A t mátrix és a szórási amplitúdó kapcsolata

1. Vezessünk be egy hullámfüggvényt a közegbeli szórásra, $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$-val analóg mennyiséget a közegre, ez legyen $\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$.

$$\chi(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+\frac{F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k})}{z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) \quad (4)$$

2. $T=0$ esete, ekkora $F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k})=1$.Ekkor χ az alábbi egyenletnek tesz eleget:

$$\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+\frac{1}{z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z) \quad (5)$$

$$\Gamma_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$$

Az (5)-ös egyenletből:

$$z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)-\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=(2\pi)^3\left[z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)\right]\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) \quad (5a)$$

$(2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}}+i\eta)\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})-\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}-\mathbf{q})=(2\pi)^3\left[2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}}+i\eta\right]\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, ez abból jött, hogy még előző órán $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})=(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})-\frac{1}{q^2-k^2-i\eta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}V(\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$. Ha most $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}_1$, akkor $\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})$-vel szorozva (5a)-t, majd $\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$-val kiintegrálva kapjuk az (5b) egyenletet:

$$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)\right]\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})-\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})=\left[z-2(e_{\mathbf{k}'}-\mu)\right]\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')$$

A bal oldal második tagjában térjünk át $\mathbf{k}''=\mathbf{k}-\mathbf{q}$ szerinti integrálásra, ekkor

$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi_0(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})=-\int\frac{d^3k''}{(2\pi)^3}\chi_0(\mathbf{k}'',\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\cdot\underbrace{\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}''+\mathbf{q})}_{\left[2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}''}-i\eta\right]\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}'')}$, ahol a kapcsos kifejezéshez elvégeztünk egy $\mathbf{q}\to-\mathbf{q}$ trafót. Mivel v szimmetrikus, így az marad maga.

Ekkor az (5b) egyenlet: $\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[z-2(e_{\mathbf{k}_1}-\mu)+i\eta\right]\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})=\left[z-2(e_{\mathbf{k}'}-\mu)\right]\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')$.

$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})=(z-2e_{\mathbf{k}'}+2\mu)\frac{\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')}{z-2e_{\mathbf{k}_1}+2\mu}$, ahol $\eta\to0$ határátmenetet elvégeztük, azaz $\eta=0$-t behelyettesítettünk (z úgyis tartalmaz még egy limeszt). Használjuk fel a $\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}_1)\psi^*_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}_2)=(2\pi)^3\cdot\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$ összefüggést, azaz integráljuk mindkét oldalt $\int\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}'')\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}$ szerint: $\chi_0(\mathbf{k}'',\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=(z-2e_{\mathbf{k}'}+2\mu)\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k})}{z-2e_{\mathbf{k}_1}+2\mu}$. Ne felejtsük, hogy

$\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}')=(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}_1)+\dfrac{\widetilde{f^*}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}')}{2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}'}-i\eta}$, ezt beírva és elvégezve az integrálást, majd parciális törtekre való bontást:

$\chi_0(\mathbf{k}'',\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{k}'')+\int\dfrac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\left[\dfrac{1}{2e_{\mathbf{k}_1}-2e_{\mathbf{k}'}-i\eta}+\dfrac{1}{z-2e_{\mathbf{k}}+2\mu}\right]\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{k}'')\cdot\widetilde{f}^*(\mathbf{k}_1,\mathbf{k})$. Mindkét oldalt $\int\dfrac{d^3k}{(2\pi)^3}v(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')$ szerint integrálva:

$$\Gamma_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\widetilde{f}(\mathbf{k},\mathbf{k}')+\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2e_{\mathbf{q}}-2e_{\mathbf{k}'}-i\eta}+\frac{1}{z-2e_{\mathbf{q}}+2\mu}\right]\widetilde{f}(\mathbf{k},\mathbf{q})\cdot\widetilde{f}^*(\mathbf{k}',\mathbf{q}).$$

3. $T>0$ esetén a (4)-es egyenlet mindkét oldaláról levonunk: $\dfrac{\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)}{z-2e_{\mathbf{k}}+2\mu}$, majd beírjuk Γ definícióját:

   $$\chi(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)-\frac{1}{z-2e_k+2\mu}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}v(\mathbf{q})\chi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+\frac{F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k})-1}{z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)}\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$$

   , ekkor χ-t felírva, mint $\chi(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\int\dfrac{d^3q}{2\pi^3}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\chi(\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$,

   $$\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\left[(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')-\frac{v(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{z-2e_{\mathbf{k}}+2\mu}\right]\chi(\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})-\frac{v(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{z-2e_{\mathbf{k}}+2\mu}\right]\chi_0(\mathbf{k},\mathbf{k}'',\mathbf{K},z)=(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}$$

   . Integrálva mindkét oldalt $\int\dfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\chi_0(\mathbf{k}'',\mathbf{k},\mathbf{K},z)$ szerint:

   $\chi(\mathbf{k}'',\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\chi_0(\mathbf{k}'',\mathbf{k}',\mathbf{K},z)+\int\dfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\chi_0(\mathbf{k}'',\mathbf{k},\mathbf{K},z)\dfrac{F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k})-1}{z-2(e_{\mathbf{k}}-\mu)}\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$. Most integrálva $\int\dfrac{d^3k}{(2\pi)^3}v(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')$ szerint:

   $\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)=\Gamma_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)+\int\dfrac{d^3q}{(2\pi)^3}\Gamma_0(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{K},z)\dfrac{F_{(+)}(\mathbf{K},\mathbf{k})-1}{z-2(e_{\mathbf{q}}-\mu)}\Gamma(\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)$. Alacsony energiás szórásnál, azaz ha $|\mathbf{k}a|\ll 1$: 1. ábra

   $$\widetilde{f}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\approx\frac{4\pi\hbar^2a}{m}\left[1+O(|\mathbf{k}a|)\right]\Rightarrow\Gamma_0(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\approx\Gamma_0(0,0,0,0)=\frac{4\pi\hbar^2a}{m}\Rightarrow\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z)\approx\Gamma(0,0,0,0)=\frac{4\pi\hbar^2a}{m}$$

   $v(\mathbf{k})\leftarrow\Gamma(0,0,0,0)=4\pi\hbar^2a/m$, $v(\mathbf{r})=\dfrac{4\pi\hbar^2a}{m}\delta(\mathbf{r})$. 2. ábra

Azt szoktuk mondani, hogy $a>0$ esetén egy kölcsönhatás taszító, $a<0$ esetén viszont vonzó. Ez a hétköznapi képünknek nem teljesen fog megfelelni. Ennek árnyalásához tekintsük a következőket.

Alakrezonancia

Vegyük az alábbi párpotenciált: 3. ábra

A Schrödinger egyenlet ekkor: $\dfrac{-\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\chi(r)}{dr^2}+V(r)\chi(r)=E\cdot\chi(r)$, ahol $\chi(r)=r\cdot R(r)$ alakú. Szeretnénk majd az alacsony energiás szórásokat tekinteni. De előtte:

1) vegyük az $E<0$ esetet. Ekkor a megoldás $r<r_0$ tartományban $\chi(r)=\sin(q\cdot r)$, illetve az $r>r_0$ tartományon: $\chi(r)=e^{-\kappa r}$ (a hullámfüggvényt később, ha akarjuk – de nem fogjuk – normálhatjuk). χ és a deriváltja a határon menjen át simán, azaz $\left.\frac{\chi'(r)}{\chi(r)}\right|_{r<r_0}=q\,\mathrm{ctg}(qr)=-\kappa$.

Ha ennek van megoldása, akkor létezik kötött állapot.

$\hbar q=\sqrt{2m(V_0-E)}$, $\hbar\kappa=\sqrt{2m|E|}$. $q\cdot\mathrm{ctg}(qr_0)<0$. $E_B:=-E$. Épp akkor jelenik meg a kötött állapot, amikor $q^*\cdot\mathrm{ctg}(q^*r)=0$, $E_B=0$. $\mathrm{ctg}q^*r_0=0$, $q^*r_0=\frac{\pi}{2}$.

$q^{*2}r_0^2=\pi^2/4$

$\frac{2mV_0^*r_0^2}{\hbar^2}=\frac{\pi^2}{4}$, ebből $V_0^*=\frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2}$. Ha $V_0\geq V_0^*$, akkor van kötött állapot, ha $V_0<V_0^*$, akkor nincs kötött állapot.