PERSAMAAN DIFERENSIAL I

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

1. PDB Tingkat Satu

1.1. Persamaan diferensial

1.2. Metode pemisahan peubah dan PD koefisien fungsi homogen

1.3. Persamaan diferensial eksak

1.4. Persamaan diferensial linear tingkat satu

2. Penggunaan Persamaan Diferensial Biasa Tingkat Satu

2.1. Model matematika

2.2. Berbagai penggunaan persamaan diferensial tingkat satu

3. Persamaan Diferensial Biasa Tingkat Dua

3.1. Persamaan diferensial homogen tingkat dua

3.2. Persamaan diferensial tak homogen tingkat dua

4. Penggunaan Persamaan Diferensial Biasa Tingkat Dua

   4.1. Gerak harmonis sederhana dan pegas spiral

   4.2. Rangkaian listrik

5. Pemetaan Laplace

   5.1. Pemetaan Laplace dan sifat-sifatnya

   5.2. Penggunaan pemetaan Laplace pada persamaan diferensial

1.1. Persamaan Diferensial

- ***Definisi:* Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan fungsi dan turunan-turunannya atau diferensialnya.**

- ***Definisi:* Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang melibatkan fungsi satu peubah dan turunan atau diferensialnya.**

- *Definisi:* ***Persamaan diferensial parsial*** *adalah suatu persamaan yang melibatkan fungsi dua peubah atau lebih dan turunan atau diferensialnya.*
- *Definisi:* ***Orde*** *suatu PDB adalah indeks tertinggi dari turunan yang terlibat dalam persamaannya.*
- *Definisi:* ***Derajat*** *suatu PDB adalah pangkat tertinggi dari turunan yang terlibat dalam persamaannya.*

- *Definisi:* ***Solusi*** *PDB adalah suatu fungsi atau keluarga fungsi yang memenuhi persamaannya.*

- *Definisi:* ***Solusi Umum*** *PDB adalah suatu keluarga fungsi yang memuat beberapa parameter dan memenuhi persamaannya.*

- *Definisi:* ***Solusi Khusus*** *PDB adalah suatu fungsi yang merupakan anggota dari ke-luarga fungsi solusi umumnya.*

METODE PEMISAHAN PEUBAH DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN

- *Metode pemisahan peubah digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa*

  $$y' = f(x,y),$$

  yang dengan manipulasi aljabar dapat ditulis dalam bentuk

  $$p(x)\,dx + q(y)\,dy = 0.$$

  Dengan mengintegralkan kedua ruas, maka di-peroleh solusi umum persamaan diferensialnya, yaitu:

  $$P(x) + Q(Y) = C.$$

METODE PEMISAHAN PEUBAH DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN

- Jika PDB $y' = f(x,y)$ dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{p(x)\,dx + q(y)\,dy = 0}$, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan *metode pemisahan peubah*.

Persamaan Diferensial Homogen Berordo Satu

- Definisi: Fungsi $z = f(x,y)$ dikatakan *fungsi homogen berderajat-n*, n bilangan Cacah, jika $\forall$ t $\in$ R berlaku *f* $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.
- Persmaan berbentuk

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ atau

$$f(x,y) = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} = t^0 f(x,y)$$

disebut *persamaan diferensial homogen ordo satu* jika *M* dan *N* adalah fungsi homogen yang berderajat sama, atau *f* fungsi homogen berderajat nol.

- ***Cara penyelesaian**: Gunakan substitusi $z = y/x$*

Dengan substitusi ini, persamaan diferensialnya akan menjadi suatu persamaan diferensial peubah terpisah.

Dari $y' = f(x,y)$, dengan fungsi f homogen berderajat nol, dengan mengambil $t = 1/x$, $x \neq 0$ dan $z = y/x$ diperoleh

$f(x,y) = f(1,y/x) = f(1,z)$ dan $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dz}{dx} + z$

Substitusikan ke persamaan diferensialnya, diperoleh

$$x\frac{dz}{dx} = f(1,z) - z \quad atau \quad \frac{dz}{f(1,z) - z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{f(1,z) - z} = \int \frac{dx}{x}$$

1.3. Persamaan Diferensial Eksak

- ***Definisi:*** *Pers.dif.yang berbentuk*

  $$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

  disebut eksak jika terdapat fungsi $z = F(x,y)$*, sehingga*

  $$dz = dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

- ***Teorema:*** *Misalkan fungsi* M, N, M_Y, N_X *kontinu pada daerah D. Maka Pers.dif.*

  $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, $(x,y) \in D$ *disebut* ***eksak*** *, jika dan hanya jika* $M_Y = N_X$

Penyelesaian persamaan diferensial Eksak

- *Jika M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 PD eksak, maka F_x= M dan Fy = N. Sehingga*

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=P(x,y)+C(y)$$

$$dan\ F_y(x,y)=\int M(x,y)dx=P_y(x,y)+C^{'}(y)=N(x,y)$$

$$sehingga\ C(y)=\int[N(x,y)-P_y(x,y)]dy.$$

F(x,y) dapat juga dicari dengan cara mengin-tegralkan N(x,y) terhadap y.

- *Jika M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 PD tidak eksak, yaitu* $M_y \neq N_x$*, kita dapat mencari fungsi u(x,y), sehingga*

  u M dx + u Ndy = 0 menjadi PD eksak, yaitu $(uM)_y=(uN)_x$*.. Fungsi u(x,y) disebut faktor penginteg- ralan.*

- *Jika* $\frac{1}{N}(M_y - N_x)$ *fungsi dari x saja,*

  maka fungsi u(x) selalu dapat dicari, yaitu:

$$u(x) = e^{\int \frac{1}{N}(M_y - N_x)dx}$$

- *Jika* $\frac{1}{M}(M_y - N_x)$ *fungsi dari y saja,*

  maka fungsi u(y) selalu dapat dicari, yaitu:

$$u(y) = e^{-\int \frac{1}{M}(M_y - N_x)\,dy}$$

- *Faktor pengintegralan suatu PD tak eksak tidak tunggal, tapi banyak.*

Persamaan Diferensial linear ordo satu

- *Bentuk umum $A(x)\, y' + B(x)y = C(x)$, $A(x) \neq 0$ atau $y' + p(x)y = q(x)$, p, q kontinu pada $D_p \cap D_q$*

- *Solusi Umum:*

$$y = e^{-P(x)}\left[\int e^{P(x)} q(x)\, dx + C\right], P(x) = \int p(x)\, dx$$

faktor $e^{\int p(x) dx}$ *disebut faktor integrasi.*

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR

Definisi:

Suatu persamaan diferensial linear orde *n* adalah persamaan yang berbentuk

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Kita selalu misalkan bahwa koefisien-koefisien dan fungsi *f*(*x*) merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada selang *I* dan bahwa koefisien pertama untuk setiap . Selang *I* disebut *selang definisi* (selang asal) *dari persamaan diferensial* itu. Jika fungsi *f* identik dengan nol, kita sebut Persamaan (1) *homogen*. Jika *f*(*x*) tak identik nol, Persamaan (1) dikatakan sebagai persamaan diferensial linear adalah tetap, Persamaan (1) dikatakan sebagai persamaan diferensial linear dengan *koefisien konstanta*, di lain pihak, adalah persamaan diferensial dengan *koefisien-koefisien peubah*.

Contoh-contoh persamaan diferensial linear :

$$xy' - 2y = x^3,\ \ x \neq 0 \qquad (2)$$

$$y'' + 2y' + 3y = \cos x \qquad (3)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \qquad (4)$$

Persamaan (2) adalah suatu persamaan diferensial linear takhomogen orde 1 dengan koefisien konstanta. Persamaan (3) adalah persamaan diferensial linear takhomogen orde 2 dengan koefisien konstanta. Persamaan (4) adalah persamaan diferensial linear homogen orde 4 dengan koefisien konstanta. Istilah *linear* berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah berderajat *satu* atau *nol*.

Contoh persamaan-persamaan diferensial taklinear:

$$y'' + y^2 = \sin x$$

$$y''' + yy' = x$$

$$y'' + \sin y = 0.$$

Persamaan diferensial yang pertama adalah taklinear karena suku y^2, yang kedua karena suku yy', dan yang ketiga karena suku

$$\sin y = y - \left(y^3/3!\right) + \left(y^5/5!\right) - \ldots.$$