Tarea 2-Métodos numéricos

1st Daniel Vallejo Aldana
Maestría en Ciencias de la Computación
Centro de Investigación en Matemáticas
daniel.vallejo@cimat.mx

***Resumen*—En el presente trabajo se describirán los métodos de Bisección y de Newton-Raphson para solución de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. Así mismo se comparará el error obtenido respecto al valor real de la solución y el tiempo de solución de cada uno de los métodos.**

***Index Terms*—Newton-Raphson, Bisección**

I. Introducción

El problema de búsqueda de raíces se basa en encontrar una o más raíces o soluciones a las ecuaciones de la forma $f(x) = 0$. Lo anterior nos permite calcular una solución a la ecuación $f(x) = 0$ cuando no es fácil encontrarla de forma analítica. En el presente trabajo se abordarán dos métodos de búsqueda de raíces, el método de biseccion basado en el teorema del valor intermedio y el método de Newton-Raphson basado en la estimación de la pendiente de la curva de la función f para poder calcular nuevos puntos candidatos para solución.

II. Método/Algoritmo

II-1. Método de Bisección: El primer método evaluado en este trabajo es el método de bisección. Este método se basa en el teorema del valor intermedio que a continuación se enuncia.

Teorema 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$

Lo anterior garantiza que para una función f y un intervalo $[a, b]$ que cumplen las condiciones del Teorema 1 entonces el método de bisección siempre encontrará una solución a la ecuación $f(x) = 0$. [1]

Así mismo, la búsqueda del punto c se realiza de forma eficiente mediante búsqueda binaria. Para un punto p_i tenemos que

$$p_i = \frac{p_D + p_I}{2}$$

Donde p_D es el punto a la derecha y p_I es el punto a la izquierda. La asignación de dichos puntos ocurre de la siguiente forma

$$\begin{aligned} p = p_i &\text{ si } f(p_i) = 0 \\ p_i = p_D &\text{ si } f(p_i)f(p_D) > 0 \\ p_i = p_I &\text{ si } f(p_i)f(p_I) > 0 \end{aligned}$$

El algoritmo del método de bisección se muestra a continuación

Algorithm 1 Método de Bisección

Require: a,b, TOL, $MaxIter$,f
Ensure: p tal que $f(p) = 0$

```
i = 1, FA = f(a)
while i ≤ MaxIter do
    p = (a+b)/2, FP = f(p)
    if FP = 0 or (b−a)/2 < TOL then
        RETURN p
    end if
    i = i + 1
    if FP(FA) < 0 then
        FA = FP, a = p
    else
        FB = FP, b = p
    end if
end while
```

El valor de la tolerancia TOL usado en este trabajo fue de $\sqrt{\epsilon}$ donde ϵ está definido de la siguiente forma $\epsilon = \min\left(\{x \in \mathbb{R}_{Machine} | 1 + x > 1\}\right)$ donde $\mathbb{R}_{Machine}$ es el conjunto de números reales que pueden ser representados por la computadora en punto flotante.

II-A. *Método de Newton-Raphson*

El método de Newton se basa en la expansión de series de Taylor de una función f. Para esto, sea f una función continua y dos veces derivable, es decir $f \in C^2[a, b]$, consideramos su expansión en series de Taylor de orden 2 alrededor de p_0 y tenemos la siguiente expresión

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f^{'}(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f^2(p_0)$$

Si suponemos que $|p - p_0| < \epsilon$ con ϵ mu pequeño entonces $(p - p_0)^2 \approx 0$, luego suponiendo $f(p) = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\approx f(p - 0) + (p - p_0)f^{'}(p_0) \\ p &\approx p_0 + \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \end{aligned}$$

Lo anterior debe de ser discretizado en una serie de puntos $\{p_i\}_{i \in I}$ con I un conjunto de índices y tales que

$f(p_i) \approx 0$ pero $f^{'}(p_i) \neq 0$. El paso de actualización para esta discretización es de la siguiente forma

$$p_{i+1} = p_i + \frac{f(p_i)}{f^{'}(p_i)}$$

Si la función f es continua y dos veces derivable en $[a,b]$ se garantiza que $\lim_{i\to\infty} f(p_i) = 0$ cuando $f'(p_i) \neq 0$ para los puntos p_i [1]

El algoritmo para el método de Newton se presenta a continuación

Algorithm 2 Método de Newton

Require: p_0, TOL, $MaxIter$, f
Ensure: p tal que $f(p) = 0$
  Sea $i = 1$
  while $i \leq MaxIter$ **do**
    $p = p_0 + \frac{f(p)}{f^{'}(p)}$
    if $|p - p_0| < TOL$ or $f(p) = 0$ **then**
      RETURN p
    end if
    $p_0 = p$
  end while
  if $i = MaxIter$ and $|f(p) - 0| > \epsilon$ **then**
    No hubo convergencia del método
  end if

Ambos métodos fueron probados sobre tres funciones cuya derivada tiene expresión analítica. La primera función se muestra a continuación

$$f(x) = (ax)^3 - 21x^2 + 120x - 100 \quad a \in \{0{,}99, 1, 1{,}01\}$$
$$f^{'}(x) = 3a(ax)^2 - 42x + 120 \quad a \in \{0{,}99, 1, 1{,}01\}$$

Luego tenenemos la función $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definida de la forma

$$g(x) = 2 - \frac{\log(x)}{x}$$
$$g^{'}(x) = \frac{\log(x) - 1}{x^2}$$

Sabemos de antemano que dicha función no tiene raices reales, por lo tanto, se espera que ninguno de los métodos converja a un valor.

Finalmente tenemos la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$h(x) = \log(x^2 + 1) - e^{0{,}4x}\cos(\pi x)$$
$$h^{'}(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \pi e^{0{,}4x}\sin(\pi x) + 0{,}4e^{0{,}4x}\cos(\pi x)$$

III. RESULTADOS

III-A. *Resultados sobre la función f*

III-A1. Resultados usando método de bisección: El primer método probado para encontrar una raiz de la función f fue el método de bisección. Primero se consideró el valor de $a = 1$, el intervalo dado fue el $[-3, 4]$ ya que hay un cambio de signo en la función evaluada en los extremos de este intervalo. A continuación, en la tabla I se muestra la raíz que encontró el método, el número de iteraciones y el error respeto a la condición de paro del método. En este caso, la condición de paro es $|f(p)| < tol$ o $\frac{b-a}{s} < tol$.

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	30
Error de paro	$9{,}49949 \times 10^{-7}$
Raíz encontrada	1

Cuadro I
TABLA DE RESULTADOS CON EL MÉTODO DE BISECCIÓN PARA LA FUNCIÓN f

En la figura I, encontramos el error relativo de la estimación del método a lo largo de las iteraciones necesarias para convergencia. Recordemos que el error relativo se mide de la siguiente manera

$$RE_t = \frac{|p^* - p_t|}{|p^*|}$$

Donde p^* representa la raíz real de la función.

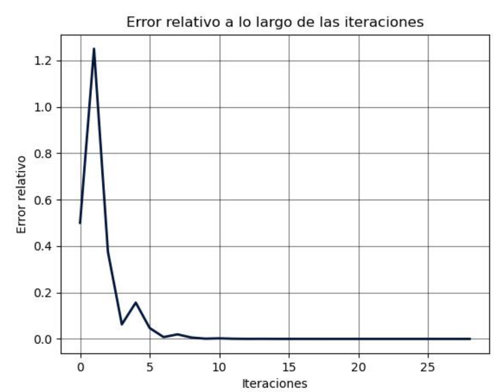

Figura 1. Error relativo de las estimaciones del método respecto a la raíz real

Variamos ahora el valor de a a 0,99 y se obtienen los siguientes resultados

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	29
Error de paro	$3{,}13821 \times 10^{-9}$
Raíz encontrada	1.002

Cuadro II
TABLA DE RESULTADOS CON EL MÉTODO DE BISECCIÓN PARA LA FUNCIÓN f Y $a = 0{,}99$

Así mismo, el error relativo a través de las iteraciones se muestra a continuación.

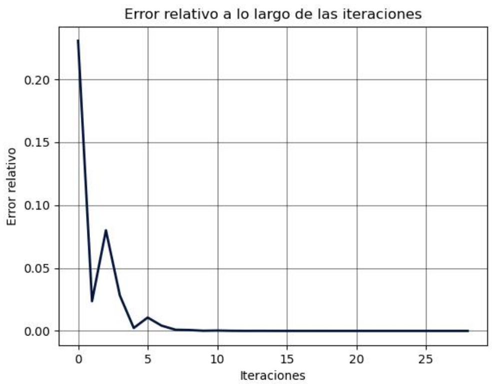

Figura 2. Error relativo de las estimaciones del método respecto a la raíz real con $a = 0{,}99$

De igual forma variamos $a = 1{,}01$ y obtenemos los siguientes resultados

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	30
Error de paro	$3{,}6486 \times 10^{-7}$
Raíz encontrada	0.999902

Cuadro III
TABLA DE RESULTADOS CON EL MÉTODO DE BISECCIÓN PARA LA FUNCIÓN f Y $a = 1{,}01$

En este caso, la raíz encontrada por el método no cambió mucho con relación a la encontrada, tomando en cuenta el coeficiente de $a = 1$. La gráfica de los errores relativos la ponemos a continuación.

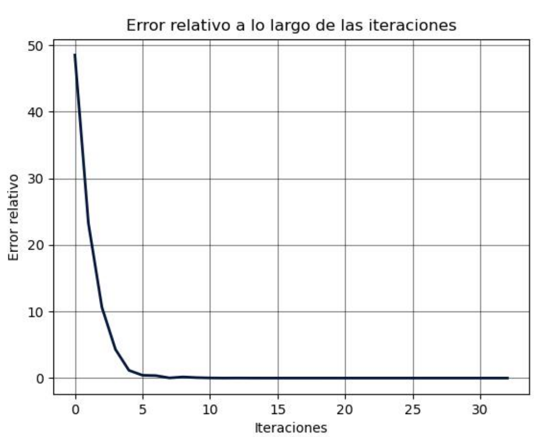

Figura 3. Error relativo de la función f, usando método de bisección y variando $a = 1{,}01$

III-A2. Resultados usando el método de Newton: Se utilizó el método de Newton para encontrar la raíz de la función f, en este caso el error de la condición de paro es de la forma

$$|p_{i+1} - p_i| < tol$$

A continuación se reportan los resultados para $a = 1$ usando el método de Newton. El punto inicial para todas las corridas del método de Newton variando el valor de a fue de -6, en este caso no importa mucho el punto inicial siempre y cuando no quede muy lejos de la raíz.

A continuación mostramos los resultados obtenidos de las corridas usando el método de Newton para diferentes valores de a. Para el caso $a = 1$ tenemos lo siguiente.

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	6
Error de paro	$7{,}945 \times 10^{-11}$
Raíz encontrada	1

Cuadro IV
RESULTADOS SOBRE f, USANDO EL MÉTODO DE NEWTON PARA $a = 1$

Para el valor de $0{,}99$ tenemos los siguientes resultados

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	6
Error de paro	$6{,}945 \times 10^{-11}$
Raíz encontrada	$1{,}00012$

Cuadro V
RESULTADOS SOBRE f, USANDO EL MÉTODO DE NEWTON PARA $a = 0{,}99$

Finalmente, para el valor de $1{,}01$ tenemos los siguientes resultados

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	6
Error de paro	$6{,}945 \times 10^{-11}$
Raíz encontrada	$0{,}999877$

Cuadro VI
RESULTADOS SOBRE f, USANDO EL MÉTODO DE NEWTON PARA $a = 1{,}01$

Podemos notar que en este caso el método de Newton mostró una convergencia más rápida que el método de bisección para todos los valores de a.

Así mismo, en la Figura 4 se muestran las gráficas de errores relativos respecto a la verdadera raíz de la función.

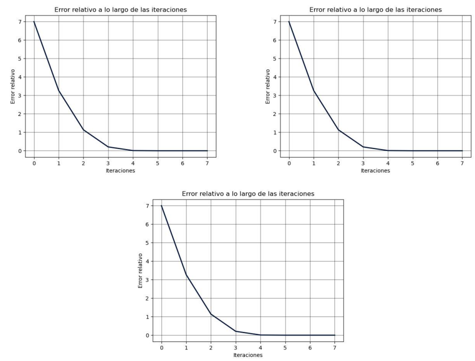

Figura 4. Error relativo respecto a la raíz real para los valores de $a = 1$ (Arriba izquierda), $a = 0{,}99$ (Arriba derecha) y $a = 1{,}01$ (Abajo centro)

III-B. *Resultados sobre la función g*

III-B1. Resultados usando el método de bisección: Notemos que la función $g(x) = 1 - \frac{\log(x)}{x}$ tiende a 2 cuando x tiende a ∞, y tiende a ∞ cuando x tiende a 0 por la derecha, por lo anterior no se satisfacen las condiciones requeridas para que el método de bisección funcione, de lo anterior dicho método no genera puntos candidatos, ya que g no satisface las condiciones que se requieren para operar.

III-B2. Resultados usando el método de Newton: El método de Newton, por el contrario, no toma en cuenta el cambio de signo, sino que la función sea continua y derivable en un intervalo, como es el caso de la función g. En el caso del método de Newton, se terminó al haber una división por 0, ya que la función $f^{'}(x) = 0$ para $x = 1$, por lo que en ese punto no se cumplen las condiciones pedidas, vemos que el algoritmo se acerca hacia ese punto a medida que avanzan las iteraciones como se puede ver en la Figura y por tanto, el método sale por divisiones por cero.

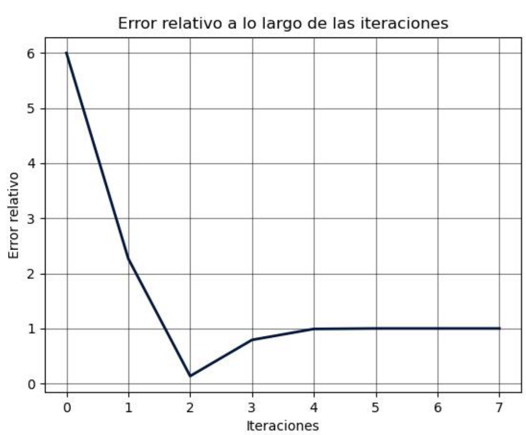

Figura 5. Punto p_i al que se iba acercando el método de Newton para la función g

III-C. *Resultados sobre la función h*

La función h tiene como peculiaridad que tiene una infinidad de raíces sobre los valores de $x \geq 0$ por lo que en principio, dependiendo de la inicialización de los puntos x_0 debería de ser el valor de la solución encontrada por el método.

III-D. *Resultados usando el método de bisección*

Mostraremos primero el resultado usando el método de bisección, para la inicialización de este método tomamos el intervalo $[-1, 0]$. Notemos que $h(-1) > 0$ y $h(0) < 0$ por lo que dichos puntos satisfacen las condiciones requeridas para el método. Los resultados del método se pueden ver a continuación en la Tabla VII

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	27
Error de paro	$1{,}42788 \times 10^{-8}$
Raíz encontrada	$-0{,}434143$

Cuadro VII
RESULTADOS SOBRE h, USANDO EL MÉTODO DE BISECCIÓN SOBRE EL INTERVALO $[-1, 0]$

La gráfica del error relativo a lo largo de las iteraciones se muestra a continuación.

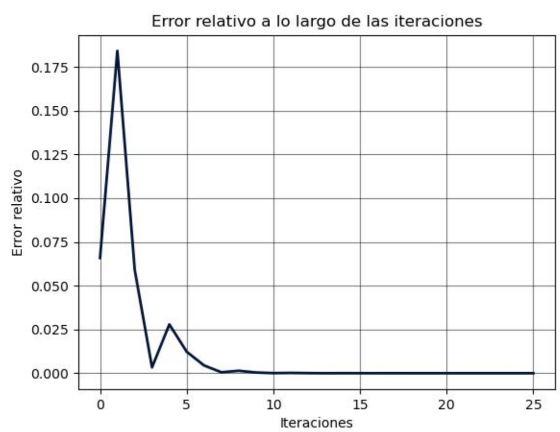

Figura 6. Error relativo del método de bisección a través de las iteraciones para la función h

III-E. *Resultados usando el método de Newton*

Para el método de Newton usamos la funciones h y su correspondiente derivada $h^{'}$ calculadas anteriormente, para este experimento fijemos el punto inicial en 0, en este caso el resultado de dicho experimento se muestra a continuación.

Tabla de resultados	
Número de iteraciones	12
Error de paro	$8{,}3436 \times 10^{-9}$
Raíz encontrada	2,23832

Cuadro VIII
RESULTADOS SOBRE h, USANDO EL MÉTODO DE NEWTON CON EL PUNTO INICIAL $x_0 = 0$

Así mismo, la gráfica de error relativo a lo largo de las iteraciones se muestra en la Figura 7.

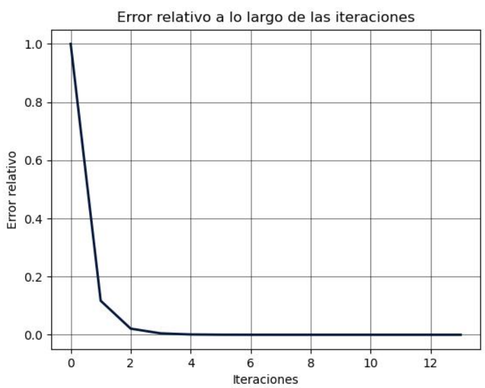

Figura 7. Error relativo a lo largo de las iteraciones usando el Método de Newton sobre la función h

Nuevamente, podemos observar que el método de Newton converge de forma más rápida respecto al número de iteraciones al método de bisección.

IV. Conclusiones

Por los experimentos realizados en el presente trabajo se puede concluir que los métodos de bisección y Newton-Raphson son dos métodos eficientes y efectivos en el cálculo de las soluciones de una función f, siempre y cuando f satisfaga las condiciones necesarias para la convergencia de los métodos. Así mismo, es posible notar que las condiciones iniciales son determinantes en la velocidad de convergencia de los métodos, ya que dependiendo de la inicialización puede ser el número de iteraciones que requiera el método para poder converger a la solución deseada.

Referencias

[1] Richard L Burden, J Douglas Faires, and Annette M Burden. *Numerical analysis*. Cengage learning, 2015.