

Scars

A scarring jelenségét E. Heller fedezte fel 1984-ben véletlenül. Intuíciónk arra enged következtetni, hogy a szemiklasszikus határesetben a kvantum mechanikai megtalálási valószínűség fokozatosan alakul át a klasszikus megtalálási valószínűségnek. Ezt a viselkedést megtalálhatjuk a harmonikus oszcillátorra. Matematikai tétel vannak erre a folytonos egymásba való alakulásra a szemiklasszikus határesetben. A scars úgy tűnhet, ellent mond ennek a képnek: vannak olyan hullámfüggvények, melyek amplitúdója nagy, s mégis nagyon közel van a nem stabil periodikus pályákhoz, s másutt meg nem vagy csak alig van amplitúdójuk. A 8.5(a) ÁBRA mutat példaként néhány hullámfüggvényt a stadion-biliárd kísérletben. Egy klasszikus részecske ezzel szemben az instabil periodikus pályán elindítva, nem sokkal azután letérne a periodikus pályáról, és bejárná a teljes fázisteret.

Később a jelenség létezése nyilvánvalóvá vált, hogy ez a jelenség általános minden kaotikus rendszerre. A 8.5(b), (c) és (d) ábrája három másik kísérletet ábrázol, szintén mutatva a jelenséget. Rengeteg féle ilyen, scarred hullámfüggvényt találtak azóta. Ez nincs ellentmondásban azzal, hogy ezeknek az aránya a többihez képest el kell tűnjön a határesetben.

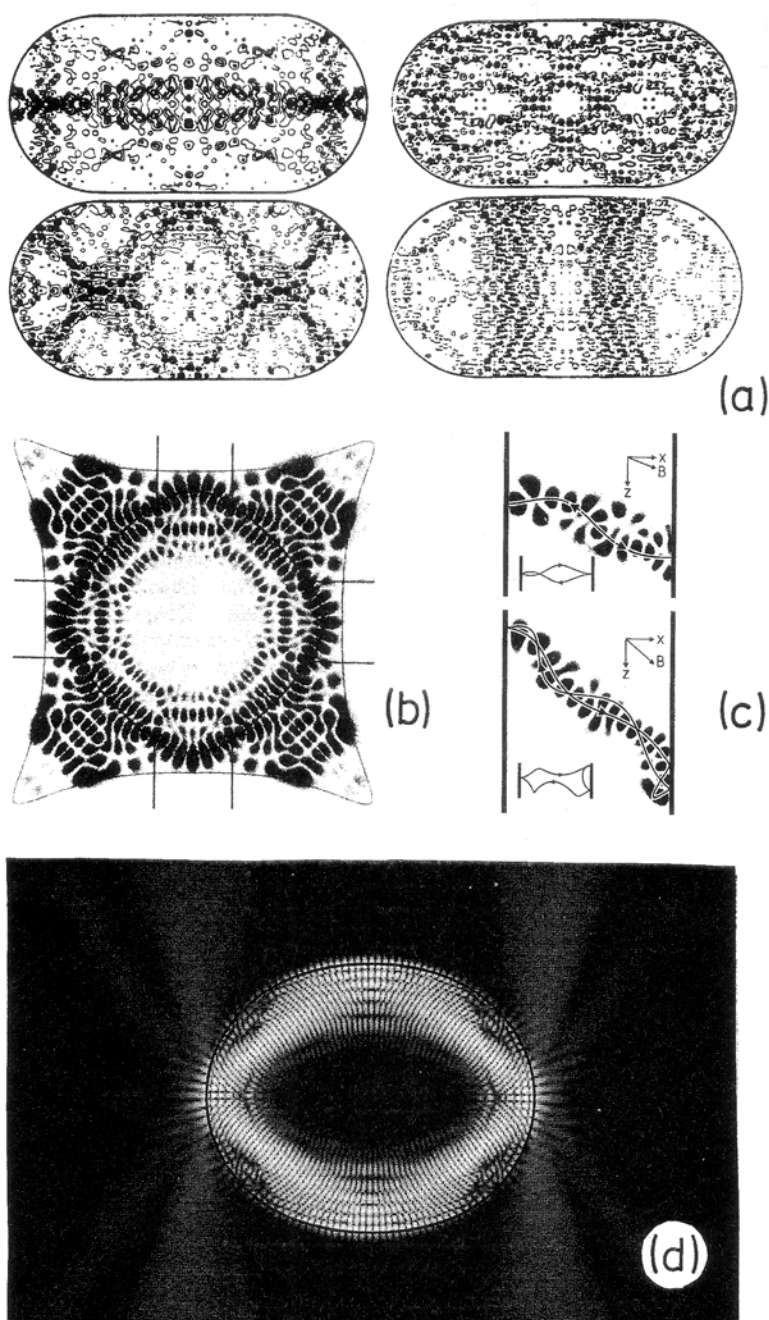


Figure 8.5. (a) Scarred wave functions of a stadium billiard [Hel84], (b) a hydrogen atom in a strong magnetic field [Win89], and (c) an electron confined between two barriers with an applied magnetic field [Fro95a] (Copyright 1984–89 by the American Physical Society). (d) Scarred light distribution in a distorted glass fibre cavity [Nöc97] (Copyright 1997 by MacMillan Magazines).

Elsőként Bogomolny tett kísérletet a jelenség leírására sikeresen a periodikus pályák elméletének használatával. A különböző scarred állapotfüggvény-sűrűségre írt fel egy formulát:

$$\langle |\psi(q)|^2 \rangle = \int w(E) \sum_n |\psi(q_n)|^2 \delta(E - E_n) dE \quad (1.1)$$

ahol $w(E)$ egy bizonyos ablakfüggvény. Ez a megközelítés csak az periodikus pályák energiára kiírt eloszlásról ad információt azok hullámfüggvényére. Az egyes scarred hullámfüggvényekről

nem tesz állítást. Számolások során azt kapjuk, hogy a klasszikus fizikai megtalálási valószínűségen túl megjelenik egy másik, oszcilláló tag is. Végeredményben azt kapjuk, hogy $|\psi(q)|^2$ átlaga kifejezhető a nem oszcilláló tagok összegeként, melyek a klasszikus eredményt adják, és további, olyan oszcilláló tagokból, melyek periodikus pályákat írnak le.

RMT a kvantum transzportra

Az Eriscson fluktuációk

Az autokorrelációs függvény spektrumának elgondolása, mint ahogy azt használható a káosz spektrumának meghatározásához, általánosítható a szórási mátrix elemeire is. Az energia autokorrelációs függvényét a

$$C_{ij}(E) = \left\langle S_{ij}^* \left(\bar{E} - \frac{E}{2} \right) S_{ij} \left(\bar{E} + \frac{E}{2} \right) \right\rangle - |S_{ij}(\bar{E})|^2 \quad (1.2)$$

ahol S_{ij} a szórasmátrix eleme. A szórási mátrix elemeit vehetnénk Gauss eloszlásból, vagy számolhatjuk az ún. Breit-Wigner formulából is, ez utóbbi egyszerűbben használható. Az autokorrelációs függvény Fourier transzformációjából a visszaszóródásra és transzmisszióra következtethetünk.

A 6.10-es ÁBRA szaggatott vonala jelöli a modell által jósolt eredményt.

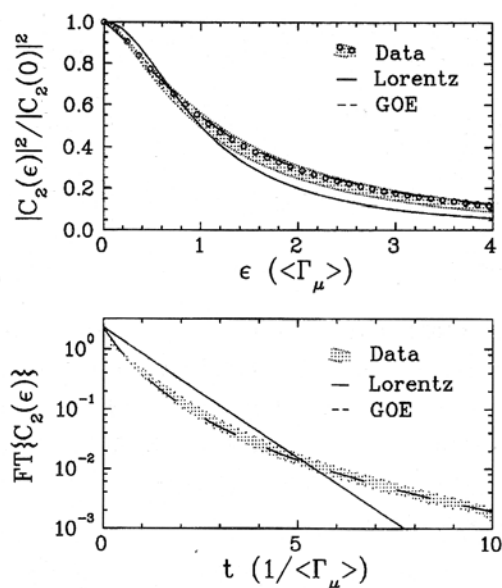


Figure 6.10. Spectral autocorrelation function $C_{ii}(E)$ (top) and its Fourier transform $\tilde{C}_{ii}(t)$ (bottom) obtained from a reflection measurement in a superconducting quarter stadium billiard. The experimental results, indicated by the shaded bands, closely follow the prediction from Eq. (6.3.10). The Lorentzian and the exponential behaviour expected for $C_{ii}(E)$ and $\tilde{C}_{ii}(t)$, respectively, for the single resonance case, do not accord with the data [Alt95] (Copyright 1995 by the American Physical Society).

A 6.11-es ÁBRA az $|S_{12}|^2$ átmeneti valószínűséget mutatják két szórási csatorna között egy periodikus rétegekből álló korongban.

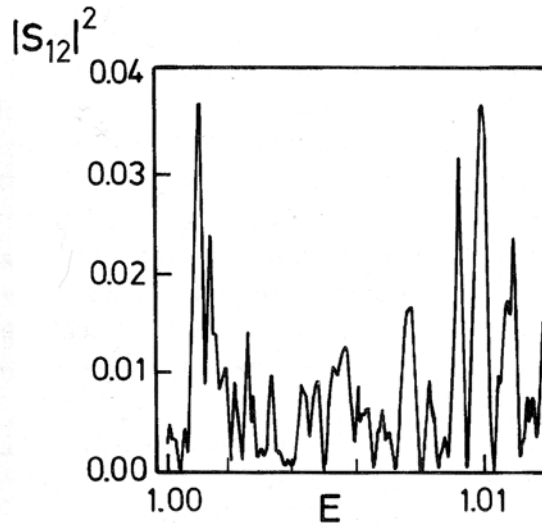


Figure 6.11. Transmission probability $|S_{12}|^2$ through a periodic array of disks [Blü89] (with kind permission from Elsevier Science).

Fluktuációk a vezetőképességben

Megmutatható, hogy a mikrohullámú biliárd kísérletek szóráselmélettel jól tanulmányozhatók. Az elektronok mezoskopikus transzportjára is alkalmazható a szóráselmélet. Alacsony hőmérsékleten ugyan nehézségekbe ütközünk, de szobahőmérsékleten az ellenállást legfőképp az elektronok rugalmatlan szóródása okozza a fononokon, ezáltal adva energiát az atomrácsnak, ohmikus ellenállásként jelentkező. Alacsony hőmérsékleten a fononrezgések befagynak, s ekkor az elektronok rugalmas szóródása jelentkezik. Jó kérdés, hogy miért lenne ekkor egyáltalán ellenállása a rendszernek.

A Landauer szemléletmód szerint a vezetőképességet a

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n,m=1}^N |t_{nm}|^2 \quad (1.3)$$

adja, ahol N a csatornák száma a bejövő és kimenő csatornában, t_{nm} pedig az átmeneti valószínűség az n -dik bejövő és m -dik kimenő csatorna között. Egy szorzótényezőtől eltekintve ez adja a vezetőképességet. A 6.13-as ÁBRA egy számolást mutat a Hall-ellenállásra az ábra szerinti elrendezésre vonatkozóan.

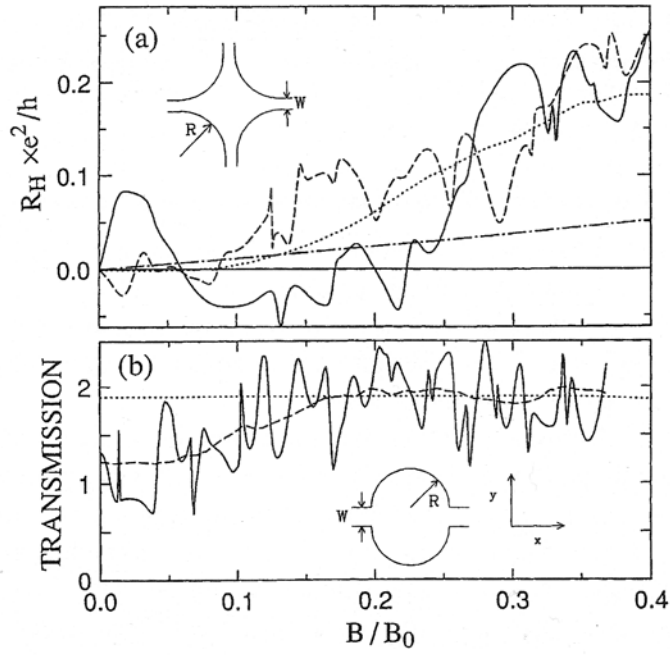


Figure 6.13. (a) Hall resistance of a four-disk junction with $R/W = 4$. The solid and the broken lines represent two quantum mechanical calculations with slightly different energies. For the dotted and the dashed-dotted lines see the original work. (b) Transmission through an open stadium (solid line) with $R/W = 2$ [Jal90] (Copyright 1990 by the American Physical Society).

Mivel a vezetőképesség arányos a teljes $T = \sum |t_{nm}|^2$ átmeneti valószínűséggel, a fluktuáció csatornaszám-függése jellegzetes. A 6.14-es ÁBRA a transzmisszió intenzitáseloszlását mutatja egy kaotikus biliárdnál.

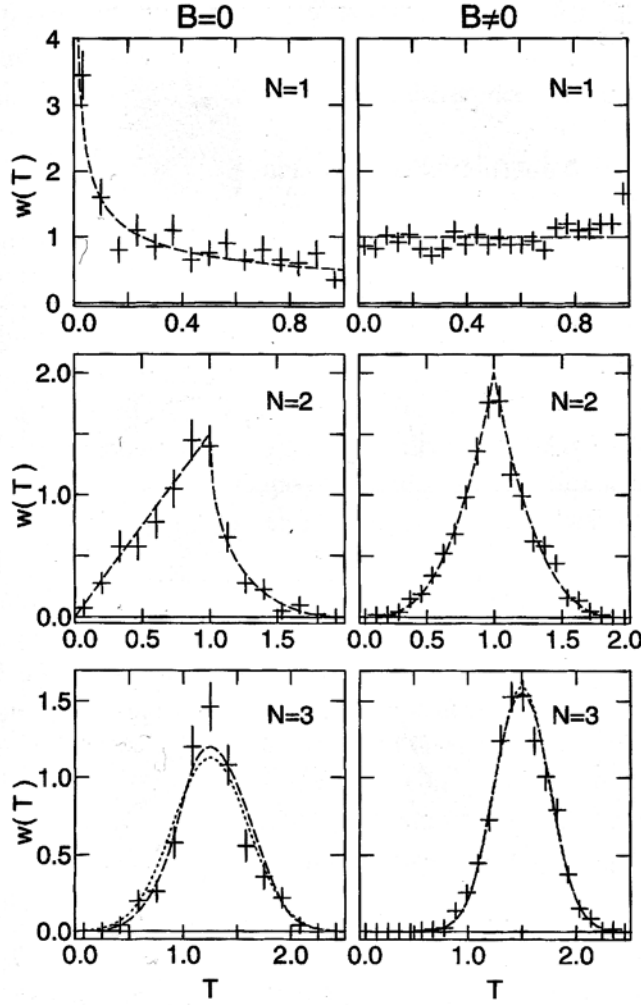


Figure 6.14. Distribution of transmission intensities through a chaotic billiard with two attached leads for different channel numbers N , both without (left column) and with (right column) application of a magnetic field B . The numerical results (crosses) are in good agreement with predictions from circular ensembles [Bar94] (Copyright 1994 by the American Physical Society).

Univerzális fluktuációk a vezetőképességben

A gyenge lokalizáció egy kvantumos korrekció, ami e^2/h nagyságrendjébe esik a sokaság-átlagolt vezetőképességet számolva. Az egyik sokaságról a másikra a vezetőképesség fluktuációja szintén ebbe a nagyságrendbe esik. Ezeket nevezik univerzális vezetőképességi fluktuációknak. A vezetőképesség fluktuációját mind a Hamilton-operátorok, mint a szózars-mátrixok sokaságából számolhatjuk, s tették is meg. Ha a két vezetőben a módusok száma elég nagy, a vezetőképesség szórása, $\text{var} G = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2$ -ra adódik, hogy

$$\text{var} G / G_0 = \frac{2(N_1 N_2)^2}{\beta(N_1 + N_2)^4} \quad (1.4)$$

ami két egyforma vezető egyszerű esetét tekintve

$$\text{var} G / G_0 = \frac{1}{8} \beta^{-1} \quad (1.5)$$

A 8. ÁBRA mérési eredményeket mutatnak erre vonatkozóan.

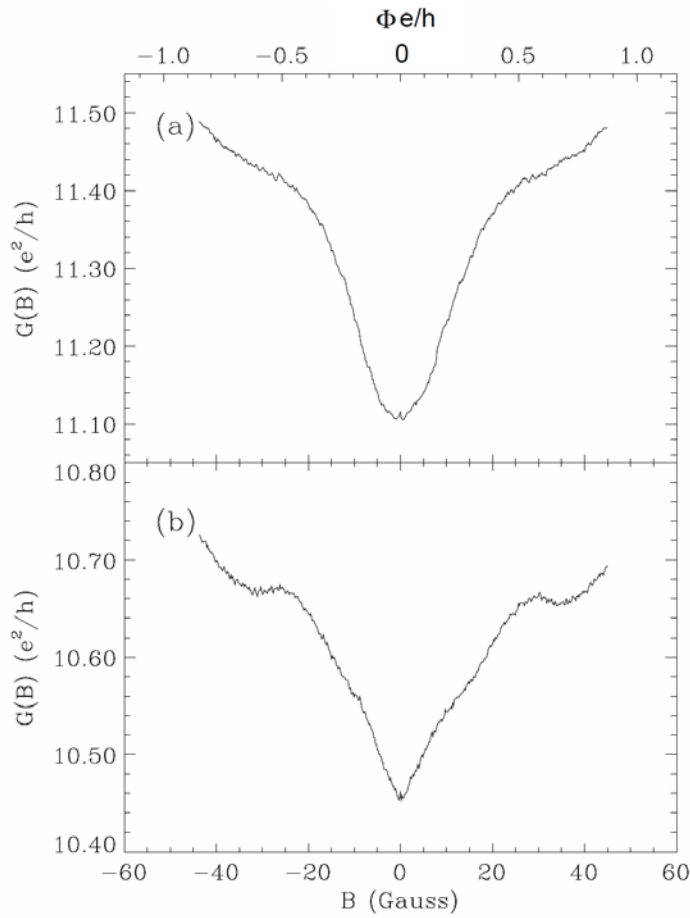


FIG. 8. Magnetoconductance at 50 mK, averaged over (a) 48 stadium-shaped cavities and (b) 48 circular-shaped cavities. Insets show the geometry of the cavities, which are fabricated in the two-dimensional electron gas of a GaAs/AlGaAs heterostructure. The weak-localization peak has a Lorentzian shape for the stadium and a triangular shape (linearly decreasing) for the circle, as expected theoretically for, respectively, chaotic and integrable billiards. After Chang, Baranger, Pfeiffer, and West (1994).

Szórás és transzfer mátrixok

A Landauer által kidolgozott modell teljesen jó eredményeket ad alacsony frekvenciáknál, hőmérsékleten, feszültségen azzal az elhanyagolással, hogy nem veszi figyelembe az elektron-elektron kölcsönhatást.

Az elektronok hullámfüggvénye a vezetőben az E_F energiánál longitudinális és transzverzális részre bontható fel:

$$\psi_n^\pm = \Phi_n(y, z) \cdot \exp(\pm i k_n x) \quad (1.6)$$

melyben $n = 1, 2, \dots, N$ a propagáló módusokon megy végig. Az n -edik módusnak a hullámszáma valós és pozitív, valamint Φ_n transzverzális hullámfüggvény. A hullámok ütközése a rendezetlen tartományban (szaggatott vonallal jelölve a 3. ÁBRÁN) ezen a bázison van kifejtve az alábbi együtthatókból képzett vektorral:

$$c^{in} = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_N^+, b_1^-, b_2^-, \dots, b_N^-) \quad (1.7)$$

Az első N együttható a vezető bal oldalához, a másik része a jobb oldalához tartozik. Hasonlóképp, visszaszórt és az áthaladó hullám kifejtési együtthatói

$$c^{out} = (a_1^-, a_2^-, \dots, a_N^-, b_1^+, b_2^+, \dots, b_N^+) \quad (1.8)$$

A két mennyiség között teremnt kapcsolatot az S mátrix, ami egy 2×2 dimenziós mátrix:

$$c^{out} = S c^{in} \quad (1.9)$$

és szerkezeti alakja

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ahol $N \times N$ -es az r, r' reflexiós és t, t' transzmissziós mátrixok. Az árammegmaradás miatt S -nek unitérnek kell lennie. Ebből következően $tt^+, t't'^+, 1 - rr^+, 1 - r'r'^+$ sajátértékei ugyanazok. Mindegyik sajátérték egy 0 és 1 közötti szám. Ekkor S az ún. polar decomposition módszerével

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

ahol U, V, U', V' négy $N \times N$ -es unitér mátrix és τ egy $N \times N$ -es diagonális mátrix.

Ha az időtükrözési szimmetria sérül ($\beta = 2$), S mátrixra csak az unitaritási szimmetria marad. Ha van időtükrözési szimmetria és spin-rotációs szimmetria ($\beta = 1$), S unitér és szimmetrikus. Ha spin-rotációs szimmetria nincs ($\beta = 4$), S unitér és duálisa önmaga (lásd: kvaternió mátrixok elmélete).

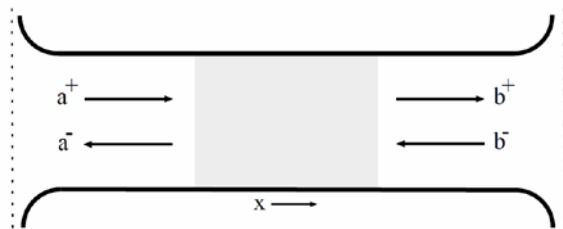


FIG. 3. Disordered region (dotted) connected by ideal leads to two electron reservoirs (to the left and right of the dashed lines). The scattering matrix S relates the amplitudes a^+, b^- of incoming waves to the amplitudes a^-, b^+ of outgoing waves, while the transfer matrix M relates the amplitudes a^+, a^- at the left to the amplitudes b^+, b^- at the right.

Készíthetünk táblázatot az egyes esetekről. Ω itt az S mátrix jobb oldali sajátvektoraiból képzett mátrix.

β	S	Ω
1	unitér szimmetrikus	ortogonális
2	unitér	unitér
4	unitér és önduális	szimplektikus

A szórási mátrix a kimenő és bejövő állapotok között teremt kapcsolatot. A transzfer mátrix a bal oldali vezetőben lévő állapotok és a jobb oldali vezetőben lévő állapotok között teremt kapcsolatot. A vezető bal oldalán lévő hullámot az alábbi, vektorba rendezett kifejtési együtthatókkal adhatjuk meg:

$$e^{left} = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_N^+, a_1^-, a_2^-, \dots, a_N^-) \quad (1.12)$$

Az első N együttható a bejövő, a többi a kimenő hullámok együtthatója. Hasonlóan

$$e^{right} = (b_1^+, b_2^+, \dots, b_N^+, b_1^-, b_2^-, \dots, b_N^-) \quad (1.13)$$

A transzfer mátrix egy $2N \times 2N$ -es mátrix, mely ezek között teremt kapcsolatot:

$$e^{right} = M e^{left} \quad (1.14)$$

A szórási és transzfer mátrixok a rendezetlen tartomány leírására ekvivalnsek. Egy megállapodási tulajdonsági a transzfer mátrixnak a multiplikatív kompozíciója. A teljes rendszer transzfer mátrixa kisebb, egy sorozat rendezetlen tartományon át vezető transzfermátrix szorzata.

A transzfer mátrixra éppgy alkalmazható a polar decompositon, de ezúttal

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V^{'+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & V^+ \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

alakban. A szórási mátrix unitaritása, mely a töltésmegmaradásból adódik, a transzfer mátrixra az ún. pszeudo-unitaritást adja, azaz

$$\Sigma M^{-1} \Sigma = M^+ \quad (1.16)$$

ahol Σ diagonális mátrix, és az első N eleme 1, a többi -1 .

(1.10)-hoz hasonló alakot most is adhatunk, de ezúttal kicsit összetettebb formában:

$$\left[2 + M M^+ + (M M^+)^{-1} \right]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} t t^+ & 0 \\ 0 & t'^+ t' \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Gyenge lokalizáció

A káosz-rezonátoron át történő transzport jelenségéhez az RMT-t a szórási mátrixok és a Hamilton operátorok sokaságának vizsgálatával is tanulmányozhatjuk.

Tekintsünk egy káosz-rezonátort két kicsi egyforma méretű lyukkal. Ha egy elektron juttatunk be az egyik lyukun keresztül, bármelyiken kiléphet: ha ugyanazon lép ki, reflexió történt, ha a másikon, akkor transzmisszió (7. ÁBRA).

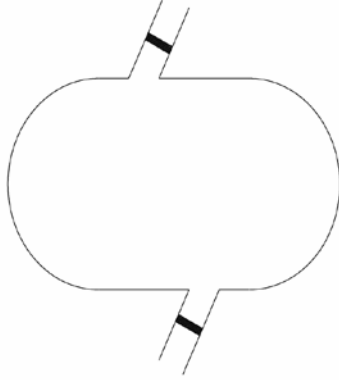


FIG. 7. Chaotic cavity (the stadium billiard) coupled to two reservoirs via narrow leads containing tunnel barriers. The distribution of the scattering matrix is given by the Poisson kernel (2.12), which reduces to the circular ensemble in the absence of tunnel barriers in the leads.

Klasszikusan, a kaotikus mozgás az rezonátorban eredményezi azt, hogy a reflexiós és transzmissziós valószínűség egyenlő. Kvantum mechanika szerint a transzmisszió sokkal kevésbé valószínű, mint a reflexió. Ez a jelenség ismeretes, mint gyenge lokalizáció. Szemiklasszikus formalizmusban a reflexiós együttható javítására bevezetjük az erősítő interferenciát azon párokra, melyek trajektóriája időben fordított. Ha mágneses teret alkalmazunk, akkor ezek a párok elvesznek, oda vezetve, hogy meg fognak egyezni a transzmissziós és reflexiós együtthatók. A gyenge-lokalizáció erősségére a Hamilton operátorok sokaságának vizsgálatával jutottak.

A $\beta = 2$ esetben

$$\langle |S_{nm}|^2 \rangle_{CUE} = \frac{1}{N_1 + N_2} \quad (1.18)$$

ahol N_1 és N_2 a az egyik illetve másik érintkezési pontban menő vezetékben lévő módusok száma. Ekkor a transzmissziós és reflexiós valószínűség megegyezik szimmetrikus elrendezés esetén. $\beta = 1$ esetén, ha van időtükrözési szimmetria,

$$\langle |S_{nm}|^2 \rangle_{COE} = \frac{1 + \delta_{nm}}{N_1 + N_2 + 1} \quad (1.19)$$

Ekkor a az n módusból az n -be való visszaszóródás valószínűsége kétszer akkora, mint egy másikba. $\beta = 4$ esetén

$$\langle |S_{nm}|^2 \rangle_{CSE} = \frac{2 - \delta_{nm}}{2N_1 + 2N_2 - 1} \quad (1.20)$$

Ekkor az azonos módusok közötti szórás valószínűsége kisebb, mint a különbözők között. A Landauer-elméletből pedig a transzmisszió a szórási mátrixból számolható:

$$G \sim \sum_{n \in \{N_1\}, m \in \{N_2\}} |s_{nm}|^2 \quad (1.21)$$

ahol az összegzést az N_1 illetve N_2 vezetőkben lévő módusokra kell elvégezni.