

Jegyzőkönyv  
a  
hangfrekvenciás mechanikai rezgések  
vizsgálatáról (3)

Készítette: Tüzes Dániel

Mérés ideje: 2008-11-19, szerda 14-18 óra

Jegyzőkönyv elkészülte: 2008-11-26



## A mérés célja

A feladat két anyag Young modulusának és csillapítási tényezőjének meghatározása, melyet a minták sajátfrekvenciájából és rezonanciagörbéjéből számolunk ki. Feladat továbbá a rezgési módusok, a felharmonikusok vizsgálata.

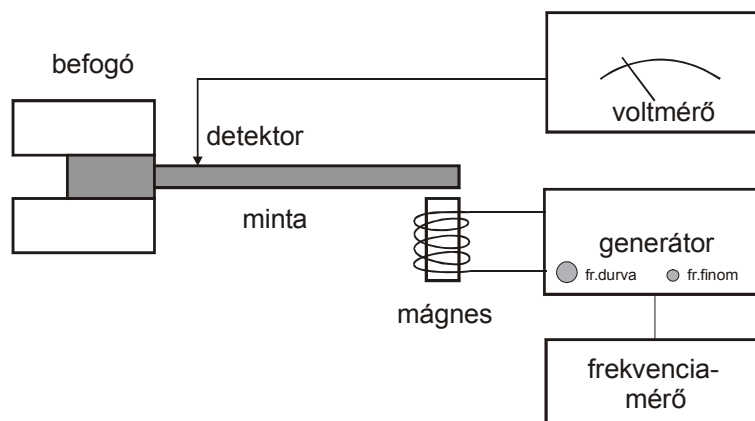
## Elvi alapok

A mérés során két mintát fogunk kényszerrezgésre készíteni, különböző rezgési módusok mellett. Ha ismerjük a minta geometriai adatait és ismerjük a tömegét, akkor az egyes rezgési módusokhoz tartozó frekvenciákból kiszámítható a Young modulus:  $\omega_i = \frac{k_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{E I}{\rho q}}$ , ahol  $\omega_i$  az egyes rezgési módusokhoz tartozó sajátfrekvencia,  $l$  a minta szabadon rezgő hossza,  $E$  a Young modulus,  $I$  a másodrendű felületi nyomaték,  $q$  a minta keresztmetszetének felülete,  $k_i$  pedig egy szorzótényező, melynek értékeit elméleti levezetés útján kaphatjuk meg. Ennek segítségével nemcsak a különböző rezgési módusokhoz tartozó sajátfrekvenciák mérésével határozhatjuk meg a Young modulus, hanem adott rezgési módus mellett hossz változtatásával kimérhetjük a sajátfrekvenciákat is, melyből szintén megadható  $E$  értéke.

A rezgési amplitúdó függ a gerjesztető kényszertől, annak nagyságától és frekvenciájától is. A rezonancia görbe mérésénél a minta amplitúdó függését mérjük ki a gerjesztő erő frekvenciájának függvényében, mikor a gerjesztő frekvenciája közel esik az egyik sajátfrekvenciához. A rezonanciagörbe félérték szélességéből meghatározhatjuk a csillapítási tényezőt:  $\kappa = \pi \Delta f$ , ahol  $\Delta f$  a félérték szélesség.

## A mérési módszer ismertetése

A mérés során használt egyik minta egy téglatest, a másik egy olyan alapján téglatest szerű test, melynek vége vastagított, hogy a befogást megkönnyítse, és ezáltal tisztábbak rezgések. A mérési elrendezés ismertetéséhez tekintsük a jobbra levő ábrát! A befogó fej egy jól illeszkedő satupofa, mely satu egy nagy fémtányérra van rögzítve, mely fémtányér alátámasztása gondosan kivitelezett, hogy az asztal rezgései ne terjedjenek tovább a mintára.



A minták fémből voltak, így adott a lehetőség egy elektromágneses elveken nyugvó gerjesztőre, mely rezgésbe hozza a mintánkat. Mérésünk során a mágneses teret fogjuk változtatni a minta szabad végénél. Megfontolandó, hogy a mintát akkor is rezgésre tudjuk készíteni ezzel a módszerrel, ha az nem kellőképp mágnesezhető. Ennek tárgyalását a melléklet műben találjuk. Ugyanígy tudhatjuk, hogy ezzel az elrendezéssel egy rezgési modust kétszer állíthatunk elő, egyik esetben, mikor a generátor frekvenciája megegyezik a rezgési modushoz tartozó sajátfrekvenciával, másik esetben mikor a generátor frekvenciája annak fele.

A kitérést a minta befogáshoz közeli részén vizsgáljuk, hogy a modustól függetlenül mindig tapasztaljunk kitérést. Ezt a szempontot a rezgő téglatest befogástól távolabbi vége is teljesíti,

azonban a befogáshoz közeli vég esetén a detektor kevésbé torzítja a rezgést, az általa kifejtett állandó erő kisebb mértékben módosítja a lemezre ható harmonikus gerjesztő erőt. A detektor egy bakelit-lemez-lejátszóból kiszuperált olvasófej, melyben piezoelektromos kristály található. Ezt a mintára helyezve, a kristályon megjelenő feszültséget voltmérőre kötve mérhető a kitérések nagysága.

Első mérési feladatként állandó hossz mellett keressük meg a rezgési módusokhoz tartozó frekvenciáját a szélesített végű mintának. A generátor frekvenciáját változtatva keressünk lokális amplitúdó maximumokat. Minden talált gerjesztő frekvenciához – az elvi alapokban tárgyaltak szerint – tartozik egy másik is, melyek ugyanazt a rezgési modust állítják elő, és frekvenciáik aránya közel 2.

Második mérési feladatként az alap modus környezetében vizsgáljuk az amplitúdó frekvencia függését. Megkeresve az amplitúdó maximális értékét igyekszünk informatív amplitúdó-frekvencia párokat mérni, vagyis nagyjából azonos amplitúdó-változásonként jegyezzük le a frekvenciát.

Harmadik mérési feladatként a másik, nem bunkós végű minta esetében mértük az alap harmonikushoz tartozó frekvenciát változó hossz mellett. Azt, hogy valóban az alap harmonikust találtam meg azzal igazolom, hogy megmértem a következő rezgési modus frekvenciáját, és ha a két mért frekvencia aránya – az elvi alapokban található formulából következően – a releváns  $k$  szorzótényező aránya, akkor valóban az alap modust mértem ki.

## Mérési eredmények, hibaszámítás

### • a minták geometriai adatai

A mérés során a 14-es réz és  $A$  jelzésű – feltehetően – alumínium mintákat vizsgáltam. A mérés során az alábbi eredményeket kaptam:

14-es minta	vastagság (mm)	3,01	3,02	3,05	3,05	3,06
	szélesség (mm)	15,11	15,06	15,00	14,93	14,87
	hosszúság (mm)	100,1	100,05	-	-	-
$A$ minta	vastagság (mm)	2,02	2,04	2,03	2,02	2,00
	szélesség (mm)	15,05	15,06	15,05	15,05	15,06
	hosszúság (mm)	80,25	80,10	80,05	80,10	80,10

A tömegmérés során azt kaptam, hogy  $m_{14} = 40,1771g$  illetve  $m_A = 14,6436g$ , valamint az  $A$  minta további adataiból  $V_A = 5,572cm^3$ . Ezekből meghatározható a minták sűrűségei:  $\rho_A = (2628 \pm 3) kg / m^3$  és  $\rho_{14} = (8822 \pm 9) kg / m^3$ . A mérés hibáját a hossz mérés hibájából és az elméletileg fellépő tömegmérés hibájából számolhatjuk. A 14-es minta hosszúságmérésén kívül az adatokat a táblázatban csavarmikrométerrel mértem, ezáltal pontosságuk  $\pm 0,005mm$ , a 14-es minta hosszúságának hibája  $\pm 0,025mm$ .

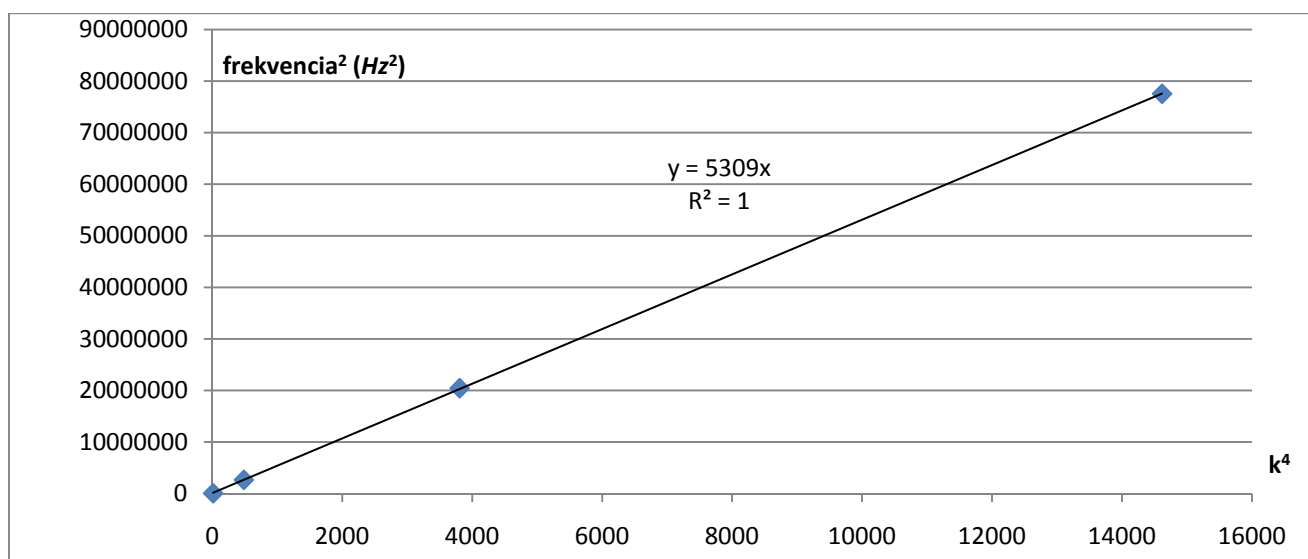
### • adott hossz mellett különböző rezgési módusok frekvenciái

A szélesített végű  $A$  mintát rögzítve a pofák közé az alábbi gerjesztéseket kaptam:

rezgési módus	feles gerjesztés (Hz)	egészes gerjesztés (Hz)	várt érték* (Hz)	eltérés
alap modus	127,36	254,52	-	-
1. felharmonikus	798,92	1633,8	1595	2,4%
2. felharmonikus	2255,3	4521,5	4466	1,2%
3. felharmonikus	4394,7	8806,0	8836	0,3%

\*: az elvi alapokban tárgyaltak szerint, ha ismerjük az alap modushoz tartozó frekvenciát, akkor annak ismeretében az elméleti levezésből következő  $k$  értékek alapján kiszámolhatjuk a következő rezgési modus várt frekvenciáját.

Az eredményeket grafikonon is ábrázolom, vízszintes tengelyen a rezgési modust a  $k$  számmal jellemző mennyiség negyedik hatványát, a függőleges tengelyen a frekvencia második hatványát tüntetve fel.



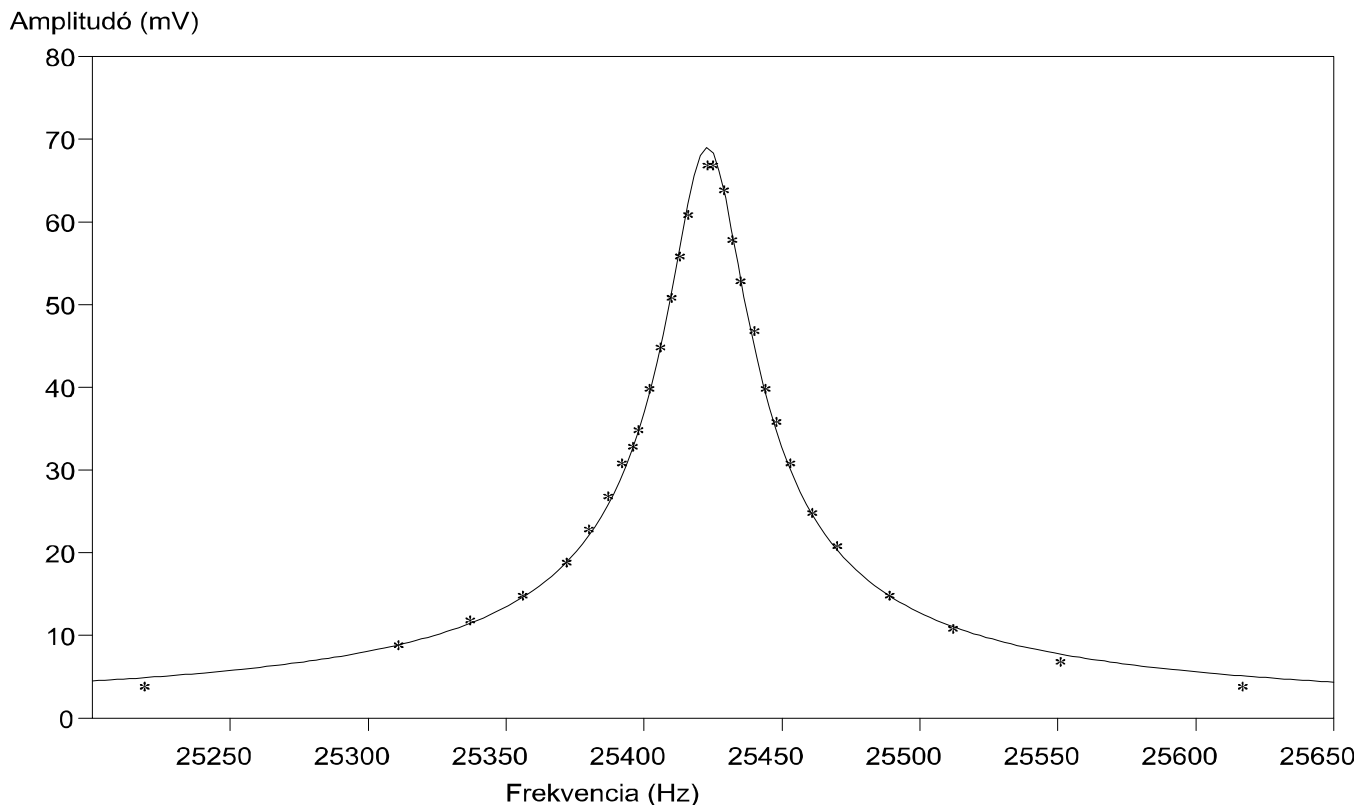
A mért eredményekből kiszámolható a minta Young modulusa. A kiszámolásához szükséges továbbá tudni a minta keresztmetszetét, ami  $q = 30,4 \text{ mm}^2$ ,  $I = \frac{ab^3}{12} = 10,4 \text{ mm}^4$ , így a Young modulus értéke  $E = (6,66 \pm 0,23) \cdot 10^{10} \text{ N / m}^2$ . A hiba nagyságát az egyenes illesztés hibájából, valamint a  $\frac{\Delta E}{E_o} = 2 \frac{\Delta f}{f_o} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + 4 \frac{\Delta I}{I} + 2 \frac{\Delta b}{b}$  felhasználásával kaphatjuk.

- rezonanciagörbe**

Az A jelzésű minta amplitúdó(feszültség)- frekvenciafüggéseit az alábbi táblázat mutatja:

feszültség (mV)	frekvencia (Hz)	feszültség (mV)	frekvencia (Hz)
67	254,23	67	254,25
61	254,16	64	254,29
56	254,13	58	254,32
51	254,10	53	254,35
45	254,06	40	254,44
40	254,02	47	254,40
35	253,98	36	254,48
33	253,96	31	254,53
31	253,92	25	254,61
27	253,87	21	254,7
23	253,80	15	245,89
19	253,72	11	255,12
15	253,56	7	255,51
12	253,37	4	256,17
9	253,11		
4	252,19		

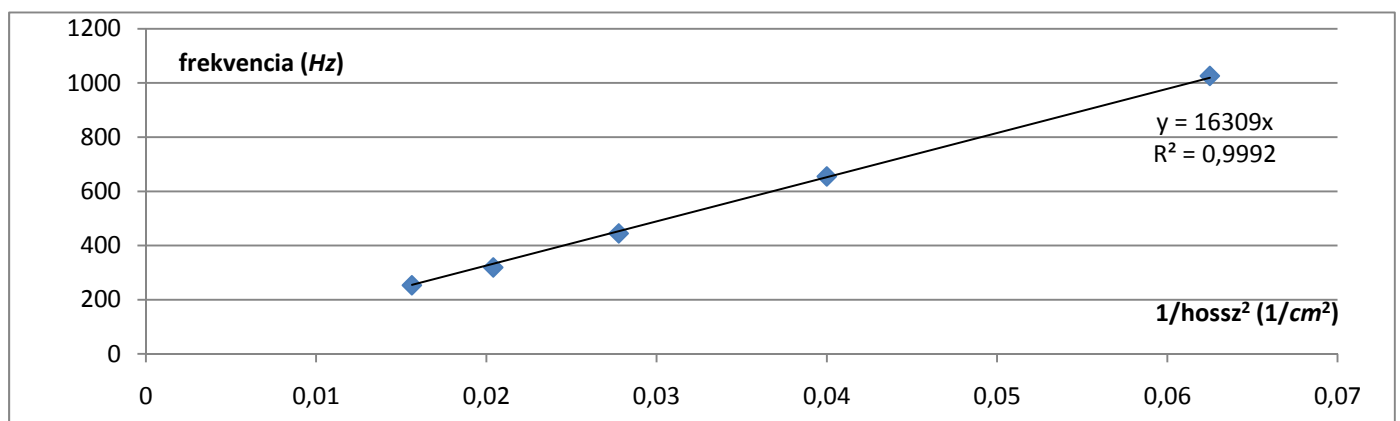
A mért eredményeket a méréshez mellékelt programmal kiértékeltem, azonban használati útmutató nélkül nem tudtam rávenni azt a helyes iterációra, így a mellékelt ábrára illesztett elméleti görbe szemmel illesztett. Továbbá nem tudtam tizedes tört értékeket megadni a frekvenciánál, így a mérték 100×-osát adtam meg. Az ábráról leolvasva kiszámolható a helyes görbe fél érték szélessége:  $\Delta f = 0,29 \text{ Hz}$ , ebből  $\kappa = 0,91 \pm 0,07 \text{ Hz}$ .



- Változó hossz mellett az alap modus frekvenciái**

Ebben a részben a 14-es mintát vizsgáltam, különböző helyeken befogva mértem az alap modus frekvenciáját, mely eredményeket az alábbi táblázatban foglalom össze, és ábrázolom grafikusán:

hossz (cm):	8	7	6	5	4
frekvencia (Hz):	253,4	319,29	444,77	655,11	1026,0



7 cm értéknél megmértem a következő rezgési modus frekvenciáját, mely 1900,4 Hz-nek adódott, így a frekvenciák aránya közel 0,160, mely igen közel esik az elméletileg várt 0,168-hoz, továbbá az összes többi modus  $k$ -jainak négyzetaránya ennél nagyobb, vagyis valóban az alap modust mértük ki. A mérés alapján a Young modulus meghatározható, melynek értéke:  $E = (10,33 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{ N / m}^2$ . A hiba nagyságát az előzővel analóg módon kaphatjuk.

## Melléklet

Havancsák Károly: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.

**Érdekes videó:** lemez sajátfrekvenciáinak szemléltetésére lisztrel:

[http://www.indavideo.hu/video/Erdekes\\_kiserlet](http://www.indavideo.hu/video/Erdekes_kiserlet)