# Tarea 13 - Métodos numéricos

Daniel Vallejo Aldana
daniel.vallejo@cimat.mx

22 de noviembre de 2022

## 1. Método/Algoritmo

Para esta tarea consideramos el método de diferencias finitas (centradas,a la derecha y a la izquierda) con diferentes tamaños de paso, de esta forma podemos comparar el efecto de considerar un valor diferente de $h$ en cada una de la estimaciones de la derivada.

Recordemos que de acuerdo a la definición de derivada de una función

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El método de diferencias finitas puede aproximar el valor de la derivada de una función $f$ en un punto $x$ mediante tres diferentes estimaciones

### 1.1. Tipos de diferencias finitas centradas

El método de diferencias finitas centradas considera la siguiente aproximación de la derivada de una función

$$f^{'}_{centered}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Para un tamaño de paso $h$, las correspondintes segunda y terceras derivadas se calculan de la siguiente manera.

$$f^{2}_{centered}(x) \approx \frac{f^{1}_{centered}(x+h) - f^{1}_{centered}(x-h)}{2h}$$
$$f^{3}_{centered}(x) \approx \frac{f^{2}_{centered}(x+h) - f^{2}_{centered}(x-h)}{2h}$$

Análogamente consideramos las diferencias finitas derechas e izquierdas definidas de la siguiente forma

$$f^1_{left}(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$
$$f^1_{right}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De igual forma podemos aproximar la segunda y al tercera derivada como en el caso de las diferencias finitas centradas.

# 2. Resultados

Comparamos tres diferentes tamaños de paso $h \in \{1, 0.1, 0.01\}$ sobre la función $f(x) = sin(4x) + cos(-sin(x))$ y usamos el error cuadrático medio como medida de error, cuya fórmula se muestra a continuación

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y - \hat{y})^2$$

Donde $y$ corresponde al valor real de la $n$ ésima derivada de la función $f$ y $\hat{y}$ corresponde a la estimación con diferencias finitas.

A continuación se muestra una tabla con lo errores de aproximación de los diferentes métodos de diferencias finitas bajo múltiples tamaños de paso $h$

| Método | $h$ | Error $f^1$ | Error $f^2$ | Error $f^3$ |
|---|---|---|---|---|
| FD centradas | 1 | 11.3724 | 121.391 | 2040.06 |
| FD izquierdas | 1 | 12.941 | 172.188 | 1671.23 |
| FD derechas | 1 | 12.6892 | 171.457 | 1669.88 |
| FD centradas | 0.1 | 0.116472 | 0.355231 | 12.013 |
| FD izquierdas | 0.1 | 0.4458 | 19.6535 | 712.609 |
| FD derechas | 0.1 | 0.423478 | 19.6676 | 711.627 |
| FD centradas | 0.01 | **0.109522** | **3.70543** $\times 10^{-5}$ | **0.0012864** |
| FD izquierdas | 0.01 | 0.113888 | 0.201249 | 7.50326 |
| FD derechas | 0.01 | 0.11169 | 0.201264 | 7.50221 |

Cuadro 1: Tabla de errores con comparación de diferentes tipos de diferencias finitas

Podemos ver que el método de diferencias finitas centradas con tamaño de paso de 0.01 obtiene mejores resultados que los otros métodos de diferencias finitas probados en el presente proyecto, a continuación adjuntamos algunas imágenes que reflejan el efecto del tamaño de paso en cada uno de los métodos de diferencias finitas.

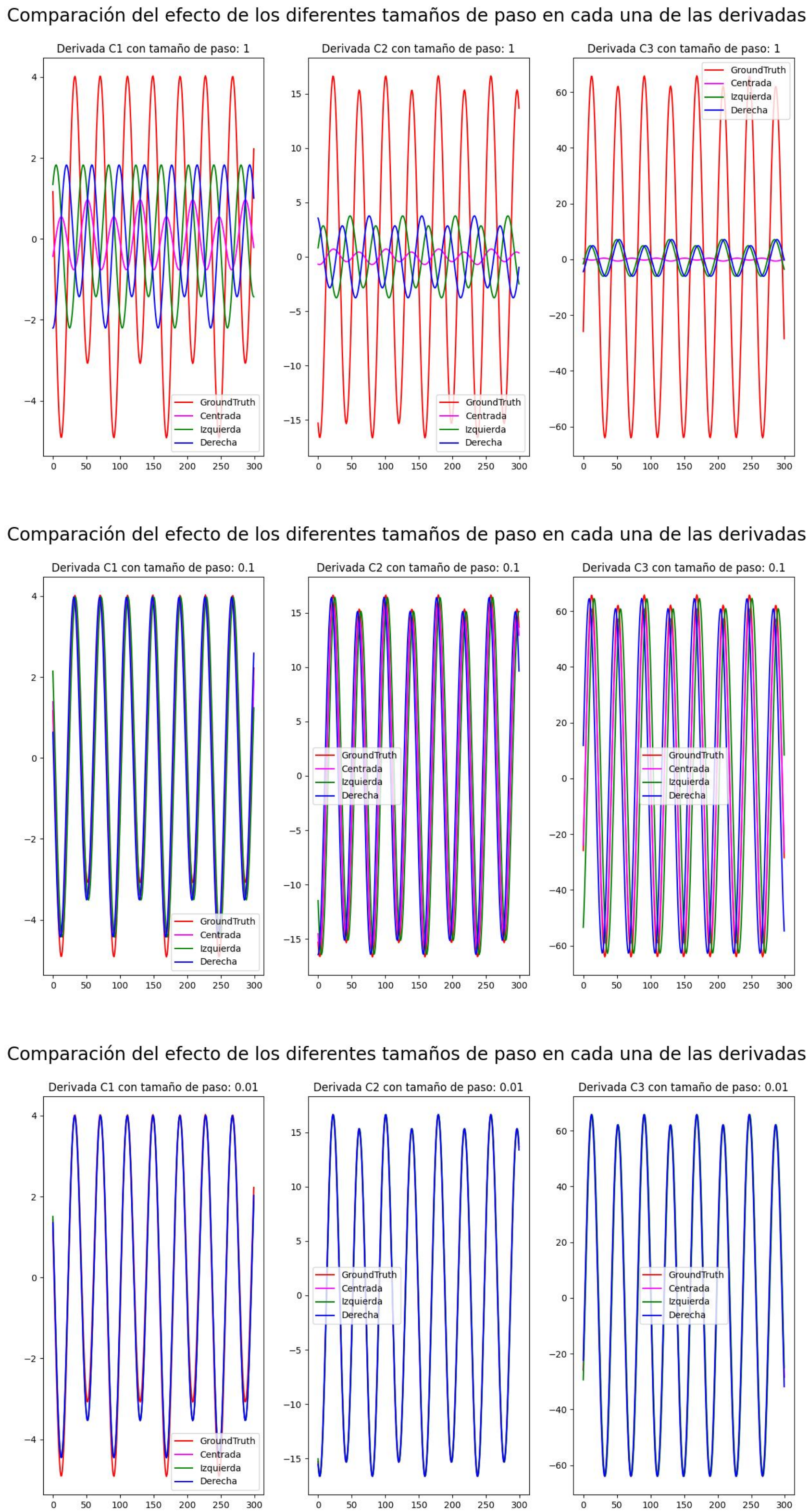
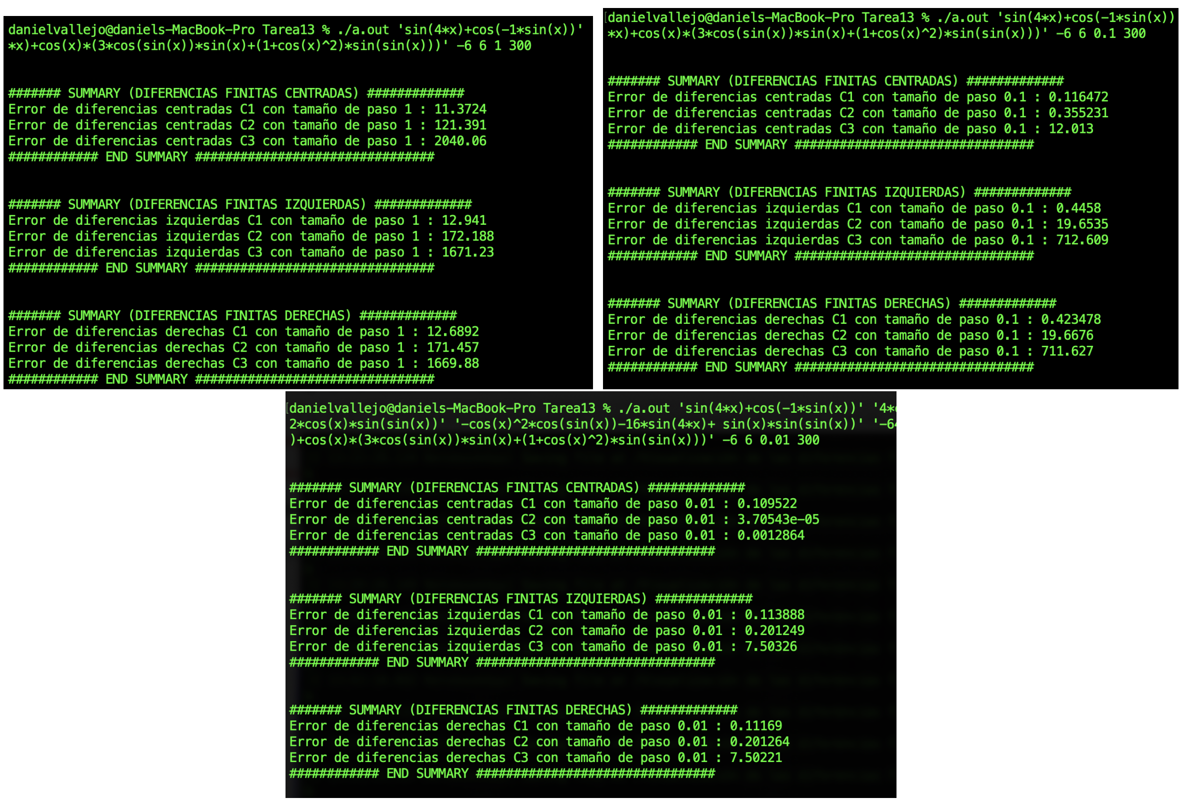



Figura 1: Comparación del efecto del tamaño de paso $h$ en los métodos de diferencias finitas

# 3. Conclusiones

Por los resultados obtenidos en el presente trabajo podemos concluir que el método de diferencias finitas es un método efectivo en la estimación de la derivada de orden $n$ de una función $f$ al ser fácil de implementar y lineal en su cálculo para una serie de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. No obstante como se demostró en el presente trabajo la correcta elección del tamaño de paso $h$, afecta el resultado en el cálculo de la estimación de la derivada. Para funciones con una gran variación convienen tamaños de paso pequeños como se demostró en los experimentos realizados.

# Apéndice A: Capturas de pantalla de la ejecución del código


```
danielvallejo@daniels-MacBook-Pro Tarea13 % ./a.out 'sin(4*x)+cos(-1*sin(x))'
*x)+cos(x)*(3*cos(sin(x))*sin(x)+(1+cos(x)^2)*sin(sin(x)))' -6 6 1 300

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS CENTRADAS) ############
Error de diferencias centradas C1 con tamaño de paso 1 : 11.3724
Error de diferencias centradas C2 con tamaño de paso 1 : 121.391
Error de diferencias centradas C3 con tamaño de paso 1 : 2040.06
########### END SUMMARY ###############################

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS IZQUIERDAS) ############
Error de diferencias izquierdas C1 con tamaño de paso 1 : 12.941
Error de diferencias izquierdas C2 con tamaño de paso 1 : 172.188
Error de diferencias izquierdas C3 con tamaño de paso 1 : 1671.23
########### END SUMMARY ###############################

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS DERECHAS) ############
Error de diferencias derechas C1 con tamaño de paso 1 : 12.6892
Error de diferencias derechas C2 con tamaño de paso 1 : 171.457
Error de diferencias derechas C3 con tamaño de paso 1 : 1669.88
########### END SUMMARY ###############################
```

```
danielvallejo@daniels-MacBook-Pro Tarea13 % ./a.out 'sin(4*x)+cos(-1*sin(x))
*x)+cos(x)*(3*cos(sin(x))*sin(x)+(1+cos(x)^2)*sin(sin(x)))' -6 6 0.1 300

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS CENTRADAS) ############
Error de diferencias centradas C1 con tamaño de paso 0.1 : 0.116472
Error de diferencias centradas C2 con tamaño de paso 0.1 : 0.355231
Error de diferencias centradas C3 con tamaño de paso 0.1 : 12.013
########### END SUMMARY ###############################

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS IZQUIERDAS) ############
Error de diferencias izquierdas C1 con tamaño de paso 0.1 : 0.4458
Error de diferencias izquierdas C2 con tamaño de paso 0.1 : 19.6535
Error de diferencias izquierdas C3 con tamaño de paso 0.1 : 712.609
########### END SUMMARY ###############################

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS DERECHAS) ############
Error de diferencias derechas C1 con tamaño de paso 0.1 : 0.423478
Error de diferencias derechas C2 con tamaño de paso 0.1 : 19.6676
Error de diferencias derechas C3 con tamaño de paso 0.1 : 711.627
########### END SUMMARY ###############################
```

```
danielvallejo@daniels-MacBook-Pro Tarea13 % ./a.out 'sin(4*x)+cos(-1*sin(x))' '4*
2*cos(x)*sin(sin(x))' '-cos(x)^2*cos(sin(x))-16*sin(4*x)+ sin(x)*sin(sin(x))' '-6
)+cos(x)*(3*cos(sin(x))*sin(x)+(1+cos(x)^2)*sin(sin(x)))' -6 6 0.01 300

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS CENTRADAS) ############
Error de diferencias centradas C1 con tamaño de paso 0.01 : 0.109522
Error de diferencias centradas C2 con tamaño de paso 0.01 : 3.70543e-05
Error de diferencias centradas C3 con tamaño de paso 0.01 : 0.0012864
########### END SUMMARY ###############################

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS IZQUIERDAS) ############
Error de diferencias izquierdas C1 con tamaño de paso 0.01 : 0.113888
Error de diferencias izquierdas C2 con tamaño de paso 0.01 : 0.201249
Error de diferencias izquierdas C3 con tamaño de paso 0.01 : 7.50326
########### END SUMMARY ###############################

####### SUMMARY (DIFERENCIAS FINITAS DERECHAS) ############
Error de diferencias derechas C1 con tamaño de paso 0.01 : 0.11169
Error de diferencias derechas C2 con tamaño de paso 0.01 : 0.201264
Error de diferencias derechas C3 con tamaño de paso 0.01 : 7.50221
########### END SUMMARY ###############################
```

Figura 2: Capturas de pantalla de los diferentes experimentos variando el tamaño de paso