SKRIPSI

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL LAPLACE 2D UNTUK MENENTUKAN ALIRAN AIR TANAH BERBASIS GIS (*Geographics Information System*)

Oleh:

ARDHIANSYAH

F1A1 10 067

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS HALU OLEO

KENDARI

SKRIPSI

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL LAPLACE 2D UNTUK MENENTUKAN ALIRAN AIR TANAH BERBASIS GIS

(*Geographics Information System*)

OLEH

ARDHIANSYAH
F1A1 10 067

Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji pada Tanggal 2 Agustus 2016
dan dinyatakan Telah Memenuhi Syarat

Susunan Tim Penguji

Pembimbing I

La Gubu, S.Si., M.Si
NIP. 19710131 199703 1 002

Pembimbing II

L.M.Umar Reky,RR,S.Si.M.Si
NIP. 19730923 200012 1 001

Anggota Tim Penguji

Penguji I

Rasas Raya, S.Si., M.Si.
NIP. 19661201 199702 1 001

Penguji II

Dr. La Ode Saidi, M.Kom
NIP. 196212311995121 001

Penguji III

Dr. Makkulau, M.Si
NIP. 19740814 200003 1 001

Kendari, Agustus 2016
Universitas Halu Oleo
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Dekan,

Dr. Muhammad Zamrun F., S.Si., M.Si., M.Sc.
NIP. 19720422 199803 1 001

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, sehingga penyusunan tugas akhir dengan judul **"Penerapan Teorema Karakterisasi pada Distribusi Poisson dalam Menentukan Peluang Memenangkan Suatu Permainan".** Dapat terselesaikan dan tersusun sebagaimana mestinya. Penulis sepenuhnya menyadari bahwa seluruh rangkaian kegiatan, dimulai dari tahap awal penyusunan hingga penyelesaian penulis tugas akhir ini, senantiasa mendapat bantuan dan petunjuk-petunjuk dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Bapak **La Gubu, S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing I dan Bapak **L.M. Umar Recky, R., S.Si., M.Si.** selaku dosen pembimbing II, yang dengan penuh keiklasan dan kesungguhan telah meluangkan waktunya, memberikan petunjuk, arahan dan bimbingan sejak awal penyusunan hingga selesainya tugas akhir ini.

Melalui hasil karya ini secara khusus dan dengan hati yang tulus penulis mempersembahkan untuk Ayahanda tercinta **SAHARUDIN, S.Pd.** dan Ibunda tersayang **ASNIYATI** yang telah memberikan do'a restu, pengorbanan, kasih sayang dan perhatian yang tidak terhingga. Dan untuk saudariku satu-satunya yang paling saya cintai **DESRINSYAH** yang selalu memberikan dukungan dan do'a serta kasih sayangnya.

Ucapan terima kasih juga penulis haturkan kepada:

1. Rektor Universitas Halu Oleo, Bapak Prof. Dr. Ir. H. Usman Rianse, MS.
2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Halu Oleo, Bapak Dr. Muh. Zamrun F., S.Si., M.Si., M.Sc
3. Wakil Dekan I, II, dan III Fakultas MIPA Universitas Halu Oleo.
4. Segenap Staf Administrasi di lingkungan Fakultas MIPA Universitas Halu Oleo.
5. Ketua Jurusan Matemaika Fakultas MIPA Universitas Halu Oleo, Bapak La Gubu, S.Si., M.Si.
6. Kepala Laboratorium Komputasi Matematika Fakultas MIPA Universitas Halu Oleo, Ibu Norma Muhtar, S.Si., M.Si.
7. Kepala Warintek Fakultas MIPA Universitas Halu Oleo, Bapak L.M. Umar Recky, R., S.Si., M.Si.
8. Tim Penguji Bapak Rasas raya, S.Si., M.Si., Dr. La Ode Saidi, M.Kom., Dr. Makkulau, S.Si., M.Si., yang telah memberikan saran dan kritikan, sehingga skripsi ini dapat menjadi lebih baik.
9. Seluruh staf pengajar pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Halu Oleo.
10. Terima kasih kepada seluruh keluarga besar di kabaena, terkhusus IBUku tercinta(Asniyati) dan BAPAKku tercinta (Saharudin, S.Pd.) yang selalu memberi dukungan dan nasehat yang bermanfaat demi ananda yang sedang berusaha mencapai cita-cita
11. Terima kasih kepada seluruh keluarga besar asrama lenis

Akhirnya penulis hanya bisa memanjatkan do’a semoga Allah SWT memberikan balasan yang setimpal kepada semua pihak yang telah membantu penulis, Amin.

Kendari, April 2016

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Persamaan differensial Laplace mempunyai aplikasi yang luas pada bidang rekayasa. Persamaan differensial ini dapat di jumpai pada msalah elektrostatik, dinamika fluida, pegas, konduksi panas, masalah air tanah dan lain-lain. Pendekatan persamaan differensial Laplace 2D menggunakan metode beda hingga menghasilkan sistem persamaan differensial yang berukuran besar tetapi mempunyai struktur teratur dan elemennya kebanyakan nol, sehingga penyelesaian sistim persamaan linier tersebut sering dipilih metode iterasi. Pada penelitian ini peneliti akan menerapkan persamaan differensial Laplace 2D untuk menentukan aliran air tanah. Air tanah mengalir dari tempat tinggi ke tempat rendah maka aliran air tanah Aliran mengikuti persamaan potensial. Namun menyelesaikan persamaan differensial menggunakan metode metode beda hingga umumnya menemui kesulitan pada cara memperoleh skema numeric pada batas-batas domain sesuai syarat batas yang diberikan. Oleh karena itu penting untuk mengkaji bagaimana menyelesaikan masalah syarat batas persamaan differensial laplace 2D.

Kata Kunci : *Persamaan Differensial Laplace, Metode Beda Hingga, Metode Iterasi, Aliran Air Tanah*

ABSTRACT

Laplace differential equations have wide applications in the fields of engineering. This differential equation can be encountered in msalah electrostatic, fluid dynamics, spring, heat conduction, the problem of ground water and others. 2D approaches Laplace differential equations using finite difference method results in a system of differential equations that are large but have a disordered structure and elements are mostly zero, so the settlement system of linear equations often been the method of iteration. In this study, researchers will apply a 2D Laplace differential equation to determine the flow of groundwater. Groundwater flow from the high place to lower the groundwater flow stream to follow a potential equation. However solve differential equations using finite difference methods generally encounter difficulties in obtaining a numerical scheme at domain boundaries appropriate boundary conditions are given. It is therefore important to assess how to solve the problem of boundary conditions 2D Laplace differential equation.

Keywords: Differential Equations Laplace, Different Methods Up, Iteration Method, Flow Groundwater

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan differensial Laplace mempunyai aplikasi yang luas pada bidang rekayasa. Persamaan differensial ini dapat di jumpai pada msalah elektrostatik, dinamika fluida, pegas, konduksi panas, masalah air tanah dan lain-lain.

Pendekatan persamaan differensial Laplace 2D menggunakan metode beda hingga menghasilkan sistem persamaan differensial yang berukuran besar tetapi mempunyai struktur teratur dan elemennya kebanyakan nol, sehingga penyelesaian sistim persamaan linier tersebut sering dipilih metode iterasi. Metode iterasi mempunyai kekurangan yaitu proses iterasi dapat tidak konvergen, metode iterasi menghasilkan proses iterasi yang konvergen jika dan hanya jika nilai eigen yang mempunyai nilai mutlak terbesar (spectral radius) dari matriks itersinya bernilai kurang dari 1.

Menyelesaikan persamaan differensial menggunakan metode metode beda hingga (finite differensial methods) umumnya menemui kesulitan pada cara memperoleh skema numeric pada batas-batas domain sesuai syarat batas yang diberikan. Oleh karena itu penting untuk mengkaji bagaimana menyelesaikan masalah syarat batas persamaan differensial laplace 2D.

Keunggulan penggunakan model matematika adalah penyelesaiannya dapat menggunakan metode numerik sehingga dapat diprogram dengan bahasa pemrograman komputer, sehingga dengan cepat dapat memberikan informasi yang diberikan

1.2 Rumusan masalah

Masalah dari penelitian ini yaitu bagaimana dapat menentukan aliran air tanah berbasis GIS dengan menggunakan aplikasi persamaan diferensial laplace 2D.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah dapat menentukan aliran air tanah berbasis GIS dengan menggunakan aplikasi persamaan diferensial laplace 2D

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat mempercepat cara kerja ketika kita menentukan aliran air berbasis GIS dengan menggunakan aplikasi persamaan diferensial laplace 2D.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Air Tanah

Air tanah (Ground water) adalah nama untuk menggambarkan air yang tersimpan di bawah tanah dalam batuan yang permeabel. Periode penyimpanannya dapat berbeda waktunya bergantung dari kondisi geologinya (beberapa minggu-tahun). Pergerakan air tanah dapat muncul ke permukaan, dengan manifestasinya sebagai mata air (spring) atau sungai (river). Air tanah sering disebut air tawar karena tidak berasa asin. Berdasarkan lokasi air, maka air tanah dapat dibagi dalam dua bagian yaitu air permukaan tanah dan air bawah tanah. Air permukaan tanah sangat tergantung pada air hujan. Yang termasuk air permukaan tanah adalah sungai, rawa-rawa, danau, waduk (buatan). Air bawah tanah sering disebut dengan air tekanan yaitu air yang tersimpan dalam lapisan tanah. Air bawah tanah adalah air sumur gali dan air sumur bor (Gabriel, 2001).

2.2 Deret Taylor

2.2.1 Teorema Taylor

Andaikan f sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkatan dalam suatu selang $(a - r, a + r)$. syarat yang perlu dan cukup agar taylor adalah

$$F(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

Menggambarkan fungsi *f* pada selang itu, ialah

$$\lim_{n\to\infty} R_n\,(x) = 0$$

Dengan $R_n(x)$ suku sisa dalam rumus taylor, yaitu

$$R_n(x) = \frac{f^{n-1}(c)}{(n+1)!}\,(x - a)^{n-1}$$

Dengan *c* suatu bilangan dalam selang $(a - r, a + r)$

(Edwin J. Purcell, 1999: 57)

Bukti

Pada selang $(a - r, a + r)$, fungsi *f* memenuhi hipotesis sebagai berikut:

$$F_{(x)} = P_n(x) + R_n\,(x)$$

Dengan $P_n\,(x)$ adalah polinom taylor berderajat *n* dari *f* dan $R_n\,(x)$ adalah suku sisanya yang diberikan oleh:

$$R_n\,(x) = \frac{f^{(n-1)(c)}}{(n+1)!}\,(x - a)^{n+1}$$

Dengan dianggap c diantara *x* dan *a*.

Sekarang $P_n\,(x)$ adalah jumlah *n* buah suku pertama dari deret Taylor dari *f* pada *a* jadi, bila kita buktikan bahwa $\lim_{n\to+\sim} P_n(x)$ ada dan sama dengan $f(x)$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to+\sim} R_n\,(x) = 0$, teorema tersebut akan terbukti.

dari persamaan $F_{(x)} = P_n(x) + R_n(x)$, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ maka,

$$\lim_{n \to +\sim} R_n(x) = f(x) - \lim_{n \to +\sim} P_n(x)$$

$$= f(x) - f(x)$$

$$= 0$$

Jadi teorema terbukti bahwa $\lim_{n \to +\sim} R_n(x) = 0$

(Leothold, 1991: 98)

Deret taylor merupakan dasar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah metode numeric, terutama masalah persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $U(x)$ diketaui di titik x, dan semua turunan dari T terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret taylor dapat dinyatakan nilai U pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx_i.

$$U(x_{i+1}) = U(x_i) + U''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + U''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + U'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots + U^{(n)}(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!}\, R_n$$

2.3 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui, yang dinamakan $y(x)$ dan yang akan ditentukan persamaan tersebut (Hutahean, 1993).

Persamaan diferensial biasa diartikan sebagai suatu persamaan yang melibatkan turunan pertama atau lebih dari fungsi sembarang y terhadap peubah

x; persamaan ini dapat pula melibatkan y itu sendiri, fungsi x yang diberikan dan konstanta.

2.4 Definisi Diferensial Parsial

Misalkan T suatu funngsi dua variabel x dan y. Turunan parsial T terhadap x adalah suatu fungsi, yang dinyatakan oleh $D1T$, yang nilai fungsinya di setiap titik (x,y) dalam domain T diberikan oleh:

$$D_1T(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x+\Delta x, y) - T(x,y)}{\Delta x}$$

Apabila limit ini ada. Dengan cara yang sama, turunan parsial T terhadap y adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh D_1T, yang nilai fungsinya disetiap (x,y) dalam domain T diberikan oleh:

$$D_2T(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{T(x, y+\Delta y) - T(x,y)}{\Delta y}$$

Apabila limit ini ada.

Proses pencarian suatu turunan parsial disebut pendiferensialan parsial. D_1U dibaca sebagai "*D* satu *U*" dan menyatakan fungsi yang merupakan turunan parsial U terhadap variable pertama. $D_1U(x,y)$ dibaca sebagai "*D* satu *U* dari *x* dan *y*" dan menyatakan nilai fungsi D_1U dititik (x,y).

2.5 Turunan parsial

Secara umum, karena turunan parsial suatu fungsi x dan y adalah fungsi lain dari dua peubah yang sama, maka turunan tersebut dapat diturunkan secara parsial terhadap *x* dan *y* untuk memperoleh empat turunan parsial kedua fungsi *U* yaitu:

$U_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ $\quad$ $U_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial U}{\partial y}) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$

$U_{xy} = (U_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial U}{\partial x}) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ $\quad$ $U_{yx} = (U_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial U}{\partial y}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

Kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang). Bentuk persamaan diferensial parsial order 2 dimensi adalah:

$$AU_{xx} + BU_{yx} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FT + G = 0$$

Dengan *a,b,c,d,e,f,* dan g bisa merupakan fungsi dari variabel *x* dan *y* dan variabel tidak bebas *U*.

Seperti pada persamaan diferensial biasa, disini perlu diketahui syarat batas, tetapi karena ada dua variabel bebas, syarat batasnya diberikan pada suatu lengkungan dalam bidang x-y

2.6 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas.

Tingkat *(order)* persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan yang termuat dalam persamaan diferensial parsial. Dan derajat *(degree)* persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi yang termuat dalam persamaan diferensial parsial.

2.6.1 Solusi Persamaan Diferensial Parsial

Solusi adalah cara untuk mengatasi atau menyelesaikan satu masalah (M. Dahlan, 2003: 725).

Suatu problem matematis yang berbentuk persamaan diferensial parsial, diikuti oleh beberapa syarat yang harus dipenuhi oleh penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial parsial tersebut. Syarat-syarat ini dapat menyangkut dua harga atau lebih variabel bebas, sehingga persamaan diferensial parsial tersebut disertai syarat ini, biasa disebut masalah syarat batas.

Masalah syarat awal adalah persamaan diferensial parsial yang diikuti oleh syarat yang hanya menyangkut satu titik saja. Suatu syarat batas maupun syarat awal dikatakan homogen apabila syarat tersebut dipenuhi oleh suatu fungsi f dan juga cf, dimana c adalah konstanta sebarang.

Misalkan problem yang disajikan dengan persamaan:

$$\frac{\partial^{2Y(x,u)}}{\partial x^2} = \frac{1}{\propto^2}\frac{\partial^{2Y(x,t)}}{\partial t^2} \qquad 0 \le x \le L, \qquad 0 \ge t$$

$Y(0,t) = 0 = Y(L,t)$ syarat batas

$Y(x,0) = f(x)$ Syarat Awal

$\frac{\partial Y(x,0)}{\partial t} = g(x)$

Menurut Farlow (1994), untuk menemukan solusi suatu persamaan diferensial parsial yang disertai syarat awal dan syarat batas dapat digunakan beberapa metode antara lain sebagai berikut:

1. Metode Pemisahan Variabel

   Metode ini mereduksi persamaan diferensial parsial *n* variabel ke dalam *n* persamaan diferensial biasa. Metode ini menganggap bahwa suatu penyelesaian persamaan diferensial parsial dapat dinyatakan sebagai suatu perkalian dari masing-masing fungsi yang tak diketahui yang tergantung hanya pada satu variable

2. Metode Transformasi Fourier

   Metode ini mereduksi persamaan diferensial parsial *n* variabel bebas menjadi suatu persamaan diferensial biasa. Kemudian persamaan diferensial biasa tersebut diselesaikan dan balikan transformasi Fourier dari persamaan diferensial tersebut merupakan penyelesaian persamaan diferensial parsial yang diberikan.

3. Metode Numerik

Metode ini Mereduksi persamaan diferensial parsial menjadi suatu pesamaan beda yang diselesaikan dengan program komputer. (Imam Wahyudi.2002)

2.6.2 Solusi Numerik Pada Persamaan Diferensial

Ide dasar penggunaan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah bahwa setiap turunan parsial dari persamaan diferensial yang digunakan deganti dengan suatu pendekatan beda hingga. Bila pendekatan beda hingga tersebut diterapkan seluruh titik-titik variabel yang terdapat pada model konsep, maka solusi dari rangkaian persamaan simultan yang digunakan dapat ditentukan secara langsung atau menggunakan cara iteras.

Pada suatu model yang mempunyai persamaan jarak antara titik variabel adalah $x_i = x0 + i\Delta x$ dan $y_j = y0 + j\Delta y$, akan mempunyai persamaan pendekatan beda hingga **.**

2.7 Persamaan Differensial Laplace

Bentuk persamaan differensial (PD) Laplace 2D adalah

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

Bentuk umum syarat batas (tipe robin) adalah

$$\mathrm{P}u + Q\frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{G}$$

Dengan *n* adalah vector normal satuan (vector tegak lurus pada kurva batas), P dan Q adalah bilangan konstan yang tidak bernilai nol secara serentak. Syarat batas *Dirichlet* diperoleh jika Q=0, sedangkan jika P=0 diperoleh syarat batas bertipe.

2.8 Skema Beda Hingga (finite difference)

Skema beda hingga diperoleh dari hasil pemotongan deret Taylor. Dari pemotongan tersebut diperoleh rumus-rumus beda hingga untuk mendekati turunan.

Deret taylor fungsi $u\,(x + h_0, y + k_0)$ disekitar titik (x,y) adalah

$$u(x + h_0, y + k_0) = u(x,y) + h_0 u_x(x,y) + k_0 u_y(x,y) + \frac{{h_0}^2 u_{xx}(x,y) + 2h_0 k_0 u_{xy}(x,y) + {k_0}^2 u_{yy}(x,y)}{2!} + \frac{{h_0}^3 u_{xxx}(x,y) + 3{h_0}^2 k_0 u_{xxy}(x,y) + 3h_0 {k_0}^2 u_{xyy}(x,y) + {k_0}^3 u_{yyy}(x,y)}{3!} + \dots \quad (1)$$

untuk $h_0 = h$, $k_0 = 0$, persamaan (1) menjadi:

$$u(x+h,y) = u(x,y) + hu_x(x,y)\frac{h^2u_{xx}(x,y)}{2!} + \frac{h^3u_{xxx}(x,y)}{3!} + \cdots \qquad (2)$$

untuk $h_0 = -h$, $k_0 = 0$, persamaan (1) menjadi:

$$u(x-h,y) = u(x,y) - hu_x(x,y) + \frac{h^2u_{xx}(x,y)}{2!} - \frac{h^3u_{xxx}(x,y)}{3!} + \cdots \qquad (3)$$

untuk $h_0 = 0$, $k_0 = k$, persamaan (1) menjadi:

$$u(x,y+k) = u(x,y) + ku_y(x,y) + \frac{k^2u_{yy}(x,y)}{2!} - \frac{k^3u_{yyy}(x,y)}{3!} + \cdots \qquad (4)$$

untuk $h_0 = 0$, $k_0 = -k$, persamaan (1) menjadi:

$$u(x,y-k) = u(x,y) - ku_y(x,y) + \frac{k^2u_{yy}(x,y)}{2!} - \frac{k^3u_{yyy}(x,y)}{3!} + \cdots \qquad (5)$$

persamaan (2) dapat ditulis menjadi:

$$u(x+h,y) = u(x,y) + h\,u_x(x,y) + O(h^2)$$

Dimana $(0(h^2)$ adalah eror pemotongan yang merupakan fungsi kuadrat dari ukuran kisi pada sumbu X).

Persamaan (2) dujumlahkan dengan persamaan (3) diperoleh:

$$u(x+h,y) + u(x-h,y) = 2u(x,y) + h^2 u_{xx} + O(h^4)$$

atau

$$u_{xx}(x,y) = \frac{u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)}{h^2} + O(h^2)$$

sehingga diperoleh rumus untuk $u_{xx}(x y)$, yaitu:

$$u_{xx}(x,y) \approx \frac{u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y)}{h^2}$$

atau

$$(u_{xx})_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}. \quad (7)$$

persamaan (4) dijumlahkan dengan persamaan (5) diperoleh:

$$u(x,y+k) + u(x,y-k) = 2u(x,y) + h^2 u_{yy} + O(h^4)$$

atau

$$u_{yy}(x,y) = \frac{u(x,y-k) - 2u(x,y) + u(x,y+1)}{k^2} + O(h^2)$$

sehingga diperoleh rumus untuk $u_{yy}(x,y)$, yaitu:

$$u_{yy}(x,y) \approx \frac{u(x,y+k) - 2u(x,y) + u(x,y+1)}{k^2}$$

atau

$$(u_{yy})_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} \qquad (8)$$

(Rahmat R, 2012)

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Secara meseluruhan penelitian ini dilaksanakan selama 1 bulan yang berlokasi di sekitar kawasan kambus

3.2 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan berupa data sekunder yang di olah di laboratorium MIPA UHO

3.3 Metode dan Prosedur Penelitian

Penelitian ini memiliki prosedur sebagai berikut:

- Peninjauan lokasi yang akan diteliti di jadikan objek penelitian
- Pengukuran sampel pada pada objek yang sudah ditentukan
- Perumusan model potensial air tanah
- Analisa kestabilan model
- Membuat program computer menggunakan MATLAB untuk simulasi model

BAB IV

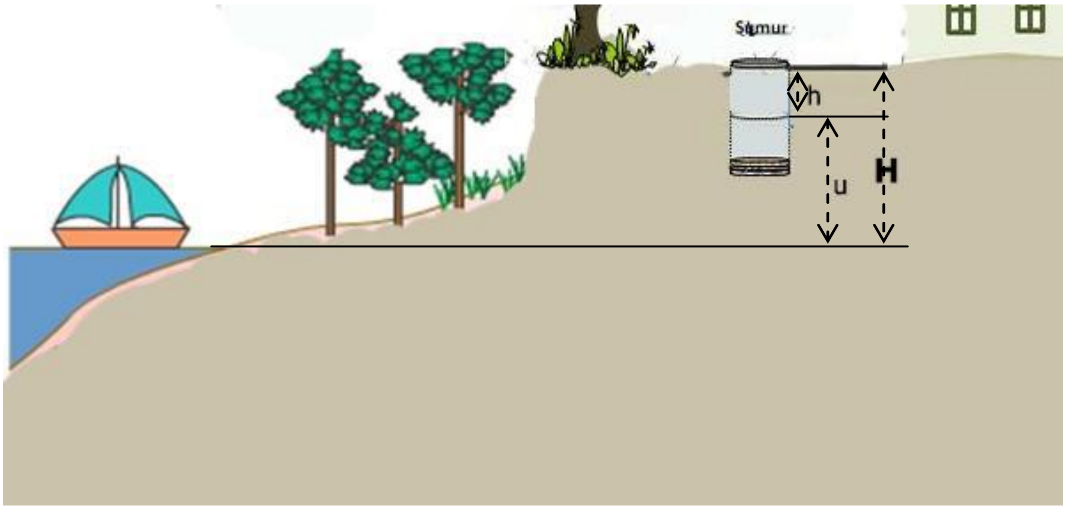
PEMBAHASAN

4.1 Air tanah dan Persamaan Laplace

Air tanah mengalir dari tempat tinggi (potensial tinggi) ke tempat rendah (potensial rendah) maka aliran air tanah Aliran mengikuti persamaan potensial (persamaan differensial Laplace). Diketahui persamaan differensial Laplace 2D:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

dengan didefinisikan pada domain Ω. dan batas-batas domain dapat bertipe *Dirichlet*, *Neumann*, atau *Robin*. Dalam penelitian ini nilai ***u*** menyakan ketinggian muka air sumur dari permukaan laut, seperti diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 4.1. Nilau ***u*** menyatakan ketinggian muka air sumur dari permukaan laut

4.2 Kawasan Penelitian (Domain) Sekitar Kampus UHO

Dengan menggunakan aplikasi Google Earth, dapat dilihat kawasan penelitian (domain) seperti gambar di bawah ini:

Gambar 4.1. Domain (kawasan penelitian sekitar kampus UHO, Kendari)

Tabel 4.1 Data sumur warga sekitar kampus UHO

No. Sumur	x	y	H	h	*u*=H-h
1	2.9	4.9	25	2	23
2	2.7	6.7	25	2.2	22.8
3	3.9	6.7	25	0.6	24.6
4	2.7	7.5	25	2	23
5	3.9	7.9	25	0.9	24.1

6	3.2	9	25	1.8	23.2
7	3.2	10.3	25	0.6	24.4
8	3.2	10.3	25	1.6	23.4
9	4.7	10.6	25	1.5	23.5
10	3.5	11.1	25	2.4	22.6
11	3.2	12.1	25	2	23
12	21.6	10.5	25	0.7	24.3
13	21	9.4	25	0.7	24.3
14	20.7	2.6	25	1	24
15	19.7	1.5	25	0.25	24.75
16	20.5	1.4	25	0.5	24.5
17	20.5	0.7	25	0.3	24.7
18	20.5	0.4	25	0.15	24.85
19	20	0.4	25	0.18	24.82
20	20	0.7	25	0.2	25.8
21	18.3	0.4	25	2	23

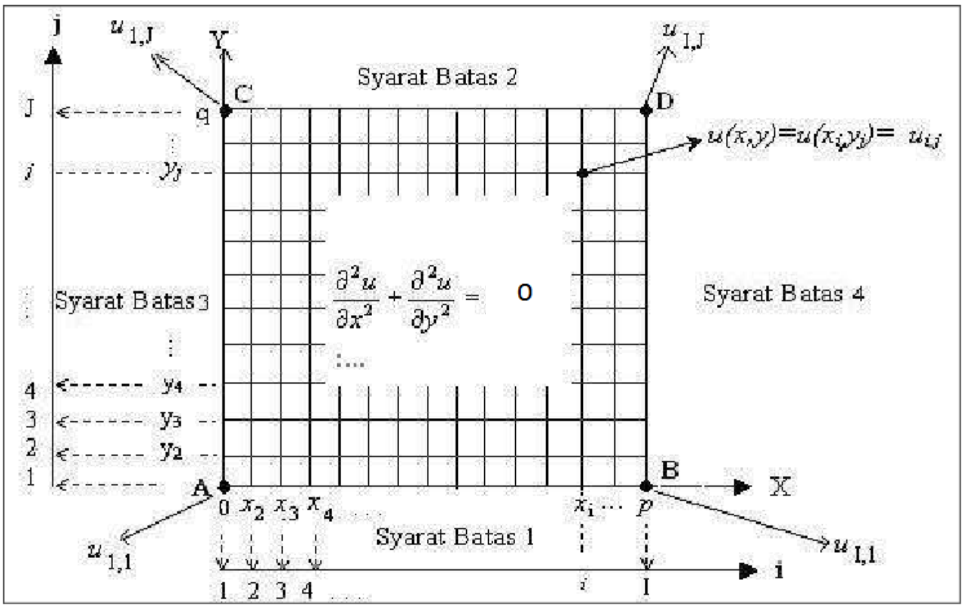
Sampel sumur penduduk yang diambil mewakili penduduk yang ada di sekitaran kampus UHO. Dari survei di lapangan terdapat 21 titik sampel yang diambil. Ada sebagian kecil dari titik sampel yang tidak masuk tetap diambil karena diperlukan untuk membantu dalam pembuatan model aliran air tanah.

Pada Peta Sebaran Sampel Sumur Penduduk menunjukkan titik-titik sumur penduduk yang tersebar di sekitaran kampus UHO, baik di wilayah depan kampus seperti JL.kusuma, JL. Perintis, Jl.Anawai, Jl.Pelangi, Jl.Bintang, Jl.Beringin, Jl.Berlian, Jl.Salangga, Jl.Pelindung, maupun penduduk yang berada di belakang kampus UHO.

Berdasarkan penelitian kedalaman muka air tanah dari sumur pengamatan terlihat bahwa dari sampel sumur yang diambil muka air paling dangkal yaitu 1,70 m yang terdapat di belakang kampus dan muka air paling dalam 20 m yang terdapat di depan kampus Jl.Perintis.

4.3 Penggunaan *Metode Beda Hingga(Finite Difference Methods)*

Penyelesaian persamaan (1) dengan menggunakan metode *beda hingga*, dimulai dengan mempartisi domain seperti pada Gambar di bawah ini.



Gambar 4.2. Domain dan partisinya

Persamaan (1) selanjutnya ditulis menjadi:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = 0$$

Jika digunakan rumus pendekatan :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

dan

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2}$$

Maka persamaan (1) dapat ditulis dengan skema :

$$\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{k^2}=0$$

jika digunakan h=k maka didapat

$$u_{i,j}=\frac{u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}}{4} \qquad (2)$$

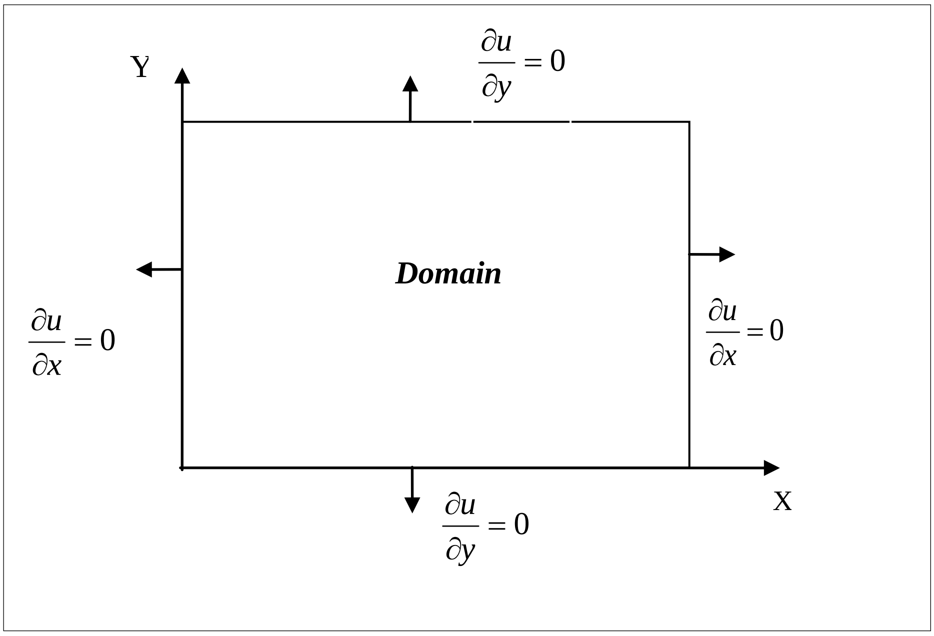
dengan i=2,3,...I-1; j =2,3,...J-1 (titik dalam domain). Untuk titik pada batas domain (i=1,i=I,j=1,j=J) maka persamaan 2 harus dimodifikasi agar skema (2) tidak melibatkan titik-titik diluar domain.

4.4 Syarat Batas Domain

Pada batas-batas domain diasumsikan tinggi muka air (*u*) adalah sama, dalam hal ini Δ*u*=0 yang berakibat Δ*u*/Δ*x*=0, Δu/Δy =0, didapat syarat batas bertip*e Neumann* yaitu:

$$\frac{du}{dx}=0, untuk\ sisi\ kiri\ (i=1), dan\ sisi\ kanan\ (i=I)$$

$$\frac{du}{dy}=0, untuk\ sisi\ bawah\ (j=1), dan\ sisi\ atas\ (j=J)$$



Gambar 4.3 Syarat Batas Domain

4.5 Penerapan Skema *beda hingga* PD Laplace

Diketahui dari persamaan (2) untuk $h=k$ maka didapat

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4} \tag{2}$$

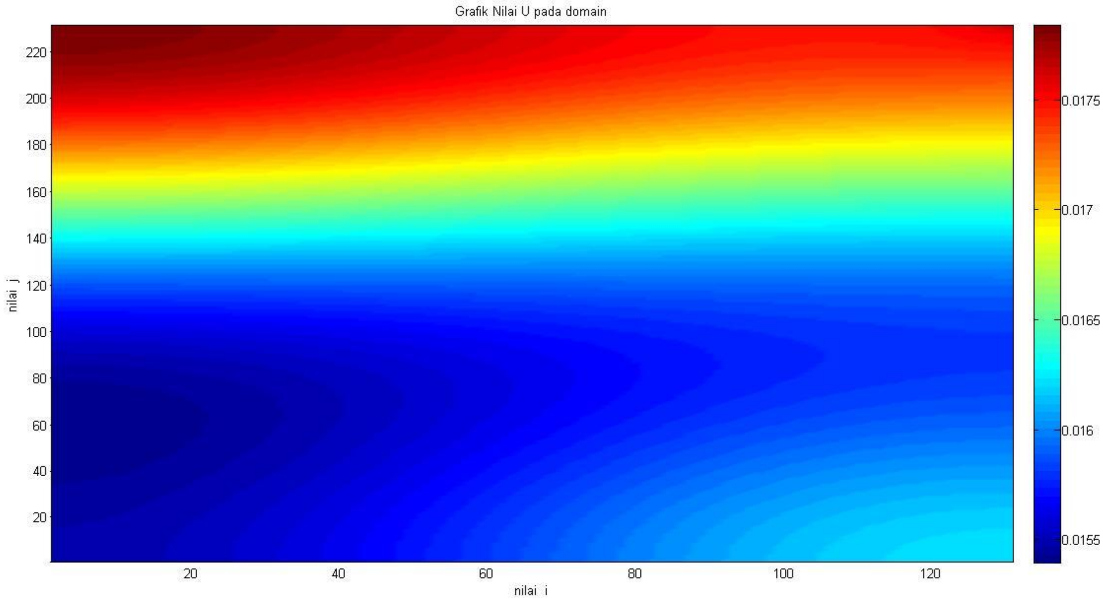
Hubungan antara x dan i adalah x= (i-1) *h*, dengan i=1,2,...,I. Hubungan antara y dan j adalah y= (j-1) *h*, dengan j=1,2,...,J.

Dengan menggunakan h=k=0,1 maka dari Tabel 4.1 diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 4.2 Data sumur warga sekitar kampus UHO

No Sumr	I	J	*u*
1	30	50	23
2	28	68	22.8
3	40	68	24.4
4	28	76	23
5	40	80	24.1
6	33	91	23.2
7	33	104	24.4
8	33	104	23.4
9	48	107	23.5
10	36	112	22.6
11	33	122	23
12	217	106	24.3
13	211	95	24.3
14	208	27	24
15	198	16	24.75
16	206	15	24.5
17	206	8	24.7
18	206	5	24.85
19	201	41	24.82
20	201	71	24.8
21	184	41	23

Dengan menggunakan data-data pada Tabel 4.2, Persamaan (2) selanjutnya diiterasi, diperoleh grafik yang menggambarkan pola aliran air tanah sebagai berikut:



Gambar 4.4 Grafik Pola aliran Air Tanah

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

1. Berdasarkan hasil penelitian, untuk kedalaman muka air tanah di sekitaran kampus UHO adalah sekitar 3 meter – 20 meter pada permukaan kampus.
2. Pola aliran air tanah di sekitaran kampus UHO mengalir dari arah barat laut ke timur laut.

5.2. Saran

Perlu diadakan penelitian serupa yang dilakukan pada musim penghujan agar dapat dibandingkan kondisi air tanahnya dengan musim kemarau seperti hasil dari penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Rahmad, R. 2015. *Studi Numerik Distribusi Potensial Air Tanah*. PARADIGMA. Vol.18, no. 1, http://fmipa.uho.ac.id

Rahmad, R. 2014. *Algoritma dan Teknik Pemrograman Untuk Menyelesaikan Masalah Syarat Batas Bertipe Dirichlet*, *Neumann dan Robin*, PARADIGMA.

Vol.17, no. 2, http://fmipa.uho.ac.id

Ratna, L. 1995. *Persamaan Differensial dalam Satuan S1 metric*. Jakarta: Erlangga

Kusumah, Yaya, S. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta.

Gabriel. J. F. 2001. *Fisika lingkungan. Jakarta*: *Hipokrates. Khopkar*.

Purcell, Edwin J. 1999. Kalkulus. Erlangga. Jakarta.

LAMPIRAN:

```
clc;
close all;
clear all;

%program6.m
% Menyelesaikan laplace
% dengan domain segi empat dengan 3 tipe syarat bataa dapat
dipilih beripe
% Dirichlet, Neumman
%
%     j
%              y   Syarat batas 2
%     J            1   ---------------------#
%     .               |                     |
%     .               |                     |
%     .               |                     |
%     .               |                     |
%     .Syarat batas 3 |     Uxx + Uyy = 0    | Sayarat batas 4
%     .               |                     |%      .
|                     |
%     3               |                     |
%     2               |                     |
%     1               #---------------------+--- x
%                     0                     1
%                           Syarat batas 1
%                    1 2 3 ...............I   i
%
%
%-------------------------------------------------------------------
------------------


disp(' BENTUK UMUM :  Uxx + Uyy = 0  ');
disp(' --------------------------------');
disp(' Persamaan Differensial Laplace 2D ');



  f=0;



disp('UKURAN DOMAIN')
disp('---------------')
lebar= 23;
tinggi= 13;
I=231;
J=131;


h=1/10;
k=1/10;
```

```
disp(' ');
% s : indeks sisi s=1,2,,3,4
disp('SYARAT BATAS');
disp('------------');
for s=1:4
fprintf('\n  Syarat batas sisi ke');fprintf('%2d ',(s));
    fprintf('\n 1. Dirichlet ');
    fprintf('\n 2. Neumann   ');
    tipe = input('  * pilih 1-2 :  ');

  switch tipe
  case 1,
       TipeBC(s)=1; % syarat batas sisi ke s bertipe Dirichlet
       BC(s)=input('     u = ');
  case 2,
       TipeBC(s)=3; % syarat batas  bertipe Neummann dianggap
       alfa(s)=0;   % syarat batas bertipe Robyn dgn alfa=0
       switch s
        case 1,
             fprintf('     du/dy ');
            case 2,
             fprintf('     du/dy ');
            case 3
             fprintf('     du/dx ');
            case 4,
             fprintf('     du/dx ');
            otherwise
             % tidak ada lagi sisi
            end %switch s
        BC(s)=input(' = ');

    %syarat batas sisi ke s bertipe Robyn
    otherwise,
        TipeBC(s)=3;
        switch s
        case 1,
             disp('     dU/dy=alfa.u+betta');
        case 2,
             disp('      dU/dy=alfa.u+betta');
         case 3
             disp('      dU/dx=alfa.u+betta');
         case 4,
             disp('      dU/dx=alfa.u+betta');
         otherwise
            % tidak ada lagi sisi Robyn
      end %switch s

      alfa(s)=input('             alfa =');
      BC(s)=input('             betta = ');

    end % switch tipe
end; %for s
```

```
% inisialisasi U pada batas
for i=1:I
    U(i,1)=0;
    U(i,J)=0;
end;
for j=1:J
    U(1,j)=0;
    U(I,j)=0;
end;


% set nilai U pada syarat batas bertipe Dirichlet
if TipeBC(1)==1,
   for i=1:I
       U(i,1)=BC(1);
   end;
       A1=U(1,1); B1=U(I,1);
end; % if

if TipeBC(2)==1,
   for i=1:I
       U(i,J)=BC(2);
   end;
       C2=U(1,J); D2=U(I,J);
end; % if

if TipeBC(3)==1,
   for j=1:J
       U(1,j)=BC(3);
   end;
      A3=U(1,1); C3=U(1,J);
end; % if

if TipeBC(4)==1,
   for j=1:J
       U(I,j)=BC(4);
   end;
       B4=U(I,1); D4=U(I,J);
end; % if


%----- nilai U pada titik pojok mengikuti sisi Dirichlet-----

% pojok A
if TipeBC(1)==1 & TipeBC(3)==1 ,
   U(1,1)=(A1+A3)/2;
end;
if TipeBC(1)==1 & TipeBC(3)==3,
   U(1,1)=A1;
end;
if  TipeBC(1)==3 & TipeBC(3)==1,
   U(1,1)=A3;
end;

% pojok B
```

```
if TipeBC(1)==1 & TipeBC(4)==1,
   U(I,1)=(B1+B4)/2;
end;
if TipeBC(1)==1 & TipeBC(4)==3,
   U(I,1)=B1;
end;
if TipeBC(1)==3 & TipeBC(4)==1,
   U(I,1)=B4;
end;

% pojok C
if TipeBC(2)==1 & TipeBC(3)==1,
   U(1,J)=(C2+C3)/2;
end;
if TipeBC(2)==1 & TipeBC(3)==3,
   U(1,J)=C2;
end;
if TipeBC(2)==3 & TipeBC(3)==1,
   U(1,J)=C3;
end;


% pojok D
if TipeBC(2)==1 & TipeBC(4)==1,
   U(I,J)=(D2+D4)/2;
end;
if TipeBC(2)==1 & TipeBC(4)==3,
   U(I,J)=D2;
end;
if TipeBC(2)==3 & TipeBC(4)==1,
   U(I,J)=D4;
end;

% set tebakan awal U pada sisi dgn tipe Neumann atau Robyn

% sisi ke 1
if TipeBC(1)==3 & TipeBC(2)==1,
   for i=2:I-1
       U(i,1)=(BC(2)-tinggi*BC(1)-tinggi)/(1+tinggi*alfa(1));
   end;
end; % if

% sisi ke 2
if TipeBC(1)==1 & TipeBC(2)==3,
   for i=2:I-1
       U(i,J)=BC(1)+tinggi*BC(2)/(1-tinggi*alfa(2));
   end;
end; % if

% sisi ke 3
if TipeBC(3)==3 & TipeBC(4)==1,
   for j=2:J-1
       U(1,j)=BC(4)-lebar*BC(3)/(1+lebar*alfa(3));
   end;
end; % if
```

```
% sisi ke 4
if TipeBC(3)==1 & TipeBC(4)==3,
   for j=2:J-1
       U(I,j)=BC(3)+lebar*BC(4)/(1-lebar*alfa(4));
   end;
end; % if

% Tebakan awal pojok yang dibentuk 2 sisi Neumann atu Robyn

% pojok A
if TipeBC(1)==3 & TipeBC(3)==3,
   A1=(U(1,2)-k*BC(1))/(1+k*alfa(1));
   A3=U(2,1)-h*BC(3)/(1+h*alfa(3));
   U(1,1)=(A1+A3)/2;
end;
% tebakan awal pojok B
if TipeBC(1)==3 & TipeBC(4)==3,
   B1=U(I,2)-k*BC(1)/(1+k*alfa(1));
   B4=U(I-1,1)-h*BC(4)/(1+h*alfa(4));
   U(I,1)=(B1+B4)/2;
end;


% tebakan awal pojok C
if TipeBC(2)==3 & TipeBC(3)==3,
   C2=U(1,J-1)+k*BC(2)/(1-k*alfa(2));
   C3=U(2,J)-h*BC(3)/(1+h*alfa(3));
   U(1,J)=(C2+C3)/2;
end;

% tebakan awal pojok D
if TipeBC(2)==3 & TipeBC(4)==3,
   D2=U(I,J-1)+k*BC(2)/(1-k*alfa(2));
   D4=U(I-1,J)+h*BC(4)/(1-h*alfa(4));
U(I,j)=(D2+D4)/2;
end;

H=lebar/2; K=tinggi/2;
r=sqrt(H*H+K*K);
aver = (U(1,1)+U(I,1)+U(1,J)+U(I,J)-r*r*f)/4;

%tebakan awal titik interior
for i=2:I-1
   for j=2:J-1
       U(i,j)=0;%aver
    end
 end


 Ukonv=0; % inisialisasi banyaknya titik konvergen
 banyakU=I*J; % banyaknya U seluruhnya
 epsilon=10.^(-6); % nilai toleransi perbedaan nilai U
```

```
 Mj=(cos(pi/(I+1)) + cos(pi/(J+1)))/2;
 w= 1.5;%2/(1+sqrt(1-Mj.^2))
 pause;
 dh=1/(h*h); dk=1/(k*k); dhk= 2*(dh+dk);
 iter=0;

 % Nilai Potensial Sumur yang sudah diketahui
U(30,50)=23;
U(28,68)=228/10;
U(40,68)=224/10;
U(28,76)=23;
U(40,80)=241/10;
U(33,91)=232/10;
U(33,104)=244/10;
U(33,104)=234/10;
U(48,107)=235/10;
U(36,112)=226/10;
U(33,122)=23;
U(217,106)=234/10;
U(211,95)=243/10;
U(208,27)=24;
U(198,16)=2475/100;
U(206,15)=245/10;
U(206,8)=247/10;
U(206,5)=2485/100;
U(201,41)=2482/100;
U(201,71)=248/10;
U(184,41)=23;



 %-------------------Bagian iterasi-------------------------
 while Ukonv<banyakU,
      Ukonv=0;
      iter=iter+1;
   for i=1:I
     for j=1:J

        temp = U(i,j);

        % skema titik interior
           if  i>1&i<I & j>1&j<J,
               U(i,j)=(dh*(U(i-1,j)+U(i+1,j))+dk*(U(i,j-
1)+U(i,j+1))-f)/dhk;

        %--- skema sisi Neumann atau Robyn (tak termasuk
ujungnya)------
               % sisi ke 1 (sisi bawah)
           elseif  i>1&i<I&j==1 & TipeBC(1)==3,
               U(i,1)=(dh*(U(i-1,1)+U(i+1,1))+dk*(2*U(i,2)-
2*k*BC(1))-f)/(dhk+dk*2*k*alfa(1));
           elseif  i>1&i<I & j==J& TipeBC(2)==3,
               %skema  sisi ke 2 (sisi atas)
               U(i,J)=(dh*(U(i-1,J)+U(i+1,J))+dk*(2*U(i,J-
1)+2*k*BC(2))-f)/(dhk-dk*2*k*alfa(2));
```

```
            elseif i==1&j>1&j<J & TipeBC(3)==3,
                %sisi ke 3 (sisi kiri)
                U(1,j)= (dh*(2*U(2,j)  -  2*h*BC(3))+dk*(U(1,j-
1)+U(1,j+1))- f)/(dhk+dh*2*h*alfa(3));
            elseif  i==I & j>1&j<J & TipeBC(4)==3,
                %sisi ke 4 (sisi kanan)
                U(I,j)= (dh*(2*U(I-1,j)+ 2*h*BC(4))+dk*(U(I,j-
1)+U(I,j+1))- f)/(dhk-dh*2*h*alfa(4));


         %-------skema pojok yang dibentuk 2 sisi Robyn-----------
------

        elseif i==1&j==1 & TipeBC(1)==3 & TipeBC(3)==3,

            % pojok kiri bawah (pojok A)
            U(1,1)=(dh*(2*U(2,1)-2*h*BC(3))+dk*(2*U(1,2)-
2*k*BC(1))- f)/...
                         (dhk+dh*2*h*alfa(3)+dk*2*k*alfa(1));

         elseif i==I&j==1& TipeBC(1)==3 & TipeBC(4)==3,
            % pojok kanan bawah (pojok B)
           U(I,1)=(dh*(2*U(I-1,1)+2*h*BC(4))+dk*(2*U(I,2)-
2*k*BC(1))- f)/...
                          (dhk-dh*2*h*alfa(4)+dk*2*k*alfa(1));

          elseif i==1&j==J & TipeBC(2)==3 & TipeBC(3)==3,

            % pojok kiri atas (pojok C)
            U(1,J)=(dh*(2*U(2,J)-2*h*BC(3))+dk*(2*U(1,J-
1)+2*k*BC(2))- f)/...
                      (dhk+dh*2*h*alfa(3)-dk*2*k*alfa(2));

          elseif i==I&j==J & TipeBC(2)==3 & TipeBC(4)==3,

            % pojok kanan atas (pojok D)
             U(I,J)=(dh*(2*U(I-1,1)+2*h*BC(4))+dk*(2*U(I,J-
1)+2*k*BC(2))- f)/...
                         (dhk-dh*2*h*alfa(4)-dk*2*k*alfa(2));

          else

            %--sisi Dirichlet tidak punya skema iterasi
            %--karena nilai U nya telah diketahui
        end % if


         % skema SOR
         U(i,j)=w*U(i,j)+(1-w)*temp;
         % kriteria konvergensi
         beda=abs(U(i,j)-temp);
         if beda < epsilon, Ukonv=Ukonv+1 ; end;
```

```
      end % for j
   end% for i

      fprintf('\nIterasi ke'); fprintf('%5d ',iter);
      fprintf('banyak U konvergen');fprintf('%5d ',Ukonv);
      fprintf('  //');fprintf('%5d',banyakU);

      if iter==100000, break; end %if
end % while--------------------End iterasi-----------------------

% Warning !
% KOORDINAT GAMBAR INI MASIH TERBALIK DAN i,j  BELUM DI UBAH X, Y
%
% ----------------------------------------------------------------



      % plot nilai U pada domain
    arsiran= U(1:I,1:J);
     pcolor(arsiran)
     colorbar vert
    shading interp
     title('Grafik Nilai U pada domain');
     xlabel('nilai  i'); ylabel('nilai  j');
      drawnow;

%end % while
%figure;
% plot 3D solusi numerik
 %  surf(U(1:I,1:J));shading interp;colormap(jet);
  % title('Solusi Numeik');
   %xlabel('nilai  i'); ylabel('nilai  j');zlabel('nilai U');
   %colorbar vert;



fprintf('\nSelesai\n');
```