Kétrészecske kölcsönhatás vákuumban

Két részecskénk van csak egyelőre, 2 bozon vagy fermion.

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Ekkor a Schrödinger egyenlet $H\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

Bevezethetünk új térkoordinátákat: $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

És új impulzusokat: $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}$ és $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}$.

Ekkor ψ térfüggése felírható szorzatalakban: $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \cdot e^{i\mathbf{kR}}$

A Hamilton operátor az új koordinátákkal: $H = \frac{P^2}{4M} + \frac{p^2}{m} + v(\mathbf{r})$, ???M és m definíciója, illetve m és a korábbi m közötti különbség??? így a Schrödinger-egyenlet: $\left[\frac{-\hbar^2 \Delta_{\mathbf{r}}}{m} + \frac{\hbar^2 K^2}{4M} + v(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$

Ekkor bevezetve a $k^2 = \frac{m}{\hbar^2}E - \frac{K^2}{4}$ és $V(\mathbf{r}) = \frac{m}{\hbar^2}v(\mathbf{r})$ mennyiségeket, a Schrödinger egyenlet a következő alakban írható: $(\Delta_{\mathbf{r}} + k^2)\psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$

Definiáljuk a rendszer Green-függvényét: $(\Delta_{\mathbf{r}} + k^2)G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Ennek megoldásai:

- Kölcsönhatás-mentes esetben, azaz ha $V = 0$: $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}}$
- kölcsönható (általános) esetben: $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} - \int G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r$???az 1. tag hogy jön be itt, és mi G-ben a +, mert az ok, hogy a ψ-ben az exponensben az előjel???

$$G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{q^2 - k^2 - i\eta} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Ha $r \gg r_0$, $G_{\mathbf{k}}^{(+)}$ sorbafejthető, mert $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r|\mathbf{e}_{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{rr}'/r + O(r_0/r)$: $G_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-\frac{ik\mathbf{rr}'}{r}}$.

(2. ábra) Ekkor a megoldás: $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{kr}} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \cdot V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r'$.

Definiálhatjuk a szórási amplitúdót: $f^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') := -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}')d^3r'$

Megjegyzés:

- ott, ahol $V(\mathbf{r})$ divergál, ott $\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})$ eltűnik, viszont $f^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ véges marad
- perturbatív kezelés nem lehetséges, mert véges rendben nem lehet levinni ψ-t 0-ba.

Fourier-transzformáljuk:

$$V(\mathbf{q})=\int e^{-i\mathbf{qr}}\cdot V(\mathbf{r})d^3r\,,\ \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})=\int e^{-i\mathbf{qr}}\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})=(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k})-\frac{1}{q^2-k^2-i\eta}\int V(\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}-\mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,.$$

$$\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{k}'):=-4\pi f^{(+)}(\mathbf{k},\mathbf{k}')=\int V(\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3}=\int V(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})\frac{d^3P}{(2\pi)^3}\,.$$

$$\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{k}')=V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\int\frac{V(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{p})}{k^2-p^2+i\eta}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\qquad (2)$$

Megjegyzés:

- $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ -t megkapjuk nem csak a tömeghéjon
- erős taszító potenciálban megoldva minden rend divergens
- Born-közelítés: $\widetilde{f^{(+)}}(\mathbf{k},\mathbf{k}')=V(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$
- Parciális hullámok módszere: $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')=-\frac{1}{4\pi}\tilde{f}(\mathbf{k},\mathbf{k}')=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{k}\sin(\delta_l)P_l(\cos\vartheta)$, $\delta_0=-ka$ (s-hullámú szórási hossz), $\delta_l=|ka|^{2l+1}$

  Ga $|k\cdot a|\ll 1$, akkor elég csak az s-hullámot figyelembe venni: $\Rightarrow f(\mathbf{k},\mathbf{k}')=-a(1+O(k\cdot a))$, így $\tilde{f}=4\pi a\Rightarrow V(k)=4\pi a\Rightarrow v(k)=\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$.
- Merev gömbű, r_0 sugarú potenciálra a szórási hossz, ha csak az s hullámú szórási hossz vesszük figyelembe, épp $2\cdot r_0$

Kétrészecske szórás közegben

(3. ábra)

$$\Gamma(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)=v(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)-\int\frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m v(\mathbf{q})G_{(0)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q})G_{(0)}(\mathbf{k}_2+\mathbf{q})\Gamma(\mathbf{k}_1-\mathbf{q},\mathbf{k}_2+\mathbf{q},\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,.$$

Állítás: Γ nem függ az átadott frekvenciától. Ezért a Matsubara-frekvenciákra való összegzés elvégezhető.

$$\frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m G_{(0)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q})G_{(0)}(\mathbf{k}_2+\mathbf{q})=\frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m\frac{1}{i\omega_1-i\nu_m-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}-\mu\right)}\cdot\frac{1}{i\omega_2+i\omega_m-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\mu\right)}=$$

$$=\frac{1}{\beta\hbar^2}\sum_m\frac{1}{i\omega_1+i\omega_2-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}+e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}}-2\mu\right)}\left[\frac{1}{i\omega_1-i\nu_m-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}-\mu\right)}+\frac{1}{i\omega_2+i\nu_m-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}}-\mu\right)}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\hbar}\frac{1+n^{(0)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q})+n^{(0)}(\mathbf{k}_2+\mathbf{q})}{i\omega_{n_1}+i\omega_{n_2}-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}+e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}}-2\mu\right)},\ \text{ahol }\ n^{(0)}(\mathbf{k})=\frac{1}{e^{\beta(e_{\mathbf{k}}-\mu)}-1}\,.$$

Tömegközépponti és relatív koordinátákkal:

$\mathbf{K}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4$

$\mathbf{k}=\dfrac{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}{2}$

$\mathbf{k}'=\dfrac{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_4}{2}$.

Ekkor $i\omega_N=i\omega_{n_1}+i\omega_{n_2}=i\omega_{n_3}+i\omega_{n_4}$,

$z-2\left(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\mu\right):=\hbar\left(i\omega_{n_1}+i\omega_{n_2}-\hbar^{-1}\left(e_{\mathbf{k}_1-\mathbf{q}}+e_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}}-2\mu\right)\right)=i\hbar\omega_N-\dfrac{\hbar^2K^2}{4m}$, illetve

$\Gamma\left(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4\right)\to\Gamma\left(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z\right)$. Ekkor az jön ki, hogy

$\Gamma\left(\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{K},z\right)=v\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)+\int v\left(\mathbf{q}\right)\dfrac{F_{(+)}\left(\mathbf{K},\mathbf{k}-\mathbf{q}\right)}{z-2\left(e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}-\mu\right)}\Gamma\left(\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}',\mathbf{K},z\right)\dfrac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}$, melyben

$F_{(+)}\left(\mathbf{K},\mathbf{k}-\mathbf{q}\right)=1+n^{(0)}\left(\mathbf{k}_1-\mathbf{q}\right)+n^{(0)}\left(\mathbf{k}_2+\mathbf{q}\right)=1+n^{(0)}\left(\mathbf{K}/2+\mathbf{k}-\mathbf{q}\right)+n^{(0)}\left(\mathbf{K}/2-\mathbf{k}+\mathbf{q}\right)$