Analízis III

Előadásjegyzet fizikusoknak matematikusoktól

Izsák Ferenc   Tarcsay Zsigmond   Tüzes Dániel

Tartalomjegyzék

Előadó e-mail címe: simonl a ludens.elte.hu-nál

Ez a jegyzet **nem** szakirodalom s nem garantált, hogy az órai anyagot teljesen lefedi, az előadásokra bejárni ajánlott.

Ha a jegyzetben helyesírási, tartalmi vagy formai hibát találsz, kérlek jelezd az előadónak!

1. Differenciálegyenletek

Mi a differenciálegyenlet?

Pl

1. $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$
2. $\ddot{x}(t) = F(t)/m$
3. $\partial_t u = \Delta u$
4. $x(t) = x(t-1)$

Ezeket lehet rendszerezni: ODE (ordenary differential equation, azaz közönséges differenciál-egyenlet, 1-es és 2-es), PDE (partial differential equation, 3-as), FDE (functional differential equation, 4-es).

Most az ODE-val foglalkozunk. Mi a közönséges differenciál-egyenlet?

Definíció:
Legyen $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, n-edrendű közönséges differenciálegyenlet: $\forall t$-re $0 = F\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), ..., x^{(n)}(t)\right)$.

Megjegyzés:
Egy ilyen n-edrendű egyenlet átírató elsőrendű rendszerré. Pl: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ egyenletet átírjuk: $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = x(t)$. Ekkor y-ra az alábbi elsőrendű, kétismeretlenes rendszer áll fenn:

$$y_1(t) = y_2(t)$$
$$y_2(t) = -\omega^2 \cdot y_1(t)\,.$$

Általánosan n-ed rendűnél: $y_1 = x$, $y_2 = x$, $\ldots$, $y_n = x^{(n-1)}$. Ekkor $(y_1, ..., y_n)$-re elsőrendű rendszert kapunk.

Definíció:
Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x(t) = f(t, x(t))$ elsőrendű (explicit) közönséges differenciálegyenlet-rendszer. Ismeretlen az $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvény. Koordinátánként kiírva:

$x_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$
$x_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$
$\vdots$
$x_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$

Mivel foglalkozik a közönséges differenciálelmélet?

1. Mi a megoldás? Azaz számítsuk ki a megoldást. (Ezt már tanultuk.) Vannak:
   a. képlettel megoldhatók
   b. képlettel nem megoldhatók (de numerikusan közelíthetők)
2. Megoldás létezésének, egyértelműségének keresése, függése a paraméterektől
3. Milyen a megoldás? Pl periodikus-e, korlátos-e... A megoldást szeretnénk jellemezni annak kiszámítása nélkül. Pl $x = x$ és $x(0) > 0$. Ekkor egyből látjuk, hogy x szigmon nő, akkor is, amikor még nem tudtuk, hogy konkrétan mi a megoldás.

1.1. Közönséges differenciálegyenlet megoldásának létezése és egyértelműsége

Példák:

- $x(t) = x(t)$, ennek egy jó megoldása $x(t) = c \cdot e^t$, $c \in \mathbb{R}$, azaz végtelen sok megoldás van. Legyen kezdeti feltétel: $x(0) = a \in \mathbb{R}$ adott. Ekkor már csak 1 megoldás van az ilyen fajtákból: $c \cdot e^0 = a \Rightarrow c = a$, vagyis a megoldás $x(t) = a \cdot e^t$. De más fajtából lehetne még megoldás? Nem, ugyanis:

$$\begin{aligned} &x(t) = x(t) \\ &x(t) \cdot e^{-t} - x(t) e^{-t} = 0 \\ &\left(x(t) \cdot e^{-t}\right)' = 0 \Rightarrow x(t) \cdot e^{-t} = c. \end{aligned}$$

  Az implikáció csak akkor igaz, ha $D(x)$ (azaz a differenciáloperátor) egy intervallumon van értelmezve. Tehát $\exists k \in \mathbb{R} : x(t) e^{-t} = k \Leftrightarrow x(t) = k \cdot e^t$. A megoldás egyértelmű, mert bármilyen kezdőfeltételt adok meg, lesz pontosan 1 megoldás.
- $x(t) = \sqrt{|x(t)|}$. Mi a megoldás $x > 0$ -ra?

$$\frac{x(t)}{\sqrt{x(t)}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x(t)} = t + c \Rightarrow x(t) = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$$

  Hamis gyökök a parabolák "bal oldalai". $x < 0$ esetén a megoldás "lefelé fordított parabolák bal oldalai", hamis megoldás a parabolák "jobb oldalai". $x = 0$ esetén mindkét fajta megoldás jó. Így adott kezdeti feltétel mellett végtelen sok megoldás létezik. Ha $x(t_0) = a$ a kezdeti feltétel, akkor $a > 0$ esetén a megoldás csak lokálisan egyértelmű, de globálisan nem.

1.1.1. Mitől lesz a megoldás egyértelmű?

Tétel:
Ha $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ közönséges diffegyenletben az f függvény az x változóban teljesíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor a megoldás egyértelmű. Vagyis ha minden pont egy alkalmas környezetéhez $\exists L \in \mathbb{R}^+ : |f(t,p) - f(t,q)| \leq L \cdot |p - q|$, akkor a megoldás egyértelmű.

Példa:
$g(x) = 5x$, vagy $g(x) = x^2$ teljesítik a lokális Lipschitz feltételt, de a $g(x) = \sqrt{|x|}$ már nem. Ez utóbbi 0-ban nem lok. Lip, csak 1-ben pl.

Észrevétel: ha a derivált létezik, és korlátos minden pont környezetében, akkor lok. Lip.

Gronwall lemma (egyszerű eset):
(Az előző tétel bizonyítása ezen a lemmán alapszik.) Legyen $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffható, melyhez $\exists k \in \mathbb{R}^+ : \dot{u}(t) \leq k \cdot u(t)\ \forall t \in [a,b]$. Ekkor $u(t) \leq u(a) \cdot e^{k(t-a)}\ \forall t \in [a,b]$.

Bizonyítás (lemmáé):
Beszorzunk e^{-kt}-vel:

$\dot{u}(t) \cdot e^{-kt} - k \cdot u(t) \cdot e^{-kt} \leq 0$

$\left(u(t)\, e^{-kt}\right)' \leq 0$

$u(t)\, e^{-kt} \leq u(a)\, e^{-ka}$

$u(t) \leq u(a)\, e^{k(t-a)}$

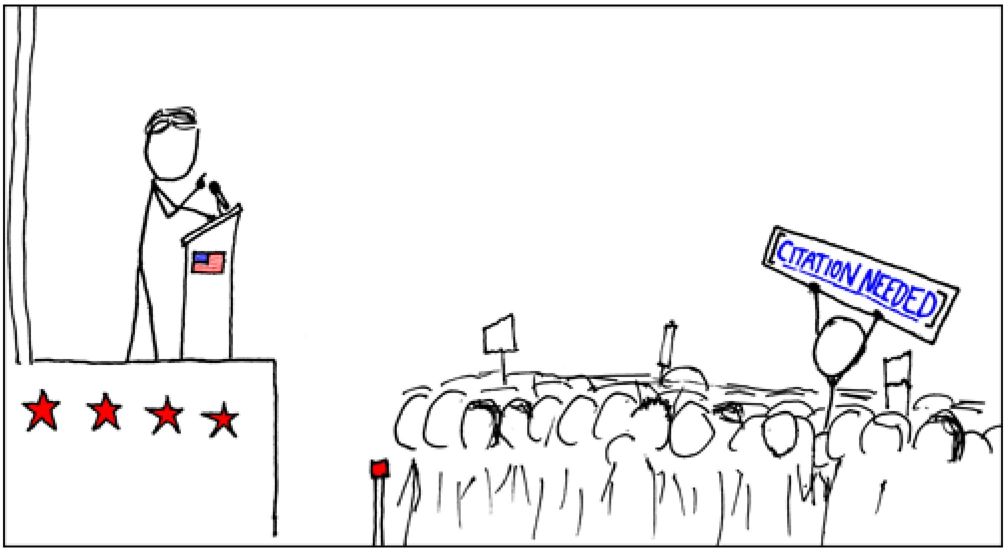
Tétel bizonyítása:
legyen x és y két megoldás, amelyekhez $\exists \tau \in \mathbb{R} : x(\tau) = y(\tau)$. Belátjuk, hogy $x(t) = y(t)\ \forall t$. Bizonyítás $n = 1$ esetre: $u(t) = (x(t) - y(t))^2$, $\dot{u}(t) = 2(x(t) - y(t)) \cdot (\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) = 2(x(t) - y(t))(f(t, x(t)) - f(t, y(t)))$. $\dot{u}(t) \leq |\dot{u}(t)| = 2|x(t) - y(t)| \cdot |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq 2|x(t) - y(t)| \cdot L \cdot |x(t) - y(t)| = 2L \cdot u(t)$ Gronwall alkalmazása: $u(t) \leq u(a) \cdot e^{2L(t-a)}$, $u(\tau) = 0 \Rightarrow u(t) = (x(t) - y(t))^2 \leq 0 \Rightarrow x(t) = y(t)\ \forall t \geq \tau$. Hasonlóan igaz a $t \leq \tau$-ra is.

Text

2. A Hilbert tér geometriája, Fourier sorfejtés

Kiegésztés: fogalmaink használatához be kell vezetni a komplex Euklideszi tér fogalmát. Komplex vektortér: a definíció analóg a valós vektortér definíciójával, kivéve: komplex számmal való szorzás is értelmezve van, a műveleti tulajdonságok ugyanazok.

Komplex Euklideszi tér: komplex vektortér (az alaptest a komplex számok halmaza, $\mathbb{C}$), plusz 2 elem skalárszorzata is értelmezve van, értéke komplex szám. A műveleti tulajdonságok analógok, eltérés: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (a felülhúzás a komplex konjugálás), ekkor amúgy $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ és $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$. (Vegyük észre, hogy a komplex vektortereken értelmezett skaláris szorzás kétféleképp definiálható. Itt - és a matematikában



általában - a skaláris szorzás az első változójában lineáris és a másodikban konjugált lineáris. Fizikában fordítva, azaz az első változójában lineáris, a másodikban konjugált lineáris:$\langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$, illetve $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$.)

Példák (és megjegyzések) komplex euklideszi térre:

- $\mathbb{C}^n$ esetén $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_j \in \mathbb{C}$, akkor $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$, $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$
- $L^2(M)$ tér (komplex esetben), ha $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz: legyen $f : M \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + i \cdot f_2$. Legyen továbbá f_1, f_2 valós függvények. f mérhetősége azt jelenti, hogy f_1, f_2 mérhető $\Rightarrow \int_M f := \int_M f_1 + i \int_M f_2$. $f : M \to \mathbb{C}$ integrálható $\Leftrightarrow |f|$ integrálható, $|f| : M \to \mathbb{R}$ mérhető. Ekkor jelölje $L^2(M)$ az olyan $f : M \to \mathbb{C}$ mérhető függvények összességét, amelyekre $|f|^2$ integrálható. Könnyen belátható, hogy $L^2(M)$ komplex vektortér. Vezessük be ebben a következő skalárszorzatot: $\langle f, g\rangle := \int_M f\overline{g}$. Így egy Euklideszi teret kapunk. Sőt, a tér teljes, vagyis $L^2(M)$ Hilbert tér.
- Komplex l^2 tér, $x := (x_1, x_2, ..., x_j, ...)$, $x_j \in \mathbb{C}$, l^2 komplex euklideszi tér, ebben a skaláris szorzás $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$. Bizonyítható, hogy teljes is.

2.1. Ortogonális kiegészítő altér

Definíció:
Legyen X Hilbert tér (vagy akár Banach is). Egy $Y \subset X$ halmazt altérnek nevezzük, ha az összeadás és számmal való szorzás nem vezet ki belőle és zárt részhalmaz (a konvergencia nem vezet ki).

Definíció:
Legyen X Hilbert tér, s két eleme x és y. Ezek merőlegesek, vagyis $x \perp y$, ha $\langle x, y \rangle = 0$.

Definíció:
Legyen X Hilbert tér, $Y \subset X$ altér. Azt mondjuk, hogy az $x \in X$ elem Y ortogonális, ha $\forall y \in Y$-ra $\langle x, y \rangle = 0$.

Definíció:
Legyen X Hilbert tér, $Y \subset X$ altér. Az Y altér ortogonális kiegészítő altérét, $Y^{\perp}$-t így értelmezzük: $Y^{\perp} := \{x \in X : x \perp Y\}$.

Állítás:
$Y^{\perp} \subset X$ is altér.

Bizonyítás:
Az összeadás és számmal való szorzás nem vezet ki belőle, ugyanis tfh $y_1, y_2 \in Y^{\perp}$, $x \in Y$ tetszőleges. Ekkor $\langle \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, x \rangle = \lambda_1 \langle y_1, x \rangle + \lambda_2 \langle y_2, x \rangle = 0$. $Y^{\perp}$ zárt halmaz, ugyanis legyen $y_j \in Y^{\perp}$, $\lim(y_j) = y \in X$. Tudjuk, hogy $\langle y_j, x \rangle = 0 \, \forall x \in Y$. $y_j \to y \Rightarrow \langle y_j, x \rangle \to \langle y, x \rangle$ minden rögzített x-re, ugyanis a skalárszorzat a tényezőktől folytonosan függ, tehát $\langle y, x \rangle = 0$, $\forall x \in X$-re, vagyis $y \in Y^{\perp}$.

Megjegyzés:
Komplex Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség, azaz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ bizonyítása:
$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle$
$0 \leq \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \left[\langle x, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle \right]$
A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot válasszuk meg úgy, hogy $\overline{\lambda}$ együtthatója 0 legyen. Ez teljesül, ha $\lambda = -\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$ ($y = 0$ triviális eset, így feltesszük, hogy $y \neq 0$), behelyettesítve:
$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \langle y, x \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} \Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

Riesz-féle felbontási tétel:
Legyen X Hilbert tér, Y egy altere, $Y^{\perp}$ az Y-nak ortogonális kiegészítő altere! Ekkor $\forall x \in X$ elemre $x = y + z$, ahol $y \in Y$, $z \in Y^{\perp}$ és a felbontás egyértelmű.

Lemma (paralelogramma egyenlőség):
Legyen X egy Hilbert tér. Ekkor $\forall a, b \in X$ esetén $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.

Bizonyítás (lemmáé):
$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = \langle a + b, a + b \rangle + \langle a - b, a - b \rangle = = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \|a\|^2 + \|b\|^2 - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$.

Bizonyítás (tételé):
Legyen $d := \inf \{\|x - y\| : y \in Y\} \geq 0$ (d véges). Belátjuk, hogy

$$\exists y_0 \in Y : \|x - y_0\| = d.$$

Az infinimum definíciója miatt

$$\exists y_j \in Y : d^2 \leq \|x - y_j\|^2 < d^2 + 1/j \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tekintsük az (y_j) sorozatot!
Állítás: (y_j) Cauchy sorozat. Ehhez felhasználjuk a paralelogramma egyenlőséget $a := x - y_j$, $b := x - y_k$ választással.

$$\|(x - y_j) + (x - y_k)\|^2 + \|(x - y_j) + (x - y_k)\|^2 = 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2$$

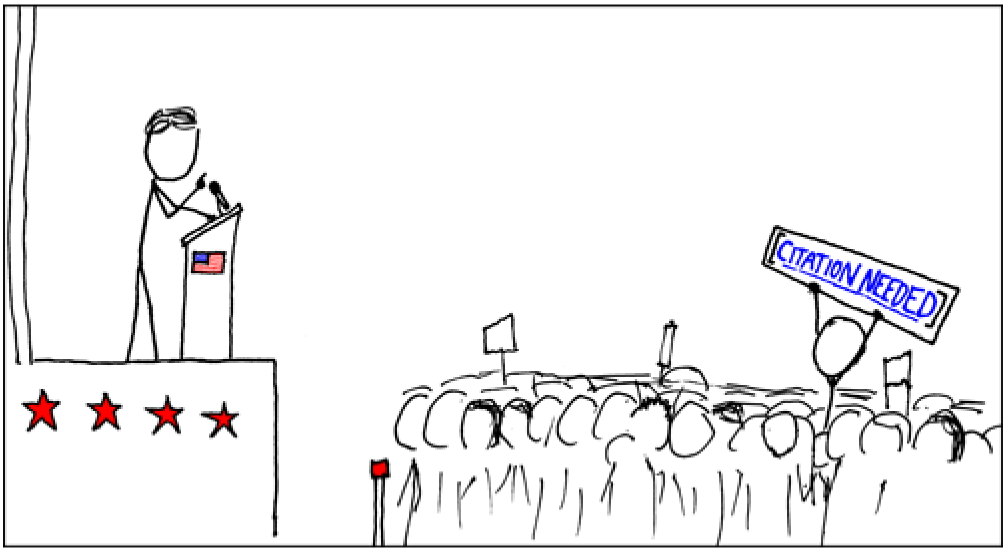
$$\begin{aligned}\|y_k - y_j\|^2 =& 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - \underbrace{\|2x - (y_j + y_k)\|^2}_{4\left\|x - \frac{y_j + y_k}{2}\right\|^2} \\ \leqslant& 2\left(d^2 + 1/j\right) + 2\left(d^2 + 1/k\right) - 4d^2 \\ =& \frac{2}{j} + \frac{2}{k} < \varepsilon, \text{ ha } j, k \geqslant j_0.\end{aligned}$$

Mivel X tér teljes $\Rightarrow \exists y_0 \in X : \lim\limits_{j \to \infty} \|y_j - y_0\| = 0$. Mivel Y altér zár halmaz $\Rightarrow y_0 = \lim(y_j) \in Y$.
Másrészt (mint ahogy már írtuk) $d = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$, $d^2 \leq \|x - y_j\|^2 < d^2 + \frac{1}{j}$, továbbá

$$\lim(y_j) = y_0 \;\Rightarrow\; \lim\|x - y_j\| = \|x - y_0\| \;\Rightarrow\; \|x - y_0\|^2 = d^2.$$

Legyen $z_0 = x - y_0$. Be kellene még látni, hogy $z_0 \perp Y$, vagyis $x = y_0 + z_0$, ahol $y_0 \in Y, z_0 \in Y^\perp$.
Legyen $y \in Y$! Mivel d a fenti infinimum, ezért tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $d^2 = \|x - y_0\|^2 \leq \|x - y_0 - \lambda y\|^2 = = \|z_0 - \lambda y\|^2 = \langle z_0 - \lambda y, z_0 - \lambda y\rangle = \|z_0\|^2 - \lambda\langle y, z_0\rangle - \overline{\lambda}\left[\langle z_0, y\rangle - \lambda\|y\|^2\right]$. Most λ -t megint úgy választjuk, hogy $\overline{\lambda}$ együtthatója 0 legyen, vagyis legyen $\lambda = \frac{\langle z_0, y\rangle}{\|y\|^2}$ (megint feltehetjük, hogy $y \neq 0$). Tehát $d^2 \leq d^2 - \lambda\langle y, z_0\rangle = d^2 - \frac{\langle z_0, y\rangle}{\|y\|^2}\langle y, z_0\rangle = d^2 - \frac{|\langle z_0, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$, $0 \leq -\frac{|\langle z_0, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \Rightarrow |\langle z_0, y\rangle|^2 = 0 \Rightarrow \langle z_0, y\rangle = 0$. Tehát $z_0 \in Y^\perp$, vagyis valóban lehetséges ilyen felbontás.
Indirekt bizonyítjuk, hogy a felbontás egyértelmű. Tfh két alakban is felírható x : $x = y_0 + z_0 = y_1 + z_1$, ahol $y_1, y_2 \in Y$ és $z_1, z_2 \in Y^\perp$. $Y \ni (y_0 - y_1) := a = (z_1 - z_0) \in Y^\perp$.
$\langle y_0 - y_1, z_1 - z_0\rangle = \|a\|^2 = 0 \Rightarrow y_0 - y_1 = z_0 - z_1 = 0 \Rightarrow y_0 = y_1, z_0 = z_1$

Text



2.1.1. Ortogonális rendszerek

Definíció:
Egy X vektortérben az M halmaz elemei lineárisan függetlenek, ha bármely véges sok lineárisan független.

Definíció:
Legyen X normált tér! X dimenziója az olyan lineárisan független elemek maximális száma, amelyek véges lineárkombinációi mindenütt sűrűn vannak X-ben (egy $A \subset X$ sűrű X-ben, ha $\overline{A} = X$, ahol a halmaz felülvonása a lezárást jelenti, ez amúgy ekvivalens azzal, hogy $\forall x \in X$-nek minden környezetében van A-beli elem). Másképp fogalmazva: jelöljük $\mathcal{L}(x_1, x_2, ...)$-val azt a lineáris teret, amely az $x_1, x_2, ...$ elemek véges lineárkombinációjaként előáll. (Az előálló lineáris tér egyértelmű, de egy teret több ilyen vektorrendszer is előállíthat.) Ekkor X tér dimenziója az olyan lineárisan független elemek maximális száma, melyekre $\overline{\mathcal{L}(x_1, x_2, ...)} = X$. A D dimenziószám egyértelmű, $0 \leq D \leq \infty$.

Definíció:
Egy X normált teret szeparábilisnak nevezünk, ha benne megadható megszámlálhatóan sok (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok) lineárisan független elem, amelyek véges lineárkombinációi sűrűn vannak X-ben.

Definíció:
Legyen X Hilbert-tér! Azt mondjuk, hogy az $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ elemek ortogonális rendszert alkotnak, ha $\forall x_j, x_k \neq 0$ esetén $\langle x_j, x_k \rangle = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \text{nem0} & j = k \end{cases}$. A rendszer ortonormált, ha $\forall x \in X$ esetén $\|x\| = 1$.

Kérdés: ha az X Hilbert-térben $y_1, y_2, ..., y_k, ...$ lineárisan függetlenek, akkor lehet-e ezekből ortonormált rendszert konstruálni, és ha igen, hogyan? Válasz: lehet, az ún.

Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással.

Tétel:
Az $y_1, y_2, ..., y_k, ...$ lineárisan független elemekhez az $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ elemek megkonstruálhatók úgy, hogy az utóbbiak ortonormált rendszert alkossanak, mégpedig úgy, hogy $\forall k$-ra $\mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_k) = \mathcal{L}(y_1, y_2, ..., y_k)$.

Bizonyítás:

1. Legyen $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$, ekkor $\|x_1\| = 1$. $y_1 \neq 0$, mert $y_1, y_2, ...$ lineárisan függetlenek.
2. $z_2 := y_2 - \lambda_1 x_1$, ahol $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Ezt hogy válasszuk meg, hogy $z_2 \perp x_1$ teljesüljön? $0 = \langle z_2, x_1 \rangle = \langle y_2 - \lambda_1 x_1, x_1 \rangle = \langle y_2, x_1 \rangle - \lambda_1 \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle}_{=1} \Rightarrow \lambda_1 = \langle y_2, x_1 \rangle$. Ekkor $z_2 \neq 0$, mert y_1, y_2 lineárisan függetlenek. $x_2 := \frac{z_2}{\|z_2\|}$, ekkor $\|x_2\| = 1$ és $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.
3. $z_3 := y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2$, ahol $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Ezeket hogy válasszuk meg, hogy $z_3 \perp x_1, x_2$ teljesüljenek?
$$0 = \langle y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2, x_1 \rangle = \langle y_3, x_1 \rangle - \mu_1 - 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \langle y_3, x_1 \rangle$$
$$0 = \langle y_3 - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2, x_2 \rangle = \langle y_3, x_2 \rangle - 0 - \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 = \langle y_3, x_2 \rangle$$
$z_3 \neq 0$ y_1, y_2, y_3 lineáris függetlensége miatt, ezért $x_3 := \frac{z_3}{\|z_3\|}$ jó választás, így $\|x_3\| = 1$ és $x_3 \perp x_1, x_2$.

Nem nehéz belátni, hogy az eljárás folytatható $\forall k$-ra és $\mathcal{L}(y_1, y_2, ..., y_k) = \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_k)$.

2.1.2. Ortogonális sorok, Fourier-sorok

A továbbiakban legyen X szeparábilis Hilbert-tér, véges vagy végtelen dimenziós! Tudjuk, hogy ekkor X-ben megadható $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ ortonormált rendszer. Egy $\sum\limits_k c_k x_k$ alakú sort (összeget) – ahol $c_k \in \mathbb{K}$ – ortogonális sornak nevezünk.

Tételek:

1. Egy $\sum\limits_k c_k x_k$ sor konvergens $\Leftrightarrow \sum\limits_k |c_k|^2 < \infty$
2. Ha $x = \sum\limits_k c_k x_k$, akkor $c_l = \langle x, x_l \rangle$
3. $\|x\|^2 = \sum\limits_k |c_k|^2$ (végtelen dimenziós Pitagorasz tétel).

Bizonyítás:

1. Véges dimenzióban triviális, így tegyük fel, hogy végtelen sok elemű az ortonormált rendszer! Legyen $s_j := \sum\limits_{k=1}^{j} c_k x_k$! A sor konvergenciája azt jelenti,

hogy (s_j) sorozat konvergens $\Leftrightarrow$ (s_j) Cauchy sorozat.

$$\begin{aligned}\|s_j - s_l\|^2 &= \langle s_j - s_l, s_j - s_l\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=l+1}^{j} c_k x_k, \sum_{k=l+1}^{j} c_k x_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=l+1}^{j} c_k \bar{c}_k \underbrace{\langle x_k, x_k\rangle}_{=1} = \sum_{k=l+1}^{j} |c_k|^2\end{aligned}$$

Ez a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sor egy „szelete„. Tehát (s_j) X-beli sorozatra teljesül a Cauchy-kritérium $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sorra teljesül a Cauchy-kritérium $\Leftrightarrow$ (s_j) X-beli sorozat konvergens $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ sor konvergens.

2. Tfh $x = \sum\limits_k c_k x_k$, x_l-lel szorozzuk skalárisan (jobbról) az egyenlőséget (ezt megtehetjük, hisz nem nehéz belátni, hogy egy konvergens sor tagonként szorozható skalárisan), $\langle x, x_l\rangle = \left\langle \sum\limits_k c_k x_k, x_l \right\rangle = \sum\limits_k c_k \langle x_k, x_l\rangle = c_l$
3. $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \left\langle \sum\limits_k c_k x_k, x \right\rangle = \sum\limits_k c_k \underbrace{\langle x_k, x\rangle}_{\bar{c}_k} = \sum\limits_k |c_k|^2$

Definíció:
Legyen $x_1, x_2, ..., x_k$ ortonormált rendszer, $x \in X$ adott elem! Értelmezzük az x elem k-adik Fourier-együtthatóját: $c_k := \langle x, x_k\rangle$. Az így adódó $\sum\limits_k c_k x_k$ „sort" az x elem Fourier-sorának nevezzük.

Kérdés: egy x elem Fourier-sora konvergens-e? Ha igen, mi az összege?

Tétel:
Egy $x \in X$ elem Fourier sora mindig konvergens, ugyanis teljesül az ún. Bessel-egyenlőtlenség: $\sum\limits_k |c_k|^2 \leq \|x\|^2$. A sor összege pontosan akkor x, ha teljesül az ún Parseval egyenlőség, azaz $\sum\limits_k |c_k|^2 = \|x\|^2$.

Bizonyítás:

$s_j := \sum\limits_{k=1}^{j} c_k x_k$, ekkor

$$\begin{aligned}
0 &\le \|x - s_j\|^2 = \langle x - s_j, x - s_j\rangle \\
&= \|x\|^2 - \langle s_j, x\rangle - \langle x, s_j\rangle + \|s_j\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \left\langle \sum_{k=1}^{j} c_k x_k, x \right\rangle - \left\langle x, \sum_{k=1}^{j} c_k x_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{j} c_k x_k, \sum_{k=1}^{j} c_k x_k \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{j} c_k \bar{c}_k - \sum_{k=1}^{j} \bar{c}_k c_k + \sum_{k=1}^{j} c_k \bar{c}_k \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{j} |c_k|^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{j} |c_k|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2,
\end{aligned}$$

másrészt a fentiek szerint $\|x - s_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{j} |c_k|^2$. Ebből láthatjuk, hogy $s_j \to x \Leftrightarrow \|x\|^2 - \sum\limits_{k} |c_k|^2 = 0$, vagyis a sor összege pontosan akkor x, ha $\|x\|^2 - \sum\limits_{k} |c_k|^2 = 0$.

Tétel:
Legyen $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ ortonormált rendszer. Ekkor egy $x \in X$ elem Fourier-sorának összege az x elemnek az $X_0 := \overline{\mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_k, ...)} \subset X$ alterén vett merőleges vetülete.

Bizonyítás:
Jelölje $x^* := \sum\limits_{k} c_k x_k$, ahol $c_k := \langle x, x_k\rangle$. Azt kellene belátni, hogy $x^* \in X_0$ és $(x - x^*) \perp X_0$. $x^* \in X_0$, ugyanis $\sum\limits_{k=1}^{j} c_k x_k \in \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_j)$, így $\sum\limits_{k} c_k x_k \in X_0$. $(x - x^*) \perp X_0$ ugyanis először legyen $y \in \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_l)$ tetszőleges! Belátjuk, hogy $\langle x - x^*, y\rangle = 0$. $y = \sum\limits_{j=1}^{l} d_j x_j$,

$$\begin{aligned}
\langle x - x^*, y\rangle &= \langle x, y\rangle - \langle x^*, y\rangle \\
&= \left\langle x, \sum_{j=1}^{l} d_j x_j \right\rangle - \left\langle \sum_{k} c_k x_k, \sum_{j=1}^{l} d_j x_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{l} \bar{d}_j \underbrace{\langle x, x_j\rangle}_{c_j} - \sum_{j=1}^{l} \bar{d}_j \underbrace{\left\langle \sum_{k} c_k x_k, x_j \right\rangle}_{c_j} = 0.
\end{aligned}$$

Most legyen $y \in X_0 = \overline{\mathcal{L}(x_1, x_2, ...)}$, szeretnénk, ha ekkor $\langle x - x^*, y\rangle = 0$ is igaz lenne. Ehhez vegyünk egy (y_ν), $\mathcal{L}(x_1, x_2, ...)$-beli konvergens sorozatot, melyre

$y_\nu \to y$. Ekkor $\langle x - x^*, y_\nu \rangle = 0$. Így, mivel $y_\nu \to y$, $\langle x - x^*, y \rangle = 0$, ugyanis

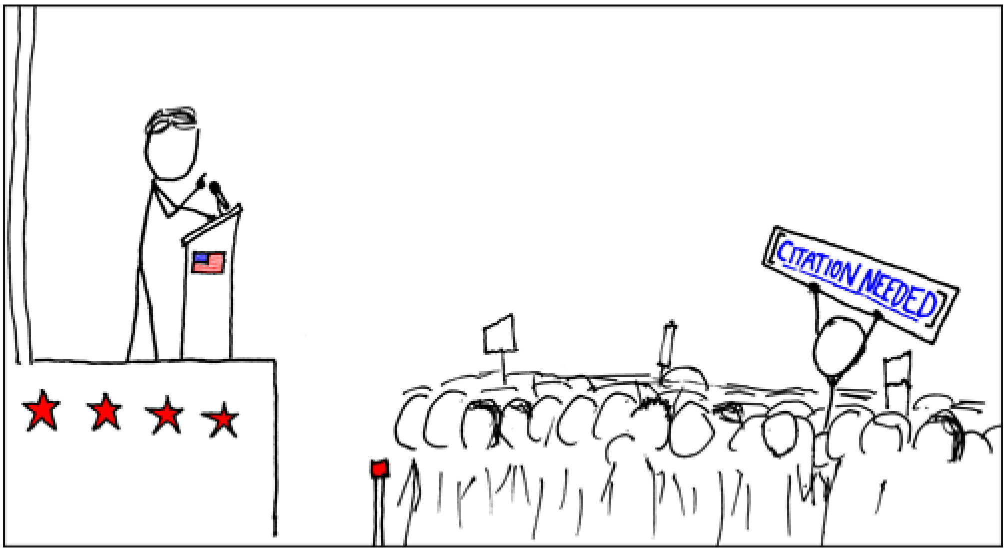
$$\begin{aligned} |\langle x - x^*, y \rangle| &= |\langle x - x^*, y \rangle - \langle x - x^*, y_\nu \rangle| \\ &= |\langle x - x^*, y - y_\nu \rangle| \\ &\leqslant \|x - x^*\| \cdot \underbrace{\|y - y_\nu\|}_{\to 0} \to 0. \end{aligned}$$

Definíció:
Az $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszert zártnak nevezzük, ha $\overline{\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots)} = X$.

Következmény: ha az $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszer zárt, akkor $\forall x \in X$ elem Fourier-sorának összege x.

Definíció:
Egy $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszert teljesnek nevezzük, ha $x \perp x_k \, \forall k \Rightarrow x = 0$.

Tétel (bizonyítás nélkül):
Egy $x_1, x_2, \ldots$ ortonormált rendszer teljes $\Leftrightarrow$ zárt.



Text

Példák zárt (teljes) ortonormált rendszerekre.
Észrevétel: ha egy $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ lineárisan független rendszer olyan, hogy $\overline{\mathcal{L}(y_1, y_2, \ldots)} = X$ (*ha pl.* X Hilbert-tér, akkor már a lineárisan független rendszer is zárt, ha kifeszíti a teljes teret, mert a Hilbert-tér zárt), akkor ebből a Schmidt ortogonalizálási eljárással zárt (teljes) ortonormált rendszert kapunk.

1. $X := L^2(a, b)$, ahol (a, b) véges intervallum.

Tétel:
Ebben az $t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \ldots, t \mapsto t^k, \ldots$ lineárisan független függvények zárt rendszert alkotnak.

Bizonyítás (vázlat):
Egyrészt a függvényrendszer lineárisan független:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j t^j = 0 \Leftrightarrow a_j = 0.$$

(Egy valós k -ad fokú polinomnak legfeljebb k db gyöke lehet $k \geq 1$.) Az, hogy a rendszer zárt, következik a Weierstrass approximációs tételéből. Eszerint tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez $\exists P_k$ polinom sorozat, amely egyenletesen tart f -hez. Legyen $g : (a, b) \to \mathbb{R}, g \in L^2(a, b)$. A Lebesgue integrál felépítéséből kiolvasható, hogy $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények sűrűn vannak $L^2(a, b)$ -n. A g folytonos függvényt Weierstrass approximációs tétele szerint tetszőleges előírt pontossággal meg lehet közelíteni polinomokkal, a szuprémum normában $\Rightarrow$ ezek közelítik g -t L^2 normában is.

2. Komplex trigonometrikus rendszer $X := L^2(0, 2\pi)$, $\phi_k(t) := e^{ikt}, t \in (0, 2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

   Tétel:
   A fenti függvények egy zárt ortogonális rendszert alkotnak (biz. nélkül).
   Belátjuk, hogy $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortogonális. $\int\limits_0^{2\pi} \phi_k(t)\overline{\phi_l(t)}dt = \int\limits_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}dt = \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} = \left[\frac{e^{i(k-l)t}}{i(k-l)}\right]_{t=0}^{2\pi} = 0$ ha $k \neq l$. $\psi_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi_k$ már ortonormált rendszer.

3. Valós trigonometrikus rendszerek.
   Legyen az X alaphalmaz a valós $L^2(0, 2\pi)$. $e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$, $\cos(kt) = \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$, $\sin(kt) = \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}$. Egyszerű számolással adódik, hogy $1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), ..., \cos(kt), \sin(kt), ...$ függvények páronként merőlegesek. Tehát ezek ortogonális rendszert alkotnak a valós $L^2(0, 2\pi)$ -ben. Abból, hogy a komplex trigonometrikus rendszer zárt $\Rightarrow$ a fenti rendszer valós ortogonális zárt rendszer. A fentiekből következik, hogy egy tetszőleges $f \in L^2(0, 2\pi)$ függvénynek akár a komplex, akár a valós trigonometrikus rendszer szerint Fourier sora előállítja a függvényt L^2 normában.
4. Az $1, \cos t, \cos(2t), ..., \cos(kt), ...$ függvényrendszer zárt és ortogonális a $L^2(0, \pi)$ -ben. A szinuszos ugyanígy.

2.2. Lineáris és korlátos operátorok

Állítás:
Legyen X , Y normált terek! Korábban bizonyítottuk, hogy $A : X \to Y$ lineráis operátor folytonos $\Leftrightarrow$ A korlátos.

Definíció:
Egy $A : X \to Y$ lineáris operátort korlátosnak nevezzük, ha $\exists c \geq 0 : \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X\ \forall x \in X$.

Tétel:
Legyen X normált tér, Y teljes normált tér (Banach tér), $A : M \to Y$ korlátos lineáris operátor, ahol $M \subset X$ lineáris altér, de nem kell zártnak lennie. Ekkor az A -nak egyértelműen létezik korlátos lineáris kiterjesztése az $\overline{M}$ -ra (M lezárására). Más szóval: $\exists! \widetilde{A} : \overline{M} \to Y$ korlátos lineáris operátor, amelyre $\widetilde{A}x = Ax \quad \forall x \in M$. Spec eset, mikor $\overline{M} = X$.

Bizonyítás (vázlatos):
Legyen $x \in \overline{M}$. Ehhez $\exists x_k \in M : \lim(x_k) = x$. Tekintsük az $(Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot Y -ban! Belátjuk, hogy ez Cauchy sorozat. $\|Ax_k - Ax_l\|_Y = \|A(x_k - x_l)\|_Y \leq c \cdot \|x_k - x_l\|_X$. Legyen $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 : \forall k, l > k_0$ esetén $\|x_k - x_l\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ax_k - Ax_l\| \leq c \cdot \varepsilon$. Y teljes $\Rightarrow \exists y \in Y : \lim(Ax_k) = y$. y csak x -től függ, nem függ (x_k) -tól és egyértelmű. $\widetilde{A}(x) := y$, $\widetilde{A}$ lineáris, korlátos (és folytonos).

Tétel (Hahn-Banach-tétel):
Legyen X Banach tér, $X_0 \subset X$ valódi (zárt lineáris) altér, $f : X_0 \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionál (azaz számértékű operátor). Ekkor $\exists \widetilde{f} : X \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris kiterjesztés, és $\left\|\widetilde{f}\right\| = \|f\|$.

2.2.1. Korlátos lineáris funkcionálok, duális tér (Hilbert tér esetén)

Észrevétel: legyen X Hilbert tér, $y \in X$ tetszőleges rögzített elem. Értelmezzük az $f : X \to \mathbb{K}, f(x) := \langle x, y\rangle$ funkcionált.

Állítás:
Ekkor f korlátos lineáris funkcionál. f linearitása triviális, és korlátos is, ugyanis $|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Tétel (Riesz-tétel):
Legyen X Hilbert tér (valós vagy komplex), f egy korlátos lineáris funkcionál X -en. Ekkor létezik egyetlen $y \in X$, hogy $f(x) = \langle x, y\rangle\ \forall x \in X$.

Bizonyítás:
Jelölje $X_0 := \{x \in X : f(x) = 0\}$ -vel f magterét. X_0 altér X -ben, azaz az algebrai műveletek nem vezetnek ki X_0 -ból, és zárt részhalmaz X -ben. Utóbbi azért igaz, mivel f folytonos, azaz ha $x_k \in X_0$, $(x_k) \to x \Rightarrow x \in X_0$. $f(x_k) \to f(x) \Rightarrow f(x) = 0$, mivel jelen esetben $f(x_k) = 0$.

1. Ha $X_0 = X$, $f(x) = 0\, \forall x \in X$, triviális eset. Ekkor legyen $y = 0$.
2. X_0 valódi altér $\Rightarrow$ (Riesz-féle felbontási tétel szerint) $\exists x_1 \neq 0 : x_1 \in X_0^{\perp}$. Legyen $x \in X$ tetszőleges, és tekintsük az $X \ni y_1 := f(x)\, x_1 - f(x_1)\, x$ elemet.

Ekkor

$$f(y_1) = f(x) f(x_1) - f(x_1) f(x) = 0 \Rightarrow y_1 \in X_0 \Rightarrow \langle y_1, x_1 \rangle = 0.$$

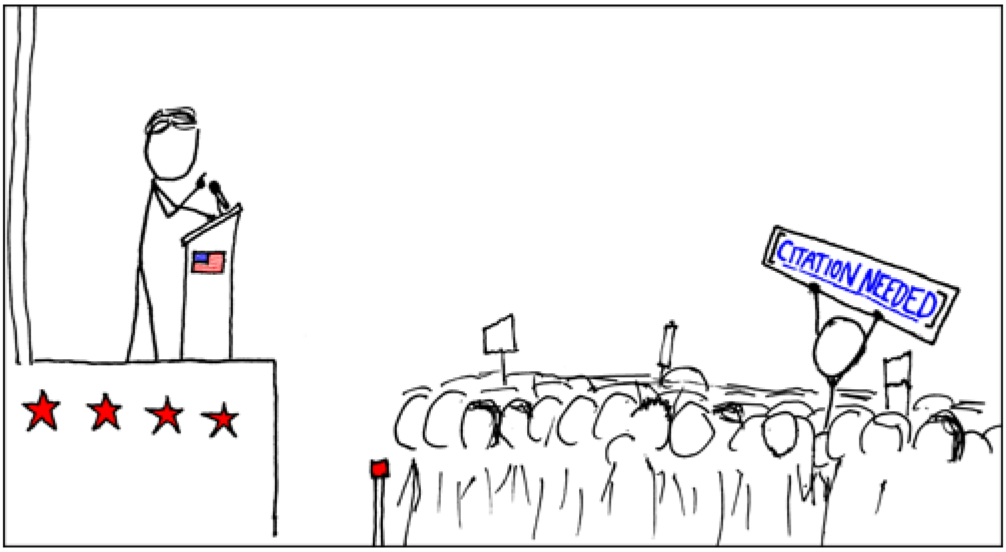
Más szóval

$$0 = \langle y_1, x_1 \rangle = \langle f(x) x_1 - f(x_1) x, x_1 \rangle = f(x) \|x_1\|^2 - f(x_1) \langle x, x_1 \rangle .$$

Átrendezve kapjuk, hogy $f(x) = \frac{f(x_1)\langle x, x_1\rangle}{\|x_1\|^2} = \left\langle x, \frac{\overline{f(x_1)} x_1}{\|x_1\|^2} \right\rangle \Rightarrow \exists y$, nevezetesen $y = \frac{\overline{f(x_1)}}{\|x_1\|^2} x_1$.

3. y egyértelmű. Tfh

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \ \forall x \in X \Rightarrow \langle x, y - y^* \rangle = 0 \forall x \in X \Rightarrow y - y^* = 0 \Rightarrow y = y^*.$$



Text

2.2.1.1. Korlátos lineáris funkcionálok

Legyen X Hilbert tér $y \in X$ egy rögzített eleme, $f(x) := \langle x, y \rangle$. Ekkor a CS-ből következik: $\|f\| \leq \|y\|$.

> Megjegyzés:
> $\|f\| = \|y\|$, ugyanis egyrészt $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|f\| \leq \|y\|$. Másrészt $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$. Válasszuk $x := \frac{y}{\|y\|}$ ($y \neq 0$, máskülönben triviális), ekkor $\|x\| = 1$, $|f(x)| = \left|\left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle\right| = \|y\|$. Tehát $\|f\| = \|y\|$.

Spec eset: $X := L^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz. Ekkor egy tetszőleges f korlátos lineáris funkcionál ilyen alakú: $f(\phi) := \langle \phi, \psi \rangle = \int_M \phi \overline{\psi}$, ahol $\psi \in L^2(M)$ rögzített. $\psi_0 := \overline{\psi} \in L^2(M)$ jelöléssel $f(\phi) = \int_M \phi \psi_0, \forall \phi \in L^2(M)$.

Korlátos lineáris funkcionálok $L^p(M)$ -en, ahol $1 < p < \infty$ (azaz $L^\infty(M)$ teret nem tárgyaljuk)

Legyen $\psi \in L^q(M)$ tetszőleges rögzített, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$! Értelmezzük az f funkcionált: $f(\phi) := \int_M \phi\psi$, ahol $\phi \in L^p(M)$.

Állítás:
f korlátos lineáris funkcionál $L^p(M)$-en.

Bizonyítás:
Tudjuk, hogy $\phi \in L^p(M), \psi \in L^q(M) \Rightarrow \phi\psi \in L^1(M)$, tehát a funkcionál értelmezve van az egész $L^p(M)$-n, nyilván lineáris. A Hölder egyenlőtlenség szerint $\left|\int_M \phi\psi\right| \leq \|\phi\|_{L^p(M)} \cdot \|\psi\|_{L^q(M)} \Rightarrow \|f\| \leq \|\psi\|_{L^q(M)}$, vagyis korlátos is és normája $\leq \|\psi\|_{L^q(M)}$

Tétel:
$\|f\| = \|\psi\|_{L^q(M)}$.

Tétel:
Legyen $1 < p < \infty$. Ekkor tetszőleges $f : L^p(M) \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionálhoz $\exists! \psi \in L^q(M) : f(\phi) = \int_M \psi\phi$.

2.2.1.2. Duális (konjugált) tér

Definíció:
Legyen X normált tér! Az X-en értelmezett korlátos lineáris funkcionálok terét X duálisának nevezzük és X'-vel jelöljük (van, ahol *-gal jelölik).

Megjegyzés:
$X' = L(X, \mathbb{K})$. Tudjuk, hogy $X' = L(X, \mathbb{K})$ normált tér (norma az operátor normája), X' tér teljes, mivel $\mathbb{K}$ alaptest teljes, így X' Banach tér.

Értelmezzük az előbbieket ezen fogalom rögzítésével!

X Hilbert tér. Tudjuk, hogy $\forall f \in X' \exists y \in X : f(x) = \langle x, y\rangle$, $\|f\| = \|y\|$. Fordítva, $y \in X$ esetén $f(x) := \langle x, y\rangle, x \in X$! Tehát ha X Hilbert tér, bijekció létesíthető X' és X között. Jelöljük: $\Phi(y) := f$, $f(x) := \langle x, y\rangle$. $\Phi : X \to X'$ bijekció. Ennek tulajdonságai:

- $\Phi(y_1 + y_2) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2)$. $f_1(x) = \langle x, y_1\rangle$, $f_2(x) = \langle x, y_2\rangle$. $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle = \langle x, y_1 + y_2\rangle$, vagyis $f_1 + f_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\Phi(\lambda y) = \overline{\lambda}\Phi(y)$.
$$f(x) = \langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle = \overline{\lambda} f(x) = \left(\overline{\lambda} f\right) x,$$
vagyis $\lambda y \leftrightarrow \overline{\lambda} f$, tehát Φ konjugált lineáris.

$X = L^p(M)$ esete, mikor $1 \leq p \leq \infty$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Tudjuk, hogy tetszőleges $\psi \in L^q(M)$ esetén $f(\phi) := \int_M \phi\psi$, $\phi \in X$ mellett $f \in (L^p(M))'$, $\|f\| = \|\psi\|$. Továbbá $(L^p(M))'$ minden eleme ilyen alakú $p < \infty$ esetén.

$L^q(M) \ni \psi \leftrightarrow f \in (L^p(M))'$. Könnyen belátható, hogy az eddigiek alapján Φ bijekció, sőt, Φ lineáris. $L^p(M)$ izomorf és izometrikus (normatartó) $L^q(M)$-vel, ha $p < \infty$.

2.2.1.3. X'' tér, más szóval biduális, reflexív tér

Definíció:
Legyen X normált tér. Ekkor definíció szerint $X" := (X')'$.

Állítás:
Ha X Hilbert tér, akkor X'' izomorf, izometrikus az X térrel.

Definíció:
Legyen X Banach tér! Ha X'' izomorf és izometrikus X-szel, akkor X''-t reflexívnek nevezzük.

Állítás:
Legyen $X = L^p(M)$, ahol $1 < p < \infty$! Ekkor $L^p(M)$ reflexív.

Vizsgáljuk X''-t általános esetben, mikor X Banach tér! Tekintsük egy tetszőleges, rögzített $x \in X$ elemet, ehhez rendeljük hozzá a következő, $F_x \in X"$ elemet! $F_x(f) := f(x)$, $\forall f \in X'$. Ekkor F_X jól definiált funkcionál X'-n, nyilván lineáris, korlátos is. $|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|_X$, $\forall f \in X'$. $\Rightarrow \|F_x\| \leq \|x\|$.

Állítás:
$\|F_x\| = \|x\|$.

Bizonyítás:
(Definíció szerint $\|F_x\| = \sup\limits_{f \in X'} \{|F_x(f)| = |f(x)| : \|f\| = 1\}$.) Azt kellene belátni, hogy $\exists f \in X' : \|f\| = 1$, melyre igaz, hogy $|F_x(f)| = \|x\|$ bármely rögzített x esetén. Tekintsük a következő f_0 funkcionált X következő, 1 dimenziós alterén: $X_0 := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$, ahol $x \in X$ rögzített. Legyen $f_0(\lambda x) := \lambda \|x\|$. f_0 korlátos is, $|f_0(\lambda x)| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| \cdot 1 \Rightarrow \|f_0\| = 1$. A Hahn-Banach tétel szerint az X_0 altéren definiált f_0 korlátos lineáris funkcionál kiterjeszthető a korlátosság és linearitás megtartásával az egész X térre úgy, hogy $\|f\| = \|f_0\|$ (ezt persze nem bizonyítottuk). Jelölje ezt f! $f \in X'$, $\|f\| = \|f_0\| = 1$. Erre $|F_x(f)| = |f(x)| = |f(1 \cdot x)| = f_0(1 \cdot x) = 1 \cdot \|x\| = \|x\|$.

Általános esetben X'' egy részhalmaza izomorf és izometrikus X-szel. X''-nek lehetnek más elemei is (ha nem reflexív).

2.2.2. Gyenge konvergencia

Definíció:
Legyenek X, Y normált terek, és tfh $A_j \in L(X, Y)$, $j \in \mathbb{N}$ (A_j korlátos lineáris operátor X-n). Azt mondjuk, hogy ez az A_j sorozat gyengén konvergál az A operátorhoz, ha $\forall x \in X$ elemre $(A_j x)_{j \in \mathbb{N}} \to Ax$ (pontonkénti konvergencia). (Y-beli norma szerinti konvergencia).

Állítás:
Ha $\lim \|A_j - A\| = 0$, azaz $(A_j) \to A$ az $L(X, Y)$ norma szerint, akkor $(A_j) \to A$ gyengén, de fordítva nem mindig igaz.

Bizonyítás:
Tfh $\lim \|A_j - A\| = 0$. Ekkor

$$\|A_j x - Ax\|_Y = \|(A_j - A)\,x\| \leqslant \underbrace{\|A_j - A\|}_{\to 0} \cdot \|x\| \to 0.$$

Speciális eset: $Y = \mathbb{K}$, $L(X, Y) = X'$. $(f_j) \to f$ gyengén X'-ben, ha bármely rögzített $x \in X$ esetén $(f_j(x)) \to f(x)$.

Példa:
X'-beli gyengén konvergens sorozatra, amely norma szerint nem konvergens. Legyen X szeparábilis, végtelen dimenziós Hilbert tér! Legyen ebben egy $y_1, y_2, ..., y_j, ...$ ortonormált, teljes rendszer! $f_j(x) := \langle x, y_j \rangle$. Ekkor $\langle x, y_j \rangle$ az $x \in X$ elem j-edik Fourier-egyeütthatója y_j ortonormált rendszer szerint, $c_j := \langle x, y_j \rangle$. Tudjuk, hogy $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty \Rightarrow \lim(c_j) = 0$, azaz $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = 0$, $\forall x \in X$. Más szóval (f_j) X'-beli sorozat gyengén tart $f = 0$ funkcionálhoz. Másrészt $\|f_j\| = \|y_j\|_X = 1$, így (f_j) nem tart a norma szerint az $f = 0$ funkcionálhoz. (Bebizonyítható, hogy véges dimenzióban a gyenge konvergencia egybeesik a norma szerinti konvergencia fogalmával.)

Tétel:
Tfh $A_j \in L(X, Y)$, ahol X, Y Banach terek, $(A_j) \to A$ gyengén. Ekkor $(\|A_j\|)_{j\in\mathbb{N}}$ korlátos. Ez a tétel következik az alábbi tételből.

Egyenletes korlátosság tétele (Banach-Steinhaus-tétel, bizonyítás nélkül):
Legyenek X, Y Banach terek, $A_j \in L(X, Y)$. Ha az A_j operátor sorozat pontonként korlátos, azaz ha $\forall x \in X$ esetén $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \{\|A_j x\|\} < \infty \Rightarrow (\|A_j\|)$ korlátos.

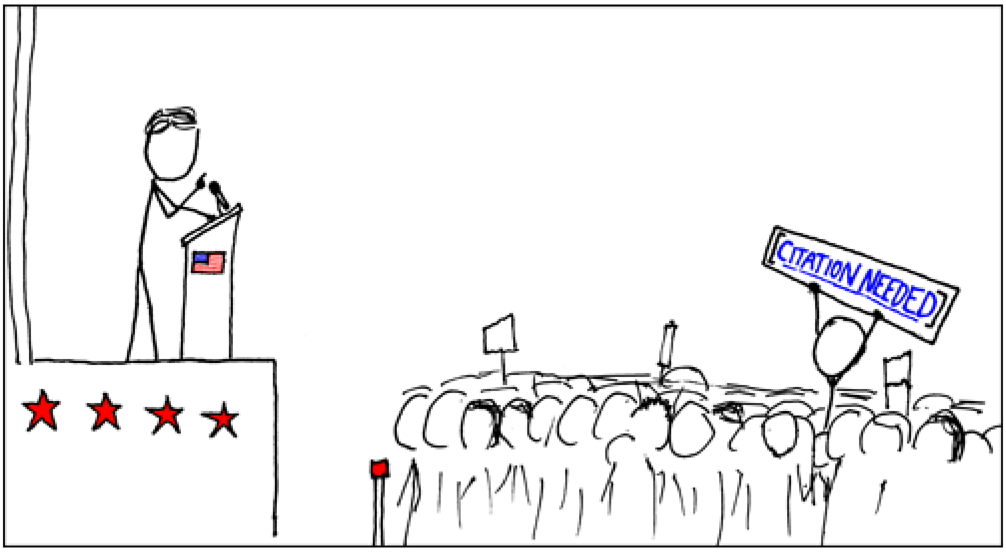
Megjegyzés (gyenge kompaktsági kritérium):
Tekintsük a $X' = L(X, \mathbb{K})$ speciális esetet az egyszerűség kedvéért. Ha $f_j \in X'$ korlátos sorozatot alkot (X most Banach tér), akkor (f_j)-ból kiválasztható egy gyengén konvergens részsorozat.

Text

2.2.3. Gyenge konvergencia X-ben

Definíció:
Legyen X normált tér! Azt mondjuk, hogy egy $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ X-beli sorozat gyengén konvergál egy $x \in X$ ponthoz, ha $\forall f \in X'$ funkcionálra $(f(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \to f(x)$.

Megjegyzés:
Ha X reflexív Banach-tér, akkor minden korlátos X-beli sorozatnak létezik gyengén konvergens részsorozata. Ugyanis ekkor $X = X'' = (X')'$.



2.2.3.1. Inverz operátor

Emlékeztető: egy függvénynek létezik inverze, ha injektív. Tudjuk továbbá, hogy egy $A : X \to Y$ lineáris operátornak létezik inverze (azaz injektív) $\Leftrightarrow$ a magtér csak a 0-ból áll, azaz $Ax = 0_Y \Leftrightarrow x = 0_X$. Továbbá, ha A^{-1} létezik, akkor A^{-1} lineáris operátor. Egy A operátor folytonos x_0-ban, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \rho > 0 : \|x - x_0\|_X < \rho \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.

Kérdés: ha X, Y normált terek, $A : X \to Y$ lineáris és injektív $\overset{?}{\Rightarrow}$ A^{-1} korlátos is? Általában nem, akkor sem, ha A korlátos.

Nyílt leképezések tétele (bizonyítás nélkül):
Legyenek X, Y Banach terek, $A : X \to Y$ korlátos lineáris operátor és $R_A = Y$, vagyis ráképezés. Ekkor A operátor X minden nyílt halmazát Y nyílt halmazába képezi. Ebből következik:

Tétel (Banach-tétel):
Legyenek X, Y Banach terek, $A : X \to Y$ korlátos és lineáris, $R_A = Y$ és A injektív! Ekkor A^{-1} korlátos (azaz folytonos).

Bizonyítás:
Legyen tetszőleges $y_0 \in Y = R_A = D_{A^{-1}}$. $x_0 := A^{-1} y_0$. Belátjuk, hogy az A^{-1} folytonos y_0-ban. Tekintsük $x_0 = A^{-1} y_0$ egy tetszőleges $B_r(x_0)$ nyílt környezetét! Ennek képe is nyílt az Y-ban az előbbi tétel szerint. Mivel $y_0 \in A(B_r(x_0))$, ami nyílt, ezért y_0-nak van olyan környezete, melyre $B_\rho(y_0) \subset A(B_r(x_0))$. Ez azt jelenti, hogy ha $y \in B_\rho(y_0) \Rightarrow A^{-1} y \in B_r(x_0)$. Eszerint A^{-1} folytonos y_0-ban.

2.2.3.2. Zárt gráf (grafikon) tétel

Definíció:
Legyenek X, Y normált terek, $A : M \to Y$ lineáris operátor, $M \subset X$. Ekkor A operátor gráfja, grafikonja az alábbi halmaz: $G_A := \{(x, Ax) : x \in M = D_A\}$.

Definíció:
Egy $A : M \to Y$ lineáris operátort zártnak nevezünk, ha a $G_A \subset X \times Y$ zárt halmaz $X \times Y$-ban. $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Megjegyzés:
A szorzattéren értelmezett műveletek:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $\lambda (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$
- $\|(x, y)\|_{X \times Y} := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, $X \times Y$ normált tér tehát.

Legyenek X, Y normált terek, $A : M \to Y$ lineáris operátor, $D_A = M \subset X$. A zárt $\Leftrightarrow$ ha minden $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ M-beli sorozatra, melyre $\lim (x_j) = x \in X$ és $\exists \lim (Ax_j) = y \in Y$, akkor $x \in M$ és $y = Ax$. Ezért ha A folytonos, akkor zárt is.

Példa:
Példa zárt, lineáris, de nem folytonos (nem korlátos) operátorra: $X := C[0, 1]$, $M = D_A = C^1[0, 1]$, $A\phi := \phi'$, vagyis a differenciáloperátor. $(\phi_j) \to \phi$ egyenletesen ($C[0, 1]$-beli konvergencia) és $\left(\phi'_j\right) \to \psi$ egyenletesen $\Rightarrow \psi = \phi'$, tehát A valóban zárt, lineáris (de nem korlátos, így nem is folytonos, ezt láttuk korábban).

Tétel (zárt gráf tétel):
Legyenek X, Y Banach terek, $A : X \to Y$ zárt, lineáris operátor (tehát $D_A = X$). Ekkor A folytonos (korlátos).

Bizonyítás:
$G_A := \{(x, Ax) : x \in D_A = X\} \subset X \times Y$ (utóbbi Banach-tér), ugyanis G_A zárt halmaz $X \times Y$-ban, az $X \times Y$ vektorténérnek altere: $(x_1, Ax_1) + (x_2, Ax_2) = (x_1 + x_2, A(x_1 + x_2)) \in G_A$, $\lambda (x, Ax) = (\lambda x, A(\lambda x)) \in G_A$. G_A az $X \times Y$ Banach tér zárt lineáris altere $\Rightarrow G_A$ Banach-tér. Tekintsük a következő két operátort: $U(x, Ax) := x$, $V(x, Ax) := Ax$, ahol $(x, Ax) \in G_A$. Ekkor $U : G_A \to X$, $R_U = X$, $V : G_A \to Y$. Most U-ra alkalmazható a Banach tétel (az inverz operátor korlátosságáról): $D_U = G_A$, $R_U = X$, U korlátos és injektív $\Rightarrow U^{-1} : X \to G_A$ korlátos (folytonos), $A = VU^{-1}$, mert $U^{-1}x = (x, Ax)$, $V(U^{-1}(x)) = V(x, Ax) = Ax$. $V : G_A \to Y$ korlátos $\Rightarrow A = VU^{-1}$ is korlátos.

2.3. Sajátérték, reguláris érték, spektrum

Legyenek X, Y normált terek, $A : M \to Y$ lineáris operátor, $M \subset X$, $b \in Y$ adott elem.

1. Elsőfajú egyenlet: melyik az a $x \in M = D_A : Ax = b$?

2. Másodfajú egyenlet: legyen $Y = X$. Melyik az a $x \in X$, melyre $(\lambda I - A)\, x = b$, ahol $\lambda \in \mathbb{K}$, I az identitás. Ha $(\lambda I - A)$ nem injektív, azaz nem létezik az inverzre, akkor λ-t az A operátor sajátértékének nevezzük. Ez azt jelenti, hogy $\exists x_0 \neq 0 : (\lambda I - A)\, x_0 = 0 \Leftrightarrow Ax_0 = \lambda x_0$.

Definíció:
Ha $\exists\, (\lambda I - A)^{-1}$, ez korlátos és $R_{\lambda I - A}$ értelmezési tartománya sűrű halmaz X-ben, akkor λ-t reguláris értéknek nevezzük.

Állítás:
Ha A zárt operátor, akkor reguláris érték esetén $D_{(\lambda I - A)^{-1}} = X$, azaz $R_{\lambda I - A} = X$.

Megjegyzés:
Ekkor reguláris értéke esetén $(\lambda I - A)\, x = b$ egyenletnek $\forall b \in X$-hez $\exists! x$ megoldás, és x folytonosan függ b-től, azaz $x = \underbrace{(\lambda I \overset{-1}{-} A)}_{\text{folytonos}} b$.

Definíció:
Az A operátor spektruma a reguláris értékek halmazának a komplementere az alaptestben. A sajátértékek halmaza része a spektrumnak.

2.3.1. Korlátos lineáris operátorok reguláris értékei

Tétel:
Legyen X Banach tér! Legyen $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor. Ekkor $r_\sigma(A) := \lim\limits_{k \to \infty} \left\| A^k \right\|^{1/k}$, ez létezik és véges. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ számra teljesül, hogy $|\lambda| > r_\sigma(A)$, akkor λ reguláris érték (A-ra nézve).

Definíció:
$r_\sigma(A)$ számot az A korlátos lineáris operátor spektrálsugarának nevezzük.

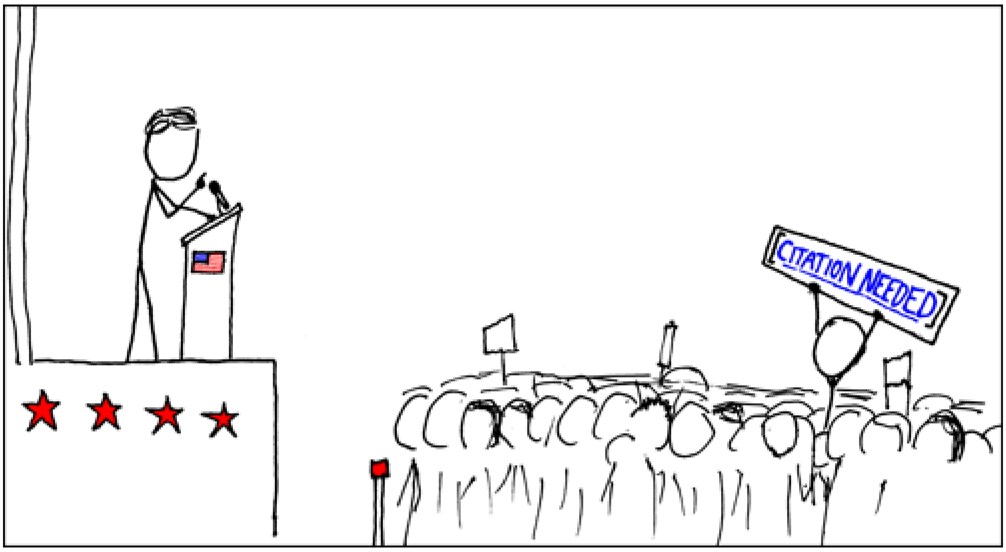
Megjegyzések:

- $A, B \in L(X, X)$ esetén $\|AB\| \leq \|A\|\, \|B\|$, ugyanis $\|(AB)\, x\| = \|A\,(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$ minden x-re, $\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\, \|B\|$
- $\left\| A^k \right\| \leq \|A\|^k$. $\left\| A^k \right\|^{1/k} \leq \left(\|A\|^k \right)^{1/k} = \|A\| \Rightarrow r_\sigma(A) \leq \|A\|$. Következmény: ha $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda$ reguláris érték.

Tétel (lemma 1):
Legyen Z Banach-tér, $z_k \in Z$. Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|z_k\| < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergens Z Banach-téren.

Bizonyítás:
Legyen $s_j := \sum\limits_{k=1}^{j} z_k$ részlet összeg! $\|s_j - s_l\| = \left\| \sum\limits_{k=l+1}^{j} z_k \right\| \leq \sum\limits_{k=l+1}^{j} \|z_k\| < \varepsilon$, ha $l, j > j_0$, tehát teljesül a Cauchy kritérium. Mivel Z Banach-tér, azaz teljes normált tér, ezért minden Cauchy-sorozatnak van határértéke Z-ben.

Tétel (lemma 2, bizonyítás nélkül):
Tfh $B_k \in L(X,X)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ konvergens $L(X,X)$-en. Ekkor $\forall C \in L(X,X)$ operátorra $C \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C B_k$. A bizonyítás egyszerű a részletösszegek segítségével.



Text

Tétel:
Legyen X Banach-tér, $A : X \to X$ korlátos, lineáris operátor. Ekkor létezik és véges: $r_\sigma(A) := \lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k}$. Továbbá $|\lambda| > r_\sigma(A) \Rightarrow \lambda$ reguláris érték, $(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} A^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k$. Ez a sor – a Neumann-sor – $L(X,X)$ normában konvergens.

Bizonyítás:

1. Jelöljük: $r := \inf\left\{\left\|A^k\right\|^{1/k} : k \in \mathbb{N}\right\} \geq 0$, ez véges. Belátjuk, hogy

$$r_\sigma(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = r = \inf\left\{\left\|A^k\right\|^{1/k} : k \in \mathbb{N}\right\} \geq 0.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az alsó határ definíciójából következik, hogy $\exists m \in \mathbb{N} : r \leq \|A^m\|^{1/m} < r + \varepsilon$. Ezen m mellett válasszunk egy $k > m$ számot, melyre $k = pm + q$, ahol $p \in \mathbb{N}$ és $0 \leq q < m$ (ez k-nak m-vel vett maradékos osztása, q a maradéktag). Ekkor $A^k = A^{pm+q} = (A^p)^m \cdot A^q$, így

$$\left\|A^k\right\| \leq \|A^m\|^p \cdot \|A\|^q \Rightarrow \left\|A^k\right\|^{1/k} \leq \|A^m\|^{p/k} \cdot \|A\|^{q/k} \leq (r+\varepsilon)^{mp/k} \|A\|^{q/k}.$$

Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{mp}{k} = 1$, mert $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{q}{k} = 0$, így a fenti egyenlőtlenség jobb oldala $\to r+\varepsilon$. Ebből következik, hogy

$$\exists k_0 : k > k_0 \Rightarrow r \leq \left\|A^k\right\|^{1/k} \leq r + 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = r.$$

2. Belátjuk, hogy a Neumann-sor $L(X,X)$-ben konvergens. Az 1. lemma szerint ehhez elég bizonyítani, hogy a sor tagjainak normáiból alkotott sor konvergens, azaz $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\|\lambda^{-k-1}A^k\right\| < \infty$. Válasszunk egy olyan r_1 számot, melyre $|\lambda| > r_1 > r_\sigma(A)$! Mivel $r_\sigma(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k}$ és $r_1 > r_\sigma(A)$, ezért $\exists k_1 \in \mathbb{N} : k > k_1 \Rightarrow r_1 > \left\|A^k\right\|^{1/k}$, így $\left\|\lambda^{-k-1}A^k\right\| = \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} \left\|A^k\right\| < \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} r_1^k = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{r_1}{|\lambda|}\right)^k$. Ezeket összegezve k szerint egy mértani sort kapunk, melynek kvóciense $0 < \frac{r_1}{|\lambda|} < 1$, így a sor konvergens, azaz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{r_k}{|\lambda|}\right)^k < \infty$.
3. Jelöljük $B := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k \in L(X,X)$. Előbb láttuk, hogy ez konvergens. Ebből következni fog, hogy $(\lambda I - A)^{-1}$ létezik és egyenlő B-vel. A 2. lemmát felhasználva: $(\lambda I - A)B = \lambda B - AB = \lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k - A\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}A^k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^{k+1} = I$. Hasonlóképpen, $B(\lambda I - A) = I$. Következtetésképpen $(\lambda I - A)^{-1}$ létezik és egyenlő B-vel.

Következmény: $|\lambda| > r_\sigma(A)$ esetén a $(\lambda I - A)x = b$ másodfajú egyenletnek létezik egyetlen x megoldása, mégpedig

$$x = (\lambda I - A)^{-1} b = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k\right) b = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda^{-k-1}A^k\right) b = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}\left(A^k b\right),$$

ez a sor pedig X normában konvergens. A sor összege így is írható: $\frac{1}{\lambda}b + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k b$. A fentiek még inkább érvényesek, ha $|\lambda| > \|A\|$.

Állítás:
$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in A_{\text{spektrum}}\}$.

2.3.2. Példák, alkalmazások

2.3.2.1. A négyzetesen integrálható magú integráloperátorok.

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ egy Lebesgue szerint mérhető halmaz, $X := L^2(M)$, ez ugye Hilbert tér. Legyen $\mathcal{K} \in L^2(M \times M)$ az úgynevezett magfüggvény, s $\phi \in L^2(M)$. Definiáljuk: $\psi(x) := \int_M \mathcal{K}(x,y)\phi(y)\,dy$.

Állítás:
$\psi \in L^2(M)$, továbbá a $K(\phi) := \psi$ képlettel értelmezett $K : L^2(M) \to L^2(M)$ operátor lineáris, korlátos. A K operátort négyzetesen integrálató magú integrál-operátornak nevezzük.

Bizonyítás:
A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség szerint majdnem minden x-re

$$|\psi(x)| \leq \int_M |\mathcal{K}(x,y)| \cdot |\phi(y)|\, dy \leq \left\{\int_M |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dy\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_M |\phi(y)|^2\, dy\right\}^{1/2}.$$

Mivel $\mathcal{K} \in L^2(M \times M) \Rightarrow \int_{M\times M} |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dxdy < \infty$. Fubini-tételt használva $\int_M \underbrace{\int_M |\mathcal{K}(x,y)|^2 dy}_{\text{véges m.m. } x\text{-re}} dx < \infty$, így

$$|\psi(x)|^2 \leq \int_M |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dy \cdot \left[\int_M |\phi(y)|^2\, dy\right] < \infty.$$

Integrálva:

$$\int_M |\psi(x)|^2\, dx \leq \left[\int_M \int_M |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dydx\right] \cdot \left[\int_M |\phi(y)|^2\, dy\right] < \infty \Rightarrow \psi \in L^2(M).$$

K linearitása triviális. K korlátos, ugyanis

$$\|K\phi\|^2{}_{L^2(M)} = \|\psi\|^2{}_{L^2(M)} \leq \left\{\int_{M\times M} |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dxdy\right\} \cdot \|\phi\|^2,$$

sőt: $\|K\| \leq \left\{\int_{M\times M} |\mathcal{K}(x,y)|^2\, dxdy\right\}^{1/2} = \|\mathcal{K}\|_{L^2(M\times M)}$.

Következmény: $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_{L^2(M\times M)}$ esetén λ reguláris érték. Tudjuk, hogy $|\lambda| > r_\sigma(K)$ esetén λ reguláris érték és $(\lambda I - K)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-1-k} K^k$.

Kérdés: K integrál operátor hatványai hogyan számolhatók?

Állítás:
Legyen $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in L^2(M \times M)$ és K, L a megfelelő integráloperátorok. Ekkor $P := KL$ szintén négyzetesen integrálható magú operátor, amelynek magfüggvénye $\mathcal{P}(x,y) := \int_M \mathcal{K}(x,t)\, \mathcal{L}(t,y)\, dt$.

Bizonyítás:
$\phi \in L^2(M)$ esetén

$$\begin{aligned}(P\phi)(x) = [K(L\phi)](x) &= \int_M \mathcal{K}(x,t) \left[\int_M \mathcal{L}(t,y)\, \phi(y)\, dy\right] dt \\ &= \int_M \underbrace{\left[\int_M \mathcal{K}(x,t)\, \mathcal{L}(t,y)\, dt\right]}_{\mathcal{P}(x,y)} \phi(y)\, dy,\end{aligned}$$

ahol a Fubini-tételt ismét alkalmaztuk. $\mathcal{P} \in L^2(M \times M)$, merthogy $|\mathcal{P}(x,y)| \leq$

$\left\{\int_M |\mathcal{K}(x,t)|^2 dt\right\}^{1/2}\left\{\int_M |\mathcal{L}(t,y)|^2 dy\right\}^{1/2}$, így integrálva:

$$\int_{M\times M} |\mathcal{P}(x,y)|^2 dxdy \leqslant \underbrace{\int_M \left[\int_M |\mathcal{K}(x,t)|^2 dt\right] dx}_{<\infty} \cdot \underbrace{\int_M \left[\int_M |\mathcal{L}(x,t)|^2 dt\right] dy}_{<\infty} < \infty.$$

Következmény: $(K^j\phi)(x) = \int_M \mathcal{K}_j(x,y)\phi(y)\,dy$, $j = 1, 2, ...,$ ahol

$$\mathcal{K}_1(x,y) := \mathcal{K}(x,y)$$
$$\mathcal{K}_2(x,y) := \int_M \mathcal{K}(x,t)\mathcal{K}_1(t,y)\,dt$$
$$\mathcal{K}_j(x,y) := \int_M \mathcal{K}(x,t)\mathcal{K}_{j-1}(t,y)\,dt.$$

Ebből következik, hogy $(\lambda I - K)^{-1} b = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} K^j b$.

$$\begin{aligned}\left[(\lambda I - K)^{-1} b\right](x) &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} K^j b\right](x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1}\left(K^j b\right)(x) \\ &= \frac{b(x)}{\lambda} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1}\int_M \mathcal{K}_j(x,y)\, b(y)\,dy \\ &\overset{?}{=} \frac{b(x)}{\lambda} + \int_M \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1}\mathcal{K}_j(x,y)\right]}_{\in L^2(M\times M)} b(y)\,dy.\end{aligned}$$

A sor $L^2(M)$ normában konvergál. Az utolsó egyenlőséget a következő órán látjuk be.

Text

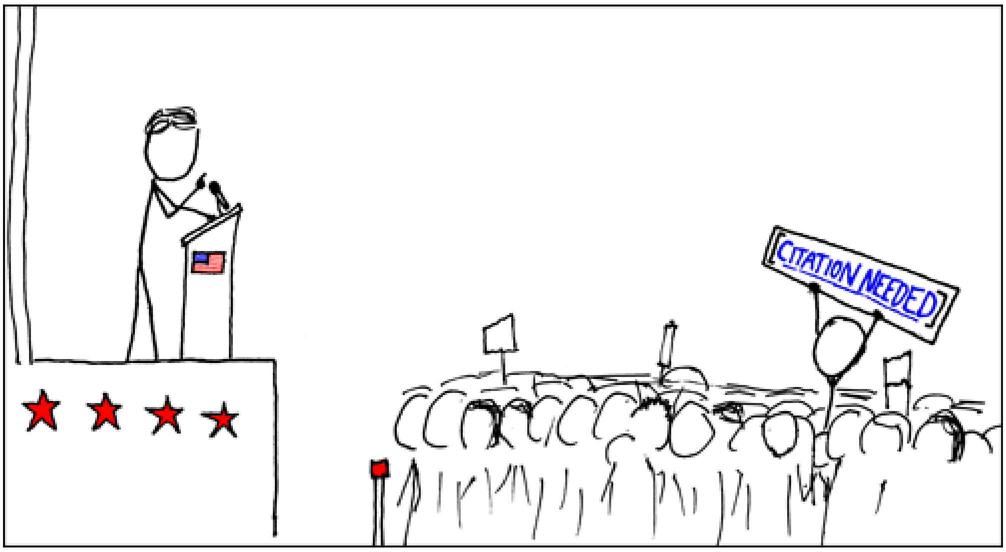
A korábbiak szerint $(\lambda I - A)x = b$ egyenletnek van egyértelmű megoldása x-re és $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}\left(A^k b\right)$, ha λ reguláris érték, ugyanis ekkor a jobb oldal konvergens $X \ni x$-ben.

Az előző példában $X := L^2(M)$ volt, (ahol $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz,) illetve $\mathcal{K} \in L^2(M \times M)$, és

$$\psi(x) := (K\phi)(x) = \int_M \mathcal{K}(x,y)\phi(y)\,dy,$$

ahol $K : L^2(M) \to L^2(M)$ korlátos lineáris operátor és $r_\sigma(K) \le \|K\| \le \|\mathcal{K}\|_{L^2(M\times M)}$.

$(\lambda I - K)\phi = b$, $b \in L^2(M)$ adott esetén mi a megoldás $\phi \in L^2(M)$-re? Az egyenlet ekvivalens: $\lambda\phi(x) - \int_M \mathcal{K}(x,y)\phi(y)\,dy = b(x)$ majdnem minden $x \in M$-re. Ha $|\lambda| > r_\sigma(K) \Rightarrow \phi = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} K^j b = \frac{b}{\lambda} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j-1} K^j b$. $(K^j b)(x) = \int_M \mathcal{K}_j(x,y)\, b(y)\,dy$,



$\mathcal{K}_j(x,y)=\int_M \mathcal{K}_{j-1}(x,t)\,\mathcal{K}(t,y)\,dt$ és $\mathcal{K}_1=\mathcal{K}$. Így

$$\phi(x)=\frac{b(x)}{x}+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j-1}\int_M \mathcal{K}_j(x,y)\,b(y)\,dy=\frac{b(x)}{\lambda}+\int_M \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{-j-1}\mathcal{K}_j(x,y)\right]}_{\substack{R_\lambda(x,y)\in L^2(M\times M)\\ \text{rezolv. op. magfgve}}} b(y)\,dy.$$

A sor $L^2(M\times M)$-ben konvergens, ha $|\lambda|>r_\sigma(\mathcal{K})$.

A bizonyítás alapja: $\mathcal{K}_j(x,y)=\int_M \mathcal{K}_{j-1}(x,t)\,\mathcal{K}(t,y)\,dt \Rightarrow K^{j-1}$ operátor alkalmazva $t\mapsto \mathcal{K}(t,y)$ függvényre (y rögzített):

$$\left\{\int_M |\mathcal{K}_j(x,y)|^2 dx\right\}^{1/2}\leqslant \left\|\mathcal{K}^{j-1}\right\|\left\{\int_M |\mathcal{K}(t,y)|^2 dt\right\}^{1/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_M |\mathcal{K}_j(x,y)|^2 dx\leqslant \left\|K^{j-1}\right\|^2\int_M |\mathcal{K}(t,y)|^2 dt.$$

Integrálva y szerint:

$$\int_{M\times M}|\mathcal{K}_j(x,y)|^2\,dxdy\le \left\|K^{j-1}\right\|^2\int_{M\times M}|\mathcal{K}(t,y)|^2\,dtdy.$$

Nézzük:

$$\int_{M\times M}\frac{1}{|\lambda|^{2(j+1)}}|K_j(x,y)|^2 dxdy\leqslant \underbrace{\frac{1}{|\lambda^{2(j+1)}|}\left\|K^{j-1}\right\|^2}_{\sum_{j=1}^{\infty}\text{ sor konv. ha }|\lambda|>r_\sigma(K)}\cdot\|K\|^2_{L^2(M\times M)},$$

így a bal oldalból képzett számsor (ami ≥ 0) is konvergens.

2.3.2.2. Folytonos magú integráloperátorok.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány (azaz nyílt és összefüggő), $X := C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\overline{\Omega} \to \mathbb{K}$ folytonos függvények (a felülvonás a lezárást jelenti), tehát $C\left(\overline{\Omega}\right)$ az Ω korlátos tartomány lezárásán értelmezett folytonos függvények tere a $\|\phi\| = \sup\limits_{\Omega} |\phi|$ normával. Legyen $\mathcal{K} \in C\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right)$, $\psi(x) := (K\phi)(x) := \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}(x,y)\,\phi(y)dy$.

Állítás:
$K : C\left(\overline{\Omega}\right) \to C\left(\overline{\Omega}\right)$ korlátos, lineáris operátor.

Bizonyítás:
$|\psi(x)| = \left|\int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}(x,y)\,\phi(y)\,dy\right| \leq \int_{\overline{\Omega}} |\mathcal{K}(x,y)| \cdot |\phi(y)|\,dy \leq \|\phi\| \int_{\overline{\Omega}} |\mathcal{K}(x,y)|\,dy \leq \|\phi\| \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \int_{\overline{\Omega}} |\mathcal{K}(x,y)|\,dy$. Itt is igaz: $(K^j\phi)(x) = \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}_j(x,y)\,\phi(y)\,dy$. $\mathcal{K}_j(x,y) = \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{K}_{j-1}(x,t)\,\mathcal{K}(t,y)\,dt$, K_j folytonos.

2.3.2.3. Egy speciális eset

Az előbbi spec esete: $\overline{\Omega} = [a,b] \subset \mathbb{R}$, ekkor $\mathcal{K} \in C([a,b] \times [a,b])$, továbbá $\mathcal{K}(x,y) = 0$, ha $y > x$. $(K\phi)(x) := \int\limits_a^b \mathcal{K}(x,y)\,\phi(y)\,dy = \int\limits_a^x \mathcal{K}(x,y)\,\phi(y)\,dy$ Voltera típusú operátor. Erre is igaz, hogy $\mathcal{K} : C[a,b] \to C[a,b]$ folytonos lineáris operátor.

Állítás:
$r_\sigma(K) = 0$, így $\lambda \neq 0$ esetén λ reguláris érték, azaz létezik egyértelmű megoldása a $\lambda\phi(x) - \int\limits_a^x \mathcal{K}(x,y)\,\phi(y)\,dy = b(x)$ másodfajú egyenletlnek bármely folytonos $b(x)$ esetén.

Bizonyítás:
$\mathcal{K}_j(x,y) = \int\limits_a^b \mathcal{K}_{j-1}(x,t)\,\mathcal{K}(t,y)\,dt$, speciálisan

$$\mathcal{K}_2(x,y) = \int\limits_a^b \underbrace{\mathcal{K}(x,t)}_{0 \text{ ha } t>x}\underbrace{\mathcal{K}(t,y)}_{0 \text{ ha } y>t}dt = \int\limits_y^x \mathcal{K}(x,t)\,\mathcal{K}(t,y)\,dt,$$

mert csak $y \leq t \leq x$ esetén nem 0 az integrandus. Így $\mathcal{K}_2(x,y) = 0$, ha $y > x$. $\mathcal{K}_3(x,y) = \int\limits_y^x \mathcal{K}_2(x,t)\,\mathcal{K}(t,y)\,dt = 0$ ha $y > x$. Ekkor $\|K\| \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(x,y)|\,dy \leq \alpha(b-a)$, ugyanis $\mathcal{K} \in C([a,b] \times [a,b]) \Rightarrow \mathcal{K}$ korlátos és így $|\mathcal{K}(x,y)| \leq \alpha, \quad \forall x,y \in [a,b]$.

$\|K^2\| \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int\limits_a^b |\mathcal{K}_2(x,y)|\, dy = \sup\limits_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x |\mathcal{K}_2(x,y)|\, dy$. Az integrandusra

$$|\mathcal{K}_2(x,y)| = \left| \int\limits_y^x \mathcal{K}(x,t)\, \mathcal{K}(t,y)\, dt \right| \leqslant \int\limits_y^x \underbrace{|\mathcal{K}(x,t)|}_{<\alpha} \underbrace{|\mathcal{K}(t,y)|}_{\leqslant\alpha} dt \leqslant \alpha^2 (x-y)\,,$$

ha $x > y$. Így

$$\begin{aligned} \left\|K^2\right\| &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x |\mathcal{K}_2(x,y)|\, dy \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x \alpha^2 (x-y)\, dy \\ &= \alpha^2 \sup_{x\in[a,b]} \left[-\frac{(x-y)^2}{2} \right]_{y=a}^x \\ &= \alpha^2 \sup_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)^2}{2} = \alpha^2 \frac{(b-a)^2}{2}. \end{aligned}$$

$\|K^3\|$-re hasonló módon járunk el. Ekkor

$$|\mathcal{K}_3(x,y)| = \left| \int\limits_y^x \mathcal{K}(x,t)\, \mathcal{K}_2(t,y)\, dt \right| \leqslant \int\limits_y^x \underbrace{|\mathcal{K}(x,t)|}_{\leqslant\alpha} \underbrace{|\mathcal{K}_2(t,y)|}_{\leqslant\alpha^2(t-y)} dt \leqslant \alpha^3 \frac{(x-y)^2}{2}.$$

Így $\|K^3\| \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x |\mathcal{K}_3(x,y)|\, dy \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int\limits_a^x \alpha^3 \frac{(x-y)^2}{2} dy = \alpha^3 \sup\limits_{x\in[a,b]} \frac{(x-a)^3}{3!} \leq \alpha^3 \frac{(b-a)^3}{3!}$. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy $\|K^j\| \leq \alpha^j \frac{(b-a)^j}{j!} \Rightarrow \|K^j\|^{1/j} = \alpha \frac{b-a}{(j!)^{1/j}} \to 0$, ha $j \to \infty$.

3. Hilbert tér operátorai

3.1. Az adjungált operátor

Legyen X Hilbert tér, $A : D_A \to X$ lineáris operátor, ahol D_A az A-nak az értelmezési tartománya, $D_A \subset X$, $y \in X$ elem.

Kérdés: létezik-e illetve hány $y^* \in X$ létezik, melyre $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, $\forall x \in D_A$ esetén? Mi az egyértelműség feltétele?

Állítás:
Legfeljebb egy y^* létezik $\Leftrightarrow \overline{D_A} = X$, vagyis ha az értelmezési tartomány sűrű X-ben.

Bizonyítás:
Legfeljebb egy y^* létezik $\Leftrightarrow$ hogy ha $\langle x, y^*\rangle = \langle x, \widetilde{y}\rangle$, $\forall x \in D_A$-ból következik, hogy $y^* = \widetilde{y}$. $\langle x, y^*\rangle = \langle x, \widetilde{y}\rangle$, $\forall x \in D_A$ pontosan azt jelenti, hogy $\langle x, y^* - \widetilde{y}\rangle = 0$, $\forall x \in$

D_A. Ebből következik: $y^* = \widetilde{y} \Leftrightarrow \overline{D_A} = X$. (Felhasználjuk, hogy a skalárszorzat folytonosan függ a tényezőktől.)

Definíció:
Legyen X Hilbert tér, $A : D_A \to X$ lineáris operátor, $\overline{D_A} = X$. Ekkor A operátor adjungáltját, A^* operátort így értelmezzük:

$$D_{A^*} := \{y \in X : \exists y^* \in X : \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \ \forall x \in D_A\}$$

és $A^*(y) := y^*$.

Megjegyzés:
$0 \in D_{A^*}$, ugyanis $\langle Ax, 0\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$, $\forall x \in D_A$.

Állítás:
A^* lineáris operátor.

Bizonyítás:
Legyen $y_1, y_2 \in D_{A^*}$! Ekkor $\langle Ax, y_1\rangle = \langle x, A^*(y_1)\rangle$, $\forall x \in D_A$ és $\langle Ax, y_2\rangle = \langle x, A^*(y_2)\rangle$, $\forall x \in D_A$. Így $\langle Ax, y_1\rangle + \langle Ax, y_2\rangle = \langle x, A^*(y_1)\rangle + \langle x, A^*(y_2)\rangle$. $\langle Ax, y_1 + y_2\rangle = \langle x, A^*(y_1) + A^*(y_2)\rangle$, $\forall x \in D_A$. Ebből következik, hogy $A^*(y_1 + y_2) = A^*(y_1) + A^*(y_2)$. Hasonlóan igazolható $A^*(\lambda g) = \lambda A^*(g)$.

Tétel:
Legyen $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor. Ekkor $A^* : X \to X$ korlátos lineáris operátor és $\|A^*\| = \|A\|$.

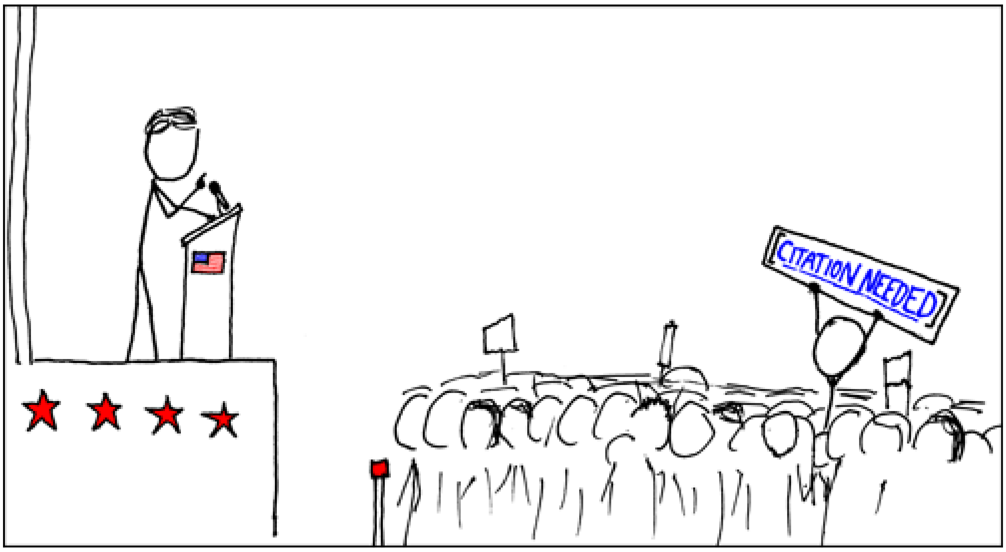
Bizonyítás:
Tekintsünk tetszőleges, rögzített $y \in X$ elemet! Ekkor $f(x) := \langle Ax, y\rangle$, f lineáris funkcionál korlátos is: $|f(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = (\|A\| \|y\|) \cdot \|x\|$, így $\|f\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$. A Riesz-tételből most következik, hogy $\exists! y^* \in X : f(x) = \langle x, y^*\rangle$, azaz $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$, $\forall x \in X$-re. Így $D_{A^*} = X$, $A^*y = y^*$. Továbbá $\|A^*y\| = \|y^*\| = \|f\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$, ezért A^* korlátos és $\|A^*\| \leq \|A\|$. Az egyenlőség abból fog következni, hogy $(A^*)^* = A \Rightarrow \|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$.

Text

Legyen $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor! Láttuk már, hogy $A^* : X \to X$ operátor korlátos és lineáris, és $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Tétel:
Legyenek $A, B : X \to X$ korlátos lineáris operátor! Ekkor

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
3. $(A^*)^* = A$
4. $I = I^*$, $0^* = 0$
5. $(AB)^* = B^* A^*$.



Bizonyítás:
Legyenek $x, y \in X$!

1. $\langle (A+B)\,x, y\rangle = \langle Ax + Bx, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle =$ $= \langle x, A^*y + B^*y\rangle = \langle x, (A^* + B^*)\,y\rangle$
2. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \overline{\langle A^*y, x\rangle} = \overline{\langle y, (A^*)^*\,x\rangle} = \langle (A^*)^*\,x, y\rangle$,tehát $Ax = (A^*)^*\,x$, $\forall x \in X \Rightarrow A = (A^*)^*$,így $\|A^*\| \leq \|(A^*)^*\| = \|A\|$,így az előző tétellel együtt: $\|A\| = \|A^*\|$.
3. $\langle x, (AB)^*\,y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle x, B^*A^*y\rangle$

Megjegyzés:
Mi a helyezet a lineáris operátorok esetén (ha nem korlátos)? $D_A, D_B \subset X$, $\overline{D_A} = \overline{D_B} = X$.

Jelölés: ha $A^*x = Ax$, $\forall x \in D_A$, $D_A \subset D_{A^*}$, akkor A^* kiterjesztése A-nak s ezt így jelöljük: $A \subset A^*$. Ezzel a jelöléssel: $(A+B)^* \supset A^* + B^*$ és $D_{A^*+B^*} = D_{A^*} \cap D_{B^*}$. Ugyanis $\forall y \in (D_{A^*} \cap D_{B^*})$ esetén $\langle (A+B)\,x, y\rangle = \langle x, (A^* + B^*)\,y\rangle$, $\forall x \in (D_A \cap D_B)$. Továbbá $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $(AB)^* \supset B^*A^*$, $(A^*)^* \supset A$ és 1 $A \subset B \Rightarrow A^* \supset B^*$.

Példák:
$X := \mathbb{K}^n$. Tudjuk, hogy ekkor minden lineáris operátor korlátos. $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris korlátos operátor. Tudjuk, hogy A reprezentálható egy $\mathcal{A}$ (valós vagy komplex elemekből alkotott), $n \times n$-es mátrixszal úgy, hogy $\mathcal{A}x = Ax$. Ekkor $A^* : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ korlátos lineáris operátor. Kérdés: mi a lesz ennek a mátrixa?

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{jk} \in \mathbb{K}$$

Ekkor $x, y \in \mathbb{K}^n$ esetén $\langle \mathcal{A}x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right]\overline{y_j} = \sum_{k=1}^{n} x_k\left[\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\overline{y_j}\right] = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{\left[\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{jk}}y_j\right]} = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{\left[\sum_{j=1}^{n}a^*_{kj}y_j\right]} = \langle x, \mathcal{A}^*y\rangle$, vagyis $a^*_{kj} = \overline{a_{jk}}$, vagyis $\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{n1} & \cdots & a^*_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}}\end{pmatrix}$.

3.1.1. Négyzetesen integrálható magú integrál operátorok valós vagy komplex függvényeken

Legyen $X := L^2(M), M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz és

$$\mathcal{K} \in L^2(M \times M), \quad (K\phi)(x) := \int_M \mathcal{K}(x, y)\,\phi(y)\,dy.$$

Tudjuk, hogy $K : L^2(M) \to L^2(M)$ lineáris operátor, node mi K^*? Legyen $\phi, \psi \in L^2(M)$, ekkor

$$\begin{aligned}
\langle K\phi, \psi\rangle &= \int_M (K\phi)(x)\,\overline{\psi(x)}dx \\
&= \int_M \left[\int_M \mathcal{K}(x,y)\,\phi(y)\,dy\right]\overline{\psi(x)}dx \\
\text{(Fubini)} \quad &= \int_M \phi(y)\left[\int_M \mathcal{K}(x,y)\,\overline{\psi(x)}dx\right]dy \\
&= \int_M \phi(y)\,\overline{\left[\int_M \overline{\mathcal{K}(x,y)}\psi(x)\,dx\right]}dy \\
(x \leftrightarrow y \text{ csere}) \quad &= \int_M \phi(x)\,\overline{\left[\int_M \underbrace{\overline{\mathcal{K}(y,x)}}_{:=\mathcal{K}^*(x,y)}\psi(y)\,dy\right]}\,dx \\
&= \int_M \phi(x)\,\overline{\left[\int_M \mathcal{K}^*(x,y)\,\psi(y)\,dx\right]}\,dy.
\end{aligned}$$

A bevezetett jelöléssel összhangban $(K^*\psi)(x) := \int_M \mathcal{K}^*(x,y)\,\psi(y)\,dy$, így az korábbiakkal együtt: $\langle K\phi, \psi\rangle = \int_M \phi(x)\,\overline{(K^*\psi)(x)}dx = \langle \phi, K^*\psi\rangle$.

Állítás:
Tetszőleges A lineáris operátor esetén (melyre $D_A \subset X$, $\overline{D_A} = X$) A^* zárt operátor.

Bizonyítás:
Azt kellene belátni, hogy ha $y_j \in D_{A^*}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \to y$ X-ben, továbbá $(A^*y_j) \to z$ X-ben $\Rightarrow y \in D_{A^*}$ és $A^*y = z$. Tudtuk, hogy $\langle Ax, y_j\rangle = \langle x, A^*y_j\rangle$, $\forall x \in D_A, \forall j$, így $j \to \infty$ esetén $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$, $\forall x \in D_A$. Ez azt jelenti, hogy $y \in D_{A^*}$ és $z = A^*y$.

Tétel:
Legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $\overline{R_{(\lambda I - A)}}^{\perp} = S_{\overline{\lambda}}(A^*) := \left\{x \in X : \left(\overline{\lambda} I - A^*\right) x = 0\right\}$, ahol R az értékkészletet jelöli.

Bizonyítás:
Világos, hogy $R_{(\lambda I - A)}$ lineáris altér, ezért $\overline{R_{(\lambda I - A)}}$ zárt altér. Másrészt $S_{\overline{\lambda}}(A^*)$ is zárt altér. Az $S_{\overline{\lambda}}(A^*)$ halmaz azért zárt, mert A^* folytonos lineáris operátor.

- Először tfh $y \in \overline{R_{\lambda I - A}}^{\perp}$, ekkor $0 = \left\langle \underbrace{(\lambda I - A)\, x}_{\in R_{\lambda I - A} \subset \overline{R_{\lambda I - A}}}, y \right\rangle = \langle x, (\lambda I - A)^* y\rangle$, ez igaz $\forall x \in X \Rightarrow \underbrace{(\lambda I - A)^*}_{=\overline{\lambda} I - A^*} y = 0$, vagyis $y \in S_{\overline{\lambda}}(A^*)$.
- tfh $y \in S_{\overline{\lambda}}(A^*)$,azaz $\left(\overline{\lambda} I - A^*\right) y = 0$, $\forall x \in X$,így $\langle (\lambda I - A)\, x, y\rangle = \langle x, (\lambda I - A)^* \, y\rangle = 0$,vagyis $y \perp R_{\lambda I - A}$ minden elemére $\Rightarrow y \perp \overline{R_{\lambda I - A}}$ minden elemére.

Megjegyzés:
Spec eset, mikor $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz, azaz $R_{\lambda I - A} = \overline{R_{\lambda I - A}}$. Ekkor a fenti tételből következik: $(\lambda I - A)\, x = b$ másodfajú egyenletnek létezik $x \in X$ megoldása pontosan akkor, ha $b \in R_{\lambda I - A} = S_{\overline{\lambda}}(A^*)^{\perp}$, azaz $\langle b, y\rangle = 0$ a $(\lambda I - A)^* \, y = 0$ egyenlet $\forall y \in X$ megoldására. Később látni fogjuk, hogy ha A ún. kompakt lineáris operátor, akkor $\lambda \neq 0$ esetén az $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz.

3.1.2. Szimmetrikus és önadjungált operátorok

Definíció:
Legyen X Hilbert tér, $D_A \subset X$ és $\overline{D_A} = X$ és $A : D_A \to X$ lineáris operátor. Ekkor A-t önadjungáltnak nevezzük, ha $A^* = A$ (ekkor ugyanott vannak értelmezve, $D_{A^*} = D_A$).

Definíció:
Legyen X Hilbert tér, $D_A \subset X$ és $\overline{D_A} = X$ és $A : D_A \to X$ lineáris operátor. Ekkor A-t szimmetrikusnak nevezzük, ha $A \subset A^*$. Tehát minden önadjungált operátor egyúttal szimmetrikus is.

Megjegyzés:
Ekvivalens definíció: A szimmetrikus, ha $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, $\forall x, y \in D_A$.

Példa:
Ha $X = \mathbb{K}^n$, akkor $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$-nak megfelel egy $\mathcal{A}$ mátrix. Tudjuk, hogy A^* mátrixa $\mathcal{A}^*$, melynek elemei $a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$. Ekkor A önadjungált $\Leftrightarrow a^*_{jk} = a_{jk}$, azaz $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$.

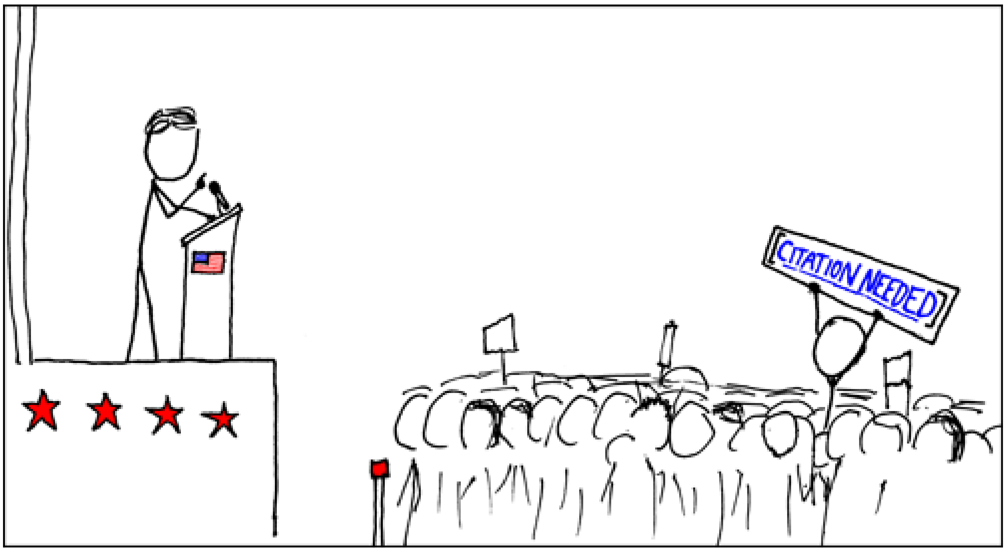
Példa:
Legyen $X := L^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz, $(K\phi)(x) := \int_M \mathcal{K}(x,y)\, \phi(y)\, dy$ korlátos operátor, ahol $\mathcal{K} \in L^2(M \times M)$. Ekkor $(K^*\phi)(x) = \int_M \mathcal{K}^*(x,y)\, \phi(y)\, dy$,

vagyis $\mathcal{K}^*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$. K önadjugnált pontosan akkor, ha $\mathcal{K}(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$ majdnem minden $x, y \in M$.

Példa:
Legyen $X := L^2(0,1)$, $(A\phi)(t) := \phi''(t)$, midőn $t \in [0,1]$, vagyis legyen A a második derivált operátor (ami lineáris)! $D_A := \{\phi \in C^2[0,1] : \phi(0) = 0, \phi(1) = 0\}$, erre belátható, hogy $\overline{D_A} = L^2(0,1)$.

Állítás:
A szimmetrikus operátor (de nem önadjungált). Ennek igazolásához tekintsünk $\phi, \psi \in D_A$ tetszőleges függvényeket, ekkor parciális integrálással:

$$\begin{aligned}
\langle A\phi, \psi\rangle &= \int_0^1 (A\phi(t))\,\psi(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \phi''(t)\,\psi(t)\,dt \\
&= [\phi'(t)\,\psi(t)]_0^1 - \int_0^1 \phi'(t)\,\psi'(t)\,dt \\
&= -[\phi(y)\,\psi'(t)]_0^1 + \int_0^1 \phi(t)\,\psi''(t)\,dt \\
&= \langle \phi, A\psi\rangle .
\end{aligned}$$



Text

Állítás:
Legyen X komplex Hilbert tér! Ha $D_A \subset X$, $A : D_A \to X$ szimmetrikus operátor,

akkor $\langle Ax, x\rangle$ értéke valós $\forall x \in \mathbb{D}_A$ esetén.

Bizonyítás:
Mivel A szimmetrikus, ezért $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$, $\forall x \in D_A$, másrészt a skaláris szorzat tulajdonságából következően: $\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle$ valós, így $\langle Ax, x\rangle$ is valós.

Megjegyzés:
Bebizonyítható, hogy ha X komplex Hilbert tér és $\langle Ax, x\rangle$ valós $\forall x \in D_A \Rightarrow A$ szimmetrikus.

Tétel:
Legyen X Hilbert tér (lehet valós is). Ha $D_A \subset X$, $A : D_A \to X$ szimmetrikus operátor, akkor A minden sajátértéke valós és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátelemek ortogonálisak.

Bizonyítás:

- Tfh $Ax = \lambda x$ valamely $0 \neq x \in D_A$ elemre, $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor $\underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\text{valós}} = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$. A norma értéke valós, így a sajátérték is az, mert szorzatuk valós.
- Tfh
$$\begin{aligned} Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$
és $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós sajátértékek. Szorozzuk skalárisan jobbról előbbit x_2-vel!
$$\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle$$
illetve
$$\langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle,$$
így
$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0 \Leftarrow \lambda_1 \neq \lambda_2} \langle x_1, x_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

Tétel:
Legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ korlátos önadjungált operátor. Ekkor $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, \|x\| = 1\}$.

Bizonyítás:
Az operátor norma definíciója szerint $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| = 1\}$. Ezért egyrészt a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|$, ha $\|x\| = 1$. Jelöljük: $\alpha := \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in X, \|x\| = 1\}$. Az előbbiek szerint $\alpha \leq \|A\|$. Belátjuk a fordított egyenlőtlenséget. Tetszőleges $x, y \in X$

elemekre

$$\begin{aligned}\langle A(x+y), x+y\rangle &= \langle Ax+Ay, x+y\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle + \underbrace{\langle Ay, x\rangle}_{=\langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle}} + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, y\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle + 2\Re\langle Ax, y\rangle .\end{aligned}$$

Hasonlóképpen:

$$\langle A(x-y), x-y\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - 2\Re\langle Ax, y\rangle .$$

A kapott 1. egyenlőségből a 2-at kivonva:

$$\begin{aligned}4\Re\langle Ax, y\rangle &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &\leqslant |\langle A(x+y), x+y\rangle| + |\langle A(x-y), x-y\rangle| \\ &\leqslant \alpha\|x+y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2 \\ &= \alpha\left(\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle^2 + \|y\|^2\right) \\ &= 2\alpha\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\Re\langle Ax, y\rangle \leqslant \frac{\alpha}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Tetszőleges $\lambda > 0$ számra:

$$\begin{aligned}\underbrace{\|Ax\|^2}_{\in\mathbb{R}_0^+} &= \langle Ax, Ax\rangle \\ &= \left\langle A\underbrace{(\lambda x)}_{:=f}, \underbrace{Ax/\lambda}_{:=g}\right\rangle \\ &= \underbrace{\langle Af, g\rangle}_{\geqslant 0} \\ &= \Re\langle Af, g\rangle \\ &\leqslant \frac{\alpha}{2}\left[\|f\|^2 + \|g\|^2\right] \\ &= \frac{\alpha}{2}\left[\|\lambda x\|^2 + \left\|\frac{Ax}{\lambda}\right\|^2\right]. \\ &= \frac{\alpha}{2}\left[\lambda^2\|x\|^2 + \frac{\|Ax\|^2}{\lambda^2}\right]\end{aligned}$$

Válasszuk: $\lambda^2 := \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, ekkor $\lambda > 0$ teljesül (feltéve, hogy $Ax \neq 0$), és

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &\leqslant \frac{\alpha}{2}\left[\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2\right] \\ &= \frac{\alpha}{2}\left[\|Ax\|\cdot\|x\| + \|x\|\cdot\|Ax\|\right] \\ &= \alpha\,\|Ax\|\cdot\|x\| .\end{aligned}$$

$\|Ax\| = 0$ triviális esetet kivéve osztva $\|Ax\| > 0$ -val: $\|Ax\| \leq \alpha \cdot \|x\|$. Ez igaz $\|Ax\| = 0$ esetén is persze. Tehát $\|A\| \leq \alpha$. Előbb azt kaptuk, hogy $\alpha \leq \|A\|$, így a mostanival együtt: $\|A\| = \alpha$.

Állítás:
Vezessük be

$$M := \sup \{\langle Ax, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\}$$
$$m := \inf \{\langle Ax, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\}$$

jelöléseket! (Ekkor a fentiek miatt $[m, M] \subset [-\|A\|, \|A\|]$, és $\max\{|m|, M\} = \|A\|$). Az A önadjungált korlátos operátor spektruma $\subset [m, M]$, más szóval, ha $\lambda \in \mathbb{K}$-ra $\lambda \notin [m, M] \Rightarrow \lambda$ reguláris érték A-ra.

Megjegyzés:
Azt eddig is tudtuk, hogy $|\lambda| > \|A\|$ esetén λ reguláris érték (ha A korlátos). Azt is tudtuk, hogy ha A szimmetrikus és $\Im\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda$ nem lehet sajátérték.

Definíció:
Legyen $A : D_A \to X$ lineáris operátor, $D_A \subset X$, $\overline{\mathbb{D}_A} = X$. Ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in D_A$, akkor A-t pozitív operátornak nevezzük (konzekvensen pozitív szemidefinitnek kéne nevezni).

Állítás:
Ha A pozitív, akkor A minden sajátértéke ≥ 0.

Bizonyítás:
$Ax = \lambda x \Rightarrow 0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$, ha $\|x\|^2 \neq 0$.

3.1.3. Izometrikus és unitér operátorok

Definíció:
Legyen X Hilbert tér! Az $A : X \to X$ operátort izometrikusnak nevezzük, ha $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. Ekkor látható, hogy A korlátos és $\|A\| = 1$.

Állítás:
Ha A izometrikus, akkor távolság és skalárszorzattartó (szögtartó).

Bizonyítás:

- $\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| = \|x - y\|$.
- Belátjuk a skalárszorzattartást valós X Hilbert tér esetén.

$$I : \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$
$$II : \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$
$$I - II : \quad \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

Így

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|Ax+Ay\|^2 - \|Ax-Ay\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle\,.\end{aligned}$$

- Komplex esetben $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right]$, így kicsit hosszabb a bizonyítás.

Következemény: ha $A: X \to X$ izometrikus operátor és $(x_1, x_2, ...)$ ortonormált rendszer, akkor $(Ax_1, Ax_2, ...)$ is ortonormált rendszer.

Kérdés: ha $(x_1, x_2, ...)$ teljes ortonormált rendszer, akkor ebből következik-e, hogy $(Ax_1, Ax_2, ...)$ is teljes ortonormált rendszer? Általában sajnos nem.

Példa:
Legyen X végtelen dimenziós, szeparábilis Hilbert tér és $(x_1, x_2, ..., x_k, ...)$ teljes ortonormált rendszer. Értelmezzük A-t! Egy $x \in X$ elemet fejtsük Fourier-sorba! $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ...$, $Ax := \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_{k+1} = c_1 x_2 + c_2 x_3 + ...$. Ez egy jól definiált lineáris operátor. Tudjuk, hogy $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$, tehát A izometrikus. Láthatjuk, hogy így $(Ax_1 = x_2, Ax_2 = x_3, ...)$ nem teljes. Az is kiolvasható A definíciójából, hogy $R_A = \overline{\mathcal{L}(x_2, x_3, ...)}$ az X-nek valódi altere, így $R_A \neq X$.

Definíció:
$A: X \to X$ izometrikus operátort unitérnek nevezzük, ha $R_A = X$.

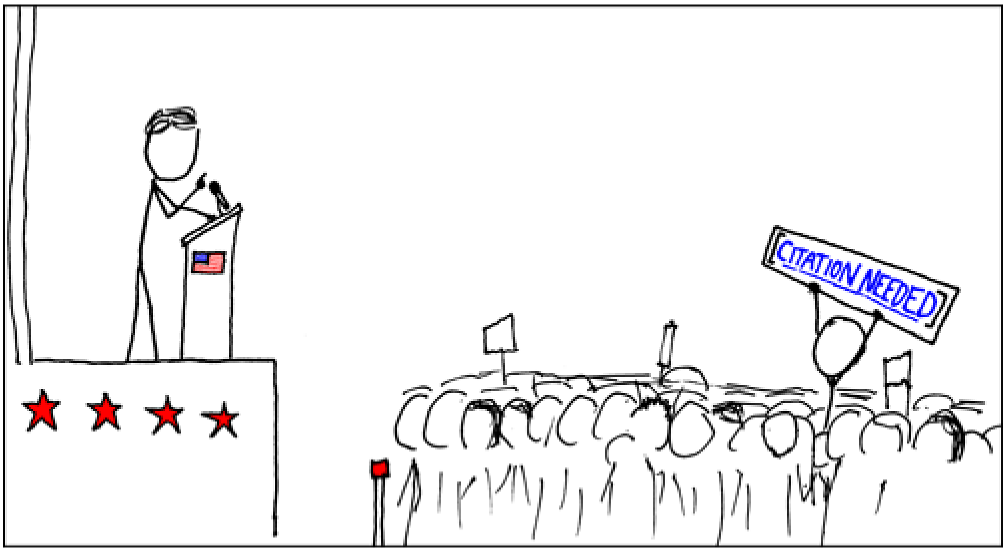
Tétel:
Egy $A: X \to X$ korlátos operátor unitér $\Leftrightarrow \exists A^{-1} = A^*$.

Bizonyítás:

- $\Rightarrow$ irányban: tfh A unitér. Ekkor A korlátossága lévén A^* értelmezve van X-n, továbbá $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in X \Rightarrow A$ injektív $\Rightarrow A^{-1}$ is létezik. Belátjuk, hogy $A^* = A^{-1}$. Egyrészt $D_{A^{-1}} = R_A = X$, mivel A unitér. Ekkor $\forall x, y \in X$ elemre $\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^*Ay\rangle \Rightarrow y = A^*Ay$, $\forall y \in X \Rightarrow A^*A = I \Rightarrow A^*AA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A^* = A^{-1}$
- $\Leftarrow$ irányban: tfh $A^* = A^{-1}$. Ekkor mivel $D_{A^*} = X \Rightarrow R_A = D_{A^{-1}} = X$, továbbá $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2$, tehát A izometrikus is.

Text

Állítás:
Ha A unitér, akkor teljes ortonormált rendszer képe szintén teljes ortonormált rendszer.



Példák unitér operátorokra:

1. Triviális példa az identitás.
2. $X := \mathbb{K}^n$. Tudjuk, hogy egy $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lineáris korlátos operátor megadható egy $\mathcal{A}$ négyzetes mátrixszal,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{A}^* = \left(\bar{\mathbf{a}}_1^T, \bar{\mathbf{a}}_2^T, ..., \bar{\mathbf{a}}_n^T\right).$$

   A leképzés pontosan akkor unitér, ha

$$A^* = A^{-1} \Leftrightarrow AA^* = I = A^*A \Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{I} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

   $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ elemei: $\mathbf{a}_j \bar{\mathbf{a}}_k^T = \langle a_j, a_k \rangle_{\mathbb{K}^n} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ ha } j = k \\ 0 \text{ ha } j \neq k \end{cases}$
   A sorvektorok tehát ortonormáltak, belátható az $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ egyenletből, hogy az oszlopvektorok is. Az ilyen – unitér operátorokat megadó – mátrixokat ortogonális mátrixoknak is nevezzük.
3. Fourier-operátor (Fourier-transzformáció): $X := L^2(\mathbb{R})$ Hilbert tér! Az $\mathcal{F}$ fourier operátort így értelmezzük az $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ függvényeken: $[\mathcal{F}(\phi)](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \phi(y)\, dy$. Látható, hogy ennek csak akkor van értelme, ha $\phi(y)$ integrálható. Tudjuk, hogy $|e^{-ixy}\phi(y)| = |\phi(y)|$, mert $|e^{-ixy}| = 1$. $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ esetén $[\mathcal{F}(\phi)](x) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} e^{-ixy}\phi(y)\, dy$ az $L^2(\mathbb{R})$ normával.

Tétel:
Az $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ operátor unitér, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ a következő képlettel adható meg: $[\mathcal{F}^{-1}(\psi)](y) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-N}^{N} e^{ixy}\psi(x)\,dx$, ahol a limesz $L^2(\mathbb{R})$ norma szerinti.

Bizonyítás (vázlatos):

1. Először értelmezzük $\mathcal{F}$-et a következő spec. alakú lépcsős függvényeken: $\phi_\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ 0 és } \alpha \text{ között van} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$
   Egyszerű számolással $(\mathcal{F}\phi_\alpha)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-e^{-i\alpha x}}{ix}$. Bevezetjük a $\mathcal{G}$ operátort $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ függvényekre: $(\mathcal{G}\phi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\phi(y)\,dy$. Hasonlóan adódik: $(\mathcal{G}\phi_\alpha)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\alpha x}-1}{x}$. Állítás: tetszőleges ϕ_α, ϕ_β esetén $\langle \mathcal{F}\phi_\alpha, \mathcal{F}\phi_\beta \rangle = \langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle$, $\langle \mathcal{G}\phi_\alpha, \mathcal{G}\phi_\beta \rangle = \langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle$ és $\langle \mathcal{F}\phi_\alpha, \phi_\beta \rangle = \langle \phi_\alpha, \mathcal{G}\phi_\beta \rangle$ is igaz.
2. Kiterjesztjük az állítást lépcsős függvényekre, amik láthatóan ilyen függvények lineárkombinációi.
3. A lépcsős függvények sűrűn vannak $L^2(\mathbb{R})$-ben. Hasonló állítást kapok ezen lépcsős függvényekre. $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-t a linearitás és korlátosság megtartásával egyértelműen kiterjeszthetjük $L^2(\mathbb{R})$-re.
4. $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ képlete $L^2(\mathbb{R})$-en megadandó.

Megjegyzés:
$\mathcal{F}$ operátor $\mathbb{R}^n$-ben: $(\mathcal{F}\phi)(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle}\phi(y)\,dy$, ha $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R})$, ekkor $\mathcal{F}$ unitér.

3.1.4. Véges rendű operátorok

Definíció:
Legyen X Hilbert tér! Egy $A : X \to X$ korlátos operátort véges rendűnek nevezünk, ha R_A véges dimenziós.

Példa:
Legyenek $\phi_1, ..., \phi_m$ lineárisan függetlenek, akárcsak $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$, mind X-beli elemek! Az A operátort így értelmezzük: $A : X \to X$, $A(f) := \sum\limits_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j$. Látható, hogy ez véges rendű. Világos, hogy A operátor lineáris, $R_A = \mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m)$ véges dimenziós. A korlátos is: $\|Af\|_X \le \sum\limits_{j=1}^{m} \|\langle f, \psi_j \rangle \phi_j\| = \sum\limits_{j=1}^{m} |\langle f, \psi_j \rangle| \cdot \|\phi_j\|$, melyre a Cauchy-Schwarz szerint $\le \sum\limits_{j=1}^{m} \|f\|_X \cdot \|\psi_j\|_X \cdot \|\phi_j\|_X = \|f\| \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \|\psi_j\|_X \cdot \|\phi_j\|_X$.

Állítás:
Legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ véges rendű operátor. Ekkor $\exists \phi_1, \phi_2, ..., \phi_m \in X$ lineárisan függetlenek és $\exists \psi_1, \psi_2, ..., \psi_m \in X$ lineárisan függetlenek a fentiek szerint,

és A a fenti alakú.

Bizonyítás:
R_A véges, m dimenziós lineáris altér. Legyenek $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$ lineárisan független elemek, $\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m) = R_A$. Ezek választhatók úgy, hogy ortonormáltak legyenek (a Schmidt eljárással). Ekkor, ha $f \in X$, $Af = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j(f)\phi_j$.Ebben a c_j együtthatók egyértelműek, $c_j(f) = \langle Af, \phi_j \rangle$. Látjuk, hogy c_j lineáris funkcionál, továbbá korlátos is, és $|c_j(f)| = |\langle Af, \phi_j \rangle| \le \|Af\| \cdot \underbrace{\|\phi_j\|}_{=1} \le \|A\| \cdot \|f\|$. Riesz-tétel segítségével $\exists! \psi_j \in X : c_j(f) = \langle f, \psi_j \rangle \Rightarrow Af = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j(f)\phi_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j$. Nem nehéz belátni, hogy $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$ is lineárisan függetlenek.

3.2. A másodfajú egyenlet véges rendű operátorokra

Legyen X Hilbert tér (véges vagy végtelen dimenziós), $A : X \to X$ véges rendű operátor. Tekintsük az A operátornak a másodfajú egyenletét: $(\lambda I - A) f = b$, ahol $b \in X$ adott és $f \in X$ keresett. Ezt az előbbiek szerint így írhatjuk: $\lambda f - \sum\limits_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \phi_j = b$. Belátjuk, hogy $\lambda \ne 0$ esetén ez az egyenlet ekvivalens egy lineáris algebrai egyenletrendszerrel.

Az előző egyenletet jobbról ψ_k-val skalárisan szorozva: $\lambda \langle f, \psi_k \rangle - \sum\limits_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j \rangle \langle \phi_j, \psi_k \rangle = \langle b, \psi_k \rangle$, $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Keressük $\xi_j := \langle f, \psi_j \rangle$-t, adottak $a_{kj} := \langle \phi_j, \psi_k \rangle$, $\beta_k := \langle b, \psi_k \rangle$. Ezzel a jelöléssel: $\lambda \xi_k - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{kj}\xi_j = \beta_k$, $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Ez egy lineáris egyenletrendszer ξ_k együtthatókra. $\xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$, $\beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$, $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$, így $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})\xi = \beta$. Ha f kielégíti a másodfajú egyenletet $\Rightarrow \xi$ kielégíti a kapott lineáris algebrai egyenletrendszert $\lambda = 0$ esetén is!

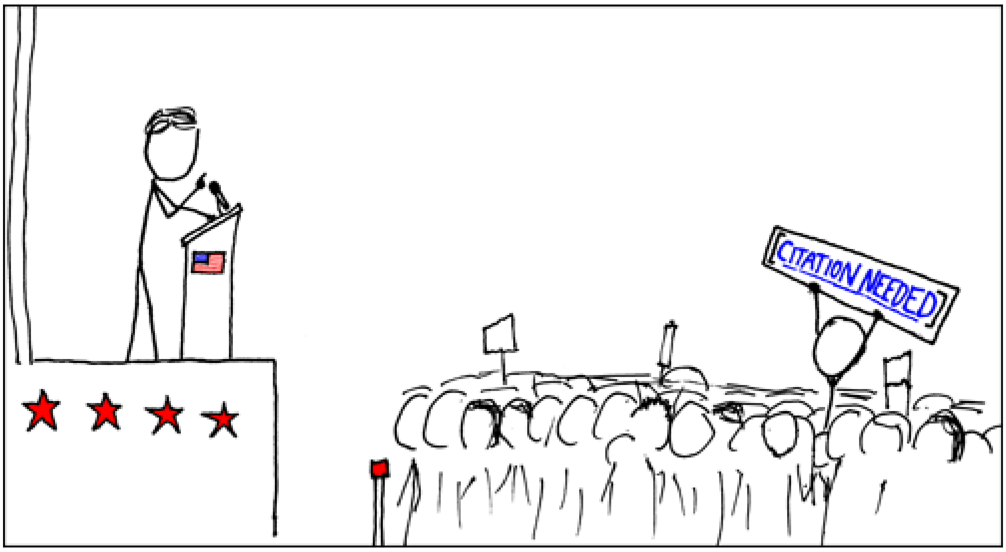
Állítás:
Legyen $\lambda \ne 0$ és tfh ξ kielégíti a lineáris algebrai egyenletrendszert! Ekkor $f := \frac{1}{\lambda} b + \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_j \phi_j$ kielégíti a véges rendű operátorra vonatkozó másodafajú egyenletet.

Bizonyítás:
Behelyettesítünk a másodfajú egyenletbe, s kihasználjuk, hogy ξ kielégíti a lineáris algebrai egyenletrendszert.

Tétel:
Egy $f \in X$ elem kielégíti a véges rendű opertárra vonatkozó másodfajú egyenletet $\lambda \ne 0$ esetén $\Leftrightarrow \xi_j = \langle f, \psi_j \rangle$ képlettel értelmezett koordinátákból álló ξ kielégíti a fenti lineáris algebrai egyenletrendszert.

Ennek alapján a véges rendű operátorokra vonatkozó másodfajú egyenlet megoldhatóságának elmélete következik a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldhatóságának elméletéből. Két eset lehetséges:

1. Ha $\lambda \neq 0$ szám az $\mathcal{A}$ mátrixnak nem sajátértéke $\Leftrightarrow \det|\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}| \neq 0$, ekkor $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})\,\xi = \beta$ egyenletben $\forall\beta \in \mathbb{K}^n \exists! \xi$ megoldás $\Rightarrow \exists! f$ megoldás a $(\lambda I - A)\,f = b$ egyenletre. Nem nehéz belátni, hogy f folytonosan függ b-től. Ekkor $\lambda \neq 0$ reguláris érték A-ra.
2. Ha $\lambda \neq 0$ az $\mathcal{A}$ mátrixnak sajátértéke $\Rightarrow \lambda$ az A sajátéréke, s a kétféle rang egyenlő. $\lambda = 0$ végtelen rangú sajátértéke A-nak (ha X végtelen dimenziós).



Text

Állítás:
Ha X végtelen dimenziós vektortér, akkor $\lambda = 0$ végtelen rangú sajátértéke az operátornak. $A\phi := \sum_{j=1}^{m} \langle\phi, \psi_j\rangle\,\phi_j$. $\lambda = 0$ sajátérték azt jelenti, hogy $A\phi = 0\phi = 0$ biztosan teljesül. Mivel ϕ_j-k lineárisan függetlenek, $\langle\phi, \psi_j\rangle = 0$, $\forall j \in \{1, 2, ..., m\} \Leftrightarrow \phi \perp \mathcal{L}\,(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m)$.

Összefoglalva: legyen X végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert tér! Ekkor egy A véges rendű operátor spektruma csak sajátértékekből áll, mégpedig a 0-tól különböző (véges sok) sajátérték véges rangú (ezek megegyeznek az $\mathcal{A}$ mátrix sajátértékeivel, s ranguk is megegyezik), a 0 pedig végtelen rangú sajátérték. Minden más λ reguláris érték.

Példa véges rangú operátorokra (elfajult magú integrálegyenletek):
$X := L^2\,(M)$, ahol M mérhető halmaz. $\mathcal{K}\,(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j\,(x)\,\psi_j\,(y)$, ahol

$\phi_j, \psi_j \in L^2(M) \Rightarrow \mathcal{K} \in L^2(M \times M)$.

$$\begin{aligned}(K\phi)(x) &= \int_M \mathcal{K}(x,y)\,\phi(y)\,dy \\ &= \int_M \left[\sum_{j=1}^{m} \phi_j(x)\,\psi_j(y)\right] \phi(y)\,dy \\ &= \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x) \int_M \psi_j(y)\,\phi(y)\,dy.\end{aligned}$$

Röviden: $K\phi = \sum\limits_{j=1}^{m} \phi_j \langle \phi, \psi_j \rangle$.

Az előbbiek alapján egy elfajult magú (elsőfajú) integrálegyenlet megoldása kiszámolható egy lineáirs algebrai egyenletrendszer megoldásával.

3.2.1. Kompakt (teljesen folytonos) operátorok

Definíció:
Egy $M \subset Y$ halmazt feltételesen (vagy relatíve) sorozatkompaktnak nevezünk, ha lezárása sorozatkompakt.

Megjegyzés:
M feltételesen sorozatkompakt, ha tetszőleges M-beli sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. $\mathbb{R}^n$-ben a feltételesen sorozatkompakt halmazok a korlátos halmazok.

Definíció:
Legyenek X, Y Banach terek! Egy $A : X \to Y$ lineáris operátort teljesen folytonosnak, avagy kompaktnak nevezünk, ha X tetszőleges korlátos halmazát feltételesen (avagy relatíve) sorozatkompakt halmazba képezi.

Megjegyzés:
Ekkor A korlátos is, továbbá két kompakt operátor összege és számszorosa is kompakt.

Állítás:
Egy $A : X \to Y$ operátor pontosan akkor kompakt, ha $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in X$ korlátos sorozatra $(Ax_k)_{k \in \mathbb{N}}$-ból kiválasztható konvergens részsorozat.

Állítás:
Legyen X Hilbert tér, $A : X \to X$ véges rendű operátor. Ekkor A kompakt.

Tétel:
Legyenek X, Y Banach terek, $A_j \in L(X, Y)$ operátorok kompaktak, és $\exists A \in L(X, Y) : \lim\limits_{j \to \infty} A_j = A \Rightarrow A$ is kompakt operátor.

Bizonyítás:
Legyen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ egy X -beli korlátos sorozat. Bizonyítani akarjuk, hogy $(Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ -nek van konvergens részsorozata Y -ban. Tudjuk, hogy $A \in L(X,Y)$. Mivel A_1 kompakt, ezért az $(A_1 x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatból kiválasztható Y -ban konvergens részsorozat, legyen ez $(A_1 x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$! $(A_2 x_{k1})_{k\in\mathbb{N}}$ -ből kiválasztható konvergens részsorozat, legyen ez $(A_2 x_{k2})_{k\in\mathbb{N}}$. $(A_3 x_{k2})_{k\in\mathbb{N}}$ -ből megint kiválasztható...

$$\begin{array}{lllllll}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots & \\
A_1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_1 x_{k1})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\
A_2 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_2 x_{k2})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_j & x_{1j} & x_{2j} & \cdots & x_{kj} & \cdots & \text{részsorozatra } (A_j x_{kj})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergens} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Tekintsük az $(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ átlós sorozatot. Belátjuk, hogy $(Ax_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens Y -ban. $(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ az eredeti $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak olyan részsorozata, amely bármelyik sorban levő részsorozatnak a részsorozata, bizonyos indextől kezdve.

$$\begin{aligned}
\|Ax_{kk} - Ax_{mm}\|_Y =& \|[Ax_{kk} - A_j x_{kk}] + [A_j x_{kk} - A_j x_{mm}] + [A_j x_{mm} - Ax_{mm}]\|_Y \\
\leqslant& \|(A - A_j)\, x_{kk}\|_Y + \|A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\|_Y + \|(A_j - A)\, x_{mm}\|_Y \\
\leqslant& \|A - A_j\|_{L(X,Y)} \cdot \|x_{kk}\|_X + \\
& + \|A_j x_{kk} - A_j x_{mm}\|_Y + \|A_j - A\|_{L(X,Y)} \cdot \|x_{mm}\|_X
\end{aligned}$$

$(x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat, ehhez $\exists c > 0 : \|x_{kk}\| \leq c$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim\limits_{j\to\infty} \|A_j - A\| = 0$, ezért $\exists j_0 : j \geq j_0 \Rightarrow \|A_j - A\| \leq \varepsilon$. Válasszuk pl: $j = j_0$. Mivel $(A_{j_0} x_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens, ezért $\exists k_0 : k, l \geq k_0 \Rightarrow \|A_{j_0} x_{kk} - A_{j_0} x_{ll}\| \leq \varepsilon$. Tehát $k, l \geq k_0$ esetén $\|Ax_{kk} - Ax_{ll}\|_Y \leq c\varepsilon + \varepsilon + c\varepsilon = (2c+1)\,\varepsilon \Rightarrow (Ax_{kk})$ Cauchy sorozat.

Következmény: kompakt operátorok alteret képeznek $L(X,Y)$-ban.

Tétel (bizonyítás nélkül):
Legyen X szeparábilis Hilbert tér. Ha $A : X \to X$ kompakt operátor, akkor $\exists A_j : X \to X$ véges rendű operátorok, hogy $\lim\limits_{j\to\infty} \|A_j - A\|_{L(X,X)} = 0$.

Összefoglalva: ha X szeparábilis Hilbert tér, akkor az $A : X \to X$ korlátos operátor kompakt $\Leftrightarrow$ előáll véges rendű operátorok sorozatának norma szerinti limeszeként.

Példa:
Legyen $X = L^2(M)$ Hilbert tér, $K : L^2(M) \to L^2(M)$ négyzetesen integrálható magú integráloperátor, $(K\phi)(x) := \int_M \mathcal{K}(x,y)\, \phi(y)\, dy$. Ez a K operátor kompakt. Ennek igazolásának alapgondolata: tudjuk, hogy $L^2(M)$ szeparábilis Hilbert tér (végtelen dimenziós). Legyenek ebben teljes ortonormált rend-

szerek $\psi_1, \psi_2, ...$ illetve $\phi_1, \phi_2, ...$ Ekkor $\mathcal{K}(x,y) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j,k\leq m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y)\right)$, $\mathcal{K}_N(x,y) = \sum\limits_{m=1}^{N}\sum\limits_{j,k\leq m} c_{jk}\phi_j(x)\psi_k(y)$, $\lim\limits_{N\to\infty}\|\mathcal{K}_N - \mathcal{K}\|_{L^2(M\times M)} = 0$. $\mathcal{K}_N$-nek véges rendű operátorok felelnek meg. $\|K_N - K\|_{L(L^2(M),L^2(M))} \to 0$, ha $N \to \infty$.

3.2.2. Másodfajú egyenlet kompakt operátorokra

Legyen X szeparábilis Hilbert tér, és benne egy $A : X \to X$ kompakt operátor. Tekintsük a $(\lambda I - A) f = b$ másodfajú egyenletet, melyben $\lambda \neq 0$ rögzített. Tudjuk, hogy A kompakt operátor tetszőleges előírt pontossággal megközelíthető egy B véges rendű operátorral. $\exists A_0 : X \to X$ véges rendű operátor, hogy $\|A - A_0\| < |\lambda|$. $B_0 := A - A_0 \Leftrightarrow A = A_0 + B_0$, ahol A_0 véges rendű, és $\|B_0\| < |\lambda|$. Tehát a másodfajú egyenlet így írható:

$$[\lambda I - (A_0 + B_0)]\, f = b \Leftrightarrow (\lambda I - B_0)\, f = b + A_0 f.$$

$|\lambda| > \|B_0\| \Rightarrow |\lambda| > B_0$ korlátos operátor spektrálsugara $\Rightarrow \lambda$ reguláris érték B_0 operátorra nézve $\Rightarrow$ a legutóbbi egyenlet ekvivalens:

$$f = (\lambda I - B_0)^{-1}(b + A_0 f) = \underbrace{(\lambda I - B_0)^{-1} b}_{\text{adott}} + (\lambda I - B_0)^{-1} A_0 f.$$

λ-val beszorozva, átrendezve:

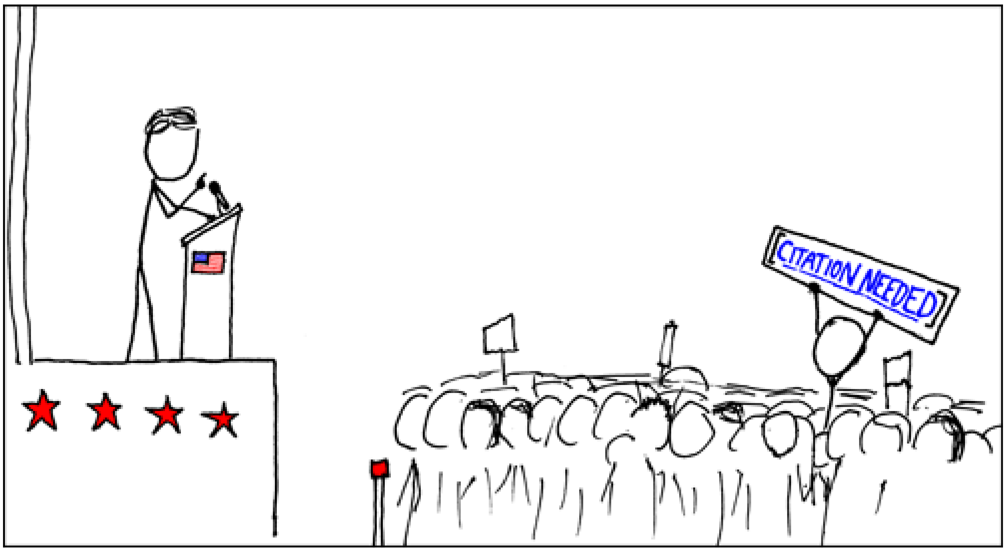
$$\lambda f - \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1} A_0}_{:=B:=B_\lambda} f = \underbrace{\lambda(\lambda I - B_0)^{-1}}_{:=g}.$$

A bevezetett jelöléssel $(\lambda I - B_\lambda)\, f = g$.

Észrevétel: B_λ véges rendű operátor, mert A_0 véges rendű operátor. Legyen $\delta > 0$ rögtített szám, és válasszuk A_0-t úgy, hogy $\|A - A_0\| < \delta$ legyen. Ekkor az előbbi gondolatmenet érvényes $\forall\lambda$-ra, A_0 nem függ λ-tól, ha $\lambda \geq \delta$ (de δ-tól igen). A_0 véges rendű operátor $\lambda \geq \delta$ esetén, és $A_0 f = \sum\limits_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j\rangle \phi_j$ alakban írható. $Bf = B_\lambda f = \lambda(\lambda I - B_0)^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m}\langle f, \psi_j\rangle \phi_j = \sum\limits_{j=1}^{m}\lambda\langle f, \psi_j\rangle(\lambda I - B_0)^{-1}\phi_j$. A másodfajú egyenlet: $\lambda f - \sum\limits_{j=1}^{m}\lambda\langle f, \psi_j\rangle(\lambda I - B_0)^{-1}\phi_j = g = g_\lambda$.

Text

Tehát kaptuk, hogy $\lambda f - \sum\limits_{j=1}^{m}\lambda\langle f, \psi_j\rangle(\lambda I - B_0)^{-1}\phi_j = g = g_\lambda$. Ez megfelel egy lineáris algebrai egyenletrendszernek: $\lambda\mathcal{I}\xi - \mathcal{B}_\lambda\xi = \beta_\lambda$. Ekkor $\det(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{B}_\lambda) = 0$ egyenlet gyökei a sajátértékek. A mátrix $(\mathcal{B}_\lambda)$ és az operátor (B_λ) sajátértékei azonosak az eredeti operátor (A) sajátértékeivel, és rangjuk is azonos. Belátható, hogy a mátrix elemei a λ változónak holomorf függvényei! Így a determináns is holomorf függvénye λ-nak. Tudjuk, hogy egy holomorf függvény gyökei nem torlódhatnak egy véges pontban, hacsak nem az azonosan 0 függvény. Mivel $\lambda < \|A\|$, ezért csak véges sok gyök van. Tehát tetszőleges



rögzített δ esetén A operátornak véges sok δ-nál nagyobb abszolút értékű sajátértéke van, s ezek véges rangúak.

Tétel:
Ha A kompakt operátor, akkor A-nak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke van, a 0-tól különböző sajátértékek véges rangúak, s a sajátértékek csak a 0-ban torlódhatnak. (Gondoljunk csak a $\delta := 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ esetre!)

Tétel (biz. nélkül):
minden $\lambda \neq 0$, ami nem sajátérték, az reguláris érték A (kompakt operátorra) nézve.

Következmény: ha $\lambda \neq 0$ nem sajátérték, $(\lambda I - A) f = b$ másodfajú egyenletnek $\forall b$-re létezik egyetlen f megoldás, és ez folytonosan függ b-től.

Mi a helyzet, ha λ sajátérték?

Emlékeztető: tetszőleges korlátos lineáris operátor esetén

$$\overline{R_{\lambda I - A}}^{\perp} = S_{\overline{\lambda}}(A^*) \Leftrightarrow \overline{R_{\lambda I - A}} = S_{\overline{\lambda}}(A^*)^{\perp} .$$

Ha $R_{\lambda I - A}$ zárt altér, akkor $R_{\lambda I - A} = \overline{R_{\lambda I - A}} = S_{\overline{\lambda}}(A^*)^{\perp}$.

Tétel:
Ha A kompakt operátor, akkor $\lambda \neq 0$ esetén $R_{\lambda I - A}$ zárt altér.

Bizonyítás:
Látható, hogy $R_{\lambda I - A}$ lineáris altér. Azt kell bizonyítani, hogy $R_{\lambda I - A}$ zárt halmaz. Legyen tetszőleges $\psi_j \in R_{\lambda I - A}$ és $\exists \lim \psi_j = \psi$, ekkor $\psi \in R_{\lambda I - A}$? Mivel $\psi_j \in R_{\lambda I - A} \Rightarrow \exists \phi_j \in X : (\lambda I - A) \phi_j = \psi_j$. Jelöljük:

$$S_\lambda (A) := \{\phi \in X : (\lambda I - A) = 0\} .$$

Ekkor $S_\lambda(A)$ zárt lineáris altér (A folytonos). A Riesz-tétel következtében

$$X := S_\lambda(A) \oplus S_\lambda(A)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in X \exists! x_1, x_2 : x_1 \in S_\lambda(A), x_2 \in S_\lambda(A)^\perp,$$

ahol $x = x_1 + x_2$. Ennek megfelelően $X \ni \phi_j = f_j + g_j$, ahol $f_j \in S_\lambda(A)$. $g_j \in S_\lambda(A)^\perp$,

$$\psi_j = (\lambda I - A)\phi_j = \underbrace{(\lambda I - A) f_j}_{0} + (\lambda I - A) g_j \Rightarrow (\lambda I - A) g_j = \psi_j.$$

Kis állítás (a bizonyításon belül)::
$(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat X-ben.

Bizonyítás (a kis állításé):
Indirekt feltesszük, hogy $\exists (g_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \|g_{j_k}\|_X = \infty$. Legyen $h_{j_k} = \frac{g_{j_k}}{\|g_{j_k}\|_X}$, ekkor $\|h_{j_k}\|_X = 1$. $(\lambda I - A) g_{j_k} = \psi_{j_k}$ egyenletet osztva $\|g_{j_k}\|$-val: $(\lambda I - A) h_{j_k} = \frac{\psi_{j_k}}{\|g_{j_k}\|_X} \to 0_X$, ugyanis ψ_j konvergens $\Rightarrow$ korlátos. $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda h_{j_k} - A h_{j_k}) = 0_X$. (h_{j_k}) korlátos sorozat (mert $\|h_{j_k}\| = 1$), A kompakt operátor, ezért $\exists \left(\widetilde{h}_{j_k}\right)$ részsorozat, amelyre $\left(A\widetilde{h}_{j_k}\right)$ konvergens $\Leftrightarrow \left(\lambda\widetilde{h}_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ is konvergens. $\lambda \neq 0 \Rightarrow \left(\widetilde{h}_{j_k}\right)$ konvergens, $\left(\widetilde{h}_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \to h_0 \Rightarrow (\lambda I - A)\widetilde{h}_{j_k} \to 0 \Rightarrow (\lambda I - A) h_0 = 0$. Ebből következik, hogy $h_0 \in S_\lambda(A)$. Másrészt $h_{j_k} = \frac{g_{jk}}{\|g_{jk}\|}$, $g_{j_k} \in S_\lambda(A)^\perp \Rightarrow h_{j_k} \in S_\lambda(A)^\perp \Rightarrow$ limeszben $h_0 \in S_\lambda(A)^\perp$. Másrészt $h_0 \in S_\lambda(A)$, így $h_0 = 0$, de ez meg nem lehet, mert $\left\|\widetilde{h}_{j_k}\right\| = 1 \Rightarrow \|h_0\| = 1$ kéne lennie.

Tehát $(\lambda I - A) g_j = \psi_j$, $\lim(\psi_j) = \psi$, $\|g_j\|_X$ korlátos. Mivel A kompakt és g_j korlátos $\Rightarrow \exists \widetilde{g}_{j_k}$ részsorozat, hogy $A\widetilde{g}_{j_k}$ konvergens. ψ_{j_k} is konvergens $\Rightarrow \lambda g_{j_k}$ is konvergens, $\lambda \neq 0 \Rightarrow (g_{j_k})$ konvergens. $g_{j_k} \to g_0$ X-ben, $g_0 \in X$. $(\lambda I - A) g_0 = \psi \Rightarrow \psi \in R_{\lambda I - A}$.

Tétel
(bizonyítás nélkül): legyen $A : X \to X$ kompakt operátor. Ekkor A^* is kompakt. Továbbá $\lambda \neq 0$ az A-nak sajátértéke $\Leftrightarrow \overline{\lambda}$ sajátértéke A^*-nak, és ekkor a rangok egyenlők.

Összefoglalás (Fredholm alternatíva): legyen $A : X \to X$ kompakt operátor, $\lambda \neq 0$ tetszőleges szám s $(\lambda I - A) f = b$ másodfajú egyenlet. Ekkor két eset lehetséges:

1. Ha $\lambda \neq 0$ az A-nak nem sajátértéke (legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok, véges rangú, 0-ban torlódó sajátértékek), akkor a másodfajú egyenletnek $\forall b \in X$ esetén $\exists! f$ megoldása és ez folytonosan függ b-től ($(\lambda I - A)^{-1}$ folytonos)
2. Ha $\lambda \neq 0$ sajátérték, akkor a másodfajú egyenletnek a megoldása nem egyértelmű, a homogén egyenletnek véges sok lineárisan független megoldása van. A megoldás

pontosan létezik, ha $b \perp S_{\overline{\lambda}}(A^*)$ minden elemére. Ez annyi db ortogonalitási feltétel, amennyi a λ sajátérték rangja.

3.2.3. Önadjungált kompakt operátorok

Tétel:
Legyen X szeparábilis Hilbert tér, $A : X \to X$ kompakt és önadjungált operátor, $A \neq 0$. Ekkor $\exists \lambda_1$ sajátérték: $|\lambda_1| = \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\|_X = 1\}$.

Megjegyzés:
Ha λ_1 az A operátor olyan sajátértéke, amelyre $|\lambda_1| = \|A\|$ és x_1 olyan sajátelem, hogy $\|x_1\| = 1$, azaz $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $\|x_1\| = 1$, akkor $|\langle Ax_1, x_1\rangle| = |\langle \lambda_1 x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1 \langle x_1, x_1\rangle| = |\lambda_1| = \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle : \|x\|_X = 1|\}$. Más szóval, az $x \mapsto |\langle Ax, x\rangle|$, ahol $\|x\| = 1$, ez a függvény felveszi a suprémumot az $x = x_1$ sajátelemen, a maximum (ami most a suprémum is) értéke $= |\lambda_1|$. Fordítva: ha x^* olyan, hogy $\|x^*\| = 1$, és arra $|\langle Ax, x\rangle|$ maximális, akkor ez sajátelem és a maximum egyenlő a sajátérték abszolút értékével. Ugyanis $|\langle Ax^*, x^*\rangle| \leq \|Ax^*\| \cdot \|x^*\| \leq \|A\| \cdot \|x^*\|^2 = \|A\|$, a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor $Ax^* \parallel x^*$, azaz $Ax^* = const \cdot x^*$.

További sajátértékek, sajátelemek keresése.
Legyen $X_1 := \{x \in X : x \perp x_1\}$, ahol $A_1 := A|_{X_1}$, a leszűkítés, és $Ax_1 = \lambda_1 x_1$.

Állítás:
X_1 invariáns altér, azaz $x \in X_1 \Rightarrow Ax \in X_1$.

Bizonyítás:
Tfh $x \in X_1$! $\langle Ax, x_1\rangle = \langle x, Ax_1\rangle = \langle x, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1 \langle x, x_1\rangle = 0$, tehát $Ax \in X_1$. Az előbbi tételt alkalmazhatjuk az A_1 operátorra X_1 Hilbert térben. Ekkor $\exists \lambda_2$ sajátérték, hogy $|\lambda_2| = \|A_1\| = \sup\{\langle A_1 x, x\rangle : \|x\|_X = 1, x \in X_1\}$. A maximum helye x_2 sajátelem helyén van, $\lambda_2 x_2 = Ax_2$, $x_2 \perp x_1$. Így egymás után megkaphatjuk az A operátor sajátértékeit és sajátelemeit, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ....$ Ha A véges rendű, akkor az eljárás véges sok lépés után befejeződik.

Tétel:
Legyenek az A önadjungált operátor sajátértékei λ_1, λ_2,... és sajátelemei x_1, x_2,... A sajátelemekről feltehető, hogy ortonormált rendszert alkotnak. Ekkor $\forall x \in X$ elemre $Ax = \sum_k \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k$. Az (x_k) ortonormált rendszert kibővítve a $\lambda = 0$-hoz tartozó sajátelemek ortonormált rendszerével, akkor ezek egy teljes ortonormált rendszert alkotnak.