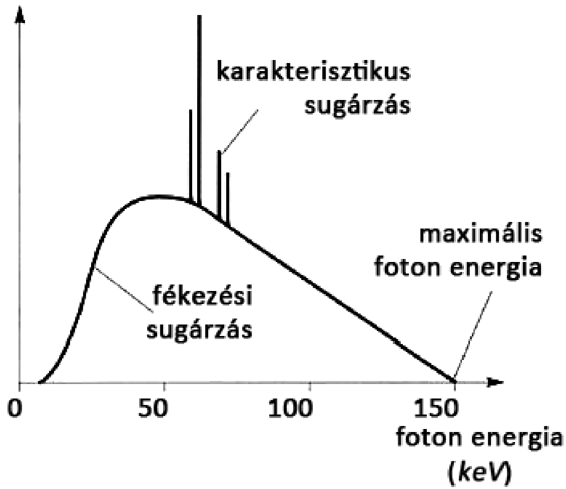
Fékezési sugárzás

Jelenség ismertetése

- klasszikusan is értelmezhető, és adott paraméter intervallumban megfelelő a közelítés
- gyorsuló elektromos töltés EM mezeje változó, mely felbontható EM hullámok összegére
  - az EM hullámok energiát (és impulzust) visznek el
  - csökken a mozgó töltés energiája
- fékezési sugárzás: alkalmazás az elektronra
- elektronokkal lőtt céltárgyak során EM sugárzás detektálható (katódsugárcső)

A sugárzás eredete

- az atom távolról semleges, közelebbről negatív töltésű, nagyon közel pedig vonzó (atommag)
- az elektronok hígan vannak, kicsi a hatásuk (de van)
    - elektronállapotok gerjesztéseit megfigyelhetjük
    - járulékot adnak a spektrumban, karakterisztikus sugárzás
- az elektronfelhőn átjutott elektronokat a mag vonzza
- a sugárzás a szórás közben fellépő gyorsulásból adódik



Mi akarunk tudni?

- szeretnénk magyarázatot adni a mérési eredményre
    - ha a teljes alakra közvetlenül nem is, de a maximális energiára igen
    - a teljes alak többszörös szórási folyamatok, és nem kisszögű eltérülések járulékából adódik
- pontosabban: meg szeretnénk határozni a differenciális sugárzási hatáskeresztmetszetet:

$$\frac{d^2\chi}{d\omega d\Omega} = \frac{dI}{d\omega} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{0.1}$$

melyben ω a sugárzás körfrekvenciája, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ a differenciális szórási hatáskeresztmetszet (ismert pl. Rutherford szórás esetén). Itt $d\Omega$ a bejövő elektronáramhoz képesti elemi térszöget jelenti.

Hogyan számolunk?

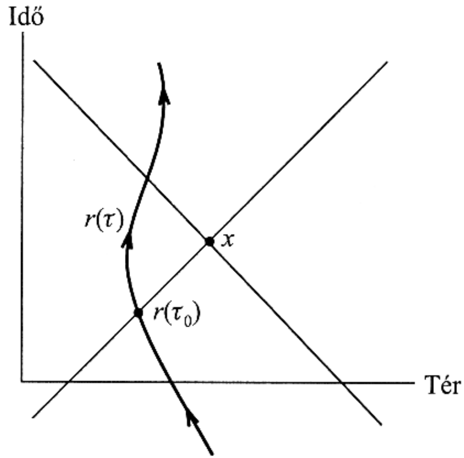
- Landau: perturbációként kezeli, és mint dipólussugárzás íjra le
    - az sugárzás során az impulzusváltozást elhanyagoljuk, hisz dipólussugárzás során a kibocsátott impulzus 0
    - kiszámoljuk a pályát 0-ad rendű közelítésben, a pálya során a gyorsulást, mint két, kúpszeleti (hiperbolikus) pályán mozgó töltésre, elhanyagolva a mag mozgását
    - ismert gyorsulás – kisugárzott energia összefüggésből kifejezhető a teljes kisugárzott energia
- probléma: számolás során bejönnek nevezetes, de nem hétköznapi függvények (Hankel függvények)
- J. D. Jackson:
    - általános $\mathbf{r}(t)$ pálya, hosszas számolások
        - határesetben egyszerűbb formulák
        - csupán az eredmények felhasználásával, és gyors egymásba helyettesítésével megfelelő áttekintést kapunk

Intenzitás eloszlás vizsgálata – bevezetésEquation Section (Next)

- tetszőleges $r(\tau)$ pályán mozgó ponttöltés Liénard-Wiechert-potenciálja

$$A^{\alpha}(x)=\left.\frac{eV^{\alpha}(\tau)}{V\cdot x-r(\tau)}\right|_{\tau=\tau_0}, \tag{1.1}$$

ahol V^{α} a mozgó ponttöltés négyessebessége, τ_0-t a retardációs követelmény, $(x-r(\tau_0))^2=0$ egyenlet határozza meg, melyben x a megfigyelési pont koordinátái.



- Megmutatható, hogy a térerősség vektorára fennáll a

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=e\left[\frac{\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2\left(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}\right)^3 R^2}\right]_{\mathrm{ret}}+\frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}}{\left(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}\right)^3 R}\right]_{\mathrm{ret}} \qquad (1.2)$$

összefüggés, melyben a ret kifejezés arra utal, hogy a $r_0(\tau_0)=x_0-R$ egyenlet által megadott τ_0 retardált időpillanatbeli értékét kell vennünk a szögletes zárójelben szereplő mennyiségnek, γ a Lorentz-faktor, R pedig a megfigyelési pont távolsága a részecskétől a retardált időbeli helyén, $\mathbf{n}$ az ez irányba mutató egységvektor, $\boldsymbol{\beta}$ a sebesség c-ed része.

- Olyan VR-ben, melyben a részecske sebessége sokkal kisebb a fény sebességénél, (1.2) egyenlet az alábbira egyszerűsödik:

$$\mathbf{E}=\frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)}{R}\right]_{\mathrm{ret}} \qquad (1.3)$$

- Az egységnyi térszögtartományba kisugárzott teljesítmény a Poynting-vektor $\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\frac{c}{4\pi}\left|\mathbf{E}\right|^2\cdot\mathbf{n}$ kifejezésével, s egy levezethető azonosságot jelölve:

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c}\left|\mathbf{n}\times\left(\boldsymbol{\beta}\mathbf{n}\times\dot{\ }\right)\right|^2\mathbf{A}=\left|\ \ (t)\right|^2, \qquad (1.4)$$

melyben $\mathbf{A}(t)$ az A^α négyes Liénard-Wiechert-potenciál hármas része, azaz $\alpha=1,2,3$

- A teljesítmény definíciójából és (1.4) egyenletből adódóan, a Fourier-transzformációs átalakításból adódik, hogy

$$\frac{dW}{d\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{A}(\omega)\right|^2 d\omega\ , \qquad (1.5)$$

melyben $\mathbf{A}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(t)e^{i\omega t}dt$. A Fourier-transzformációk elemi ismereti szerint

ekkor, a

$$\frac{dW}{d\Omega}=\int_0^{\infty}\frac{d^2I(\omega,\mathbf{n})}{d\omega d\Omega}d\omega \tag{1.6}$$

egyenlet definiálta mennyiségre, amennyiben $\mathbf{A}(\omega)$ valós:

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\left|\mathbf{A}(\omega)\right|^2+\left|\mathbf{A}(-\omega)\right|^2=2\left|\mathbf{A}(\omega)\right|^2 \tag{1.7}$$

- Kijelölve a Fourier-transzformációt:

$$\mathbf{A}(\omega)=\left(\frac{e^2}{8\pi^2c}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\left[\frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3}\right]_{\mathrm{ret}}dt \tag{1.8}$$

- A szögletes zárójel ret jelentési integrálási változó transzformációval az exponensre hárítva, és élve a $R(t')=x-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t')$ közelítéssel, melyben x a megfigyelési pont és az origó távolsága, a kifejezésre adódik:

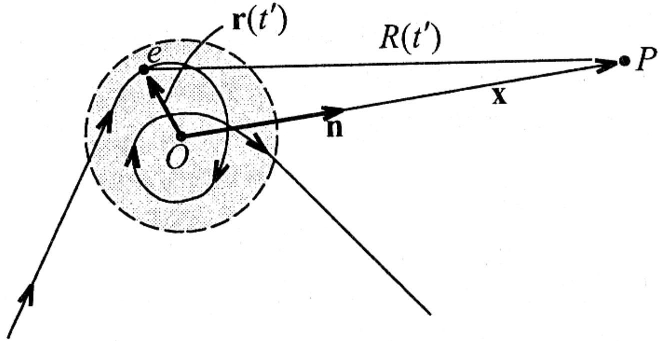
$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi^2c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)}\left[\frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3}\right]dt\right|^2 \tag{1.9}$$

- tetszőleges $\mathbf{r}(t)$ pálya mentén végighaladó töltés egy O középpontú vonatkoztatási rendszerben a tőle $\mathbf{x}$-re levő P pontban kapott intenzitás eloszlást a teljes azimut szögre kiintegrálva, a korábbi, (1.9)-es kifejezésből egy azonosság segítségével:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta}(t))}{1-\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}(t)}\right)\cdot e^{i\omega[t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c]}dt\right|^2, \tag{1.10}$$

ahol $\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$, vagyis a sebességvektor c-ed része, e az elektron töltése, $d\Omega$ az egyes elektron-szórási folyamatok során az elektron kezdeti irányához képest vett elemi térszög.

- az $\omega \to 0$, vagyis a lágy röntgen fotonok vizsgálata során a számolás lényegesen egyszerűbb, az integrandus egy teljes differenciál



- Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ polarizációjú sugárzás ebből adódóan:

$$\left.\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega}\right|_{\omega=0} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\beta}'}{1-\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}'} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}}\right)\right|^2, \tag{1.11}$$

melyben $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t)\big|_{t=-\infty}$, $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}(t)\big|_{t=\infty}$. Az összefüggés igaz klasszikusan, kvantumosan, relativisztikusan.

- Nemrelativisztikusan $\boldsymbol{\beta}(t) \ll 1$, így a számlálót 1-nek véve:

$$\left.\frac{d^2 I_{NR}}{d\omega d\Omega}\right|_{\omega=0} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \Delta\boldsymbol{\beta}\right|^2 \tag{1.12}$$

$\Delta\boldsymbol{\beta}$ -ban négyzetes a kifejezés! A teljes térszögre vett integrálás, és a polarizációkra való összegzés eredménye:

$$\left.\frac{dI_{NR}}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{2e^2}{3\pi c}\left|\Delta\boldsymbol{\beta}\right|^2 \tag{1.13}$$

- Relativisztikusan, $\Delta\boldsymbol{\beta}$ -ben legalacsonyabb rendig (1.12) helyett közelítőleg:

$$\left.\frac{d^2 I_{\text{rel}}}{d\omega d\Omega}\right|_{\omega=0} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \frac{\Delta\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}\times\left(\boldsymbol{\beta}\times\Delta\boldsymbol{\beta}\right)}{\left(1-\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}\right)^2}\right|^2 \qquad (1.14)$$

A intenzitás eloszlás relativisztikus értéke $\Delta\boldsymbol{\beta}$ -ben legalacsonyabb rendben:

$$\left.\frac{dI}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c}\gamma^2\left|\Delta\boldsymbol{\beta}\right|^2 \qquad (1.15)$$

- vezessük be a $Q = \left|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\right|$ jelölést, ahol $\mathbf{p}\boldsymbol{\beta} = \gamma m C$, így közös alakra hozható Q -val a relativisztikus és nemrealtivisztikus formula:

$$\left.\frac{dI}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{2}{3\pi}\frac{z^2 e^2}{m^2 c^3}Q^2 \qquad (1.16)$$

- Ez a formula tehát mikor érvényes?
    - ha a sebességvektor megváltozása nem túl nagy:

$$\left|\Delta\boldsymbol{\beta}\right| < 2/\gamma \quad \text{vagyis} \quad Q < 2mc \qquad (1.17)$$

Fékezési sugárzás Coulomb-ütközésekbenEquation Section (Next)

- A szórási hatáskeresztmetszet ismert a Rutherford szórásból:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\left(2\sin\left(\vartheta/2\right)\right)^4}, \tag{2.1}$$

melyben $p = mv$ a bejövő részecske impulzusa, v a sebessége, m a tömege, Z a szórócentrum (atommag), z a szóródó részecske töltése, ϑ az elektron szóródásának szöge. $d\Omega$ itt a részecske szóródásának elemi térszöge. Továbbiakban $m = m_e$, illetve $z = 1$. Ismert továbbá az átadott impulzus nagysága, ennek négyzete:

$$Q^2 = 4p^2 \sin^2\left(\vartheta/2\right) = 2p^2\left(1 - \cos\left(\vartheta\right)\right), \tag{2.2}$$

így $d\Omega = d\phi \cdot d\cos\left(\vartheta\right) = -Q \cdot d\phi \cdot dQ / p^2$ felhasználásával, (2.1) formulával ekvivalens:

$$\frac{d\sigma}{dQ} = 8\pi\left(\frac{Ze^2}{\beta c}\right)^2 \frac{1}{Q^3} \tag{2.3}$$

A korábbi, (0.1) szándékaink szerint meghatározandó $\frac{d^2\chi}{d\omega d\Omega}$ kifejezést új paraméterek függvényében fejezhetjük ki, egyúttal deriválási változócserét is végezve:

$$\frac{d^2\chi}{d\omega dQ} = \frac{dI(\omega,Q)}{d\omega} \cdot \frac{d\sigma}{dQ}(Q), \tag{2.4}$$

melyben $dI(\omega,Q)/d\omega$ a Q impulzusátadással járó ütközési folyamat során az egységnyi frekvenciaintervallumban kisugárzott energia.

- (2.4) jobboldalának mindkét tagja ismert: (2.3) illetve (1.16), így behelyettesítve, az $\omega \to 0$ határesetet vizsgálva, valamint az eloszlás Q szerinti integrálja:

$$\frac{d^2\chi}{d\omega dQ} = \frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{1}{Q} \tag{2.5}$$

$$\int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}} \frac{d^2\chi}{d\omega dQ} dQ = \frac{d\chi}{d\omega} = \frac{16}{3}\frac{e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \ln\left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right) \tag{2.6}$$

- A számolás korlátai:
    - túl kicsi Q értékre, vagyis túl kicsi átadott impulzusra az összefüggés azért nem érvényes, mert ahhoz az elektronnak a magtól olyan távol kell elhaladnia, mely során az elektronok árnyékoló hatása már számít
    - túl nagy Q értékre pedig a számolás során feltételezett (1.17) nem helytálló

Klasszikus fékezési sugárzás

- A differenciális sugárzási hatáskeresztmetszet számolásához Q értékét meg kell adni. Megmutatható, hogy ehhez a szükséges feltétel:

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1$$

- ez teljesül $\beta \ll 1$ esetén
- $Q_{\max}$-ot (2.2) egyenlet korlátozza, azaz $Q^2 = 4p^2 \sin^2\left(\vartheta / 2\right)$-ből adódóan

$$Q_{\max} = 2p = 2mv \tag{2.7}$$

- $Q_{\min}$ értékének meghatározásához az kell, hogy a kisugárzott foton periódusideje és az ütközési idő azonos ideig tartson. A paraméter értékére a dimenzióanalízissel kapható eredmény kétszeresét kapjuk a számolással:

$$Q_{\min} \approx \frac{2Ze^2\omega}{v^2}$$

- A differenciális sugárzási hatáskeresztmetszet (2.5) képletébe behelyettesítve, és integrálva $Q_{\min}$ és $Q_{\max}$ között:

$$\frac{d\chi_{kl}}{d\omega} \approx \frac{16}{3}\frac{Z^2 e^2}{c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \ln\left(\frac{mv^3}{Ze^2\omega}\right), \tag{2.8}$$

- a logaritmus argumentuma 1-et meg kell, hogy haladja:

$$\hbar\omega_{\max} = \frac{1}{\frac{Ze^2}{\hbar v}} mv^2 \tag{2.9}$$

- Vagyis láthatjuk, hogy ez a közelítés, a klasszikus képben milyen felső korlátot szab a sugárzásra. Az impulzusváltozást az elektron és a mag kölcsönhatása okozta, azaz a foton impulzusát elhanyagoltuk. Láthatjuk, hogy a számolás során kapott (2.9) egyenlet ezzel konzisztens.

Fékezési sugárzás a foton impulzusát figyelembe véve

- Vegyük figyelembe, hogy a fotonok energiát és impulzust is visznek el az elektrontól:

$$
\begin{aligned}
&E = E' + \hbar\omega, \\
&Q^2 = \left(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}\right)^2 \approx \left(\mathbf{p} - \mathbf{p}'\right)^2,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

  ahol a vesszős mennyiségek az ütközés utáni, a vesszőtlenek pedig az ütközés előtti paraméterek, $\hbar\omega$ pedig a folyamat során kibocsátott egyetlen foton energiája. Q^2 kifejezésében a közelítés nemrelativisztikus elektronokra ad nem nagy eltérést. Ezek alapján

$$
\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}} = \frac{p + p'}{p - p'} = \frac{\sqrt{2mE} + \sqrt{2m\left(E - \hbar\omega\right)}}{\sqrt{2mE} - \sqrt{2m\left(E - \hbar\omega\right)}} = \frac{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}\right)^2}{\hbar\omega}
$$

- Beírva ezt a (2.6) kifejezésébe, a $\dfrac{d\chi}{d\omega}$ -be:

$$\frac{d\chi_{kl}}{d\omega} \approx \frac{16}{3}\frac{Z^2 e^2}{c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \ln\left(\frac{\left(\sqrt{E}+\sqrt{E-\hbar\omega}\right)^2}{\hbar\omega}\right) \tag{2.11}$$

- Ezt az eredményt kapjuk a Born közelítésben is, a nemrelativisztikus limeszben!
- Ha N a térfogategységenkénti Ze töltésű magok száma, akkor annak egységnyi vastagságán való áthaladás során a sugárzási energiaveszteség:

$$\frac{dE}{dx} = N\int_0^{\omega_{\max}} \frac{d\chi(\omega)}{d\omega} d\omega = \frac{16}{3} NZ \left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right) \frac{e^4}{Mc^2} \int_0^1 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right) dx\,, \tag{2.12}$$

ahol áttértünk az $x = \hbar\omega / E$ integrálási változóra.

(Ultra)Relativisztikus fékezési sugárzás eredményének összevetése a nemrelativisztikussal

- $\left.\frac{dI}{d\omega}\right|_{\omega=0} = \frac{2}{3\pi}\frac{z^2e^2}{m^2c^3}Q^2$ érvényessége $Q < 2mc$ feltételezte. $Q > 2mc$ esetén viszont megmutatható, hogy $\left.\frac{dI}{d\omega}\right|_{\omega=0} \sim \ln\left(Q^2\right)$, Mivel $\frac{d\sigma}{dQ} \sim \frac{1}{Q^3}$, így $\frac{d\chi}{d\omega}$ kifejezésbe elegendő $\left.\frac{dI}{d\omega}\right|_{\omega=0}$ -nek a Q^2 függő alakját beírni, és ezt használhatjuk, $Q_{\max}$ értékére való becslés:

$$Q_{\max} = 2mc \tag{2.13}$$

- minimális Q értékre az előző esetben alkalmazott gondolatot alkalmazva, de elhanyagolásokat nem téve:

$$Q_{\min} = p - p' - k \tag{2.14}$$

- felhasználva a teljes relativisztikus energiára vonatkozó $E_{T,rel} = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2}$ összefüggést:

$$cp = \sqrt{E_{T,rel}^2 + \left(mc^2\right)^2} = E_{T,rel}\sqrt{1 + \frac{\left(mc^2\right)^2}{E_{T,rel}}} \approx E_{T,rel} + \frac{m^2c^4}{2E_{T,rel}}$$

- A közelítést alkalmazva

$$\frac{d\chi}{d\omega} = \frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{E_{T,rel}E_{T,rel}'}{mc^2\hbar\omega}\right) \qquad (2.15)$$

adódik.