

- 1) Дан ориентированный граф $(\{V, s, t\}, E)$, где
 s – исток,
 t – сток,
 V – множество промежуточных вершин $v_i, i = 1, \dots, n$,
 E – множество ребер $e_j = (v_l, v_k), j = 1, \dots, m$,
 c_j – пропускная способность ребра $j, j = 1, \dots, m$,
 E_i^{IN} – множество ребер, входящих в вершину $i, i = 1, \dots, n$,
 E_i^{OUT} – множество ребер, выходящих из вершины $i, i = 1, \dots, n$,
 E_t^{IN} – множество ребер, входящих в вершину t ,
 E_s^{OUT} – множество ребер, выходящих из вершины s .

А) Сформулировать задачу о максимальном потоке.

x_j – поток по ребру j ,

$$\begin{aligned} x_j &\leq c_j, \forall j = 1, \dots, m, \\ \sum_{j \in E_i^{IN}} x_j - \sum_{j \in E_i^{OUT}} x_j &= 0, \forall i = 1, \dots, n, \\ x_j &\geq 0, \forall j = 1, \dots, m, \\ \sum_{j \in E_s^{OUT}} x_j &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Б) Сформулировать задачу о минимальном разрезе.

x_j – ребро e_j ,

y_i – вершина v_i ,

$$\begin{aligned} x_j + y_i &\geq 1, \forall j, e_j = (s, v_i) \in E_s^{OUT}, \\ x_j - y_i &\geq 0, \forall j, e_j = (v_i, t) \in E_t^{IN}, \\ x_j + y_l - y_k &\geq 0, \forall j, e_j = (v_k, v_l) \in E \setminus (E_s^{OUT} \cup E_t^{IN}), \\ x_j &\geq 0, \forall j = 1, \dots, m, \\ y_i &\geq 0, \forall i = 1, \dots, n, \\ \sum_{j \in E} c_j x_j &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Альтернативные постановки

Max-flow (Primal)	Min-cut (Dual)
variables: $ f , \{f_{uv} \mid (u, v) \in E\}$	variables: $\{d_{uv} \mid (u, v) \in E\}, \{p_u \mid u \in V\}$
maximize $ f $	minimize $\sum_{(u,v) \in E} c_{uv} d_{uv}$
subject to	subject to
$\begin{aligned} f_{uv} &\leq c_{uv} & (u, v) \in E \\ \sum_{v: (v,u) \in E} f_{vu} - \sum_{v: (u,v) \in E} f_{uv} &\leq 0 & u \in V, u \neq s, t \\ f + \sum_{v: (v,s) \in E} f_{vs} - \sum_{v: (s,v) \in E} f_{sv} &\leq 0 \\ - f + \sum_{v: (v,t) \in E} f_{vt} - \sum_{v: (t,v) \in E} f_{tv} &\leq 0 \\ f_{uv} &\geq 0 & (u, v) \in E \end{aligned}$	$\begin{aligned} d_{uv} - p_u + p_v &\geq 0 & (u, v) \in E \\ p_s - p_t &\geq 1 \\ p_u &\geq 0 & u \in V \\ d_{uv} &\geq 0 & (u, v) \in E \end{aligned}$