

Tarea 5-Optimización 1

1st Daniel Vallejo Aldana
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
daniel.vallejo@cimat.mx

Resumen—El presente trabajo consta de dos partes, en la primera se describirán los métodos de región de confianza utilizando los pasos obtenidos con el método DogLeg y la implementación de búsqueda en línea, así mismo se harán tablas comparativas de los métodos, probando con la función Rosenbrock de la tarea pasada. La segunda parte de este trabajo se refiere al problema de selección asistida en donde dada una selección inicial de objeto y fondo se ajustan varias gaussianas de tal forma que al final todo el fondo y el objeto estén coloreados de azul y rojo respectivamente.

Index Terms—Barzilai Borwein, Algoritmo de región de confianza, método DogLeg, Selección asistida.

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos de región de confianza son similares a los métodos de búsqueda en línea, donde para generar los pasos se basan en un modelo que aproxima la función objetivo. En los MRC, en cada iteración se define una región de confianza en la cual se confía que el modelo se ajusta bien a la función, esta región se conoce como región de confianza.

El paso se calcula como un minimizador aproximado del modelo $m_k(p)$ restringido a la región de confianza R_c . A diferencia de los métodos de búsqueda en línea, la dirección de descenso y el tamaño de paso se calculan al mismo tiempo. El modelo de región de confianza de define como

$$m_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t p + \frac{1}{2} p^t \nabla^2 f(x_k) p$$

En un algoritmo de región de confianza se acepta o se rechaza un paso de acuerdo a la minimización que este produce.

Una forma de calcular el paso es el método DogLeg, el cual se basa en minimizar el modelo cuadrático sin restricciones a lo largo del gradiente, minimizar el modelo cuadrático si la matriz B_K es definida positiva donde B_k es generalmente una aproximación del Hessiano de la función f y finalmente el método de DogLeg trata de calcular el paso que depende del paso completo y de la dirección de máximo descenso.

El el problema de selección asistida se busca resolver el problema de ajustar una mezcla de gaussianas a un histograma minimizando la función

$$g(\alpha^j, \mu^j) = \sum_{c \in \Omega} \left(h^j(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_i^j\|_2^2}{2\sigma^2} \right) \right)^2$$

Para cada una de las clases, fondo y objeto respectivamente, en el presente trabajo se utilizó el método de Barzilai Borwein para realizar la minimización de la función.

II. MÉTODO/ALGORITMO

II-A. Esquema general de un algoritmo de región de confianza

El siguiente algoritmo corresponde al esquema general de los métodos de región de confianza.

- 1: **Input** $\hat{\Delta} > 0$, $\Delta_0 \in (0, \hat{\Delta})$ y $\nu \in [0, \frac{1}{4})$
- 2: **Output** x_k óptimo
- 3: Calcular p_k sujeto a $\|p_k\| \geq \Delta_k$
- 4: Calcular ρ_k el cual es la medida de ajuste del modelo
- 5: Si $\rho_k > \nu$ entonces $x_{k+1} = x_k + p_k$
- 6: De lo contrario $x_{k+1} = x_k$
- 7: Calcular Δ_{k+1} dados $(x_k, p_k, \Delta_k, \hat{\Delta}, \nu)$

II-B. Método Dogleg

El método DogLeg recibe como datos de entrada a B_k , g_k , Δ_k y regresa el paso p_k , dicho algoritmo calcula p_k^U de la siguiente forma $p_k^U = -\frac{g_k^t g_k}{g_k^t B_k g_k} g_k$, luego $p_k^B = -B_k g_k$ y encontramos el τ óptimo de la función

$$p(\tau) = \begin{cases} \tau p^U & \tau \in [0, 1] \\ p^U + (\tau - 1)(p^B - p^U) & \tau \in [0, 2] \end{cases}$$

y regresamos el p_k correspondiente.

II-C. Método LSTR, búsqueda en línea y región de confianza

El método de búsqueda en línea aplicado a región de confianza consiste en aplicar alguno de los métodos de búsqueda en línea vistos anteriormente para encontrar el óptimo del modelo cuadrático descrito en la parte de la introducción, el cual será el p_k que usaremos en el esquema general de algoritmos de región de confianza,

cuyo algoritmo se encuentra al inicio de esta sección.

II-D. Problema de ajuste de Gaussianas

Para el problema del ajuste de gaussianas usaremos el método de Barzilai-Borwein para minimizar la función

$$g(\alpha^j, \mu^j) = \sum_{c \in \Omega} \left(h^j(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_i^j\|_2^2}{2\sigma^2} \right) \right)^2$$

Para esto es necesario encontrar los gradientes de la función g respecto a $\alpha^j = [\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j]$ y respecto a $\mu^j = [\mu_1^j, \dots, \mu_n^j]$ donde cada $\mu_i^j \in \mathbb{R}^3$.

De esta forma vemos lo siguiente

$$\frac{\partial g(\alpha^j, \mu^j)}{\partial \alpha_k^j} = -2 \sum_{c \in \Omega} \left(h^j(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_i^j\|_2^2}{2\sigma^2} \right) \right) \exp \left(-\frac{\|c - \mu_k^j\|_2^2}{2\sigma^2} \right)$$

Para la derivada parcial de μ^j respecto a μ_k^j se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial g(\alpha^j, \mu^j)}{\partial \mu_k^j} = -2\alpha_k^j \sum_{c \in \Omega} \left(h^j(c) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \exp \left(-\frac{\|c - \mu_i^j\|_2^2}{2\sigma^2} \right) \right) \exp \left(-\frac{\|c - \mu_k^j\|_2^2}{2\sigma^2} \right) \left(\frac{c - \mu_k^j}{\sigma^2} \right)$$

Así mismo se hace una clasificación de la imagen en fondo y objeto usando las funciones

$$H(c) = \frac{h^1(c) + \epsilon}{h^1(c) + h^2(c) + 2 * \epsilon}$$

$$H(c) = \frac{h^2(c) + \epsilon}{h^1(c) + h^2(c) + 2 * \epsilon}$$

III. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se generaron las tablas contenidas en el apéndice A, donde se presentan los resultados de los resultados de los métodos a probar, comparando el número de iteraciones, el gradiente evaluado en el punto encontrado y el valor del error entre la función evaluada en el óptimo y la función evaluada en el punto obtenido.

Para el ejercicio 4 (Apéndice B) se reportan los resultados obtenidos en el problema de ajuste de gaussianas con diversas imágenes, se mostrará la imagen original, el resultado del ajuste y el ajuste usando el histograma.

IV. CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos en el presente trabajo podemos concluir que el método de DogLeg y el implementados par búsqueda en línea convergen de forma satisfactoria al resultado para los puntos iniciales dados, así mismo vemos que el método DogLeg requiere de más iteraciones para hacerlo.

De igual forma podemos ver que al ajustar dos gaussianas, en este caso una para fondo y la otra para objeto podemos separar una imagen en estas dos categorías como se puede ver en el Apéndice B, la figura 6 muestra la clasificación de fondo y objeto usando la función H, la cual vemos que no es tan buena.

APÉNDICES

Apéndice A

Tablas donde se muestran los resultados de los métodos de DogLeg y búsqueda en línea para región de confianza

Caso 1: Función Rosenbruck para $n=100$

Punto inicial $[0, -1, 2, 0, 0, \dots, -1, 2, 0]$

Método DogLeg:

Iteraciones	$\ \nabla f(x_k)\ $	$ f(x_k) - f(x^*) $
27007	1.4855140261e-05	1.9441371e-10

LSTR:

Iteraciones	$\ \nabla f(x_k)\ $	$ f(x_k) - f(x^*) $
90	9.98917829e-05	5.051793985e-09

Apéndice B

Problema de ajustes de Gaussianas

IV-1. Imagen 'grave.bmp': A continuación se presentan los resultados para la imagen 'grave.bmp' con 3 bins

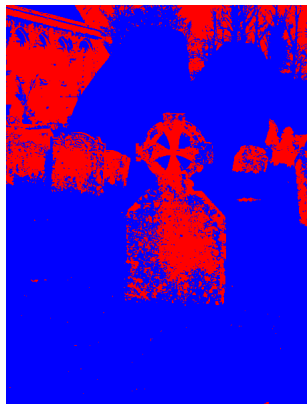


Figura 1. Imagen resultante después del ajuste

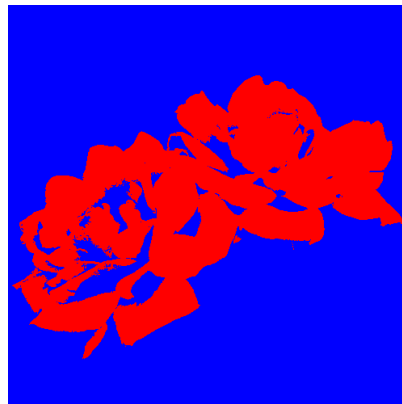


Figura 4. Imagen resultante después del ajuste



Figura 2. Selección para ajuste



Figura 5. Imagen original



Figura 3. Imagen original



Figura 6. Imagen con las funciones H

REFERENCIAS

- [1] Nocedal Jorge, *Numerical Optimization*, Segunda edición, Springer, 2006

IV-2. Imagen 'rose.png': A continuación se presentan los resultados para la imagen 'rose.png' con 3 bins, en esta imagen se ve el ajuste de las gaussianas