

Tartalom

Bevezetés.....	2
Káosz, ami nem káosz	2
Kvantum káosz jelensége	3
Példák kaotikus viselkedésre	5
Bilirád.....	5
Chirikov-féle standard map	7
Hullámok keltése szilárd anyagokban és folyadékokban.....	10
Chladni-alakzatok.....	10
Felületi víz hullámok.....	13
Rezgő testek	15
Vízzel telt üregek ultrahangos gerjesztése	15
Mikrohullám-billiárdok	17

Bevezetés

A klasszikus nemlineáris dinamika már a kezdetektől fogva népszerűbb a laikusok körében, és ezt számos jól ismert magazin, nem tudományos folyóirat cikke is igazolja. Ezzel ellentétben a nemklasszikus, kaotikus rendszerek kvantummechanikája (röviden kvantum káosz) esetében teljes más a helyzet. Erre mindig úgy tekintettek, mint egy többé-kevésbé misztikus témára, meghagyva azt az elméleti tudósok egy szűk körének. Míg a klasszikus nemlineáris dinamika eredményeit a hétköznapi életben egy teljesen kívülálló is alkalmazhatja, a kvantumkáosznak úgy tűnik, nincs praktikus vonatkozása. Továbbmenve, a klasszikus nemlineáris dinamika elméletét számos kísérlet használja és igazolja, főképp a hidrodinamika és lézerfizika, addig a kvantum káosz – első megközelítésben – csak az elméletisek szakterülete maradt. Utóbbinak kezdetben csak magfizikai alkalmazásai voltak, s ez a túlsúly minden próbálkozás ellenére közel két évtizeden át fenn is maradt. A helyzet a 80-as évek közepén jelentősen megváltozott, amikor számos kísérletet végeztek, melyeket a következőkben mutatunk be, melyhez alig van szükség elméleti tudásra.

Ennek a bevezetőnek az a célja, hogy megmutassa, nincs miért félni a kvantum káosztól, az alap ötletei roppant egyszerűek. Csak a felhasznált matematikai eszköztár az, ami a dolgokat néha megnehezíti, és ez a dolgok valódi fizikáját néha elhomályosíthatja. Éppen ezért az a hozzáállás, hogy elméletet kísérletekkel együtt mutassuk be, melynek következtében számos billiárd kísérlet láthatunk a következőkben, ugyanis mikrohullámú tartományból számos kísérletezet végzett a könyv szerzőjének kutatócsoportja is. Ezt nem azért teszi, hogy a saját munkájuknak a kellőnél nagyobb figyelmet szentelhessenek, hanem mert a billiárd kísérletek egyszerűek, ugyanakkor a teljes nemlineáris dinamika komplexitását képesek mutatni, beleértve a kvantummechanikai vonatkozásokat is. Feltehetően nincs olyan aspektusa a kvantum káosznak, amit ne találunk meg a kaotikus biliárdokban.

Káosz, ami nem káosz

Azon nem szakértőknek, akiknek ez a könyv íródott, joggal kérhetik, érdekes témakör-e a kvantum káosz? A kvantummechanika immár több mint 60 éve létezik, és feltehetően a legtöbbet ellenőrzött fizikai elméletté vált az óta. A kvantum mechanika nem csak a hidrogénatomot képes tárgyalni, ami klasszikusan is integrálható, hanem a klasszikusan nem integrálható hélium atomot is. Kérdezhetnénk, hogy létezik-e kvantum káosz egyáltalán. A Schrödinger-egyenlet lineáris, így ellehetetlenítve a hagyományos értelemben vett káoszt. Ugyanakkor a korrespondencia elv kimondja, hogy a szemiklasszikus tartományban, ahol a hosszúságskála néhányszor nagyobb, mint a de-Broglie hullámhossz, a kvantum mechanika folytonosan megy át a klasszikus fizikába.

Ezért voltak olyan viták, melyben megkérdőjelezték a kvantum káosz kifejezésnek a használatát. A téma vezető tudósai az 1989-es, Les Houches-ben tartott nyári iskolán összegyűltek a kérdést megbeszélni. A kétes fogalomhasználatot elkerülendő, javasolták a káosz és kvantum fizikai kifejezést, ám Berry egy, már korábban felvetett kifejezést javasolt ismét, a kvantum kaotológiát. Habár ez valóban jobban illik a témakörre, mára általánosan elfogadottá vált a kvantum káosz kifejezés, de ebben a káosz kifejezést a maga megfelelő nemében kell érteni, ezért a következőkben is ezt a kifejezés marad használatban. Ennek egy másik oka, hogy a billiárd kísérletekkel analóg kísérletet végezhetünk a Helmholtz-egyenlet és Schrödinger-egyenlet analógiája alapján. Ezért használható a későbbiekben a hullám káosz kifejezés. A jelenségek javarésze minden hullámjelenségre alkalmazható, nem csak a kvantum mechanikai eredetűekre.

Kvantum káosz jelensége

A kvantum káosz kifejezés pontos definíciójának a trajektória fogalmából ered, mely értelmét veszti a kvantum mechanikában, s csak a szemiklasszikus tartományban használható, melyben viszont óriási jelentőséggel bír. Ennek szemléltetésére tekintsünk egy x_1, x_2, \dots, x_N , N dinamikai változójú rendszer időfejlődését kölcsönhatások figyelembe vételével. Tipikusan x_n valamennyi részecske hely és impulzusát is tartalmazza, tehát a dinamikai változók száma $N = 6M$, ahol M a részecskék száma egy $3D$ -s rendszer esetén.

Legyen $x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0)]$ a dinamikai változók kezdeti értéke, azaz a $t = 0$ időpillanatban! Bármely későbbi t időpillanatban $x(t)$ a kezdeti feltételek egy függvénye lesz:

$$x(t) = F(x(0), t) \quad (1.1)$$

Ha a kezdeti feltételeket infinitezimálisan megváltoztatjuk:

$$x_1(0) = x(0) + \xi(0) \quad (1.2)$$

akkor a dinamikai változók fejlődésére

$$x_1(t) = F(x(0) + \xi(0), t) \quad (1.3)$$

egyenlet áll fenn. A két trajektória közti $\xi(t) = x_n(t) - x(t)$ különbség (1.1) és (1.3) egyenletekből adódóan

$$\xi(t) = (\xi(0) \nabla) F[x(0), t] \quad (1.4)$$

melyben ∇ az F gradiensét adja a kezdeti feltételekből. Komponensenként kiírva (1.4)-t:

$$\xi_n(t) = \sum_m \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \xi_m(0) \quad (1.5)$$

Az $M = \partial F_n / \partial x_m$ mátrix sajátértékei határozzák meg a trajektóriák stabilitási tulajdonságait. Ha az összes sajátérték kisebb egynél, a trajektória stabil, és a kezdeti trajektóriától vett minden eltérés gyorsan eltűnik. Ha legalább egy sajátérték egynél nagyobb, két, infinitezimálisan közel, $\xi(0)$ eltéréssel indított trajektória exponenciálisan távolodik egymástól. Ennek részleteit számos könyvben megtalálhatjuk.

Kvantum mechanikában ennek a megfogalmazásnak nincs értelme a határozatlansági reláció miatt, ugyanis

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar / 2 \quad (1.6)$$

összefüggés lehetetlenné teszi a kezdeti feltételek pontos meghatározását. Ezt legjobban egy ponszerű részecske mozgásával tudjuk bemutatni, ami egy véges méretű dobozba van zárva, azaz a potenciál értéke egy adott tartományon belül véges (0), máshol pedig végtelen. Ezeket nevezzük billiárdnak. Tekintsük ennek az egyszerű, egy dimenziós esetét! Egyrészt szükségünk van a Schrödinger-egyenletre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (1.7)$$

melynek keressük a megoldását a Dirichlet-féle határfeltétellel:

$$\psi|_S = 0 \quad (1.8)$$

melyben $S = \partial A$ az A tartomány határát jelöli. A stacionárius megoldásokat a Schrödinger-egyenletből az időfüggés szeparálásával kapjuk:

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (1.9)$$

Beírva ezt az (1.7) egyenletbe:

$$(\Delta + k_n^2)\psi_n(x) = 0 \quad (1.10)$$

melyben ω_n és k_n között a diszperziós reláció teremt kapcsolatot:

$$\omega_n = \frac{\hbar}{2m} k_n^2 \quad (1.11)$$

Szintén az (1.10) egyenletre jutunk, ha a

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0 \quad (1.12)$$

hullámegyenlet megoldásait keressük, melyben c a hullám sebessége, és ismét szeparáljuk az időfüggést az (1.9) egyenletnek megfelelően. A (1.11) kvadratikusság diszperziós relációhoz képest most viszont a

$$\omega_n = ck_n \quad (1.13)$$

lineáris diszperziós relációjú egyenletre jutunk. Pontosan ez az az összhang, ami a stacionárius Schrödinger-egyenlet és a hullámegyenlet között van – amit szoktak Helmholtz-egyenletnek is nevezni –, melyet számos biliárd kísérletben felhasználnak a kvantum káosz tanulmányozására.

Ha a Schrödinger-egyenlet stacionárius megoldásaitokat már tudjuk, létrehozhatunk egy hullámcsomagot a megoldások, azaz – a Schrödinger-egyenlet, mint lineáris algebrai sajátértékproblémához tartozó – sajátfüggvények szuperpozíciójaként, vagy lineáris kombinációjaként:

$$\psi(x, t) = \sum_n a_n \psi_n(x) e^{-i\omega_n t} \quad (1.14)$$

Gauss-függvény alakú hullámcsomagra, melynek közepe \bar{k} , és (félérték) szélessége Δk , az a_n együtthatók értékei:

$$a_n = a \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k_n - \bar{k}}{\Delta k}\right)^2\right] \quad (1.15)$$

melyben az a együtthatókat úgy választjuk meg, hogy a részecske teljes megtalálási valószínűsége egy legyen, azaz egyre normált rendszerünk legyen. Ha a_n egy adott pillanatban ismert, pl. $t = 0$ -ban, például egy impulzus méréssel $\Delta p = \hbar \Delta k$ bizonytalansággal, a kvantum mechanikai fejlődése a hullámcsomagnak tetszőlegesen pontosan kiszámolható bármely későbbi időpillanatra. Mi több, adott szélességű hullámcsomag megalkotásához elegendő az (1.14)-beli egyenletben lévő összegzést elvégezni véges sok tagra is. Néhány nem tipikus esettől eltekintve a kapott függvény nem periodikus, azaz nem jellemezhető egy ω_n számmal mert a szuperponált függvények ω_n -jei nem arányosak egymással (hányadosuk nem írható fel két, „elegendően kicsi” valós számok hányadosaként), hanem kváziperiodikus. Ennél fogva a hullámcsomag újra és újra felépíti magát, de csak sok idő után, és csak hozzávetőleg. Az klasszikus mechanikában megszokott exponenciális távolodása a közeli trajektóriáknak teljesen elvész.

Megjegyzés [A1]: ezt én tettem bele, jó?

Példák kaotikus viselkedésre

Bilirád

Az 1.1-es ÁBRA egy mikrohullámú impulzust mutat egy negyedstadionnyi üregben. Egy kicsiny antenna körhullámokat kelt a stadionban, melynek falán a hullámok visszaverődnek, s a visszaverődés során a kitérés előjelet vált (klasszikus mechanika: ha hullámvezető végén a peremfeltétel az, hogy az elmozdulás 0, akkor a visszaverődő hullám kitérése mínusz egyszerese a bejövőnek). A 1.1(d) ábrán ez jól látszik, amint a hullám a fal alsó és felső részéről visszaverődik. További visszaverődések után az eredeti jel szétszlik a stadionban, többé-kevésbé egyenletesen, de lesz egy olyan idő, amikor a jel megint hirtelen kiélesedik egy hely környékén, amint azt az 1.1(f) ábrán láthatjuk. Az 1.2-es ÁBRA ezt még jobban ábrázolja, ahol a kitérést nem intenzitással, hanem a 3. dimenzió vetületének segítségével ábrázoljuk: itt láthatjuk az 1.1(a) és 1.1(f) állapotait. Ennek az újraépülésnek semmi köze a kvantum mechanikához, melyet a korábbiakban tárgyaltunk, ez csak egy egyszerű megjelenése a negyed stadion fókuszáló tulajdonságainak. Mint ahogy klasszikusan megszokhattuk, a hullámok a stadion falán mindenhol visszaverődnek, fókuszálódva ott, ahol az antenna képét kelti a negyedstadion fala, mint tükör. Az impulzus ilyen módon való újjáépülése jól mutathatja azt a tényt, hogy a hullámtulajdonságok és klasszikus trajektóriák ugyanazon töről fakadnak.

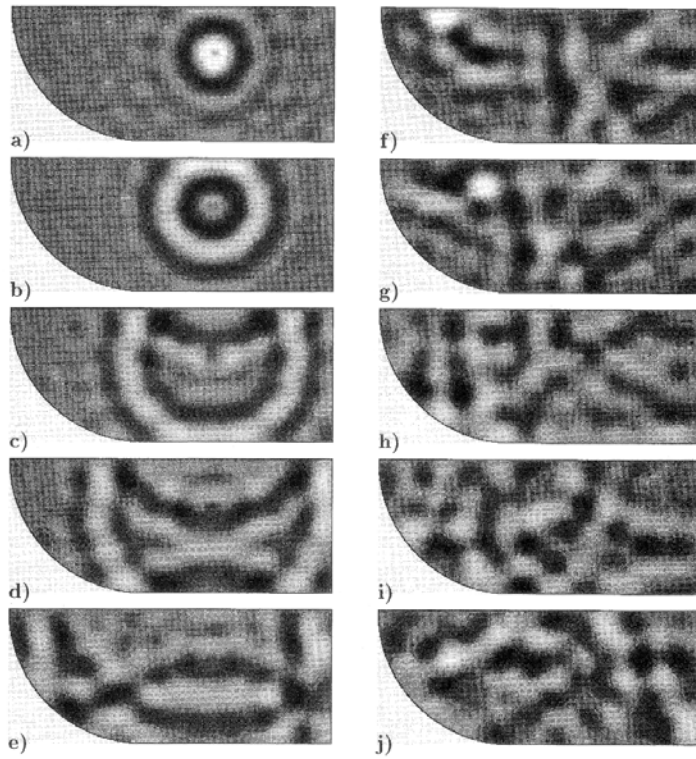


Figure 1.1. Propagation of a microwave pulse in a microwave cavity in the shape of a quarter stadium (length of the straight part $l = 18$ cm, radius $r = 13.5$ cm, height $h = 0.8$ cm) for different times $t/10^{-10}$ s: 0.36 (a), 1.60 (b), 2.90 (c), 3.80 (d), 5.63 (e), 9.01 (f), 10.21 (g), 12.0 (h), 14.18 (i), 19.09 (j) [Ste95] (Copyright 1995 by the American Physical Society).

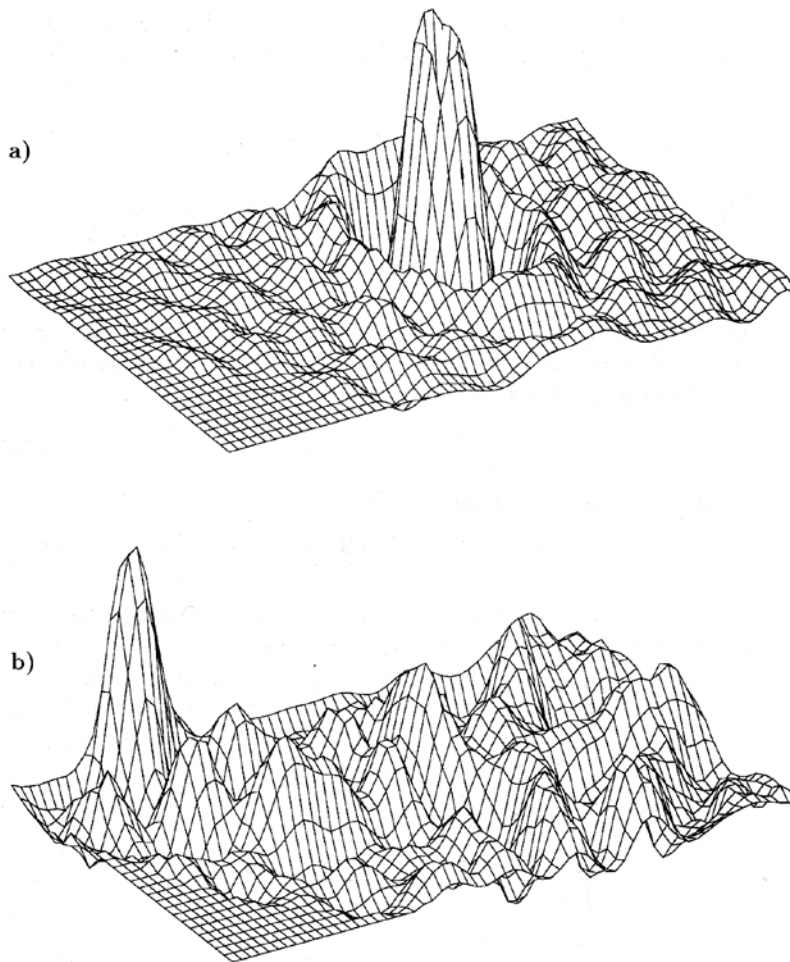


Figure 1.2. Three-dimensional view of the pulse propagation shown in Fig. 1.1 for two times, corresponding to Figs. 1.1(a) and (f), respectively [Ste95] (Copyright 1995 by the American Physical Society).

Chirikov-féle standard map

A második példa a lökdösött (rugdosott) rotátor. Ez az egyik legtöbbet tanulmányozott kaotikus rendszer, mind klasszikusan, mind kvantumosan, és melyre a későbbiekben még visszatérünk. Ennek a rendszernek a Hamilton operátorát a

$$H(t) = \frac{L^2}{2I} + k \cos \theta \sum_n \delta(t - nT) \quad (1.16)$$

egyenlet adja. Az első tagja az operátornak egy inga mozgását írja le L perdülettel és I tehetetlenségi nyomatékkal. A második tagja pedig periodikus lökéseket írja le, melyek T időközönként jönnek, és erőssége a gravitációs potenciál szerinti, $k = mgh$. (Egy ilyen kísérletet nehéz lenne létrehozni, viszont mint gondolkísérlet, kiváló.) A mozgásegyenleteket a kanonikus egyenletekből kaphatjuk:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial L}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (1.17)$$

Így a (1.16) egyenletet felhasználva adódik, hogy

$$\dot{\theta} = L, \quad \dot{L} = k \sin \theta \sum_n \delta(t - n) \quad (1.18)$$

melyben L és T 1-re normáltak. Előbbit a rendszer méretének, utóbbit az időskálának a megválasztásával érhetjük el.

L ugrásszerűen változása során a mozgásegyenletekből θ és L együttes értékeire különböző értékek adódnak. Legyen a változók értéke θ_n és L_n az $n+1$ -edik lökés előtt! A lökés után közvetlenül L_n értéke $L_n + k \sin \theta_n$ -re változik, míg θ_n nem változik. Két lökés között L értéke változatlan, míg θ értéke lineárisan változik az idővel. A következő, $n+2$ -ik lökés előtt közvetlenül a változókra

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + L_{n+1} \\ L_{n+1} &= L_n + k \sin \theta_n \end{aligned} \quad (1.19)$$

áll fenn. Ez a Chirikov-féle standard map (vagy standard leképezés). Ez különösképp alkalmas annak tanulmányozására, hogy hogyan alakul át egy Hamiltoni rendszer regulárisból kaotikussá midőn 1 kontroll paramétert változtatunk. Az 1.3-as ÁBRA a leképezés Poincaré-metszeteit ábrázolja különböző k értékek mellett. Minden pont 1-1 (θ, L) párnak felel meg közvetlenül az egyes lökések után. Kicsi, közel $k \approx 0,2$ érték esetén a rotátor regulárisan viselkedik csaknem minden kezdeti θ és L értékre. A fázistérben való mozgás az úgynevezett **invariáns tóruszon** történik, melyen L értéke alig változik, θ viszont felvesz csaknem minden értéket 0 és 2π között, egyenlő valószínűséggel. k növelésével mind több és több tórusz szakad fel, mígnem egy kritikus, $k = k_c = 0,9716\dots$ értéknél az utolsó is felszakad, ugyanakkor továbbra is maradnak reguláris tartományai a fázistérnek. $k \geq 5$ környékén pedig már csaknem az egész fázistér kaotikussá válik.

Megjegyzés [a2]: invariant tori, ennek mi a magyar megfelelője?

Mivel (1.16) Hamilton operátor időfüggő, nem lehetséges az időfüggés szeparálása a Schrödinger-egyenletből, melynek eredményeként az energia nem lesz állandó.

Mindkét példa jól mutatja az erős kapcsolatot a klasszikus dinamika és hullám vagy kvantum mechanika között. Ennek a kapcsolatnak a részletesebb megértéséhez a klasszikus káosz nyomait keressük a kvantum mechanikai rendszerekben.

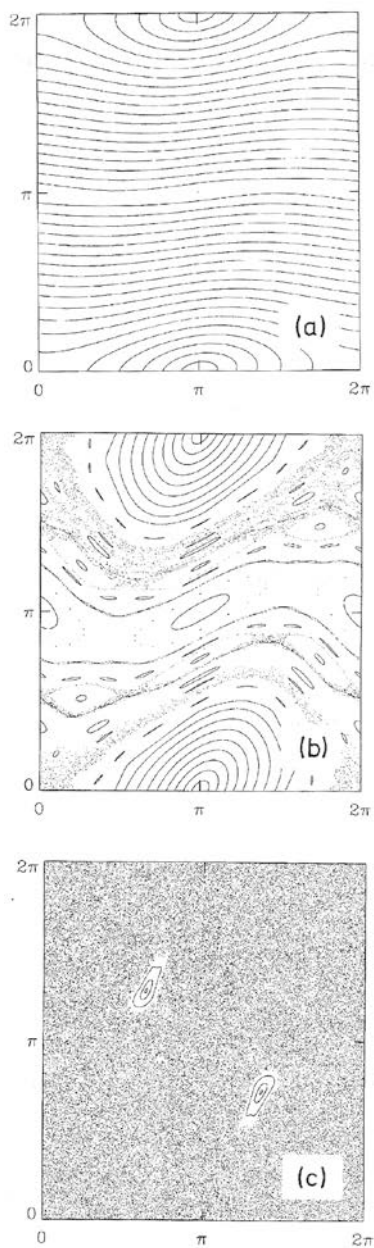


Figure 1.3. Poincaré map of the standard map for different kick strengths. Angle θ is plotted versus angular momentum L . For $k = 0.2$ (a) the motion is on invariant tori for most initial conditions, for $k = 0.9716 \dots$ (b) the last invariant torus is just destroyed, and unlimited diffusion becomes possible, for $k = 5$ (c) the phase space has become chaotic, apart from some surviving stable islands.

Biliárd kísérletek

1990-ig csak nagyon kevés kísérletet végeztek kaotikus kvantum mechanikai rendszereken a korai magspektrumi méréseket leszámítva. Említésre méltó ebből a szempontból a hidrogén atom erős mikrohullámú térben való gerjesztés Bayfield és Koch által, illetve az erős térben való viselkedésének vizsgálata Welge és csoportja által. Ehhez képest újítás volt Stöckmann és Stein mikrohullámú üreges gerjesztései, melyek szintén lehetővé tették a kvantum káosz vizsgálatát. Ezen kísérleteknek számos variációja van, melyek mind-mind analógok egymással, minthogy ugyanarra a Helmholtz-egyenlet és idő független Schrödinger-egyenlet közti ekvivalenciára épülnek. Az, hogy tökéletes megfeleltetése legyen a kvantum mechanikával, a megválasztott peremfeltételeken múlik.

Hullámok keltése szilárd anyagokban és folyadékokban

Chladni-alakzatok

Ugyan az ókori görög még nem, de a 18. században már foglalkoztak olyan jelenségekkel, melyeknek közül van a kvantum káoszhoz. Ernst Florens Chladni volt az előfutára a billiárd kísérleteknek. Ő vette észre, hogy véletlenszerűen, egyenletesen szórva port egy üveg vagy fém lap felületére, azok karakterisztikus alakzatokká rendeződnek, ha a lapot rezgésbe hozzuk egy hegedűvonóval. A hangnak az ilyen módon való láthatóvá tétele nem csak a kor nagy tudósait, mint Laplacet vagy Poissont érdekelték csak, hanem számos, a tudomány iránt érdeklődő embert is. 1809-ben Chladni Napóleonnak és udvarának tartott bemutatót az ő kísérletéről. Chladni pénzdíjat kapott a bemutatójáért, és további díjat tűztek ki a probléma matematikai megoldására. A díjat végül Sophie Germain kapta 1816, aki egyike volt azon nőknek, akik komoly harcot vívtak a férfiak dominálta tudományos világban az elismerésért. (Ezt jellemzi, hogy Germain férfi álnévvel levelezett Gaussal.) Ugyanakkor Germain megoldása nem volt teljes. A kör alakú lemez esetének korrekt tárgyalását Kirchhoff 1850-ben oldotta meg, de 1891-ből még mindig találhatunk tőle olyan kéziratot, melyben azt írja, hogy csekély számú, egyszerű felületi alakzattól eltekintve a Chladni-alakzatok problémája még mindig megoldatlan.

A szabálytalan alakú lemezekkel végzett kísérletek iránt az érdeklődés újra megnőtt most, közel 200 éve eltelte után. Merev lemezek rezgéseit az

$$\Delta^2 \psi_n = k_n^4 \psi_n \quad (2.1)$$

melyben

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

a kétdimenziós Laplace-operátor, $\psi_n(x, y)$ az amplitúdó függvénye az n -dik rezonáns állapotnak és k_n az asszociált hullámszám. Vegyük észre, hogy a membránrezgéseket leíró esethez képest itt a Laplace-operátor négyzete jelenik meg, így két típusú megoldásaink is lesznek. Egyiket a

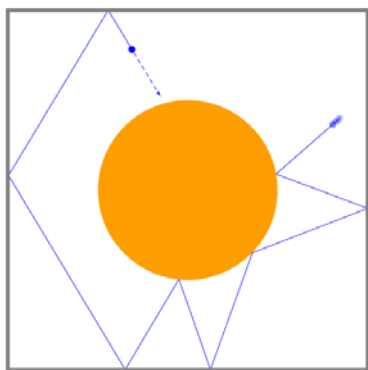
$$\Delta \psi_n = -k_n^2 \psi_n \quad (2.3)$$

míg a másikat a

$$\Delta \psi_n = k_n^2 \psi_n \quad (2.4)$$

egyenletből kaphatjuk. (2.3) a hagyományos Helmholtz-egyenlet. Ha a lemez pereme rögzített, a probléma teljesen ekvivalens a kvantum mechanikai problémával, mikor egy részecskét várunk egy dobozba, ahol véges tartományban konstans a potenciál, máshol pedig végtelen. A problémához tartozó klasszikus dinamikai rendszer integrálható, azaz a rendszer szabadási fokainak száma megegyezik a mozgásállandók számával. Kör alakú lemeznél ez lehet a teljes energia és az L perdület, négyszögletes lemeznél pedig p_x és p_y , az impulzus falakkal párhuzamos komponensei, melyek a mozgás során megmaradnak. Szabálytalan lemezekre az egyetlen mozgásállandó az E teljes energia, így a klasszikus mozgás nemintegrálható, azaz kaotikus. A szabálytalan alakú minták Chladni-alakzatainak értelmezése ennél fogva szorosan összefügg a kvantum mechanikai kaotikus biliárrdal. A (2.4) egyenletre nem áll fenn hasonló ekvivalencia.

A Chladni-alakzatok nem alkalmasok kvantitatív mérések elvégzésére a nagy csillapítások miatt, ellenben didaktikai szempontból kiválóak és olcsók. A 2.2-es ÁBRA különböző alakú lemezen keletkező Chladni-alakzatot mutat. A lemezek a középpontban lettek rögzítve, és egy kihangosítóval gerjesztették azokat tipikusan a 300–2000Hz környékén. Minthogy a lemez pereme nem volt rögzítve, a Neumann-féle peremfeltételek voltak érvényben. Ennélfogva nincs közvetlen kapcsolat a kvantum mechanikával. A 2.2(a) ÁBRA mutatja az egyik csomóponti mintázatot kör alakú lemezre, melyet Chladni maga is megfigyelt. Szabályos körök és egyenes vonalak hálóját láthatjuk általában egy integrálható rendszerre. A központi rögzítés nem befolyásolja az integrálhatóságot, mivel a forgatási invariancia nem sérül. A helyzet más téglalap lemezekre, mint ahogy azt a 2.2(b) ÁBRA mutatja. Itt a középponti rögzítés csökkent a szimmetriát és a biliárd pszeudintegrálhatóvá válik. Alacsony frekvenciáknál a rögzítésnek kicsi hatása van csak, de nagyobb frekvenciáknál az egyenesek metszéspontját eltünteti, mint ahogy az ábra is mutatja. A 2.2(c) ÁBRA végül egy szabálytalan, nemintegrálható esetet mutat, konkrétan egy negyed Sinai biliárdot. A Sinai biliárd egy négyzet vagy egy kör egy körrel a közepében, előbbire láthatunk egy példát egy trajektóriával a 2.A ábrán.



2.A ábra
Sinai biliárd, négyzet közepén körrel
és egy részecske trajektóriájával

Ezekre a rendszerekre az orosz matematikus, Sinai bebizonyította az klasszikus mozgásokra az ergodicitást. Ez egyike azon ritka eseteknek, amikor valamit a témakörben sikerült bebizonyítani. A 2.2(c) ábra egy kanyargó mintázatot mutat, amit McDonald és Kaufman kiszámolt a stadion biliárdra.

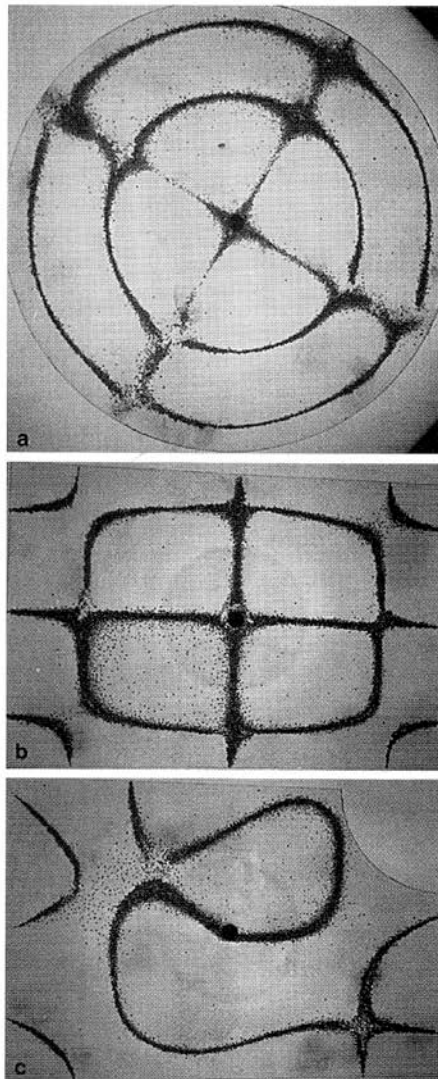


Figure 2.2. Chladni figures of glass plates of circular ($r = 10.5$ cm), rectangular ($a = 21$ cm, $b = 14$ cm), and quartered Sinai billiard ($a = 21$ cm, $b = 14$ cm, $r = 5$ cm) shapes. All plates are fixed in the centre and have been excited to vibrate by a loudspeaker, which has been removed for the photograph. The plates correspond to integrable (a), pseudointegrable (b), and nonintegrable (c) billiards [Stö95a].

Annak ellenére, hogy a mérések minősége igen rossz, nagyon jól alkalmazhatóak az integrálható és nemintegrálható rendszerek bemutatására a nem szakértők számára. Egy modern variánsa ennek a módszernek lehetővé teszi a jó minőségű Chladni-alakzatok létrehozását. Mind a mai napig rutinszerűen használják a Chladni-alakzatokat a rezgések vizsgálatára mind zongoráknál, mind a húros hangszereknél. A legtöbb esetben mára az ezekben használt port holografikus megjelenítéssel váltják fel. A Chladni-alakzatokat a csúcskategóriájú hegedűk hangolására is használják.

Felületi vízhullámok

A kaotikus billiárd hullámkaotikájának másik osztálytermi példája a megfelelő alakú, vízzel töltött edényekben kialakuló felületi vízhullámok. Lindelof és társai tanulmányozták a vízhullámok keltését különböző módokon. Az elrendezésük nagyon egyszerű. Egy pontszerű fényforrás tükröződött a víz felszínén és volt kivetítve a plafonra. Az egész kádban lévő víz rezgethető volt a 10–100Hz-es tartományban. A szóró pontok szabályos elrendezésben engedett és tiltott átmeneti sávokat várunk a szilárdtestek elméletében szereplő Bloch-állapotoknak megfelelően. Csakugyan, a szórási pontok négyzetes elrendezése mellett a víz felszíne többé-kevésbé egyenletesen lett gerjesztve a megfelelő frekvenciákon, míg más frekvenciákon nem találunk átmeneteket, a víz felszíne nem jött rezgésbe, mint ahogy a 2.3(a) ábrán láthatjuk. Ugyanakkor szabálytalan elrendezésben csak helyi gerjesztések figyelhetők meg, mint ahogy a 2.3(b) és 2.3(c) ÁBRA mutatja, jól szemléltetve a kioltási interferencia lokalizációs hatását. Ezzel teljesen analóg kísérletet állíthatunk össze mikrohullámokkal is.

Megjegyzés [a3]: demonstrating the effect of localization by destructive interference

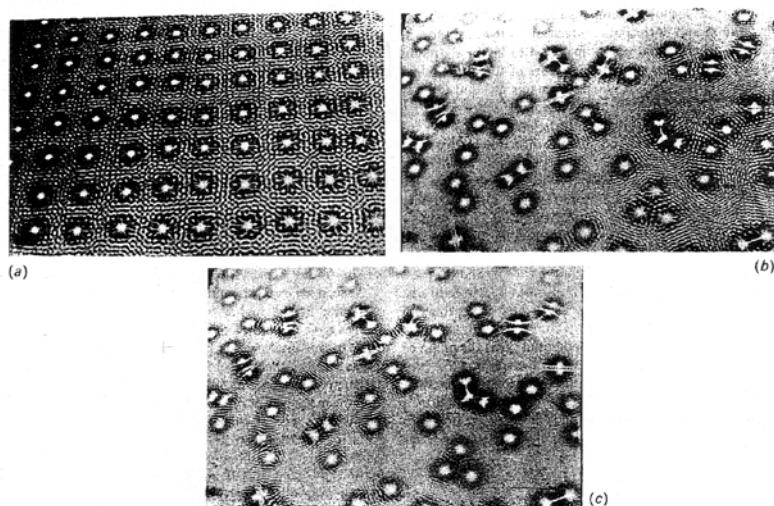


Figure 2.3. Propagation of water waves in different arrangements of circular scatterers. In a regular grid of scatterers the waves can propagate if the frequency is chosen appropriately (a). In an irregular arrangement the waves are localized due to destructive interference (b, c) [Lin86].

Folyadékokban a hullámkeltést a Navier-Stokes egyenletekből számolhatjuk, melyek nemlineárisak. De amíg az egyensúlytól vett eltérés nem túl nagy, az egyenletek linearizálhatóak, és ismét a Helmholtz egyenletekre vezetnek, s határfeltételekként a Neumann-féle határfeltételeket róhatjuk ki. A diszperziós relációra egzakt módon a

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\delta}{\sigma} k^3 \right) \tanh(kh) \quad (2.5)$$

adódik, melyben az anyagi paraméterek nem érdekesek, csupán az, hogy eléggé nagy k hullámszámú esetben a bal oldal zárójeles mennyiségének jobb oldali tagja, a köbös tag érvényesül. Kör alakú edényeknél nagszimmetriájú állóhullámokat figyelhetünk meg, melyek közül kettőt a 2.4-es ÁBRA mutat.

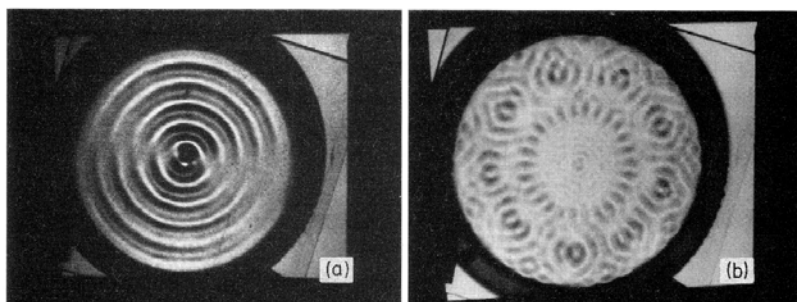


Figure 2.4. Water surface waves on a circular water vessel ($r = 5.3$ cm) placed on an overhead projector and set to vibrate by an electromechanical shaker [Blü92] (Copyright 1992 by the American Physical Society). R. Blümel is thanked for kind permission to reprint a number of unpublished photographs.

A helyzet jelentősen megváltozik stadion alakú edényeknél. A 2.5-ös ÁBRA három tipikus helyzetet mutat be. A 2.5(a) ÁBRA mintája megfelel a két hosszanti oldal közötti állóhullámoknak. Ennek a klasszikus megfelelője a stadion két oldala között ide-oda verődő részecske. Nagyobb frekvenciákon pöttyözött mintázat látható (lásd 2.5(b) ábra), hasonló ahhoz, mint amit a lézerfénynél is láthatunk. Ez nem egy véletlen jelenség, mert mindkettőt a véletlenszerű szuperpozíció jelensége írja le. 700Hz vagy még nagyobb frekvenciákon különös, karc-szerű struktúrákat figyelhetünk meg, mint ahogy a 2.5(c) ÁBRA mutatja.

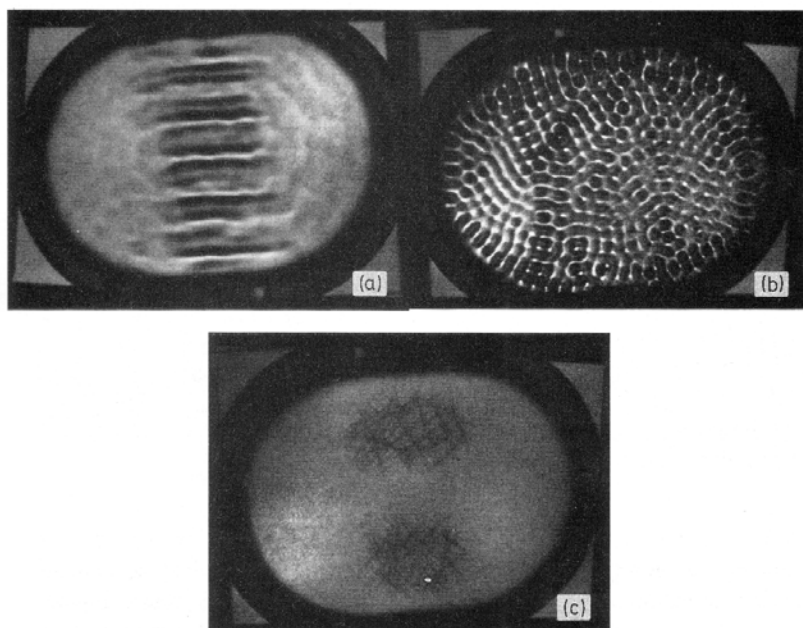


Figure 2.5. Water surface waves on a stadium-shaped water vessel ($l = 4.1$ cm, $r = 5.3$ cm) for three different frequency regions [Blü92] (Copyright 1992 by the American Physical Society).

Rezgő testek

A szilárd testekben terjedő hanghullámok új lehetőségeket nyitnak a mérésekben. Ezeket szintén a Helmholtz-egyenlettel írhatjuk le, de itt három különböző polarizációs módus létezik, két transzverzális és egy longitudinális. Ezek a szilárd test felszínéről való visszaverődés révén csatolódnak egymással. Tisztán longitudinálisan vagy transzverzálisan polarizált hullám felbomlik két, különböző polarizációjú hullámra a visszaverődés során.

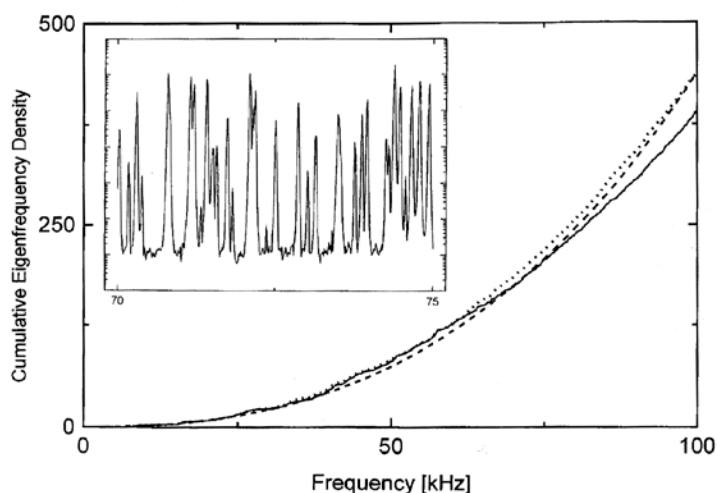


Figure 2.6. Integrated density of states for a rectangular Al block with the dimensions $a = 60.6$ mm, $b = 98.0$ mm, $c = 158.6$ mm (solid line) and a Sinai billiard of the same dimensions, obtained by cutting the octant of a sphere with $r = 20$ mm out of one corner (dotted line). The dashed line corresponds to the theoretical expectation (see Eq. (2.1.12)). In the insert part of the spectrum of the rectangular block is shown on a linear-logarithmic plot [Ell95] (Copyright 1995 by the American Physical Society).

A hang-billiárd kísérletet Weaver kezdte le, majd Ellegaard folytatta csoportjával. A rendszer igen egyszerű: egy, a centiméteres oldalél hosszúság-nagyságrendben lévő alumínium téglalakra helyeztek acélgolyót, és vizsgálták az ultrahangokkal kialakuló állóhullámokat. A tömb egy habra volt helyezve (ezáltal biztosítva a Neumann-féle peremfeltételeket), és egy ultrahang-érzékelővel mérték a vibrációt. A pad és az érzékelő hatása elhanyagolható volt. Az érzékelő jelének Fourier-transzformáltjából kaphatjuk a rezonancia spektrumot. A spektrális tartomány a $0-250\text{ kHz}$ tartomány volt. A rendszer jósági tényezője, melyet a $Q = \nu / \Delta\nu$ egyenlettel definiálhatunk, melyben ν a rezonáns állapot frekvenciája, $\Delta\nu$ pedig a bizonytalansága, 5000 és 10000 közötti értéket vett fel a mérés során, melyet a 2.6-os ÁBRA mutat. Ez hasonló nagyságrendben van, mint a mikrohullámú vezető üregek esetében.

Vízzel telt üregek ultrahangos gerjesztése

Az előző esetben láthattuk, hogy szilárd testekben megjelenő hanghullámok longitudinális és transzverzális komponensei bonyodalmat okoznak. Nem így folyadékokban, melyben csak longitudinális hullámok létezhetnek csak. Másik előnye a folyadékoknak, hogy az állóhullámok megfelelő világítással könnyen láthatóvá tehetők. A 2.8-s ÁBRA egy összeállítást vázol, melyet Chinnery és társai használtak. Az üreges henger, melynek kör vagy stadion alakú keresztmetszete van, van felfüggesztve egy vízzel telt tartályon belül. A hangot egy ultrahangos jelgenerátor kelti a néhány MHz-es tartományban.

Megjegyzés [a4]: ezt nem teljesen tudom elképzelni

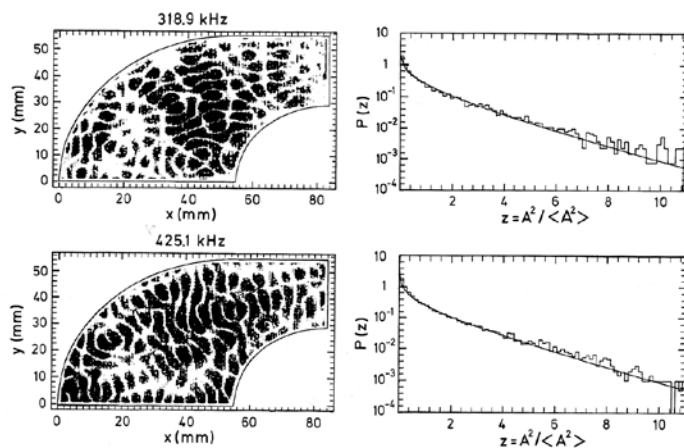


Figure 2.7. Sound figures for two vibration modes of an aluminum plate ($h = 3$ mm) in the shape of a quarter Sinai-stadium billiard (left), and probability distributions for the squared vibration amplitudes (right). The solid lines correspond to Porter–Thomas distributions [Sch97].

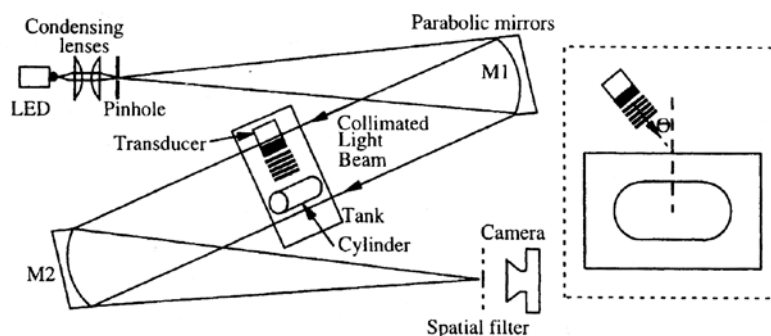


Figure 2.8. Illumination system for the visualization of the sound pressure field in a cylinder of circular or stadium shape filled with water. The sound is produced by an ultrasonic transducer, and could be transmitted from different directions into the cylinder to allow the selective excitation of different eigenmodes [Chi97].

Ebben az esetben is a Neumann-féle peremfeltételekkel kell megoldjuk a Helmholtz-egyenletet. A fény keresztülmege a hengeren, párhuzamosan annak tengelyével. Egy nagyteljesítményű LED fényét fókuszáljuk egy lyukblende, vagy véletlenszerűen elhelyezett lyukblende-tömbökkel, mint ahogy a 2.8-as ÁBRA mutatja.

Ennek a módszernek a nagy előnye, hogy a kialakuló mintázatot egyből láthatjuk, ahhoz semmiféle szkennelésre vagy a fényképezésen túl további képalkotásra nincs szükségünk. Egyetlen hátránya, hogy a jósaági tényezője $Q \approx 2000$ körül van, így a MHz-es tartományban átlapoló rezonanciák vannak, melyek egyszerre gerjesztődnek. 2.9-es ÁBRA néhány sajátmódus mintázatát ábrázolja kör és stadion alakú üreg eseteire.

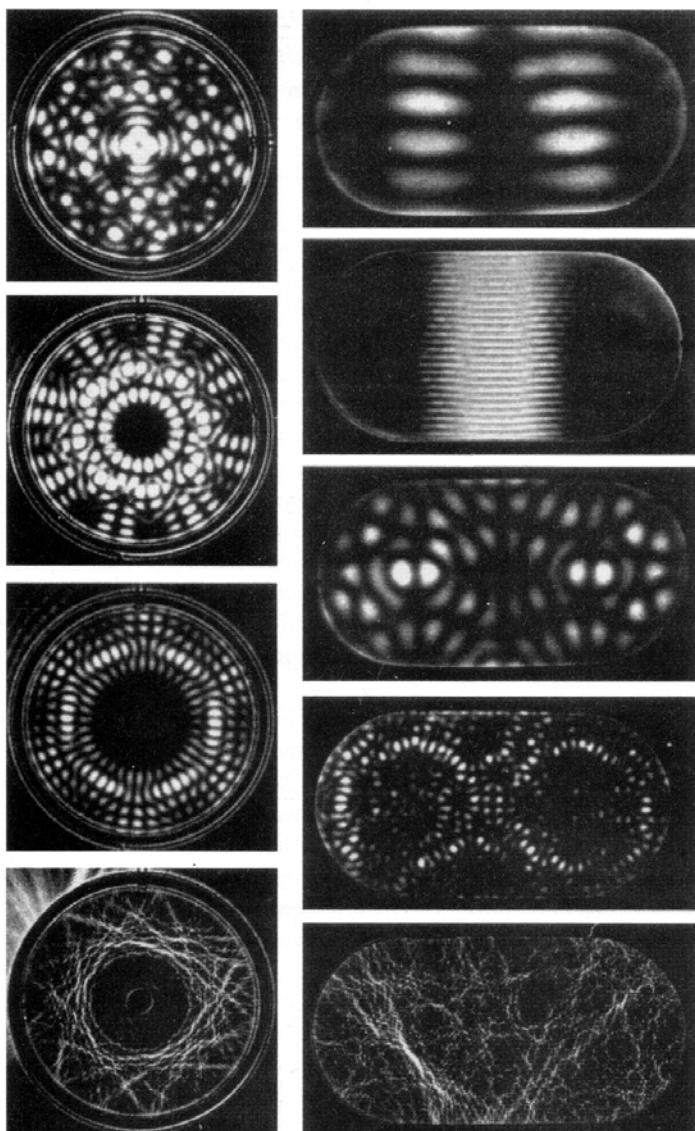


Figure 2.9. Standing sound waves in water-filled cylinders of circular ($r = 14.3$ mm) and stadium shapes. The eigenfrequencies in kHz are 526.2, 607.9, 663.8, 3500 (from top to bottom) for the circle [Chi97], and 150.9, 720.2, 261.1, 664.8, 2500 for the stadium ($l = 25.4$ mm, $r = 12.7$ mm) [Chi96].

Mikrohullám-billiárdok

Mivel a kísérletek javarésze különböző alakú, de mikrohullám-méretű üregekben lettek elvégezve, ezeket mikrohullám-billiárdnak is nevezik. Kezdsnek a Maxwell-egyenleteket használjuk fel, melynek megoldásaként elérhető, hogy csak longitudinális módusok lépjenek fel.

Tekintsünk egy d vastag negyed-stadiont! A TM módus peremfeltételeit a

$$\begin{aligned} B_z &= 0 \\ E_z &= E(x, y) \cdot \cos \frac{n\pi z}{d} \end{aligned} \quad (2.6)$$

egyenletekkel elégíthetjük ki. A Maxwell egyenletek ekkor a

$$\left[\Delta + k^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right] E = 0 \quad (2.7)$$

differenciálegyenletté egyszerűsödik. Ha a ν frekvenciára $\nu < c/(2d) \Leftrightarrow k < \pi/d$, akkor csak az $n=0$ -jú TM módos keltődhet, így a (2.9) egyenlet a

$$(\Delta + k^2)E = 0 \quad (2.8)$$

Helmholtz-egyenletre egyszerűsödik.

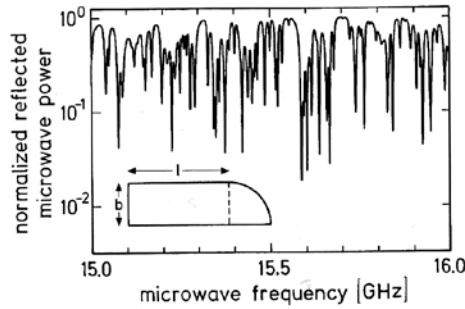


Figure 2.10. Part of a microwave reflection spectrum of a cavity in the shape of a quarter stadium billiard ($b = 20$ cm, $l = 36$ cm) with a height of $h = 0.8$ cm. Each minimum in the reflected microwave power corresponds to a resonator eigenfrequency [Stö90] (Copyright 1990 by the American Physical Society).

A 2.10-as ÁBRA kaotikusnak tűnő spektrumát tekintve meglepődhetünk, ha abból bármilyen hasznos információt kaphatunk. Ebben a részben megmutatjuk, hogy mit tehetünk ez ügyben. A 60-as években hasonló problémával szembesültek az összetettebb magok spektrumainál. Hasznosnak bizonyult bevezetni a szín-távolság statisztika $P(s)$ eloszlásfüggvényét, melyben a szomszédos energiaállapotok távolsága $s_n = E_n - E_{n-1}$. A 2.11-es ÁBRA mutatja néhány különböző billiárd eloszlásfüggvényét, melyeken a távolság várható értéke, $\langle s \rangle = 1$ -re normált. 2.11-es ÁBRA egy téglalap billiárd $P(s)$ eloszlását mutatja. A megfelelő klasszikus fizikai rendszer ekkor integrálható. Ekkor a Poisson-i legközelebb-szomszéd távolságeloszlás, a

$$P(s) = \exp(-s) \quad (2.9)$$

eloszlás a várt, ahogy azt majd később láthatjuk. A kísérleti görbe jól követi az elméletit, de van néhány fontos eltérés. A mérésből adódó eloszlás egy határozott lyukat mutat kis s értéknél, míg ott a maximumot várnánk a (2.6) egyenletnek megfelelően. Ennek az eltérésnek az oka a véges vastagsága a rezonanciaüregnek. Ha két rezonanciát a mérési felbontásnál kisebb távolság választja el egymástól, akkor azokat egynek detektáljuk. Ugyanez okozza a sajátfrekvenciák elvesztését a hang kísérletekben a négyzetes blokkoknál, ahogy azt a 2.6-os

ÁBRA mutatja. További különbségek jelentkeznek a nagyobb távolságoknál. Ekkor a becsatlakozó vezeték hatása jelentkezik, melynek következtében a rendszer csak pseudo-integrálható lesz. Hasonló a jelenség a téglalap üveglemez középponti rögzítéséhez (2.2-es ÁBRA), ahol szintén a kis hullámhosszú tartományban ez nem okozott gondot, csak a nagyobb hullámhosszú tartományban. A 2.11(b) ÁBRA ugyanannak a téglalap rezonátornak az szín-távolság eloszlását mutatja, mint az (a) esetében, csak nagyobb frekvenciákon. A folytonos vonal a bonyolult számítások által várt görbét mutatja, mely számításoknál figyelembe vették a vezetőket. Végül a 2.11(c) ábra mutatja a negyed stadion billiárd spektrumát, melyet a 2.10-es ÁBRA képéből is számolhatnánk. A folytonos vonal a Wigner-eloszlást jelöli, melynél az eloszlás

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \quad (2.10)$$

Ez az eloszlás mindenütt jelen van a kaotikus rendszerek spektrumában, és végigkísér minket a témakörben.

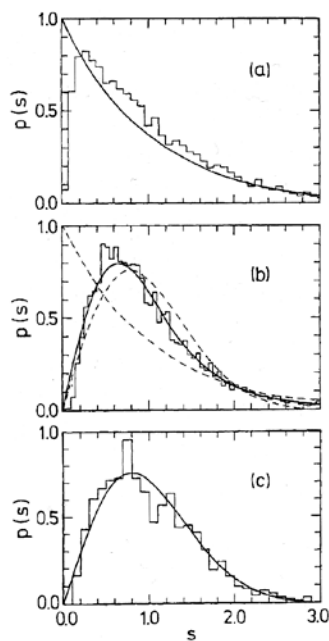


Figure 2.11. Nearest neighbour distance histograms collected from a number of rectangularly shaped microwave resonators with side lengths $a = 16.5 \dots 51.0$ cm, $b = 20$ cm in the two frequency ranges 5 to 10 GHz (a) and 15 to 18 GHz (b) [Haa91], and for the quarter stadium billiard shown in Fig. 2.10 (c) [Stö90] (Copyright 1990+91 by the American Physical Society).