Tarea 8 - Optimización 1

1st Daniel Vallejo Aldana
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
daniel.vallejo@cimat.mx

Problema 1

Usa las ecuaciones de Euler-Lagrange para buscar los extremos de las siguientes funciones

$$J[y] = \int_a^b (xy' + (y'))^2 dx$$
$$J[y] = \int_a^b (1+x)(y')^2 dx$$

Solución:

Sea $f(x, y, y')$ una función .Recordemos que la ecuación de Euler-Lagrange para encontrar los extremos de f es de la siguiente forma

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Para el caso de la expresión

$$J[y] = \int_a^b (xy' + (y'))^2 dx$$

Notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y'} = x + 2y'$$

Por lo que se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x} 2y' = -1$$

Y al resolverla tenemos que $y = -\frac{1}{4}x^2 + c_2 x + c_1$ para c_1 y c_2 constantes.

Encontraremos ahora el extremo de la función

$$J[y] = \int_a^b (1+x)(y')^2 dx$$

Para este caso notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y'} = (1+x)2y'$$

Por lo que se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x}(1+x)2y' = 0$$

Que al resolverla obtenemos que $y = c_1 \log(x+1) + c_2$ para constantes c_1 y c_2.

Problema 2

Derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange usando el método de Lagrange de

$$\int_x \int_y F(x, y, f, f_x, f_y) dy dx \quad (1)$$
$$\int_x \int_y F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) dy dx \quad (2)$$

donde $f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Solución:

Comenzaremos con la expresión

$$\int_x \int_y F(x, y, f, f_x, f_y) dy dx$$

Consideremos una perturbación no nula $\eta(z)$ que se anula en la frontera de la región y un ϵ, entonces tenemos lo siguiente

$$J[z + \epsilon\eta] = \int_x \int_y F(z, f + \epsilon\eta, \nabla(f + \epsilon\eta)) dy dx$$

Consideremos la primera variación definida como

$$\begin{aligned}\delta J &:= \left(\frac{\partial J}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0} \\ &= \epsilon \int_x \int_y \frac{\partial F}{\partial f}\eta + \frac{\partial F}{\partial \nabla f}\nabla \eta dydy\end{aligned}$$

Notemos que se debe de cumplir que $\delta J = 0$, luego consideremos la expresión

$$\int_x \int_y \frac{\partial F}{\partial \nabla f}\nabla \eta dydx$$

Utilizando integración por partes y teorema de la divergencia notamos que se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}\int_x \int_y \frac{\partial F}{\partial \nabla f}\nabla \eta dydx = -\int_x \int_y \eta \left(\nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla f} dydx\right) \\ + \eta \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla f}\right)_{\partial \Omega}\end{aligned}$$

Donde $\partial \Omega$ representa a la función evaluada en la frontera de x y y. Como η se anula en la frontera entonces tenemos la igualdad

$$\int_x \int_y \frac{\partial F}{\partial \nabla f}\nabla \eta dz = -\int_x \int_y \eta \left(\nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla f} dydx\right)$$

Por lo que al sustituir en la expresión de la primera variación se tiene la expresión

$$\delta J = \epsilon \int_x \int_y \eta \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \left(\nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla f}\right)\right) dydx$$

Como se tiene que cumplir que $\delta J = 0$ para toda $\eta(x)$ entonces obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla f} = 0$$

Que es la ecuación de Euler-Lagrenge para una función de varias variables, en este caso para n=2.

Consideraremos ahora la segunda expresión de la forma

$$\int_x \int_y F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) dydx$$

Para este caso consideremos una perturbación (η_1, η_2) entonces tenemos que $J(\epsilon) = J[u + \epsilon\eta_1, v + \epsilon\eta_2]$, como se debe de cumplir que la primera variación sea igual a cero para cualquier η no nula que se anule en la frontera, entonces tenemos que si consideramos $\eta = (\eta_1, 0)$ llegamos al caso anteriormente probado donde u es la función perturbada, análogamente para v si consideramos $\eta = (0, \eta_2)$ por lo que con lo anterior llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla u} = 0_u \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla v} = 0_v\end{aligned}$$

Que corresponde al sistema de ecuaciones de Euler Lagrange para una función con varias funciones y varias variables.

PROBLEMA 3

Obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de

$$\int_x \int_y (f-g)^2 + \lambda \left\|\nabla f\right\|^2 dydx$$

$$\int_x \int_y (p - q - p_x u - q_x v)^2 + \lambda(\left\|\nabla u\right\|^2 + \left\|\nabla v\right\|^2)$$

Para $f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g, p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Solución:

Aplicaremos lo anteriormente probado sobre la función

$$\int_x \int_y (f-g)^2 + \lambda \left\|\nabla f\right\|^2 dydx$$

De modo que obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla f} = 0_f$$

Para la función g dada.

Al realizar los cálculos nos queda la ecuación

$$2(f-g) - 2\lambda \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = 0$$

La cual podemos reescribir como

$$(f-g) - \lambda \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = 0$$

Para el caso de la expresión

$$\int_x \int_y (p - q - p_x u - q_x v)^2 + \lambda(\left\|\nabla u\right\|^2 + \left\|\nabla v\right\|^2)$$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones diferenciales para u y v con p, q funciones dadas. De lo anterior el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange queda de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla u} = 0_u$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla v} = 0_v$$

Realizando los cálculos obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$-2(p - q - p_x u - q_x v)p_x - 2\lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = 0_u$$
$$-2(p - q - p_x u - q_x v)q_x - 2\lambda \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] = 0_v$$

El cual podemos re escribir de la forma

$$(p - q - p_x u - q_x v)p_x + \lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = 0_u$$
$$(p - q - p_x u - q_x v)q_x + \lambda \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] = 0_v$$