünk, ha

$$\partial M \subset M \Leftrightarrow \overline{M} \subset M \Leftrightarrow \overline{M} = M \ ,$$

ahol $\overline{M} = int\,(M) \cup \partial M$, továbbá $a \in \overline{M} \Leftrightarrow$ ha a bármely környezete tartalmaz M beli pontot is. Ezek szerint M zárt halmaz pontosan akkor, ha minden olyan pont, amelynek bármely környezetében van M beli pont, az M-hez tartozik.

Tétel:
Egy $M \subset X$ halmaz zárt pontosan akkor, ha tetszőleges konvergens sorozatot nézve, melynek tagjai $a_k \in M$ $\lim\,(a_k) \in M$.

Bizonyítás:
Az előbbiek szerint M halmaz zárt pontosan akkor, ha minden olyan pont, amelynek bármely környezetében van M beli pont, az M-hez tartozik.
$\Rightarrow$ irányban: tfh M zárt! Ha $a_k \in M$ és $\lim\,(a_k) = a$, akkor $a \in M$, mert a minden környezetében van M beli pont is (nevezetesen a_k).
$\Leftarrow$ irányban: fordítva is igaz, ha a minden környezete tartalmaz M beli pontot, akkor $\exists\,(a_k) \in M : \lim\,(a_k) = a$. Vagyis minden olyan pont (a), amelynek minden környezetében van M-beli pont (az a_k-k), az M-nek eleme, és a fentiek szerint ebből következik, hogy M zárt. □

2.1.2.1. Korlátos és zárt halmazok, illetve sorozatkompakt halmazok

Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^n$-ben):
Legyen (a_k) korlátos sorozat $\mathbb{R}^n$-ben! Ekkor (a_k) sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás:

1. Először $n = 1$ esetre, ekkor $(a_k \in \mathbb{R})$ korlátos $\Rightarrow \exists\,[c,d] \ni a_k, \forall k$. Felezzük $[c,d]$ intervallumot! Ekkor a két zárt fél intervallum közül legalább az egyik végtelen sok tagot tartalmaz a sorozatból. Ez legyen $[c_1,d_1]$. Ezt megint felezzük, melyek közül legalább az egyik végtelen sok tagot tartalmaz a sorozatból, ez legyen $[c_2,d_2]$ ... Így a_k -ból kiválasztható egy a_{k_l} részsorozat úgy, hogy $a_{k_l} \in [c_l,d_l]$. Belátjuk, hogy a_{k_l} részsorozat konvergens.
$[c,d] \supset [c_1,d_1] \supset [c_2,d_2] \supset ... \supset [c_l,d_l]$, $\lim\limits_{l\to\infty} |c_l - d_l| = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{c-d}{2^l} = 0$. Tudjuk, hogy $\{c_l : l \in \mathbb{N}\}$ felülről korlátos $\Rightarrow \exists \sup\{c_l : l \in \mathbb{N}\}$ és azt is, hogy $\{d_l : l \in \mathbb{N}\}$ alulról korlátos $\Rightarrow \exists \inf\{d_l : l \in \mathbb{N}\}$. Mivel
$$\lim_{l\to\infty} |c_l - d_l| = 0 \Rightarrow \sup\{c_l : l \in \mathbb{N}\} = \inf\{d_l : l \in \mathbb{N}\} := \alpha \ ,$$
továbbá $a_{k_l} \in [c_l,d_l] \Rightarrow \lim\,(a_{k_l}) = \alpha$ („rendőr-elv„).
2. $n = 2$ esetre, ekkor $a_k = \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}\right)$. Mivel a_k korlátos sorozat $\mathbb{R}^2$ -ben, így $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$ korlátos sorozatok $\mathbb{R}$ -ben. Az előzőek szerint az előbbiből kiválasztható ebből egy konvergens részsorozat, $\left(a_{k_l}^{(1)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$. Tekintsük az $a_k^{(2)}$ ugyanilyen

indexű elemekből álló $\left(a_{k_l}^{(2)}\right)$ részsorozatát (mely korlátos $\mathbb{R}$ -ben). Az előzőek szerint ennek létezik konvergens részsorozata, $\left(a_{k_{l_m}}^{(2)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$. $\left(a_{k_l}^{(1)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergens, így $\left(a_{k_{l_m}}^{(1)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ is az, így $\left(a_{k_{l_m}}\right) := \left(a_{k_{l_m}}^{(1)}, a_{k_{l_m}}^{(2)}\right)$ részsorozat konvergens.

3. $n = 3$ esetén hasonló módon, mint $n = 1$ -ről váltottunk $n = 2$ -re, itt is igazolható (tkp teljes indukció). □

Megjegyzés:
Hasonló jellegű állítások általában nem igazak tetszőleges normált terekben, csak véges dimenzióban!

Tétel:
Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz! Ha $(a_k \in M)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat, akkor létezik olyan (a_{k_l}) részsorozata, amely konvergens és $\lim (a_{k_l}) \in M$.

Bizonyítás:
Mivel M korlátos $\Rightarrow (a_k)$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^n$-ben. A Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint ennek létezik konvergens részsorozata $a_{k_l} \in M$, M zárt $\Rightarrow \lim (a_{k_l}) \in M$. □

Definíció:
Legyen X tetszőleges metrikus tér! Egy $M \subset X$ halmazt sorozatkompaktnak nevezünk, ha tetszőleges M-beli sorozatnak van konvergens részsorozata, és limesze $\in M$.

Megjegyzés:
A fenti tétel szerint $\mathbb{R}^n$-ben minden korlátos és zárt halmaz sorozatkompakt.

Állítás:
Ha X tetszőleges metrikus tér $\Rightarrow \forall$ sorozatkompakt halmaz korlátos és zárt, de ha egy metrikus térben egy halmaz korlátos és zárt, még nem következik, hogy sorozatkompakt is (természetesen $\mathbb{R}^n$-ben igaz).

Bizonyítás:
Legyen $M \subset X$ sorozatkompakt halmaz! Először belátjuk, hogy M korlátos.
Indirekt bizonyítás: M nem korlátos. Legyen $a \in X$ rögzített pont. Ha M nem korlátos $\Rightarrow \exists x_1 \in M, x_1 \notin B_1(a)$ és $\exists x_2 \in M, x_2 \notin B_2(a)$ és... Belátjuk (indirekt), hogy az így nyert (x_l) sorozatnak nincs konvergens részsorozata. Ha ugyanis $\exists \lim (x_{l_k}) = x_0 \in M \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{l_k}, a) = \rho(x_0, a)$, ez ellentmond annak, hogy $x_{l_k} \notin B_{l_k}(a) \Leftrightarrow \rho(x_{l_k}, a) > l_k \to \infty$.
Most belátjuk, hogy M zárt. Tekintsük az (a_k) M-beli elemekből álló konvergens sorozatokat! Mivel M sorozatkompakt, ezért (a_k)-nak létezik (a_{k_l}) részsorozata, ami konvergens és $\lim (a_{k_l}) \in M$, de $\lim (a_{k_l}) = \lim (a_k) \Rightarrow \lim (a_k) \in M$. Mint korábban bizonyítottuk, ez ekvivalens azzal, hogy M zárt. □

2.1.2.2. Cauchy-féle konvergencia-kritérium, teljesség

Tétel:
Legyen X metrikus tér! Ha (a_k) konvergens sorozat, $\lim(a_k) = a \in X$, akkor teljesül rá az ún. Cauchy-féle (konvergencia) kritérium:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k, l > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a_l) < \varepsilon.$$

Bizonyítás:

$$\lim(a_k) = a \Rightarrow \exists k_0 : \forall k, l > k_0 \Rightarrow \rho(a_k, a) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \rho(a_l, a) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\rho(a_k, a_l) \leq \rho(a_k, a) + \rho(a, a_l) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Kérdés: fordítva igaz-e? Általában nem.

Példák:

- Legyen $X = \mathbb{Q}$ a szokásos távolsággal! Tfh $a_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, de $\lim(a_k) = \sqrt{2}$. Ekkor (a_k) teljesíti a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot, de nincs határértéke X-ben.
- $X := (0, 1)$, a szokásos távolsággal. $a_k := \frac{1}{k}$ tagokból álló sorozat. Ez megint teljesíti a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot, mégsincs határértéke X-ben.

Definíció:
Egy X metrikus teret teljes metrikus térnek nevezzük, ha minden X-beli Cauchy-sorozatnak (vagyis melyre teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium) van limesze X-ben.

Tétel:
$\mathbb{R}^n$ teljes metrikus tér.
Megjegyzés: a tétel azt mondja, hogy ha $(a_k) \in \mathbb{R}^n$-beli sorozatra teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium $\Rightarrow \exists \lim(a_k) \in \mathbb{R}^n$.

Bizonyítás:
Legyen $(a_k) \in \mathbb{R}^n$, melyre teljesül a Cauchy-féle konvergencia-kritérium, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k, l > k_0 \Rightarrow \|a_k - a_l\| < \varepsilon.$$

Először belátjuk, hogy (a_k) korlátos.
Legyen $\varepsilon := 1$, ekkor $\exists k_0 : k, l > k_0 \Rightarrow \|a_k - a_l\| < \varepsilon = 1$. Legyen $l = k_0 + 1$ rögzített, ekkor láthatjuk, hogy minden $\forall k \geq l : \|a_k - a_l\| < 1$, vagyis k_0 fölött korlátos a sorozat. Mivel k_0 véges, ezért $a_0, a_1 ... a_{k_0}$ véges sok elem, így korlátos is. Most belátjuk, hogy konvergens is. Alkalmazzuk a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tételt, miszerint minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata $\Rightarrow \exists (a_{k_l}) : \lim(a_{k_l}) = a \in \mathbb{R}^n$. Belátandó még, hogy az (a_k) sorozat is ehhez tart. Legyen $\varepsilon/2 > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim(a_{k_l}) = a \Rightarrow \exists l_0 : l > l_0 \Rightarrow \|a_{k_l} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Másrészt mivel a Cauchy sorozat is, ezért

$$\exists k_1 : k, l > k_1 \Rightarrow \|a_k - a_l\| < \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|a_k - a_{k_l}\| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\|a_k - a\| \leq \|a_k - a_{k_l}\| + \|a_{k_l} - a\| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3. Függvények limesze (határértéke)

A továbbiakban X és Y metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $D_f \subset X$ és $R_f \subset Y$!

Definíció:
Legyen $a \in X$ az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban $b \in Y$ a határértéke (limesze), ha b bármely (kicsi) $B_\varepsilon(b)$ környezetéhez létezik a-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a) \cap D_f, x \neq a \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$.

Megjegyzés:
Mivel a pont D_f-nek torlódási pontja, ezért bármely $\delta > 0$ esetén $\exists x \neq a$: $x \in B_\delta(a) \cap D_f$, továbbá a függvény határértéke szempontjából mindegy, hogy f értelmezve van-e a-ban vagy sem és $f(a)$ mivel egyenlő.

Állítás:
A limesz egy pontban egyértelmű.

Definíció:
Legyen $a \in D_f$. Ekkor f függvényt a pontban folytonosnak nevezzük, ha az $f(a) \in Y$ bármely $B_\varepsilon(f(a))$ környezetéhez található az a-nak olyan $B_\delta(a)$ környezete, hogy $x \in B_\delta(a) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.

Megjegyzés:

- Ha a a D_f-nek torlódási pontja, akkor f folytonos a-ban $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Legyen f valós-valós függvény! Ekkor f-nek a-ban baloldali határértékét így értelmezzük: $\lim\limits_{x \to a} f|_{(-\infty,a)}(x)$ (ha létezik), és f-nek a-ban jobboldali határértéke $\lim\limits_{x \to a} f|_{(a,\infty)}(x)$ (ha létezik).
- Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény folytonos, mert mindenhol folytonos, ahol értelmezve van (0-ban nincs értelmezve).

Példa:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha x} \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 1 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Ez a függvény 1-ben nem folytonos, és határértéke 1-ben 0.

Definíció:
Ha f folytonos D_f minden pontjában, akkor f-et folytonosnak nevezzük.

Ne feledjétek, ebből a tárgyól vizsga lesz! Ha hétről hétre tanulsz, és a kérdéseket időben felteszed a tanárnak, sokkal könnyebb felkészülni a vizsgára.

3.1. Átviteli elv

Tétel (átviteli elv 1-es tétele):
Legyen $a \in D'_f$ (D'_f a torlódási pontok halmaza)!

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x_k) \subset D_f \setminus \{a\} : \lim (x_k) = a \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = b$$

Bizonyítás:

- $\Rightarrow$ irányban: legyen $\lim\limits_{x \to a} f(x) \equiv \lim\limits_{a} f = b$. Legyen (x_k) tetszőleges olyan sorozat, melyre $x_k \in D_f \setminus \{a\}, \lim(x_k) = a$! Belátandó, hogy
$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0, k > k_0 \Rightarrow f(x_k) \in B_\varepsilon(b).$$
Mivel
$$\lim_{a} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b),$$
másrészt
$$\lim (x_k) = a, x_k \in D_f \setminus \{a\} \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow x_k \in B_\delta(a),$$
vagyis $k > k_0$ esetén $f(x_k) \in B_\varepsilon(b)$.

- Bizonyítás $\Leftarrow$ irányban:
  Tfh
  $$\forall (x_k) \subset D_f \setminus \{a\}, \lim (x_k) = a$$
  esetén $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$, bizonyítandó: $\Rightarrow \lim\limits_{a} f = b$, vagyis
  $$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b).$$
  Indirekt bizonyítunk:
  $$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0, \exists x \in \{B_\delta(a) \cap D_f\} \setminus \{a\} : f(x) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$$
  Legyen $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, ehhez
  $$\exists x_k \in B_{\frac{1}{k}}(a), x_k \in D_f \setminus \{a\} : f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(b).$$
  Ekkor $\lim (x_k) = a$, de $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq b$, mert $\forall k \in \mathbb{N}$-re $f(x_k) \notin B_{\varepsilon_0}(b)$, ez meg ellentmond a feltevésünknek. □

Tétel (átviteli elv 2-es tétele):
Legyen $a \in D_f$! Ekkor az f függvény a-ban folytonos pontosan akkor, ha $\forall (x_k) \subset D_f, \lim (x_k) = a$ esetén $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

Bizonyítás:
Az előzővel analóg módon.

3.1.1. Műveleti szabályok

- $+$ összeadás:

  Tétel:
  Legyen X metrikus, Y normált tér! Legyenek $f, g : X \rightarrowtail Y$ és $a \in (D_f \cap D_g)'$.
  Ekkor $\lim\limits_{a} f = b, \lim\limits_{a} g = c \Rightarrow \lim\limits_{a} (f+g) = b + c$.

  Bizonyítás:
  Legyen (x_k) tetszőleges olyan sorozat, melyre teljesül, hogy
  $$x_k \in \{D_f \cap D_g\} \setminus \{a\}, \lim (x_k) = a.$$
  Azt kell megmutatni, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} (f+g)(x_k) = b + c$, ahol $(f+g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k)$. Mivel
  $$\lim_{a} f = b, x_k \in D_f \setminus \{a\}, \lim (x_k) = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = b$$
  (átviteli elvből), hasonlóan $\lim\limits_{a} g = c \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k) = c$, így ezekből
  $$\lim_{k\to\infty} (f(x_k) + g(x_k)) = b + c.$$
  □

- szorzás:

Tétel:
Legyen X metrikus, Y normált tér, $f : X \rightarrowtail Y, \lambda : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Legyen $a \in \{D_f \cap D_\lambda\}'$! Ha $\lim_a f = b \in Y, \lim_a \lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_a (\lambda f) = \lambda_0 b \in Y$.

Tétel:
Legyen X metrikus, Y euklideszi tér, $f, g : X \rightarrowtail Y, a \in \{D_f \cap D_g\}'$! Ha $\lim_a f = b \in Y, \lim_a g = c \in Y \Rightarrow \lim_a \langle f, g\rangle = \langle b, c\rangle$.

- osztás:

Tétel:
Legyen X metrikus tér, $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Ha $\lim_a f = b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.

3.1.2. Műveleti szabályok folytonosságra

- $+$ összeadás:

Tétel:
Legyen X metrikus, Y normált tér, $f, g : X \rightarrowtail Y$. Ha f, g folytonos a-ban $\Rightarrow f + g$ is folytonos a-ban.

- szorzás:

Tétel:
Legyen X metrikus, Y normált tér, $f : X \rightarrowtail Y, \lambda : X \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonosak a-ban, ekkor $\lambda \cdot f$ is folytonos a-ban.

Tétel:
Legyen X metrikus, Y euklideszi tér. Ha $f, g : X \rightarrowtail Y$ folytonosak a-ban $\Rightarrow \langle f, g\rangle$ is folytonos a-ban.

- osztás:

Tétel:
Legyen X metrikus tér, $f : X \rightarrowtail \mathbb{R}$. Ha f folytonos a-ban és $f(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ is folytonos a-ban.

(Az előző tételek bizonyítása az átviteli elvvel történik.)

3.1.3. A kompozíció függvény

1. Tétel:
Legyenek X, Y, Z metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y, g : Y \rightarrowtail Z$. Ha f folytonos $a \in X$-ben, g pedig $b = f(a) \in Y$-ban, $\Rightarrow g \circ f$ is folytonos a-ban.

Bizonyítás:
Mivel g folytonos $b = f(a)$-ban, így g értelmezve van $f(a)$-ban, ezért $g \circ f$ értelmezve van a-ban, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Az átviteli elvvel belátjuk, hogy

$g \circ f$ folytonos a-ban. Legyen (x_k) tetszőleges sorozat, melyre $\lim (x_k) = a, x_k \neq a, x_k \in D_{g \circ f}$. Az utóbbi azt jelenti, hogy $x_k \in D_f$, másrészt $f(x_k) \in D_g$, igazolandó tehát, hogy $\lim\limits_{k \to \infty} (g \circ f)(x_k) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$.
Mivel f folytonos a-ban, $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$. Másrészt g folytonos $f(a)$-ban, így g-re alkalmazva az átviteli elvet, $\lim\limits_{k \to \infty} g(f(x_k)) = g(f(a))$. □

Kérdés: ha $\lim\limits_a f = b, \lim\limits_b g = c \Rightarrow \lim\limits_a (g \circ f) = c$? Általában nem. Példa: legyen

$$g(y) = \begin{cases} 0 \text{ ha } y = 0 \\ 1 \text{ ha } y \neq 0 \end{cases},$$

és f pedig a konstans 0 függvény, azaz $f(x) = 0$, valamint $a = b = 0$. Ekkor $\lim\limits_0 g = 1$, $(g \circ f)(x) = 0 \, \forall x \Rightarrow \lim\limits_0 (g \circ f)(x) = 0$.

2. Állítás:
Legyenek X, Y, Z metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y, g : Y \rightarrowtail Z$. Ha $\lim\limits_a f = b$ és g folytonos b-ben, akkor $\lim\limits_a (g \circ f) = g(b)$.

3.1.4. Inverz függvény folytonossága

Egy tetszőleges függvény inverzét akkor tudjuk értelmezni, ha a függvény injektív, azaz $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definíció:
Ha f injektív, akkor inverzét így értelmezhetjük: $f^{-1} : R_f \to D_f, y \in R_f$ esetén $f^{-1}(y) = x$, ahol $x \in D_f, f(x) = y$.

Állítás:
Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ és szigorúan monoton függvény, akkor f injektív.

Kérdés: Ha f folytonos és injektív, akkor inverze is? Általában nem. Erre példa az alábbi.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x < 1 \\ x - 1 & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

Állítás:
Ha $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton, akkor inverze is.

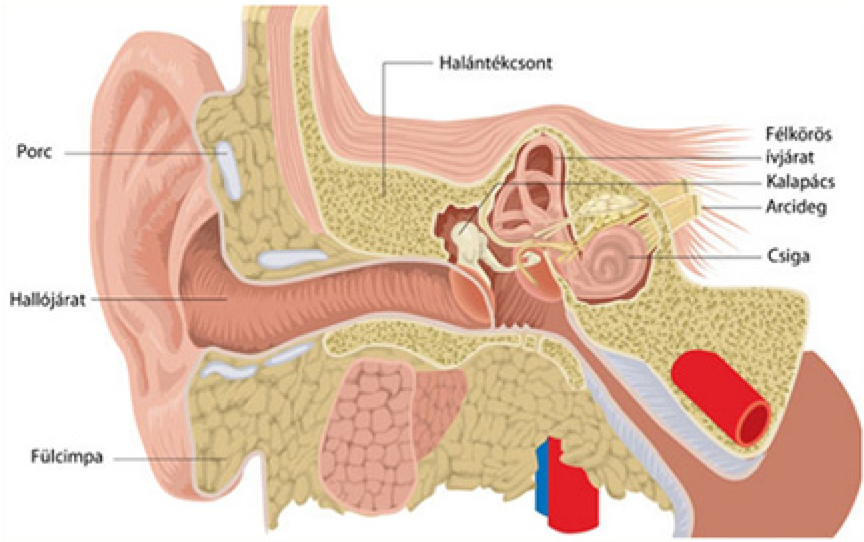
Tétel:
Ha $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény és $I \subset \mathbb{R}$ valamilyen intervallum $\Rightarrow f^{-1}$ folytonos.

Megjegyzés:
Az intervallumok $\mathbb{R}$ összefüggő részhalmazai. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazt összefüggőnek nevezünk, ha $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x < x_2 \Rightarrow x \in A$.

Bizonyítás:
Legyen $y_0 \in D_{f^{-1}} = R_f$. Legyen $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Először tegyük fel, hogy $x_0 \in int\,(I)$. Azt szeretnénk belátni, hogy f^{-1} folytonos y_0-ban. Legyen $\varepsilon > 0, x_0 \pm \varepsilon \in I$ (ilyen ε létezik, mert $x_0 \in intI$)! Ekkor $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, mivel f szigorúan monoton (növő). Ha $y \in (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, mivel f inverze is szigorúan monoton, ezért

$$f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon))$$
$$\Updownarrow$$
$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon,$$

vagyis f^{-1} folytonos y_0-ban. Az $x_0 \in \partial I$ eset tárgyalása hasonló. $\square$



A füldugulás rendkívül gyakori tünet, a legtöbb esetben igen zavaró, de ritkán akár fájdalmas is lehet. A füldugulás nem betegség, hanem többféle betegség vagy probléma következtében kialakuló tünetről van szó. Ennek megfelelően kezelését csak orvosi vizsgálat után lehet elindítani, ha a füldugulást kiváltó okot sikerült azonosítani.

A füldugulás egyik leggyakoribb oka a fülzsír lerakódása!

Részletek

Példák:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, x \geq 0, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, ekkor f szigorúan monoton nő, $D_f = [0, \infty)$, f^{-1} folytonos az $y \in R_f$ pontokban és $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. (Később látjuk a Bolzano-tétellel, hogy $R_f = [0, \infty)$.)
2. $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x$, ekkor f szigorúan monoton nő, $D_f = \mathbb{R}$, f^{-1} folytonos. (Később látjuk a Bolzano-tétellel, hogy $D_{f^{-1}} = R_f = (0, \infty)$.)

Tétel:
Legyenek X, Y metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y, f \in C(D_f)$, D_f sorozatkompakt, f

injektív $\Rightarrow f^{-1} \in C(R_f)$.

Bizonyítás:
Legyen $y_0 \in D_{f^{-1}} = R_f$. Belátjuk, hogy $f^{-1} \in C[y_0]$. Alkalmazzuk az átviteli elvet! Legyen $y_k \in D_{f^{-1}} = R_f$ olyan, amelyre $\lim(y_k) = y_0$. Belátandó: $\left(f^{-1}(y_k)\right)_{k\in\mathbb{N}} \to f^{-1}(y_0)$.

$$x_k := f^{-1}(y_k), x_0 := f^{-1}(y_0) \Rightarrow y_k = f(x_k), y_0 = f(x_0),$$

vagyis belátandó: $\lim(x_k) \to x_0$. Indirekt bizonyítunk: ha ez nem lenne igaz, akkor $\exists \varepsilon_0 > 0, x_{k_l} : \rho(x_{k_l}, x_0) \geq \varepsilon_0$. Tekintsük az (x_{k_l}) sorozatot, amelyre $x_{k_l} \in D_f$. Tudjuk, hogy D_f sorozatkompakt, ekkor $\exists \left(x_{k_{l_j}}\right)$: $\lim\left(x_{k_{l_j}}\right) = x* \in D_f$, de mivel $f \in C[x*] \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} f\left(x_{k_{l_j}}\right) = f(x*)$ és mivel $\lim\limits_{j\to\infty} f\left(x_{k_{l_j}}\right) = \lim\left(y_{k_{l_j}}\right) = y_0 = f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = f(x*)$. De hát f injektív, vagyis $x_0 = x*$, ami meg ellentmondás, mert $\lim\left(x_{k_{l_j}}\right) = x* = x_0$ esetén $\exists j \in \mathbb{N}$: $\rho\left(x_{k_{l_j}}, x_0\right) < \varepsilon_0$, de ez ellentmond $\rho(x_{k_l}, x_0) \geq \varepsilon_0$ -nak. □

3.2. A folytonos függvények alaptulajdonságai

Tétel:
Legyen X, Y metrikus terek, $f : X \to Y, f \in C(D_f)$, D_f sorozatkompakt $\Rightarrow R_f$ is sorozatkompakt. (Weierstrass tétele).

Bizonyítás:
Legyen $(y_k) \subset R_f$ tetszőleges sorozat! Azt kell megmutatni, hogy $\exists (y_{k_l})$ részsorozata, mely konvergens és $\lim(y_{k_l}) \in R_f$. Mivel $y_k \in R_f \Rightarrow \exists x_k \in D_f : f(x_k) = y_k$. Mivel D_f sorozatkompakt és $x_k \in D_f \Rightarrow \exists (x_{k_l}) : \lim(x_{k_l}) = x_0 \in D_f$. Mivel $f \in C[x_0] \Rightarrow \lim\limits_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = f(x_0) = y_0 \in R_f$, node $f(x_{k_l}) = y_{k_l}$, ezért $\lim(y_{k_l}) = y_0 \in R_f$, és pont ezt akartuk belátni. □

Következmények:

1. D_f sorozatkompakt $\Rightarrow R_f$ korlátos és zárt (minden sorozatkompakt halmaz korlátos és zárt).
2. Ha $Y = \mathbb{R}$ akkor is, ha D_f sorozatkompakt $\Rightarrow R_f \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt. A korlátosság következménye: $\sup R_f, \inf R_f$ véges, és mivel az R_f értékkészlet zárt $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = \inf f, f(x_2) = \sup f$.

Példák:
Miért szükséges feltenni, hogy D_f sorozatkompakt (D_f, R_f sorozatkompaktsága $\mathbb{R}$ -ben azt jelenti, hogy a halmazok korlátosak és zártak):

1. $D_f = [0, \infty)$ zárt, de nem korlátos, $f(x) = x$, ekkor $R_f = [0, \infty)$ nem korlátos.
2. $D_f = (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ekkor D_f korlátos, de nem zárt, R_f pedig nem korlátos.

Megjegyzés:
Az a tény, hogy egy

$$f : X \rightarrowtail Y, f \in C[x_0] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in B_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)),$$

ahol δ függhet ε-tól és x_0-tól is.

Definíció:
Azt mondjuk, hogy X, Y metrikus terek esetén egy $f : X \rightarrowtail Y$ függvény egyenletesen folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x_1, x_2 \in D_f, \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Tehát ekkor δ csak ε-tól függ.

Tétel (Heine tétele):
Ha f folytonos és D_f sorozatkompakt $\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos.

Bizonyítás:
Tfh f folytonos, D_f sorozatkompakt. Indirekt bizonyítunk: $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in D_f, \rho(x_1, x_2) < \delta$, de $\rho(f(x_1), f(x_2)) \geq \varepsilon$. Legyen $\delta := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, ekkor tehát $\exists x_k, \widetilde{x_k} \in D_f : \rho(x_k, \widetilde{x_k}) < \frac{1}{k}$ de $\rho(f(x_k), f(\widetilde{x_k})) \geq \varepsilon$. Tudjuk, hogy D_f sorozatkompakt, így $\exists (x_{k_l}) \subset D_f : \lim(x_{k_l}) = x_0 \in D_f$. Mivel $\rho(x_{k_l}, \widetilde{x_{k_l}}) < \frac{1}{k}, \lim\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \Rightarrow \lim(\widetilde{x_{k_l}}) = \lim(x_{k_l}) = x_0 \in D_f$. Mivel $f \in C[x_0]$, az átviteli elv alapján $\Rightarrow \lim\limits_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = f(x_0), \lim\limits_{l\to\infty} f(\widetilde{x_{k_l}}) = f(x_0)$, de ez meg ellentmondás a feltevésünkkel, miszerint $\rho(f(x_k), f(\widetilde{x_k})) \geq \varepsilon$. $\square$

Példák:

1. $D_f = [0, \infty)$ ez zárt, de nem korlátos, $f(x) := x^2$ nem egyenletesen folytonos.
2. $D_f = (0, 1]$ ez korlátos, de nem zárt, $f(x) := \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos.

Tétel (Bolzano-tétel):
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C[a, b], f(a) \neq f(b)$, ekkor tetszőleges $\eta \in (f(a), f(b))$ számhoz $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = \eta$.

Bizonyítás:
tekintsük a következő halmazt: $M := \{x \in [a, b] : f(x) < \eta\} \subset [a, b] \Rightarrow M \neq \varnothing$ mivel $a \in M$, továbbá M korlátos. Legyen $\xi := \sup M$. Belátjuk, hogy $f(\xi) = \eta$. Indirekt bizonyítunk: $f(\xi) < \eta$ vagy $f(\xi) > \eta$ nem lehetséges.
Első eset: ha $f(\xi) < \eta$ lenne, akkor $f(b) > \eta \Rightarrow \xi \neq b$, ezért ξ -nek megadható olyan jobboldali környezete, ahol a függvényértékek η -nál kisebbek, mert $f \in C[\xi]$, vagyis $\exists \delta > 0 : x \in [\xi, \xi + \delta] \Rightarrow f(x) < \eta$, ez pedig ellentmond annak, hogy $\xi = \sup M$.
Második eset: ha $f(\xi) > \eta$ lenne, akkor $f(a) < \eta \Rightarrow \xi \neq a$ és

$$f \in C[a, b] \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in [\xi - \delta, \xi] \Rightarrow f(x) > \eta.$$

Ez is ellentmond annak, hogy $\xi = \sup M = \sup \{x \in [a,b] : f(x < \eta)\}$. Tehát mivel $f(\xi) \not> \eta, f(\xi) \not< \eta \Rightarrow f(\xi) = \eta$. □

Következmények: legyen $I \subset \mathbb{R}$ valamilyen intervallum (véges vagy végtelen, nyílt vagy zárt), és tfh $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I)$. Ekkor $\forall x_1, x_2 \in I, y \in (f(x_1), f(x_2))$ esetén $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : f(x_0) = y$.

Megjegyzés:
Az ilyen tulajdonságú függvényeket Darboux tulajdonságúaknak nevezzük. A Bolzano-tétel kimondja, hogy ha $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I) \Rightarrow f$ Darboux tulajdonságú.

Példa:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény Darboux tulajdonságú, de nem folytonos 0-ban.

Állítás:
Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz intervallum $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, \forall x \in (x_1, x_2)$ esetén $x \in A$.

Ezen állítás segítségével a Bolzano-tétel így is megfogalmazható:

Tétel:
Ha I intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I) \Rightarrow R_f$ is intervallum.

Alkalmazás:

1. $I := [0, \infty), f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}!$ Ekkor a tétel szerint mivel f folytonos, R_f valamilyen intervallum, f szigorúan monoton nő,

$$f(0) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow R_f = [0, \infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0, \infty).$$

2. $I = \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}, f(x) = e^x \Rightarrow f(x) \in C(I), \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Itt f szigorúan monoton nő, $R_f = (0, \infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} \equiv D_{\ln} = (0, \infty)$.

Szegény Bambira fegyvert fognak. Miért sajnálod, pedig az őzek nem is védett állatok?! Vannak azonban olyan fajok, amelyet a kihalás fenyeget.

The **World Wide Fund for Nature** (**WWF**) is an international non-governmental organization founded in 1961, working in the field of the wilderness preservation, and the reduction of human impact on the environment. It was formerly named the **World Wildlife Fund**, which remains its official name in Canada and the United States. The Living Planet Report is published every two years by WWF since 1998; it is based on a Living Planet Index and ecological footprint calculation.

It is the world's largest conservation organization with over five million supporters worldwide, working in more than 100 countries, supporting around 1,300[4] conservation and environmental projects. WWF is a foundation,[5] with 55% of funding from individuals and bequests, 19% from government sources (such as the World Bank, DFID, USAID) and 8% from corporations in 2014.[6]

3.2.1. Bolzano-tétel metrikus terekben

Definíció:
Legyen X metrikus tér, $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R},\varphi:[\alpha,\beta]\to X,\varphi\in C[\alpha,\beta]$. Ekkor azt mondjuk, hogy φ folytonos ívet, görbét határoz meg az X-ben. $R_\varphi=\{\varphi(t):t\in[\alpha,\beta]\}\subset X$. Ekkor $\varphi(\alpha)$ és $\varphi(\beta)$-t a görbe végpontjainak nevezzük. (Megj: van, amikor φ -t nevezzük görbének, nem pedig a "képét".)

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az $A\subset X$ halmaz ívszerűen összefüggő, ha az A halmaz bármely két pontja összeköthető az A-ban haladó folytonos görbével, ívvel, vagyis $\forall a,b\in A\exists\varphi:[\alpha,\beta]\to X,\varphi\in C[\alpha,\beta]$, hogy

$$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b,t\in(\alpha,\beta)\Rightarrow\varphi(t)\in A\,.$$

Tétel:
Legyenek X, Y metrikus terek, $f:X\rightarrowtail Y,f\in C(D_f)$! Ha D_f ívszerűen összefüggő, akkor R_f is.

Bizonyítás:
Legyenek $y_1,y_2\in R_f$. Belátjuk, hogy y_1,y_2 összeköthető R_f-ben haladó folytonos ívvel. Mivel

$$y_1,y_2\in R_f\Rightarrow\exists x_1,x_2\in D_f:f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2\,.$$

Mivel D_f ívszerűen összefüggő

$$\Rightarrow\exists\varphi:[\alpha,\beta]\to X,\varphi\in C[\alpha,\beta]$$

úgy, hogy

$$\varphi(\alpha)=x,\varphi(\beta)=x_2,t\in(\alpha,\beta)\Rightarrow\varphi(t)\in D_f.$$

Legyen $\psi : [\alpha, \beta] \to Y, \psi := f \circ \varphi$ ekkor ψ folytonos (kompozíció függvény tulajdonságából), továbbá $t \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \psi(t) = f(\varphi(t)) \in R_f$, sőt,

$$\psi(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(x_1) = y_1, \psi(\beta) = f(\varphi(\beta)) = f(x_2) = y_2.$$

□

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ összefüggő (topológiai értelemben), ha nem adható meg G_1 és G_2 diszjunkt nyílt halmaz úgy, hogy $G_1 \cup G_2 \supset A, A \cap G_1 \neq \varnothing, A \cap G_2 \neq \varnothing$.

Megjegyzés:
belátható, hogy ha A ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

Tétel (Bolzano-tétel metrikus térben, bizonyítás nélkül):
Legyenek X, Y metrikus terek, $f : X \rightarrowtail Y, f \in C(D_f)$! Ha D_f összefüggő $\Rightarrow R_f$ is.

3.2.2. Függvénysorok és sorozatok egyenletes konvergenciája

Definíció:
Legyenek X, Y metrikus terek, $M \subset X$, és $\forall j \in \mathbb{N}$-re $f_j : M \to Y$. Azt mondjuk, hogy f_j függvények függvénysorozatot alkotnak, jelölése $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az $f_j : M \to Y$ függvényekből álló sorozat pontonként tart egy $f : M \to Y$ függvényhez, ha $\forall x \in M, \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Kérdés: feltéve, hogy $f_j \in C(M)$ minden j-re, $\Rightarrow f \in C(M)$? Általában nem. Pl: $f_j(x) = x^j, 0 \leq x \leq 1, j \in \mathbb{N}$, ekkor $\forall f_j \in C(M)$, de

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az $f_j : M \to Y$ függvényekből álló sorozat egyenletesen tart az $f : M \to Y$ függvényhez, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} : j > j_0 \Rightarrow \rho(f_j(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in M.$$

Megjegyzés:
j_0 csak ε-tól függ, és nem függ x-től. (Pontonkénti konvergencia esetén függhet x-től.)

Példa:
$f_j(t) := t^j, 0 < a < 1, 0 \leq t \leq a$, ekkor f_j egyenletesen tart 0-hoz a $[0, a]$-n. Ugyanis legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $0 \leq t^j < \varepsilon$ esetén $0 \leq t^j < \varepsilon$ mikor teljesül? Válasszuk meg j_0 számot úgy, hogy $j > j_0$ esetén $a^j < \varepsilon$. Ezt mindig megtehetjük, ugyanis $0 < a < 1$, így $0 \leq t \leq a$ esetén $t^j \leq a^j \leq \varepsilon$.

Tétel:
Legyen $f_j : M \to Y, M \subset X, f_j \in C\left(D_f\right)$. Ha (f_j) függvénysorozat egyenletesen tart egy $f : M \to Y$ függvényhez, akkor f folytonos.

Bizonyítás:
Legyen $x_0 \in M$. Belátjuk, hogy $f \in C[x_0]$. Tetszőleges $x \in M$ esetén

$$\rho\left(f(x), f(x_0)\right) \leq \rho\left(f(x), f_j(x)\right) + \rho\left(f_j(x), f_j(x_0)\right) + \rho\left(f_j(x_0), f(x_0)\right).$$

Legyen $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ tetszőleges, ezért mivel (f_j) egyenletesen tart f-hez,

$$\exists j_0 : j > j_0 \Rightarrow \rho\left(f(x), f_j(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \rho\left(f(x_0), f_j(x_0)\right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Választhatunk egy rögzített $j > j_0$-t, mondjuk $j = j_0 + 1$. Továbbá tudjuk, hogy

$$f_j \in C[x_0] \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in M, \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho\left(f_j(x), f_j(x_0)\right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

tehát

$$\rho\left(f(x), f(x_0)\right) \leqslant \underbrace{\rho\left(f(x), f_j(x)\right)}_{<\varepsilon/3 \text{ mivel } j>j_0} + \underbrace{\rho\left(f_j(x), f_j(x_0)\right)}_{<\varepsilon/3 \text{ ha } x\in B_\delta(x_0)} + \underbrace{\rho\left(f_j(x_0), f(x_0)\right)}_{<\varepsilon/3 \text{ mivel } j>j_0} < \varepsilon.$$

□

Megjegyzés:
$f_j(t) := t^j, 0 \leq t \leq 1$ függvények esetén (f_j) függvénysorozat nem tart egyenletesen az f függvényhez.

Definíció:
Legyen X metrikus tér, $Y = \mathbb{R}, M \subset X, g_k : M \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ helyett lehetne $\mathbb{C}$ is). Ekkor tekintsük a következő függvénysorozatot: $f_j := \sum\limits_{k=1}^{j} g_k$. Az ilyen módon értelmezett (f_j) sorozatot a g_k tagokból álló függvénysornak nevezzük.

Definíció:
Azt mondjuk, hogy a g_k tagokból álló függvénysor pontonként konvergens és összege az $f : M \to \mathbb{R}$ függvény, ha $\forall x \in M$ esetén $g_k(x)$ tagokból álló számsor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és a sor összege $f(x)$, és ezt így jelöljük: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x)$ jelöljük.
Megjegyzés: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x) \equiv \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{j} g_j(x)$.

Definíció:
Azt mondjuk, hogy a (g_k) tagokból álló függvénysor egyenletesen konvergál egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha $f_j = \sum\limits_{k=1}^{j} g_k$ esetén (f_j) függvénysorozat egyenletesen tart f-hez.

Tétel:
Tfh $g_k : M \to \mathbb{R}$ folytonos és a g_k tagokból álló sor egyenletesen konvergál egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvényhez $\Rightarrow f \in C(D_f)$.

Bizonyítás:
$f_j = \sum_{k=1}^{j} g_k$ folytonos, $\lim(f_j) = f$-hez egyenletesen konvergál $\Rightarrow f \in C(D_f)$. $\square$

Tétel (Weierstrass-kritérium):
Tfh $g_k : M \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy $|g_k| \leq a_k, a_k \in \mathbb{R}$ és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Ekkor a (g_k) tagokból álló függvénysor egyenletesen konvergens.

Bizonyítás:
legyen $x \in M$ tetszőleges, rögzített pont. Először belátjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| < \infty$.
Legyen $f_j(x) := \sum_{k=1}^{j} g_k(x)$, ekkor

$$\exists j_0 : j > l > j_0 \Rightarrow |f_j(x) - f_l(x)| = \left| \sum_{k=l+1}^{j} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=l+1}^{j} |g_k(x)| \leq \sum_{k=l+1}^{j} a_k < \varepsilon,$$

mivel $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, vagyis $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ számsorozatra teljesül a Cauchy-kritérium. Mivel $\mathbb{R}$ teljes tér $\Rightarrow \exists f(x) \in \mathbb{R} : \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$, vagyis a $|g_k(x)|$ és a $g_k(x)$ tagokból álló függvénysor konvergens.
Most belátjuk, hogy a sor, illetve a vele ekvivalens (f_j) függvénysorozat egyenletesen konvergál f -hez. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, a fentiek szerint, $j \to \infty$ határátmenetben a fenti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $|f(x) - f_l(x)| \leq \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \forall x \in M$, ha $l > j_0$. De hisz ez pont az jelenti, hogy f_k egyenletesen tart f -hez. $\square$

3.3. Hatványsorok

Definíció:
Egy $c_j x^j, x \in \mathbb{R}, c_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2...$ tagokból álló függvénysort hatványsornak nevezünk.

Megjegyzés:
A hatványsor tagjai folytonos függvények.

Kérdés: a hatványsor mely x -ekre konvergens, illetve egyenletesen konvergens?

Definíció:
Legyen $a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$. Az $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat limesz szuperiorját illetve limesz inferiorját így értelmezzük: $\limsup (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = \lim_{k\to\infty} \sup a_k$ jelenti azt a legnagyobb valós számot (vagy végtelent), amelyhez az (a_k) egy alkalmas részsorozata konvergál. Ezzel analóg a $\liminf (a_k)$.

Megjegyzés:

1. Mindig létezik limesz inferior és limesz szuperior.
2. Ha $\exists \lim (a_k) \Rightarrow \lim (a_k) = \limsup (a_k) = \liminf (a_k)$.
3. $\limsup (a_k) = \lim\limits_{k\to\infty} [\sup \{a_k, a_{k+1}, ...\}]$.

Tétel:
Legyen $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}}$. Ha a nevező nulla lenne, akkor $R := \infty$, ha végtelen, akkor $R := 0$. Ekkor $|x| < R$ esetén a hatványsor konvergens, $|x| > R$ esetén pedig divergens.

Bizonyítás:
A gyökkritérium alapján…

Tétel:
Legyen $0 < R_0 < R$, ekkor a hatványsor egyenletesen konvergens az R_0 sugarú intervallumban (vagy körben).

Bizonyítás:
Weierstrass-kritériummal bizonyítjuk. Legyen $g_j(x) = c_j x^j, j = 0, 1, ...,$ ekkor $|g_j(x)| = |c_j x^j| = |c_j| |x^j| \le |c_j| R_0^j$. Azt kellene belátni, hogy $|c_j| R_0^j$ tagokból álló sor konvergens. Alkalmazzuk erre a gyökkritériumot!

$$\sqrt[j]{|c_j| R_0^j} = R_0 \sqrt[j]{|c_j|}, \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|c_j| R_0^j} = R_0 \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|c_j|} = \frac{R_0}{R} < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| R_0^j$$

konvergens (ez a gyökkritérium). □

Következmény: a hatványsor összege folytonos a konvergenciakör belsejében. Például $e^x = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$, ennek a konvergencia-sugara végtelen, mert

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1/n!}} = \limsup \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

A **cselló** (**gordonka**, **kisbőgő**) egy nagy hangterjedelmű, basszus fekvésű vonós hangszer, és hasonlóan e hangszercsalád (hegedűcsalád) többi tagjához, vagyis a hegedűhöz, a brácsához és a nagybőgőhöz, ez a hangszer is négy húrral rendelkezik, melyek kvint távolságra vannak egymástól. A nagybőgő és a mélyhegedű közt a középső helyet foglalja el alakjára és hangterjedelmére nézve.

4. Differenciálhatóság

Definíció:
Egy $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvényt az x_0 pontban differenciálhatónak nevezünk, ha $x_0 \in intD_f$ és $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ és véges $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}$ és véges.

Megjegyzés:
Hogy egy ilyen definíciót továbbvihessünk "többváltozós" függvényekre, szükségünk van a lineáris leképezések vizsgálatára.

4.1. Lineáris leképezések

Definíció:
Legyen X vektortér, azt mondjuk, hogy az $M \subset X$ halmaz elemei lineárisan függetlenek, ha bármely M-beli véges sok elemre $\sum_i \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$. Gyakran M-et nevezzük lineárisan függetlennek, nem pedig az elemeit.

Állítás:
Egy vektortér lineárisan független elemeinek maximális száma egyértelmű.

Definíció:
Az X vektortér dimenziójának nevezzük az X-beli lineárisan független elemek maximális számát (véges vagy végtelen is lehet).

Definíció:
Legyenek X és Y vektorterek, $M \subset X$! Egy $A : M \to Y$ leképezést lineárisnak nevezünk, ha

1. $x_1, x_2 \in M \Rightarrow x_1 + x_2 \in M$, és $x \in M, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in M$.
2. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ (additivitás).
3. $A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1)$ (homogenitás).

Megjegyzés:
Az első feltétel M-től megköveteli, hogy lineáris altér legyen, azonban gyakran A-t egy X-ről Y-ba képező függvényként definiáljuk, így M-re nincs is szükség.

Példák:
$X := \mathbb{R}^n, Y := \mathbb{R}^m, A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. Ekkor egyértelműen létezik egy

olyan $\mathcal{A}$ mátrix, hogy $\mathcal{A}x = Ax$, és $\mathcal{A}$ ilyen alakú: $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Definíció:
Jelölje a $lin\,(X,Y) = L\,(X,Y)$ az összes $X \to Y$ lineáris leképezések halmazát!

Definíció:
Legyen X, Y vektorterek, $A \in lin\,(X,Y)\,, B \in lin\,(X,Y)$, ekkor $A+B$-t így értelmezzük: $(A+B)\,(x) = \underbrace{Ax+Bx}_{\in Y}, \forall x$-re.

Állítás:
$(A+B) \in lin\,(X,Y)$.

Definíció:
Az $A \in lin\,(X,Y)$-nek $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal való szorzatát így értelmezzük: $(\lambda A)\,(x) = \lambda\,(Ax)$.
Megjegyzés: a homogenitás miatt a zárójelet elhagyhatjuk, a művelet egyértelmű marad.

Állítás:
$\lambda A \in lin\,(X,Y)$.

Tétel:
$lin\,(X,Y)$ vektorteret alkot az előbbi két művelettel (vagyis az $A+B$ között értelmezett összeadással és λA-val értelmezett szorzással).

Definíció:
Legyenek $Y = X$ vektorterek! Egy $A \in lin\,(X,X)\,, B \in lin\,(X,X)$ szorzatát így értelmezzük: $(AB)\,(x) = A\,(B\,(x))$, vagyis mint kompozíció, tehát $AB \equiv A \circ B$.

Állítás:
$AB \in lin\,(X,X)$.

Definíció:
Legyen

- $I : X \to X$, $Ix = x\,\forall x \in X$ és
- $0 : X \to X$, $0x = 0 \in X\,\forall x \in X$.

Ekkor $I \in lin\,(X,X)$ és $0 \in lin\,(X,X)$. Így igaz a következő tétel.

Tétel:
$lin\,(X,X)$-ben érvényesek a következők:

1. $(A+B)\,C = AC + BC$.
2. $C\,(A+B) = CA + CB$.

3. $\lambda_{\in\mathbb{R}}(AB) = (\lambda A)B$.
4. $\exists! 0 \in lin(X,X) : 0A = A0 = 0 \,\forall A$.
5. $\exists! I \in lin(X,X) : IA = AI = A \,\forall A$.

Definíció:
Egy $A \in lin(X,X)$ hatványait így értelmezzük: $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA \ldots$ $A^n = \underbrace{AA...A}_{n \text{ db}} = AA^{n-1} = A^{n-1}A$.

Állítás:
Legyen $X := \mathbb{R}^n$ és $A, B \in lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ha $\mathcal{A} \Leftrightarrow A, \mathcal{B} \Leftrightarrow B$, akkor $\mathcal{AB} \Leftrightarrow AB$. (Itt $\mathcal{A} \Leftrightarrow A$ azt jelenti, hogy $Ax = \mathcal{A}x$; $\mathcal{AB}$ mátrixszorzást jelent).

Definíció:
Legyen X vektortér, $A \in lin(X,X)$! Azt mondjuk, hogy $\lambda \in \mathbb{R}$ szám az A leképezés sajátértéke és $x \in X, x \neq 0$ pedig a sajátvektora, ha $Ax = \lambda x$.

Definíció:
A ψ sajátérték rangjának (vagy geometriai multiplicitásának) a ψ-hoz tartozó lineárisan független sajátelemek (sajátvektorok) maximálás számát nevezzük.

Megjegyzés:
A ψ-hoz tartozó sajátvektorok alteret alkotnak.

Speciális eset: $X := \mathbb{R}^n, A \Leftrightarrow \mathcal{A}, I \Leftrightarrow \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ egyenlet megoldásai adják a ψ sajátértékeket.

Catherine Evelyn Smith (born 25 April 1947 in Hamilton, Ontario)[1] is a Canadian occasional backup singer, rock groupie, drug dealer, and legal secretary, who served 15 months in the California state prison system for injecting John Belushi with a fatal dose of heroin and cocaine in 1982.[2]

Smith had been paid for a front-page headline story in the Hollywood tabloid the *National Enquirer*,[3] where she stated she was the person who injected the actor with a fatal drug overdose. Smith co-wrote the book *Chasing the Dragon* (1984)[4] which told her life story; its title alludes to Smith's heroin addiction. Smith appeared prominently in the Bob Woodward book *Wired: The Short Life and Fast Times of John Belushi* (1984) and was played by Patti D'Arbanville in the 1989 film version of *Wired*.

4.1.1. Lineáris leképezések inverze

Legyen X vektortér! Egy $A \in lin\left(X,X\right)$ leképezésnek mikor van inverze? (Tudjuk, hogy az inverz csak akkor értelmezhető, ha a függvény injektív).

Tétel:
Egy $A \in lin\left(X,X\right)$ leképezésnek pontosan akkor van inverze, ha $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$, vagyis ha $\ker A = \{0\}$.

Bizonyítás:
Belátjuk, hogy A injektív, ha $\ker A = 0$, illetve $\ker A = 0$ ha A injektív.
Első része: legyen $x_1, x_2 \in X$ és $Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow A\left(x_1 - x_2\right) = 0$, mivel $\ker A = 0$, ezért $\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, tehát A injektív, ha $\ker A = 0$.
Most belátjuk, hogy $\ker A = 0$ ha A injektív, vagyis $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. $A0 = 0$ és A injektív $\Rightarrow x = 0$. $\square$

Állítás:
$A \in lin\left(X,X\right)$ injektív $\Rightarrow A^{-1} \in lin\left(X,X\right)$.

Állítás:
Legyen $A \in lin\left(X,X\right)$ olyan, hogy $\exists B \in lin\left(X,X\right) : AB = BA = I$, ekkor $\exists A^{-1}$ és $A^{-1} = B$.

4.1.2. Lineáris és folytonos operátorok

Legyen a továbbiakban X, Y normált tér, $A \in lin\,(X, Y)$. Kérdés: következik-e ebből, hogy A folytonos is? Általában nem.

Állítás:
Legyen $A \in lin\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, ekkor A folyonos.

Bizonyítás:
Legyen $\mathcal{A}$ mátrix, melyre $\mathcal{A}x = Ax$. Becsüljük meg ~~amink van~~ $|Ax|$-t! $|Ax|^2 = |\mathcal{A}x|^2 = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 \leq \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = |x|^2 \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}^2$ (lásd a megjegyzést), vagyis $|Ax|^2 \leq c^2 \, |x|^2 \Rightarrow |Ax| \leq c\,|x|$, így $|Ax - Ax_0| \leq c\,|x - x_0|$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $\delta := \frac{\varepsilon}{c} > 0$. Ha $|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow |Ax - Ax_0| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. $\square$

Megjegyzés:
Az első számítás során felhasználtuk, hogy

$$y_j = (\mathcal{A}x)_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}x_k \Rightarrow y_j^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)$$

(Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség).

Definíció:
Legyen X, Y normált tér, $A \in lin\,(X, Y)$! Az A leképezést korlátosnak nevezzük, ha $\exists c \geq 0, c \in \mathbb{R} : \|Ax\| \leq c\,\|x\|\,, \forall x \in X$-re.

Tétel:
Legyen $A : X \to Y$ lineáris. Ekkor a következő ekvivalenciák teljesülnek.

$$A : X \to Y \text{ folytonos}$$
$$\Updownarrow$$
$$A : X \to Y \text{ folytonos a nulla helyen}$$
$$\Updownarrow$$
$$A \text{ korlátos}$$

Bizonyítás:

1. Az első ekvivalencia. Ha A mindenhol folytonos, akkor nyilván a nullában is. Másrészt, ha a nullában folytonos, akkor tetszőleges x-re $x_n \to x$ esetén $x_n - x \to 0$, vagyis $Ax_n - Ax = A\,(x_n - x) \to 0$. Az átviteli elv alapján tehát valóban folytonos A az x helyen.
2. Ha x korlátos, akkor $x_n \to 0$ esetén $\|Ax_n\| \leq c\,\|x_n\|$ miatt $Ax_n \to 0$ is fennáll, vagyis A folytonos a nulla helyen. Fordítva, ha A nem lenne folytonos a nullában, akkor valamilyen $x_n \to 0$ sorozatra $Ax_n \nrightarrow 0$, azaz ennek egy x_{n_k} részsorozatára $\|Ax_{n_k}\| > \delta$ teljesül valamilyen pozitív δ esetén. Ekkor viszont nem teljesülhet $\|Ax_{n_k}\| \leq c\,\|x_{n_k}\|$ a sorozat elemeire semmilyen $c > 0$ esetén,

vagyis A nem lehet korlátos sem. $\square$

Definíció:
Egy f függvényt akkor nevezünk folytonosan differenciálhatónak egy $[\alpha, \beta]$-n, ha folytonos az $[\alpha, \beta]$-n, differenciálható a (α, β)-n és a deriváltjának létezik folytonos kiterjesztése az $[\alpha, \beta]$-ra. Ezt a tényt így jelöljük: $f \in C^1[0,1]$.

Példa lineáris, nem korlátos operátorra:
$X := C[0,1]$, művelet a szokásos összeadás és skalárral való szorzás, a norma $\|f\| = \sup|f|$. Legyen $f \in D_A = C^1[0,1] \subset X$, ahol A a derviálás operátora, vagyis $Af := f' \in X$.
Vegyük észre, hogy $A : X \rightarrowtail X$, de nem folytonos. Ugyanis: az $f_j(t) = \frac{1}{j}e^{-jt}, j \in \mathbb{N}, t \in [0,1]$ függvények folytonosan differenciálhatóak, normájuk $\|f_j(t)\| = \frac{1}{j} \Rightarrow \lim\limits_j \|f_j\| = 0$. Továbbá

$$f_j'(t) = -e^{-jt} \Rightarrow \left\|f_j'(t)\right\| = 1 \Rightarrow \lim_j \left\|f_j'\right\| = \lim_j \|Af_j\| = 1.$$

Eszerint a fenti A operátor nem folytonos, de lineáris (az A operátor a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények halmazából képez a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények halmazába).

Unicode is a computing industry standard for the consistent encoding, representation, and handling of text expressed in most of the world's writing systems. The latest version contains a repertoire of 136,755 characters covering 139 modern and historic scripts, as well as multiple symbol sets. *The Unicode Standard* is maintained in conjunction with ISO/IEC 10646, and both are code-for-code identical.

The Unicode Standard consists of a set of code charts for visual reference, an encoding method and set of standard character encodings, a set of reference data files, and a number of related items, such as character properties, rules for normalization, decomposition, collation, rendering, and bidirectional display order (for the correct display of text containing both right-to-left scripts, such as Arabic and Hebrew, and left-to-right scripts).[1] As of June 2017, the most recent version is *Unicode 10.0.* The standard is maintained by the Unicode Consortium.

Definíció:
Legyen X, Y normált tér, $A \in lin(X,Y)$ és korlátos. Értelmezzük az A operátor normáját! $\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$.

Belátandó, hogy a norma tulajdonságai teljesülnek. Mivel A korlátos,

$$\exists c \in \mathbb{R} : \|Ax\| \leq c \|x\| = c,$$

ha $\|x\| = 1$.

1. Nyilván $\|A\| \geq 0$ és $A = 0 \Rightarrow \|A\| = 0$. Fordítva:

$$\|A\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \forall x \in X, \|x\| = 1.$$

   Bizonyítandó, hogy ekkor $A = 0 \Leftrightarrow Az = 0 \forall z \in X$. Ekkor

$$Az = A\left(\frac{z}{\|z\|}\|z\|\right) = \|z\| \underbrace{A\left(\frac{z}{\|z\|}\right)}_{\text{normá ja 1}} = \|z\| 0 = 0, \quad \forall z \in X \Leftrightarrow A = 0.$$

2.
$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \sup\{\|(\lambda A)x\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|\lambda| \cdot \|Ax\| : \|x\| = 1\} \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} \\ &= \lambda \|A\| \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup\{\|(A + B)x\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|Ax\| + \|Bx\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} + \sup\{\|Bx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Tétel:
Legyen X, Y normált tér! Tekintsük a korlátos, $lin(X, Y)$-beli operátorokat az összeadással és számmal való szorzással és az előbb értelmezett normával. Ez normált teret alkot és $L(X, Y)$-nak jelöljük.

Megjegyzés:
Az X-en értelmezett Y-ba képező korlátos lineáris operátorok a szokásos műveletekkel vektorteret alkotnak, mert 2 korlátos, folytonos operátor összege is folytonos, korlátos és skalár szorosa is korlátos (utóbbi ekvivalens a folytonossággal, mint bizonyítottuk).

Tétel:
Legyen $A \in L(X, Y)$. Ekkor $\forall x \in X$ esetén teljesül az $\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$ egyenlőtlenség, továbbá $\|A\| = \min\{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X\}$.

Bizonyítás:
Felhasználva, hogy $x \neq 0$ esetén $\frac{x}{\|x\|} = 1$, az operátornorma definícióját átírhatjuk a következőképpen:

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in X\right\},$$

azaz $\forall x \neq 0$ vektor esetén $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, amiből $\|x\|$ -szel való szorzással kapjuk az $\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$ egyenlőtlenséget, ami persze $x = 0$ esetén is teljesül.
Másrészt maga $\|A\|$ is olyan c érték, amelyre $\|Ax\| \leq c\,\|x\|$, vagyis teljesül, hogy

$$\|A\| \geq \inf\{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in X\}.$$

Így ha $\|Ax\| \leq c\,\|x\|$ teljesül $\forall x \in X$ esetén, akkor $x \neq 0$ esetén $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c$ is igaz, sőt, emiatt

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c.$$

Ekkor a jobb oldalon szereplő c értékek infimumánál is kisebbegyenlő lesz $\|A\|$. Kaptuk tehát, hogy $\|A\| = \inf\{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in X\}$, és mivel maga $\|A\|$ is megfelel c-nek, ezért ez egyszersmind minimum is. $\square$

Tétel:
Legyen X normált, Y teljes normált tér, ekkor $L(X,Y)$ normált tér is teljes.

Bizonyítás:
Legyen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az $L(X,Y)$ normált térben, vagyis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : j,k > k_0 \Rightarrow \|A_j - A_k\| < \varepsilon.$$

Be kellene látni, hogy

$$\exists A \in L(X,Y) : \lim_j \|A_j - A\| = 0$$

Legyen $x \in X$ tetszőleges rögzített elem! Tekintsük az $(A_j x)_{j\in\mathbb{N}}$ Y-beli sorozatot! Belátjuk, hogy erre teljesül a Cauchy-kritérium.

$$\|A_j x - A_k x\| = \|(A_j - A_k)\,x\| \leq \|A_j - A_k\|\,\|x\| \leq \varepsilon\,\|x\|$$

Mivel Y tér teljes, $\exists \lim_{j\to\infty}(A_j x) = A(x) \in Y$ $\lim_{j\to\infty}\|A_j x - A(x)\| = 0, \forall x \in X$ rögzített elemre. Nem nehéz belátni, hogy $A \in lin(X,Y)$. Belátandó, hogy korlátos is. $\|A_j x\| \leq \|A_j\| \cdot \|x\|$. Mivel (A_j) Cauchy sorozat, $\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 : j,k > j_0 \Rightarrow \|A_j - A_k\| < \varepsilon$. Legyen $\varepsilon := 1, k := j_0 + 1$, ekkor $\|A_j - A_{j_0+1}\| < 1$ ha $j > j_0$. $A_1, A_2 ... A_{j_0}, A_k$ véges sok operátor, ezek korlátosak. Ebből következik, hogy $\exists c : \|A_j\| \leq c, \forall j$, továbbá a $\|A_j x - A_k x\| \leq \varepsilon\,\|x\|$ egyenlőtlenségből következik $k \to \infty$ esetben, hogy $\|A_j x - Ax\| \leq \varepsilon\,\|x\|$, tehát $\|A_j x\| \to \|Ax\| \leq c\,\|x\|$ és $\lim_j \|A_j - A\| = 0$. $\square$

Emlékeztető kalkulusról: $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény differenciálható egy x_0 pontban, ha $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} := f'(x_0)$. Legyen

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),$$

ekkor egy f differenciálható, ha $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. Ha $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)$ teljesül úgy, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0\Rightarrow f$ differenciálható. Módosítás: $\eta(x):=\varepsilon(x)(x-x_0)$, ekkor $f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\eta(x)$, ahol $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{x-x_0}=0$. Ezt, az eredetivel ekvivalens meghatározást tovább lehet általánosítani normált terekre.

Definíció:
Legyenek X, Y normált terek, $f:X\rightarrowtail Y$, $x_0\in int(D_f)$! Azt mondjuk, hogy f differenciálható az $x_0\in D_f$ pontban, ha $\exists A\in L(X,Y):f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\eta(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|}=0\in Y$.

Megjegyzés:
A definíció $X=Y=\mathbb{R}$ esetben visszaadja a klasszikus definíciót.

Tétel:
ha f differenciálható az x_0-ban, akkor A egyértelmű.

Bizonyítás:
Tfh $A,\widetilde{A}\in L(X,Y):f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\eta(x)$ és $f(x)-f(x_0)=\widetilde{A}(x-x_0)+\tilde{\eta}(x)$, ahol

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|}=0=\lim_{x\to x_0}\frac{\widetilde{\eta}(x)}{\|x-x_0\|}.$$

Belátjuk, hogy $A-\widetilde{A}=0$. Legyen $z\in X$ tetszőleges és $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ekkor $x=x_0+a\cdot z$ benne van az x_0 kis környezetében, ha $|a|$ elég kicsi. Ekkor $0=\left(A-\widetilde{A}\right)(az)+(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)$. Osszuk mindkét oldalt a-val! $0=\left(A-\widetilde{A}\right)z+(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)/a$, így

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)}{a}\right\| &=\frac{\|(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)\|}{|a|}\\ &=\frac{\|(\eta-\tilde{\eta})(x_0+az)\|}{\|x-x_0\|}\|z\|\\ &=\underbrace{\frac{\|(\eta-\tilde{\eta})\,x\|}{\|x-x_0\|}}_{\to 0\text{ ha }x\to x_0}\cdot\|z\|\to 0,\end{aligned}$$

ezért $\left(A-\widetilde{A}\right)z=0,\forall z$. □

Definíció:
Ha f differenciálható az x_0-ban, akkor az $A\in L(X,Y)$ korlátos lineáris operátort az f függvény x_0 beli deriváltjának nevezzük, és $f'(x_0)$-nak jelöljük.

Megjegyzés:
$f'(x_0)\in L(X,Y)$, továbbá erre igaz, hogy $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)$,

ahol $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{x-x_0}=0$. Speciális eset: $A=f'(x_0)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, ennek megfeleltethető egy $\mathcal{A}$ mátrix: $\mathcal{A}x=Ax:\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$.

Példák:

- Legyen sq:$\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ az $\mathrm{sq}(A)=A^2$ hozzárendeléésel adott. Kiszámítjuk ennek a deriváltját az A helyen. A definíciót használjuk az $x=A+S$ és $x_0=A$ szereposztással. Ekkor $x\to x_0$ feltétel az $S\to 0$ feltétellel ekvivalens. Nyilván $\mathrm{sq}(A+S)-\mathrm{sq}(A)=(A+S)^2-A^2=AS+SA+S^2$. Itt nyilván $\lim\limits_{S\to 0}\frac{\|S^2\|}{\|S\|}\le\lim\limits_{S\to 0}\frac{\|S\|\cdot\|S\|}{\|S\|}=\lim\limits_{S\to 0}\|S\|=0$, vagyis a definícióban szereplő η függvényként megfelelő az $\eta(S)=S^2$ hozzárendeléssel adott. Így a derivált az A helyen a $S\to AS+SA$ hozzárendeléssel adott, azaz sq' $(A)[S]=AS+SA$.
- Legyen $b_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ az $b_A(x)=(Ax,x)$ hozzárendeléssel adott, ahol (,) az $\mathbb{R}^n$-beli skaláris szorzás, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ pedig egy adott mátrix. Kiszámítjuk ennek is a deriváltját. Az előző példához hasonló elven

$$\begin{aligned} b_A(x+s)-b_A(x) &= (A(x+s),x+s)-(Ax,x)\\ &=(Ax,s)+(As,x)+(s,s)\\ &=(s,Ax)+(s,A*x)+(s,s),\end{aligned}$$

ahol $\lim\limits_{s\to 0}\frac{\|s^2\|}{\|s\|}\le\lim\limits_{s\to 0}\frac{\|s\|\cdot\|s\|}{\|s\|}=\lim\limits_{s\to 0}\|s\|=0$, vagyis η függvényeként megfelelő az $\eta(s)=(s,s)$ hozzárendeléssel adott. A derivált az x helyen pedig a következő hozzárendeléssel adott lineáris függvény lesz: $b'_A(x)[s]=(s,(A+A*)x)$, ami azonosítható egy $(A+A*)x$ vektorral.

Tétel:
ha f differenciálható x_0-ban, akkor f folytonos x_0-ban.

Bizonyítás:
$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)$. Belátjuk, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$. Egyrészt

$$\|f'(x_0)(x-x_0)\|\le\|f'(x_0)\|\,\|x-x_0\|\to 0 \text{ ha } x\to x_0.$$

Másrészt

$$\|\eta(x)\|=\frac{\|\eta(x)\|}{\|x-x_0\|}\|x-x_0\|\to 0 \text{ ha } x\to x_0.$$

Tehát

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\|f(x)-f(x_0)\| &=\lim_{x\to\infty}\|f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)\|\\ &\leqslant\lim_{x\to\infty}\|f'(x)(x-x_0)\|+\lim_{x\to\infty}\eta(x)\\ &=0.\end{aligned}$$

$\square$

Motivációs kép helye. Rajzolj és lepd meg magad magad!

Minden nap tanulok egy kicsit. Ez lehetne akár a mottód is!

4.2. A deriválás művelete, műveleti szabályok

Tétel:
Tfh f és g differenciálható x_0-ban $\Rightarrow f+g$ is, és $(f'+g')(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$. Továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén λf is differenciálható x_0-ban és $(\lambda f)'(x_0) = \lambda(f'(x_0))$.

Bizonyítás:
Mivel f differenciálható x_0-ban $\Rightarrow f$ értelmezve van $B_{r_1}(x_0)$-n is, ha r_1 elég kicsi. Legyen $x \in B_{r_1}(x_0)$! Ekkor $f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)$, ahol $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Mivel g differenciálható x_0-ban $\Rightarrow g$ értelmezve van az $B_{r_2}(x_0)$-n is, ha r_2 elég kicsi. Legyen $x \in B_{r_2}(x_0)$, ekkor $g(x)-g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0)+\eta_2(x)$, ahol $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta_2(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Ezekből következik, hogy $r = \min\{r_1, r_2\}$ esetén, $x \in B_r(x_0)$-re: $[f(x)+g(x)] - [f(x_0)+g(x_0)] = f'(x_0)(x-x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)+\eta_2(x) = = [f'(x_0)+g'(x_0)](x-x_0)+[\eta_1(x)+\eta_2(x)]$. Továbbá mivel

$$\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)}{\|x-x_0\|} = \underbrace{\frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0 \text{ ha } x\to x_0} + \underbrace{\frac{\eta_2(x)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0 \text{ ha } x\to x_0} \to 0 \text{ ha } x \to x_0,$$

így $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. $\square$

Tétel (a kompozíció függvény deriválási szabálya):
Tfh X, Y, Z normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $g : Y \rightarrowtail Z$, ekkor $(g\circ f) : X \rightarrowtail Z$. Tfh f differenciálható $x_0 \in X$-ban és g differenciálható $y_0 \in Y$-ban úgy, hogy $y_0 = f(x_0)$. Ekkor $g \circ f$ is differenciálható x_0-ban és $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0) \in L(X,Z)$.

Bizonyítás:
Mivel f differenciálható x_0-ban, így f értelmezve van egy $B_r(x_0)$ környezetben. Legyen $x \in B_{r_1}(x_0)$, ekkor $f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)$ ahol $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|} = 0$. Mivel g differenciálható $y_0 = f(x_0)$-ban, ezért értelmezve van y_0 egy $B_{r_2}(y_0)$ környezetében. Legyen $y \in B_{r_2}(y_0)$, ekkor $g(y)-g(y_0) = g'(y_0)\cdot(y-y_0)+\eta_2(y)$ és $\lim\limits_{y\to y_0} \frac{\eta_2(y)}{\|y-y_0\|} = 0$. Mivel $f \in C(x_0) \Rightarrow B_{r_2}(y_0) = B_{r_2}(f(x_0))$ környezethez $\exists B_{\widetilde{r_1}}(x_0) : x \in B_{\widetilde{r_1}}(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_{r_2}(f(x_0))$. Legyen $r_{1*} := \min\{r_1, \widetilde{r_1}\}$. $x \in B_{r_{1*}}(x_0)$ esetén y helyébe $f(x)$-t írhatunk a g-re vonatkozó egyenletben:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\cdot[f(x)-f(x_0)] + \eta_2(f(x)).$$

Ebbe beírva f deriváltáját:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0) =& g'(f(x_0))\cdot[f'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)]+\eta_2(f(x))\\ =& g'(f(x_0))\cdot[f'(x_0)(x-x_0)]+\\ &+\underbrace{[g'(f(x_0))\eta_1(x)+\eta_2(f(x))]}_{\eta(x)}.\end{aligned}$$

Azt kellene megmutatni, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|}=0$. Tekintsük először $\eta(x)$ első tagját:

$$\frac{\|g'(f(x_0))\eta_1(x)\|}{\|x-x_0\|}\le\frac{\|g'(f(x_0))\|\,\|\eta_1(x)\|}{\|x-x_0\|}=\|g'(f(x_0))\|\frac{\|\eta_1(x)\|}{\|x-x_0\|}\to 0,$$

mert az utolsó tag $\to 0$. Tehát már elegendő csak $\frac{\eta_2(f(x))}{\|x-x_0\|}\to 0$ állítást belátni. Ehhez használjuk a következő jelölést:

$$\varepsilon(y):=\begin{cases}\frac{\|\eta_2(y)\|}{\|y-y_0\|} & \text{ha } y\neq y_0, y\in B_{r_2}(y_0)\\ 0 & \text{ha } y=y_0.\end{cases}$$

Láthatjuk, hogy ekkor $\varepsilon:Y\to\mathbb{R},\varepsilon\in C(y_0)$. Átrendezve:

$$\|\eta_2(y)\|=\varepsilon(y)\|y-y_0\|\quad\forall y\in B_{r_2}(y_0)),$$

$$\frac{\|\eta_2(f(x))\|}{\|x-x_0\|}=\varepsilon(f(x))\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}=\underbrace{\varepsilon(f(x))}_{\to 0}\underbrace{\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}}_{\text{bizbe: korlátos}}.$$

Ez a szorzat $\to 0$, ha az utolsó tényező korlátos, ugyanis ε definíciójából következik, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(f(x))=\varepsilon(f(x_0))=0$, mert $f\in C(x_0),\varepsilon\in C(y_0)\Leftrightarrow\varepsilon\in C(f(x_0))$. A második tényező valóban korlátos, ugyanis

$$\begin{aligned}f(x)-f(x_0)=&f'(x_0)(x-x_0)+\eta_1(x)\\ &\Downarrow\\ \|f(x)-f(x_0)\|\leqslant&\|f'(x_0)(x-x_0)\|+\|\eta_1(x)\|\\ \leqslant&\|f'(x_0)\|\cdot\|x-x_0\|+\|\eta_1(x)\|\\ &\Downarrow\\ \frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}\leqslant&\underbrace{\|f'(x_0)\|}_{\text{rögz}}+\underbrace{\frac{\eta_1(x)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0}.\end{aligned}$$

□

Tétel (a valós függvény inverzének deriválási szabálya):
Legyen I egy $\mathbb{R}$-beli nyílt intervallum! Legyen $f:I\to R$ szigorúan monoton függvény és $f\in C(D_f)$. Ha f differenciálható $a\in D_f$-ban és $f'(a)\neq 0\Rightarrow f^{-1}$

differenciálható $f(a)$-ban és $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Bizonyítás:
Mivel f szigorúan monoton (növő), ezért f injektív, tehát létezik f^{-1}. Mivel $D_f = I$ intervallum, ezért $R_f = J$ is intervallum (Bolzano tétel), sőt, nyílt is, mivel f szigorúan monoton. Ekkor $b = f(a)$-t tekintve $b \in intD_{f^{-1}} = R_f$. f^{-1} értelmezve van b egy környezetében, ebből véve egy y pontot

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}}.$$

Definiáljuk $h_a(x)$-et az alábbiak szerint!

$$h_a(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a \end{cases}$$

Ebből láthatjuk, hogy $h_a \in C(a)$. Ekkor $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{h_a(f^{-1}(y))}$. $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = a$ mert $f^{-1} \in C(R_f), f^{-1}(b) = a$. Ha $y \neq b \Rightarrow f^{-1}(y) \neq a$ (mert f szigorúan monoton). Másrészt $h_a \in C(a) \Rightarrow \lim\limits_{y\to b} h_a\left(f^{-1}(y)\right) = h_a(a) = f'(a)$. $\square$

Példák:

- $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R} = I$, f szigorúan monoton nő, mindenhol deriválható, $f'(x) = e^x$, $R_f = (0,\infty) = J$ $b > 0, b \in J$ esetén $\ln'(b) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{e^{\ln b}} = \frac{1}{b}$
- $f(x) = \sin x$, $I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ez szigorúan monoton nő, differenciálható, $f'(x) = \cos x$. $\arcsin'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.3. Differenciálhatóság $\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$-ben

A továbbiakban legyen $X := \mathbb{R}^n, Y := \mathbb{R}^m$. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$. Mit jelent az, hogy f differenciálható egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban?

Definíció szerint $\exists A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x), \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|} = 0, \forall x \in B_r(x_0)$. Tudjuk, hogy A-hoz egyértelműen megfeleltethető egy

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix, melyre $A(x - x_0) = \mathcal{A}(x - x_0)$, így $f(x) - f(x_0) = \mathcal{A}(x - x_0) + \eta(x)$.

Kérdés: mik a mátrixelemek, vagyis $a_{ij} =$? Először legyen $m = 1$, azaz $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$. f differenciálhatósága azt jelenti, hogy $\mathbb{R} \ni f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(x_j - x_{0j}) + \eta(x)$ ahol

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{\|x-x_0\|}=0$. Legyen speciel $x=(x_{0,1},x_{0,2}...x_{0,j-1},x_j,x_{0,j+1}...x_{0,n})$ (vagyis a j-edik koordináta nem a 0-ás). Ekkor

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0) &= a_{1j}(x_j-x_{0,j})+\eta(x)\\ \frac{f(x_{0,1}...x_{0,j-1},x_j,x_{0,j+1},...)-f(x_{0,1}...x_{0,j-1},x_{0,j},x_{0,j+1},...)}{x_j-x_{0,j}} &= a_{1j}+\frac{\eta(x)}{x_j-x_0}, \end{aligned}$$

ahol $\left|\frac{\eta(x)}{x_j-x_{0,j}}\right|=\frac{|\eta(x)|}{|x_j-x_{0,j}|}=\frac{|\eta(x)|}{|x-x_0|}\to 0$. Ezért a függvény j-edik változó szerinti parciális deriváltja x_0-ban $\partial_j f(y_0)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)=a_{1j}$. Tehát $a_{1j}=\partial_j f(x_0)$. Ez volt az $m=1$ eset. Általánosan, $f:\mathbb{R}^n\rightarrowtail\mathbb{R}^m, f(x)\in\mathbb{R}^m$ esetre mi lesz? $f(x)=(f_1(x),f_2(x)...f_m(x))$. f_k-t nevezhetjük a függvény koordináta-függvényének. f differenciálhatósága azt jelenti, hogy $f(x)-f(x_0)=\mathcal{A}(x-x_0)+\eta(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|\eta(x)|}{|x-x_0|}\to 0$, $\quad\eta=(\eta_1,\eta_2...\eta_n)$. Ugyanez koordinátánként kiírva: $f_k(x)-f_k(x_0)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}(x_j-x_{0,j})+\eta_k(x)$, az előbbiek szerint $a_{kj}=\partial_j f_k(x_0)$. Tehát a mátrixot ilyen alakban írhatjuk:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0)\\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \cdots & \partial_n f_2(x_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \cdots & \partial_n f_m(x_0)\end{pmatrix}.$$

Tétel:
Ha $f=(f_1,f_2...f_n):\mathbb{R}^n\rightarrowtail\mathbb{R}^m$ függvény differenciálható egy $x_0\in\mathbb{R}^n$ pontban, akkor $\forall k$-ra f_k parciálisan differenciálható minden változójában, továbbá $f'(x_0)\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ a fenti mátrixszal adható meg. Az $\mathcal{A}$ mátrixelemei a koordináta függvények első parciális deriváltjai.

Megjegyzés:
Ha $f:\mathbb{R}^n\rightarrowtail\mathbb{R}$ parciálisan differenciálható x_0-ban minden változója szerint, abból nem következik, hogy f differenciálható is.

4.3.1. Egyváltozós kitérés

4.3.1.1. Lokális növekedés, fogyás – lokális szélsőérték

Definíció:
Legyen $f:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$, $a\in int(D_f)$! Azt mondjuk, hogy

- f lokálisan nő a-ban, ha $\exists B_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)$ környezet, hogy

  $$a-\delta<x<a\Rightarrow f(x)\le f(a)$$

  és

  $$a<x<a+\delta\Rightarrow f(a)\le f(x).$$

- f lokálisan szigorúan nő a-ban, ha $\exists B_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)$ környezet, hogy

  $$a-\delta<x<a\Rightarrow f(x)<f(a)$$

és
$$a < x < a+\delta \Rightarrow f(a) < f(x).$$
(A különbség a két függvényérték relációjában van.)

- f lokálisan csökken a-ban, ha $\exists B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ környezet, hogy
$$a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$
és
$$a < x < a+\delta \Rightarrow f(a) \geq f(x).$$
- f lokálisan szigorúan csökken a-ban, ha $\exists B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$ környezet, hogy
$$a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$$
és
$$a < x < a+\delta \Rightarrow f(a) > f(x).$$

Tétel:
Legyen f differenciálható a pontban! Ha f függvény a-ban lokálisan nő $\Rightarrow f'(a) \geq 0$, és ha $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ a-ban szigorúan lokálisan nő, illetve ha lokálisan fogy $\Rightarrow f'(a) \leq 0$ és ha $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ a-ban szigorúan lokálisan fogy.

Bizonyítás:

1. Tfh f függvény a-ban lokálisan nő és f differenciálható a-ban. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Mivel f függvény a-ban lokálisan nő $\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ ha
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0,$$
azaz $f'(a) \geq 0$.
2. Tfh $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ értelmezve a egy környezetében. Mivel $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0$, ezért
$$\exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0,$$
tehát f függvény a -ban szigorúan lokálisan nő. □

Megjegyzés:
Fordítva nem igaz, tehát ha f szigorúan lokálisan nő $\not\Rightarrow f' > 0$.

Példa:
$f(x) = x^3$, ekkor $f'(x) = 3x^2$. Ez 0-ban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = 0$.

Definíció:
Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, a \in int(D_f)$. Azt mondjuk, hogy f-nek a-ban

- Lokális minimuma van, ha

$$\exists B_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) : x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a)\,.$$

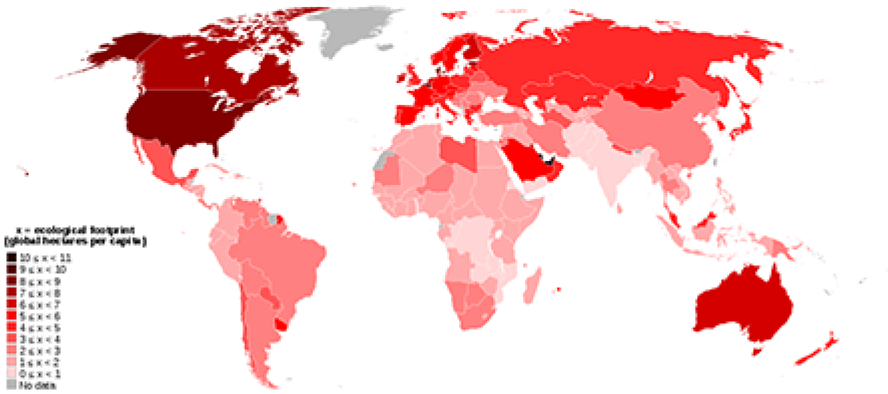
- Szigorú lokális minimuma van, ha

$$x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > f(a)\,.$$

Tétel:
Ha f differenciálható a-ban és a-ban lokális szélsőértéke van $\Rightarrow f'(a) = 0$.

Bizonyítás:
Indirekt, $f'(a) \neq 0$. Ha pl $f'(a) > 0 \Rightarrow a$-ban szigorúan lokálisan nő, vagy ha $f'(a) < 0 \Rightarrow a$ -ban szigorúan lokálisan fogy. $\square$

Megjegyzés:
$f'(a) = 0 \not\Rightarrow f$-nek a-ban lokális szélsőértéke van. Pl $a = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$, ennek a deriváltjára az $a = 0$-ben: $f'(0) = 0$, pedig f 0-ban szigorúan lokálisan nő.



The **ecological footprint** measures human demand on nature, i.e., the quantity of nature it takes to support people or an economy. It tracks this demand through an ecological accounting system. The accounts contrast the biologically productive area people use for their consumption to the biologically productive area available within a region or the world (biocapacity). In short, it is a measure of human impact on Earth's ecosystem and reveals the dependence of the human economy on natural capital.

The ecological footprint is defined as the biologically productive area needed to provide for everything people use: fruits and vegetables, fish, wood, fibers, absorption of carbon dioxide from fossil fuel use, and space for buildings and roads. Biocapacity is the productive area that can regenerate what people demand from nature.

4.4. Monoton növekedés és fogyás

Definíció:
Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy I intervallumon

- Monoton nő, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Monoton csökken, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

- Szigorú monoton nő, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Szigorú monoton csökken, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Tétel (Rolle-tétel):
Tfh $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és (a,b)-n differenciálható, $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás:

1. Ha $f(x) = f(a) = f(b), \forall x$, akkor $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
2. Ha létezik $x \in (a,b) : f(x) \neq f(a) = f(b)$, pl $f(x) < f(a)$, akkor mivel $f \in C[a,b] \Rightarrow [a,b]$ sorozatkompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben (ami korlátos és zárt) ezért R_f sorozatkompakt $\Rightarrow$ korlátos és zárt. $\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \inf f = \min f$. Mivel $\exists f(x) : f(x) < f(a)$, ezért $\xi \in (a,b)$. Ezért f-nek ξ-ben lokális minimuma van. f differenciálható ξ-ben, tehát $f'(\xi) = 0$. $\square$

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel):
$f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C(D_f)$ és f differenciálható (a,b)-n. Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bizonyítás:
Visszavezetjük a Rolle-tételre. Értelmezzük a g függvényt a következő módon: $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ekkor $g \in C[a,b]$ és g differenciálható (a,b)-n. $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$, de a definícióból látható, hogy $g(a) = f(a) \Rightarrow g(b) = g(a)$. Alkalmazzuk Rolle tételét! $\exists \xi : g'(\xi) = 0$, azaz $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Tétel:
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum! $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I)$, továbbá f differenciálható $intI$-ben. Ekkor f monoton nő az I-n $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in intI$.

Bizonyítás:

1. Ha f monoton nő $\Rightarrow \forall x \in intI$-re $f'(x) \geq 0$.
2. Tfh $f'(x) \geq 0 \forall x \in intI$. Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$! Azt kellene belátni, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt! $[x_1, x_2] \subset I \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \subset I : f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. A feltétel szerint $f'(\xi) \geq 0, x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

Megjegyzés:
Azt hihetnénk, hogy f szigorúan monoton növekedése $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \forall x \in intD_f$, pedig nem. Példa: $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Ekkor f szigorúan monoton nő, de $f'(0) = 0$.

Tétel:
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I)$ és f differenciálható $intI$-ben! Ekkor f szigorúan monoton nő I-n $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ és I-nek nincs olyan J részintervalluma, ahol $f'(x_j) = 0, \forall x_j \in J$.

Bizonyítás:

- $\Rightarrow$ irányban: tfh f szigorúan monoton nő az I-n $\Rightarrow$ monoton nő
$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in int(I)$$
. Indirekt tfh
$$\exists (c,d) \subset I : f'(x) = 0 \forall x \in (c,d) \Rightarrow$$
Lagrange-féle középértéktétel felhasználásából $\Rightarrow f =$ állandó (c,d) -n. Ez ellentmond annak, hogy f szigorúan monoton nő.
- $\Leftarrow$ irányban: tfh $f'(x) \geq 0 \forall x \in intI$ és $\nexists J \subset I$ részintervallum, ahol $f'(x_j) = 0 \forall x_j \in J$. Mivel $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ monoton nő. Ha f nem szigorúan monoton növő lenne, akkor $\exists x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ (mivel f monoton nő) $f(x_1) = f(x) = f(x_2) \forall x \in (x_1, x_2) \Rightarrow f'(x) = 0$, ha $x \in (x_1, x_2)$. $\square$

Tétel:
Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$, és ennek az összes elsőrendű parciális deriváltja létezik $x_0 \in \mathbb{R}^n$ valamely teljes környezetében, és ezek folytonosak x_0-ban. Ekkor f differenciálható x_0-ban.

Bizonyítás:
A feltétel szerint egy x_0 bizonyos környezetében fekvő $x = (x_1, x_2 ... x_n)$ pontra

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = &[f(x_1, x_2 ... x_n) - f(x_{1,0}, x_2 ... x_n)] \\ &+ [f(x_{1,0}, x_2 ... x_n) - f(x_{1,0}, x_{2,0} ... x_n)] \\ &+ ... \\ &+ [f(x_{1,0}, x_{2,0} ... x_{n-1,0}, x_n) - f(x_{1,0} ... x_{n,0})], \end{aligned}$$

alkalmasan választott $\xi_i \in (x_i, x_{i,0})$ segítségével folytatva (Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával):

$$\begin{aligned}
f(x)-f(x_0) =& \partial_1 f(\xi_1, x_2...x_n)(x_1-x_{1,0}) \\
&+ \partial_2 f(x_{1,0}, \xi_2, x_3...x_n)(x_2-x_{2,0}) \\
&+ ... \\
&+ \partial_n f(x_{1,0}, x_{2,0}...x_{n-1,0}, \xi_n)(x_n-x_{n,0}) \\
=& \partial_1 f(x_0)(x_1-x_{1,0}) \\
&+ \partial_2 f(x_0)(x_2-x_{2,0}) \\
&+ ... \\
&+ \partial_n f(x_0)(x_n-x_{n,0}) \\
&+ \underbrace{[\partial_1 f(\xi_1, x_2...x_n)-\partial_1 f(x_0)](x_1-x_{1,0})}_{\eta_1(x)} \\
&+ \underbrace{[\partial_2 f(x_{1,0}, \xi_2, x_3...x_n)-\partial_2 f(x_0)](x_2-x_{2,0})}_{\eta_2(x)} \\
&+ ... \\
&+ \underbrace{[\partial_n f(x_{1,0}, x_{2,0}, ..., x_{n-1,0}\xi_n)-\partial_n f(x_0)](x_n-x_{n,0})}_{\eta_3(x)}.
\end{aligned}$$

Azt kellene belátni, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{|x-x_0|}=0$ ahol $\eta(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i(x)$. Hasonló egyenlőség érvényes $\eta(x)$ minden tagjára, pl. az 1-re az alábbi.

$$\frac{|[\partial_1 f(\xi_1, x_2...x_n)-\partial_1 f(x_0)](x_1-x_{1,0})|}{|x-x_0|} \leqslant \underbrace{[\partial_1 f(\xi_1, x_2...x_n)-\partial_1 f(x_0)]}_{x\to x_0 \text{ é s } \partial_1 f\in C(x_0)\Rightarrow \text{ ez } \to 0} \underbrace{\frac{|x_1-x_{1,0}|}{|x-x_0|}}_{\leqslant 1}$$

□

Megjegyzés:
A tétel feltétele elegendő, de nem szükséges f differenciálhatóságához.

Tétel:
Legyen $f:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m\,(m>1)$. $f=(f_1, f_2...f_n)$. Az, hogy f differenciálható x_0-ben $\Leftrightarrow \forall j$-re f_j differenciálható x_0-ban, $f_j:\mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$.

Következmény: ha $\partial_k f_j$ létezik x_0 egy környezetében és folytonos x_0-ban $\forall j, k$-ra, akkor f differenciálható x_0-ban.

Bizonyítás:
f differenciálható x_0-ban $\Rightarrow f(x)-f(x_0)=\mathcal{A}(x-x_0)+\eta(x)$ ahol $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\eta(x)}{|x-x_0|}=0$, $\quad\eta=(\eta_1, \eta_2, \eta_3...\eta_n)$. „Koordinátás" alakban így is írhattuk volna: $f_j(x)-$

$f_j(x_0) = \mathcal{A}_j(x - x_0) + \eta_j(x)$ $\forall j$-re, ahol

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

illetve $\mathcal{A}_k = (a_{k1}, a_{k2} ... a_{kn})$. Ez pontosan azt jelenti, hogy f_j koordinátafüggvény differenciálható x_0 -ban. □

Definíció:
Legyen X, Y normált terek, $f : X \rightarrowtail Y, \Omega \subset X$ tartomány (vagyis nyílt és összefüggő). Ha az f az Ω minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható Ω-n.

Definíció:
Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}$! Ha $\forall j$-re $\exists \partial_j f(x), \forall x \in \Omega$, akkor f egyszer parciálisan differenciálható Ω-ban. Ha $\partial_j f$ folytonos is Ω minden pontjában $\forall j$-re, akkor f egyszer folytonosan differenciálható Ω-n, $f' \in C(\Omega)$.

4.5. Magasabbrendű differenciálhatóság

Definíció:
Legyenek X, Y normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$. Tekintsük az összes $x \in X$ pontot, melyben f differenciálható! Azt a függvényt, amely az ilyen $x \in X$ ponthoz az $f'(x) \in L(X, Y)$ deriváltat rendeli, f (első) derivált függvényének nevezzük, jele f'.

Definíció:
Legyenek X, Y normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$. Ha f' differenciálható x_0-ban (tehát értelmezve is van x_0 egy környezetében), akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható x_0-ban és definíció szerint $f''(x_0) := (f')'(x_0)$.
Megjegyzés: $f''(x_0) : X \rightarrowtail L(X, Y)$, $f''(x_0)$ lineáris folytonos operátor, így $f''(x_0) \in L(X, L(X, Y))$.

Definíció:
Ha f' függvény értelmezve van és folytonos valamely $\Omega \subset X$ tartományon, akkor azt mondjuk, hogy f egyszer folytonosan differenciálható Ω-n.

Megjegyzés:
Gyakran beszélünk $\overline{\Omega}$-beli folytonos deriválhatóságról is. Ez akkor teljesül, ha f' folytonosan kierjeszthető Ω-ról az $\overline{\Omega}$ halmazra.

Megjegyzés:
Ez a definíció $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}$ esetén ekvivalens a korábbi definícióval.

Definíció:
Ha f ' függvény értelmezve van és folytonos valamely $\Omega \subset X$ tartományon, akkor

azt mondjuk, hogy f kétszer folytonosan differenciálható Ω-n.

Definíció:
Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ képező függvény! Ha valamely j-re a $\partial_j f$ függvény a k-adik változója szerint parciálisan differenciálható egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontjában, akkor $\partial_k \partial_j f(x_0) := [\partial_k(\partial_j f)] x_0$. Hasonlóan értelmezhető f függvény magasabb rendű parciális deriváltjaira.

Kérdés: igaz-e, hogy $\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$, $\forall j, k$ -ra? Általában nem (de azért a fizikában előforduló példákra általában igaz, mint ahogy látni is fogjuk). Példa az alábbi.

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ekkor $\partial_1 \partial_2 f(0,0) = 0$, de $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = 1$. Az eredmények nem triviálisak, segítségképp az egyes parciális deriváltak alant.

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2 + xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tétel (Young-tétel) :
$\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}$-be képező függvényekre: legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, melyre $(x_0, y_0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ pont környezetében létezik $\partial_1 \partial_2 f$ és $\partial_2 \partial_1 f$ is és folytonosak (x_0, y_0) pontban. Ekkor $\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$.

Bizonyítás:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &:= f(x,y) - f(x,y_0) \\ G(y) &:= f(x,y) - f(x_0,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)\,.$$

Alkalmazzuk először a Lagrange-féle középértéktételt F és G függvényekre! $\exists \xi$ az x, x_0 között, hogy

$$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0) = [\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, y_0)](x - x_0)\,,$$

és $\exists \eta$ az y, y_0 között, hogy

$$G(y) - G(y_0) = G'(\eta)(y - y_0) = [\partial_2 f(x, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta)](y - y_0)\,,$$

ezért a fenti egyenlőség miatt

$$[\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(\xi, y_0)](x - x_0) = [\partial_2 f(x, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta)](y - y_0)\,.$$

Még 2x alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt: $y \mapsto \partial_1 f(\xi, y)$ függvényre és $x \mapsto \partial_2 f(x, \eta)$ függvényre.

$$\exists \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta} : \partial_2(\partial_1 f)(\xi, \widetilde{\eta})(y - y_0)(x - x_0) = \partial_1(\partial_2 f)\left(\widetilde{\xi}, \eta\right)(x - x_0)(y - y_0)\,,$$

ahol $\widetilde{\xi}$ egy x, x_0 között, $\widetilde{\eta}$ pedig egy y, y_0 között van. $\partial_2 (\partial_1 f)(\xi, \widetilde{\eta}) = \partial_1 (\partial_2 f)\left(\widetilde{\xi}, \eta\right)$. $(x, y) \to (x_0, y_0)$ esetén, mivel $\partial_1 \partial_2 f$ és $\partial_2 \partial_1 f$ folytonosak (x_0, y_0)-ban, $\Rightarrow \partial_2 (\partial_1 f)(x_0, y_0) = \partial_1 (\partial_2 f)(x_0, y_0)$. $\square$

Következmény: ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-be képez és az f-nek az összes második parciális deriváltja létezik x_0 egy környezetében és folytonos x_0-ban $\Rightarrow \partial_j \partial_k f(x_0) = \partial_k \partial_j f(x_0)$.

Ebből a tárgyból egyesek jó eredményt értek el, mások megbuktak. A siker kulcsa lehet, hogy időben állsz neki tanulni. Ha stresszeled magad, akkor a tanulás nehezebbé válhat, ezért fontos időben hozzálátni. A vizsgára 3 napi tanulás (3x12 óra) nem túlzás, a legkevésbé sem.

Definíció:
Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény k-szor ($k \geq 1$) folytonosan differenciálható Ω-n, ha minden legfeljebb k-ad rendű parciális derivált létezik és folytonos az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon.

Tétel:
Ha $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény k-szor folytonosan differenciálható, akkor f minden legfeljebb k-adrendű parciális deriváltjában a deriválások sorrendje tetszőlegesen felcserélhető.

Jelölés: feltéve, hogy f függvény k-szor folytonosan differenciálható, a továbbiakban használandó a következő jelölés a legfeljebb k-adrendű parciális deriváltakra: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n), \alpha_j \geq 0, \alpha_j \in \mathbb{N}$ esetén $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_n^{\alpha_n} f$. A deriválás rendje $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \leq k$.

Megjegyzés:
Ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény k-szor folytonosan differenciálható Ω-n $\Rightarrow f$ minden

legfeljebb $(k-1)$-edrendű parciális deriváltja differenciálható.

4.6. Bilineáris operátorok

Azért kellenek, mert $f''(x_0) \in L(X, L(X,Y))$, és ezt összefüggésbe akarjuk hozni az $X \times X$-ből Y-ba képező operátorokkal.

Definíció:
Legyenek X, Y vektorterek, ekkor $X \times Y : \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$ és $X \times Y$-n értelmezzük az összeadást és a valós számmal való szorzást: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

Állítás:
az $X \times Y$ a fenti tulajdonságokkal vektorteret alkot.

Definíció:
Legyenek X, Y normált terek. Ekkor az $X \times Y$ vektortérben vezessük be a következő normát: $\|(x,y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$!
(Megj: más normát is lehetne definiálni, pl $\|x, y\| := \|x\| + \|y\|$).

Állítás:
$X \times Y$ a fenti normával normált tér.

Definíció:
Legyenek X, Y, Z normált terek, tekintsük az $X \times Y$ vektorteret! Egy $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ operátort bilineárisnak nevezünk, ha minden rögzített $\forall x \in X$ esetén az $y \mapsto \widetilde{A}(x,y)$ hozzárendeléssel adott $Y \to Z$ lineáris és minden rögzített $y \in Y$ esetén az $x \mapsto \widetilde{A}(x,y)$ hozzárendeléssel adott $Y \to Z$ operátor lineáris.

Megjegyzés:
Az $X \times Y$-ből Z-be képező bilineáris operátorok vektorteret alkotnak a következő művelettel: $\underbrace{\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)}_{\in L(X \times Y, Z)} \underbrace{(x,y)}_{\in X \times Y} = \underbrace{\tilde{A}(x,y)}_{\in Z} + \underbrace{\tilde{B}(x,y)}_{\in Z}$, és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\left(\lambda \widetilde{A}\right)(x,y) = \lambda \cdot \widetilde{A}(x,y) \in Z$.

Kérdés: legyenek X, Y, Z normált terek (tehát vektorterek is). Továbbá legyen $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ bilineáris operátor. Következik-e ebből, hogy $\widetilde{A}$ folytonos? Általában nem.

Tétel:
Az $\widetilde{A} : X \times Y \rightarrowtail Z$ bilineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha $\exists c \geq 0 : \left\|\widetilde{A}(x,y)\right\| \leq c \|x\| \cdot \|y\|$, $\forall x \in X, \forall y \in Y$.

Megjegyzés:
Ha az utóbbi teljesül, akkor $\widetilde{A}$ bilineáris operátort korlátosnak nevezzük.

Bizonyítás:

- $\Leftarrow$ irányban: tfh $\widetilde{A}$ korlátos. Belátjuk, hogy $\widetilde{A}$ folytonos $(x_0, y_0) \in X \times Y$

rögzített elemnél, ekkor

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{A}(x,y)-\tilde{A}(x_0,y_0)\right\| =& \left\|\left[\tilde{A}(x,y)-\tilde{A}(x_0,y)\right]+\left[\tilde{A}(x_0,y)-\tilde{A}(x_0,y_0)\right]\right\| \\ \leqslant& \left\|\left[\tilde{A}(x,y)-\tilde{A}(x_0,y)\right]+\left[\tilde{A}(x_0,y)-\tilde{A}(x_0,y_0)\right]\right\| \\ \leqslant& \left\|\tilde{A}(x-x_0,y)\right\|+\left\|\tilde{A}(x_0,y-y_0)\right\| \\ \leqslant& c\left\|x-x_0\right\|\cdot\left\|y\right\|+c\left\|x_0\right\|\cdot\left\|y-y_0\right\|,\end{aligned}$$

ezért nyílván

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\sqrt{\|x-x_0\|^2+\|y-y_0\|^2}<\delta,$$

amelyből következik, hogy

$$c\|x-x_0\|\cdot\|y\|+c\|x_0\|\cdot\|y-y_0\|<\varepsilon.$$

- $\Rightarrow$ irányban: tfh folytonos, de nem korlátos (indirekt): $\forall n\in\mathbb{N}\exists x_n\in X, y_n\in Y:\left\|\tilde{A}(x_n,y_n)\right\|>n^2\|x_n\|\cdot\|y_n\|$. Legyen $\widetilde{x_n}:=\frac{x_n}{n\cdot\|x_n\|}\to 0$ és $\widetilde{y_n}:=\frac{y_n}{n\cdot\|y_n\|}\to 0$. Ebből már látszik az állítás. □

Definíció:
Legyenek X, Y, Z normált terek, $\widetilde{A}:X\times Y\rightarrowtail Z$ korlátos, folytonos bilineáris operátor. Ekkor $\widetilde{A}$ normáját így értelmezzük:

$$\left\|\widetilde{A}\right\|:=\sup\left\{\left\|\widetilde{A}(x,y)\right\|:\|x\|=1,\|y\|=1\right\}.$$

Állítás:
$\left\|\widetilde{A}\right\|=\min\left\{c:\left\|\widetilde{A}(x,y)\right\|\leq c\|x\|\cdot\|y\|,\forall(x,y)\in X\times Y\right\}$. (A bizonyítása hasonló lineáris korlátos operátorok esetéhez.)

Tétel:
Tekintsük az $X\times Y\to Z$ képező korlátos bilineáris operátorokat az előbb bevezetett összeadással és skalárral való szorzással, és vegyük hozzá a fenti normát. Ekkor egy normált teret kapunk.

Észrevétel: legyenek X, Y, Z normált terek, $A\in L(X,L(Y,Z))$. Értelmezzük az $\widetilde{A}:X\times Y\to Z$ operátort: $\widetilde{A}(x,y):=\underbrace{(Ax)\,y}_{\in Z}$. Ekkor $\widetilde{A}:X\times Y\to Z$ korlátos bilineáris operátor.

Bizonyítás:

1. A fentiek szerint $\widetilde{A}:X\times Y\to Z$.

2. Belátjuk először, hogy $\widetilde{A}$ bilineáris operátor.

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= [A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)]\, y\\ &= (\lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2)\, y\\ &= \lambda_1 [(Ax_1)\, y] + \lambda_2 [(Ax_2)\, y]\\ &= \lambda_1 \tilde{A}(x_1, y) + \lambda_2 \tilde{A}(x_2, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= (Ax)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\\ &= \lambda_1 (Ax)\, y_1 + \lambda_2 (Ax)\, y_2\\ &= \lambda_1 \tilde{A}(x, y_1) + \lambda_2 \tilde{A}(x, y_2)\end{aligned}$$

3. Belátjuk, hogy $\widetilde{A}$ korlátos.

$$\left\|\tilde{A}(x,y)\right\| = \|(Ax)\, y\| \leqslant \|Ax\| \cdot \|y\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

következésképp $\tilde{A}$ korlátos, továbbá $\left\|\tilde{A}\right\| \leq \|A\|$.

Tétel:
Legyenek X, Y, Z normált terek, $A \in L(X, L(Y, Z))$. Ekkor az $\widetilde{A}(x,y) := (Ax)\, y, x \in X, y \in Y$ képlettel értelmezett $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ bilineáris operátor. Fordítva: minden $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ bilineáris operátort ilyen alakú: $\exists! A : L(X, L(Y, Z)) : \widetilde{A}(x,y) = (Ax)\, y$.

Bizonyítás:
Az első állítást beláttuk. Fordítva: tfh $\widetilde{A} : X \times Y \to Z$ korlátos bilineáris operátor. Tekintsük tetszőleges, rögzített $x \in X$ esetén a következő $A(x)$ operátort: $y \mapsto \widetilde{A}(x,y)$. Ez egyrészt lineáris, másrészt korlátos, hiszen a feltétel szerint $\widetilde{A}$ korlátos:

$$\begin{aligned}\|[A(x)](y)\| &= \left\|\tilde{A}(x,y)\right\|\\ &= \left\|\tilde{A}\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \cdot \|x\| \cdot \|y\|\right\|\\ &\leqslant \left\|\tilde{A}\right\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|\\ &= \left(\left\|\tilde{A}\right\| \cdot \|x\|\right) \cdot \|y\|,\end{aligned}$$

ebből pedig következik, hogy a fenti operátor korlátos operátor és normája $\leq \left\|\widetilde{A}\right\| \cdot \|x\|$. Jelölje $A(x)$ ezt az $L(Y,Z)$-beli operátort $\Rightarrow \widetilde{A}(x,y) = (A(x))\, y$. Nem nehéz belátni, hogy $A(x)$ x-től lineárisan függ. A korlátos is, hisz $\|A(x)\| \leq \left\|\widetilde{A}\right\| \cdot \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow A$ korlátos is, sőt

$$\|A\| \leq \left\|\widetilde{A}\right\| \Rightarrow \left\|\widetilde{A}\right\| = \|A\|.$$

(Lásd az előbbi tételt.) □

Megjegyzés:
$\widetilde{A}(x,y) = (Ax)\,y$ képlet lineáris normatartó leképezést definiál a bilineáris operátorok és $L(X, L(Y,Z))$ között.

4.7. Multilineáris leképezések

Definíció:
Legyenek $X_1, X_2 ... X_n, Z$ vektorterek. Egy $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Z$ leképezést multilineárisnak nevezünk, ha minden koordinátájában lineáris (midőn a többit rögzítjük).

Definíció:
Legyenek $X_1, X_2 ... X_n, Z$ normált terek! Egy $\widetilde{A} : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Z$ multilineáris leképezés korlátos $\exists c \geq 0 : \left\|\widetilde{A}(x_1, x_2, ..., x_n)\right\| \leq c \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot ... \cdot \|x_n\| \, \forall x_j \in X_j$.

Tétel:
$\widetilde{A}$ folytonos $\Leftrightarrow$ $\widetilde{A}$ korlátos.

Tétel:
Egy $\widetilde{A}$ multilineáris folytonos operátor általános alakja $\widetilde{A}(x_1, x_2, x_3 ... x_n) = (((Ax_1)\,x_2)\,x_3 ... x_n)\,, A \in L(X_1, L(X_2 ... L(X_n, Z)))$.

4.7.1. Alkalmazás a magasabbrendű deriváltak értelmezésére

Legyenek X, Y normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$. Ha f differenciálható $x_0 \in X$-ben, akkor $f'(x_0) \in L(X,Y)$. f' függvény X-ből $L(X,Y)$-ba képező függvény. Ezért $f''(x_0) = (f')'(x_0) \in L(X, L(X,Y))$. Az $f''(x_0) \in L(X, L(X,Y))$-beli operátornak a fentiek szerint egyértelmű módon megfelel egy $X \times X \to Y$ bilineáris folytonos operátor:

$$A := f''(a) \in L(X, L(X,Y))$$
$$\widetilde{A}(x_1, x_2) := (Ax_1)\,x_2 = ((f''(a))\,x_1)\,x_2,$$

ahol $(x_1, x_2) \in X \times X$.

Speciális eset: $X := \mathbb{R}^n, Y := \mathbb{R}$. Ekkor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ni f'(a) \leftrightarrow (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), ..., \partial_n f(a)) \in \mathbb{R}^n$$

(a $\leftrightarrow$ jel a megfeleltethetőséget jelenti). $f' : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ez úgy is felfogható, hogy $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $f''(a) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ tekinthető $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineáris operátornak, de tekinthető $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -beli operátornak is, ennek megfelel egy $n \times n$ -es mátrix. $f' = (\partial_1 f, \partial_2 f, ..., \partial_n f)$,

$$f''(a) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(a) & \partial_2 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_1 f(a) \\ \partial_1 \partial_2 f(a) & \partial_2^2 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \partial_n f(a) & \partial_2 \partial_n f(a) & \cdots & \partial_n^2 f(a) \end{pmatrix} = \mathcal{A}.$$

$$[f''(a)](x_1, x_2) = \langle \mathcal{A}x_1, x_2 \rangle = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \partial_j \partial_k f(a)\, x_{1k} \right] x_{2j}.$$

Speciális eset: $X := \mathbb{R}$, Y tetszőleges normált tér, $f : X \to Y$,

$$L(\mathbb{R}, Y) \ni f'(a) \leftrightarrow y \in Y$$

(a nyíl a megfeleltethetőséget jelenti) a következő képlettel: $\mathbb{R} \ni t \mapsto yt \in Y$, $\mathbb{R}$-ből Y-ba képező lineáris operátor. Ekkor $f'(a)$ azonosítható $y \in Y$ elemmel.
Magyarázat: ebben az esetben az $Y \ni f'(a) \leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f''(a) \Leftrightarrow b \in Y$, ugyanis f' is tekinthető $\mathbb{R} \to Y$ függvénynek, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [f''(a)](x_1, x_2) = [f''(a)\, x_1]\, x_2 = (bx_1)\, x_2$.

4.7.2. A Lagrange-féle középértéktétel többváltozós függvényekre

Legyen X normált tér, $Y := \mathbb{R}$.

Tétel:
Legyen $a, b \in X, L(a, b) := \{a + t(b-a) : t \in [0, 1]\}$. Tfh $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos $L(a, b)$-n és differenciálható $int(L(a, b))$. Ekkor

$$\exists \xi \in \operatorname{int}(L(a, b)) : \underbrace{f(b)}_{\in Y} - \underbrace{f(a)}_{\in Y} = \overbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\in L(X,Y)}\ \underbrace{(b-a)}_{\in X}}^{\in Y}.$$

Bizonyítás:
Visszavezetjük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre. $\phi(t) := a + t(b-a), t \in [0, 1]$. Ekkor $\phi : [0, 1] \to X$, $\phi \in C(0, 1)$ és itt differenciálható is. $\phi'(t) = (b-a) \in X$, $g(t) = f(\phi(t)) = (f \circ \phi)(t), t \in [0, 1]$, ekkor $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Mivel $f \in C(L(a, b)) \Rightarrow f \circ \phi \in C[0, 1]$, továbbá $f \circ \phi$ differenciálható $(0, 1)$-n, $g'(t) = (f \circ \phi)'(t) = f'(\phi(t))\, \phi'(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, g függvényre alkalmazzuk a Lagrange-féle középérték-tételt:

$$\exists \tau \in (0, 1) : g(1) - g(0) = g'(\tau)(1 - 0),$$

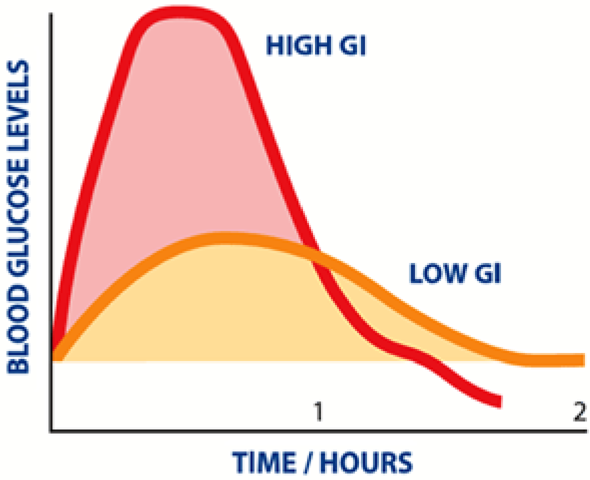
$g(1) = f(\phi(1)) = f(b)$, $g(0) = f(a)$, így

$$g'(\tau) = f'(\phi(\tau))\, \phi'(\tau) = f'(\phi(\tau))(b-a).$$

Ekkor legyen $\xi := \phi(\tau) = a + \tau(b-a)$. □

Kérdés: mi a helyzet akkor, ha $Y \neq \mathbb{R}$. Egyszerű példa: $X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}^2$. Ebben az esetben a fenti állítás általában nem igaz. $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^2, f_1(t) := \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $f_2(t) := \cos t$. Ekkor $f(0) = f(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f'(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau \\ -\sin \tau \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(2\pi) - f(0) = f'(\tau)\, 2\pi \neq 0$ $(0 = a,\ 2\pi = b)$.

Tétel (Lagrange-egyenlőtlenség):
Legyenek X, Y normált terek, $f : X \rightarrowtail Y$, $a, b \in X$, $f \in C\left[L\left(a,b\right)\right]$ és f differenciálható $int\left(L\left(a,b\right)\right)$. Ekkor $\left\|f\left(b\right) f\left(a\right)\right\| \leq \sup\limits_{\xi \in L(a,b)} \left\|f'\left(\xi\right)\left(b-a\right)\right\|$.



The **glycemic index** or **glycaemic index** (**GI**)[1] is a number associated with the carbohydrates in a particular type of food that indicates the effect of these carbohydrates on a person's blood glucose (also called blood sugar) level. A value of 100 represents the standard, an equivalent amount of pure glucose.[2]

The GI represents the rise in a person's blood sugar level two hours after consumption of the food. The glycemic effects of foods depends on a number of factors, such as the type of carbohydrate, physical entrapment of the carbohydrate molecules within the food, fat and protein content of the food and organic acids or their salts in the meal. The GI is useful for understanding how the body breaks down carbohydrates[3] and takes into account only the available carbohydrate (total carbohydrate minus fiber) in a food. Glycemic index does not predict an individual's glycemic response to a food, but can be used as a tool to assess the insulin response burden of a food, averaged across a studied population. Individual responses vary greatly.[4]

4.7.3. Alkalmazás

Állítás:
legyenek X, Y normált terek, $\Omega \subset X$ tartomány (azaz nyílt és összefüggő) $\Leftrightarrow \Omega$ nyílt és bármely két pontja összeköthető egy Ω-ban haladó törött vonallal. Tfh $f : \Omega \rightarrow Y$ és f differenciálható Ω minden pontjában és $f'\left(x\right) = 0, \forall x \in \Omega \Rightarrow f$ állandó.

Bizonyítás:
Legyen $x_1 \in \Omega, x_2 \in \Omega$ tetszőleges. Belátjuk, hogy $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \in Y$. Kössük össze az x_1 és x_2 pontokat egy Ω-ban haladó törött vonallal! A töréspontok legyenek

$x_1, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, x_2$. Először alkalmazzuk a Lagrange-egyenlőtlenséget $L(x_1, \xi_1)$-re!

$$\|f(\xi_1) - f(x_1)\| \leq \sup_{\eta_1 \in L(x_1,\xi_1)} \|f'(\eta_1)(\xi_1 - x_1)\| = 0 \Rightarrow f(\xi_1) = f(x_1).$$

Alkalmazva $L(\xi_1, \xi_2)$-re, $L(\xi_2, \xi_3)$-ra,..., $L(\xi_k, x_2)$-re, kapjuk, hogy

$$f(\xi_1) = f(\xi_2), f(\xi_2) = f(\xi_3), ..., f(\xi_k) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

□

4.7.4. Függvénysorok és sorozatok és deriválása

Legyenek $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, egyszerűség kedvéért folytonos függvények, $k \in \mathbb{N}$. Tfh $\forall x \in [a, b]$ esetén $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. Ekkor mondtuk, hogy (f_k) függvény sorozat pontonként tart egy f függvényhez.

Tétel:
Tfh $\phi_j : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j' = g$ egyenletesen konvergens (a, b)-n, továbbá $\exists c \in (a, b) : \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(c) = \alpha$ véges. Ekkor $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j$ egyenletesen konvergens (a, b)-n, $f := \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j$ függvény differenciálható (a, b)-n és $f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j'(x), \forall x \in (a, b)$.

Bizonyítás:
$f_k = \sum_{j=1}^{k} \phi_j \ \ldots$

Tétel (Cauchy-féle középérték tétel):
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, folytonosak, (a, b)-n differenciálhatóak és $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. (Ha $g(x) = x$, akkor ez a Lagrange-féle .)

Bizonyítás:
$g(b) - g(a) \neq 0$, ugyanis ha $g(b) - g(a) = 0$ lenne, akkor a Rolle-tétel szerint g függvényre $\exists \eta \in (a, b) : g'(\eta) = 0$. Legyen $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$. Ekkor F folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b) - g(a)] = f(a)$. $F(a) = F(b) \Rightarrow$ Rolle-tétel segítségével $\exists \xi \in (a, b)$: $F'(\xi) = 0$, azaz $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. □

4.7.5. L' Hôpital szabály

Tétel (L' Hôpital (avagy L' Hospital) szabály alapesete):
Tfh f, g értelmezve van és differenciálható $a \in \mathbb{R}$ egy környezetében (a-ban nem is kell), továbbá $\lim\limits_{x \to a} f(x) \equiv \lim\limits_{a} f = 0$ és $\lim\limits_{b} g = 0$. Ekkor $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a} \frac{f'}{g'}$, ha létezik ez utóbbi.

Bizonyítás:
értelmezzük az f és g függvényt a-ban! $f(a) := 0$, $g(a) := 0$. Ezért f, g folytonosak a egy környezetében és deriválhatók is x kivételével, $g'(x) \neq 0$. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középérték-tételt: a környezetében levő x pont és a által meghatározott intervallumra $\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow x \to a$ esetén $\xi \to a \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, ha ez utóbbi létezik. $\square$

Általánosítások:

1. $a := \pm\infty$ és $\lim\limits_{a} f = 0, \lim\limits_{a} g = 0$, ekkor is igaz, hogy $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = \lim\limits_{a} \frac{f'}{g'}$, ha ez utóbbi létezik .
2. $\lim\limits_{a} f = \pm\infty$ és $\lim\limits_{a} g = \pm\infty$ esetén hasonló állítás.

4.7.6. Hatványsorok integrálása és deriválása

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, $a, x \in \mathbb{R}$ ezt nevezzük x-nek a körüli hatványsornak. Ez egy speciális függvénysor. Legyen ennek a konvergencia sugara R ! Tudjuk, hogy $|x - a| < R$ esetén a hatványsor konvergens x-ben. Azt is tudjuk, hogy $\forall \delta > 0$ esetén a hatványsor egyenletesen konvergens $[a - R + \delta, a + R - \delta]$ intervallumon.

Tétel:
Legyen a hatványsor konvergencia sugara $R > 0$ és $R \leq \infty$. Ekkor egyrészt tetszőleges $[c, d] \subset (a - R, a + R)$ esetén a hatványsor tagonként integrálható, vagyis $\int\limits_{c}^{d} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{c}^{d} c_k (x-a)^k \, dx$.

Tétel:
Legyen a hatványsor konvergencia sugara $R > 0$ és $R \leq \infty$. Ekkor $|x - a| < R$ esetén a hatványsor x-ben tagonként deriválható:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_n (x-a)^k \right)'.$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a függvénysorok tagonkénti deriválásáról szóló tételt! Világos, hogy a hatványsor tagjai folytonosak, akárhányszor differenciálhatóak. Kérdés: mi a tagok deriváltjaiból alkotott hatványsor konvergencia sugara? Látható, hogy ugyanaz. A derivált sor k-adik tagja: $c_k k (x-a)^{k-1}$, erre ugyanaz a konvergencia sugár adódik. Tehát a deriváltakból álló sor egyenletesen konvergens $[c, d]$-n ha $[c, d] \subset$

$(a-R, a+R)$, $|x-a|<R$, $[c,d]$-t megválaszthatjuk úgy, hogy $x \in [c,d]$. $\square$

4.7.6.1. Taylor-formula

Tfh egy hatványsor konvergencia sugara > 0, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, $|x-a| < R > 0$. (Definíció szerint itt $0^0 = 1$.)
Az előbbiek szerint $|x-a| < R$ esetén
$f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k k (x-a)^{k-1}$
$f''(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k k (k-1)(x-a)^{k-2}$
$\vdots$
$f^{(j)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k k (k-1)(k-2)\ldots(k-j+1)(x-a)^{k-j}$.
Ekkor $f^{(j)}(a) = c_j \cdot j(j-1)(j-2)\ldots 2\cdot 1 = c_j j! \Rightarrow c_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$.

Állítás:
Ha $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, |x-a| < R > 0 \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Speciális eset, ha f polinom, azaz $f = P_N$ (N -edfokú polinom), vagyis $f = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k$, ekkor $c_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$, más szóval $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Definíció:
Tfh egy f függvény a egy környezetében akárhányszor differenciálható! Ekkor a $\sum\limits_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ polinomot az f függvény a pont körül felírt N -edfokú Taylor-polinomjának, a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ hatványsort pedig az f függvény a pont körüli Taylor-sorának nevezzük.

4.7.7. Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal

Motiváció: Egy f függvény a pont körül felírt Taylor-sor mikor (milyen x értékekre) adja magát az f függvényt?

Tétel:
Tfh f függvény N +1-szer differenciálható a egy környezetében. Ebben a környezetben fekvő tetszőleges x pontjára $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$, alkalmasan választott $\xi \in (x,a)$ elemre.

Megjegyzés:
$N = 0$ esetén megkapjuk a Lagrange-féle középértéktételt.

Bizonyítás:
Jelölje $g(x) := f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) - P(x)$. Ekkor $g(a) = f(a) -$

$P(a)$, de $P(a) = f(a)$, így $g(a) = 0$. Továbbá $g'(a) = f'(a) - P'(a)$, node $f'(a) = P'(a)$, így $g'(a) = 0 \ldots\ g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) = 0$. Tekintsük: $\frac{g(x)}{(x-a)^{N+1}} = \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{N+1}-(a-a)^{N+1}} = \frac{g'(\xi)}{(n+1)(\xi_1-a)^N}$, felhasználva a Cauchy-féle középérték tételt. További alkalmazása segítségével

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{(x-a)^{N+1}} &= \frac{g'(\xi_1) - g'(a)}{(N+1)(\xi_1-a)^N - (N+1)(a-a)^N} \\ &= \frac{g''(\xi_2)}{(N+1)N(\xi_2-a)} \\ &= \ldots \\ &= \frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!},\end{aligned}$$

amelyből következik, hogy

$$\frac{g(x)}{(x-1)^{N+1}} = \frac{f^{(N+1)}(\xi_{N+1})}{(N+1)!}.$$

□

Következmény: ha f akárhányszor differenciálható a egy környezetében, és

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1} = 0$$

$\xi \in (a,x)$-ben egyenletesen, akkor $\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, vagyis ezesetben az a körüli Taylor-sor előállítja az f függényt azon x értékekre, amelykre a fenti feltétel teljesül. Egyszerű, elegendő (de nem szükséges) feltétel, ha $\xi \in (a,x)$, $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ egyenletesen korlátos, ugyanis $\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Megjegyzés:
Lehetséges, hogy f akárhányszor differenciálható, de a Taylor-sora az a pont kivételével nem állítja elő a függvényt. Ilyen pl. az alábbi.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ennek $\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \ldots \lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0, \forall k \Rightarrow f$ akárhányszor deriválható az $a = 0$ helyen. $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = 0$, tehát $f'(0) = 0, f''(0) = 0 \ldots \Rightarrow f$ Taylor-sora 0, pedig $f(x) > 0$ ha $x \neq 0$.

State buoni se potete is a 1983 Italian historical comedy-drama film written and directed by Luigi Magni. The film is loosely based on real life events of Saint Filippo Neri.[1] For his musical score Angelo Branduardi won the David di Donatello for best score and the Silver Ribbon in the same category.[2]