



**SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL TAK LINEAR  
MENGGUNAKAN METODE *THREE-TIME MULTIPLE SCALE***

skripsi  
disajikan dalam rangka penyelesaian Studi Strata I  
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Jurusan Matematika

oleh

Hidayat Ustadi  
4150405513

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

**2009**

## PENGESAHAN

Skripsi ini telah dipertahankan di hadapan Sidang Panitia Ujian Skripsi Jurusan Matematika FMIPA UNNES pada tanggal 25 Agustus 2009.

Panitia:



Sekretaris



Drs. Edy Soedjoko, M.Pd  
NIP. 131693657

Penguji



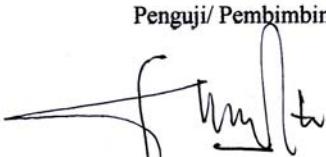
Drs. Rochmad, M.Si  
NIP. 131651607

Penguji/ Pembimbing I



Dr. S. T. Budi Waluya  
NIP. 132046848

Penguji/ Pembimbing II



Drs. Wuryanto, M.Si  
NIP. 131281225

## **PERNYATAAN**

Saya menyatakan bahwa dalam isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Semarang, Agustus 2009

Hidayat Ustadi  
NIM. 4150405504

## **MOTTO DAN PERSEMBAHAN**

### **❖ MOTTO:**

- Apalah artinya hidup jika tidak mempunyai keberanian untuk mencoba apapun (Vincent Van Gogh).
- Belajar dari masa lalu, menikmati hari ini, bersiap untuk hari esok, bersyukur tiap hari (Indra Lesmana).

### **❖ PERSEMBAHAN:**

- Almamater Unnes.
- Ayah dan Ibuku tercinta untuk semua doa, dukungan, dan kasih sayangnya.
- Sani dan Agung yang selalu jadi motivasi.
- Semua keluargaku beserta kehangatan yang mereka berikan.
- Jelek, Anak Math'05 dan seluruh sahabat yang selalu ada untuk membantuku dan memberiku semangat.

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **“Solusi Persamaan Diferensial Tak Linear Menggunakan Metode *Three-time Multiple Scale*”**. Penulisan skripsi ini sebagai syarat yang harus dipenuhi oleh penulis untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Negeri Semarang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Sudijono Sastroatmodjo, M.Si, Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Dr. Kasmadi Imam S, M.S, Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Edy Soedjoko, M.Pd, Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
4. Dr. ST. Budi Waluya, Pembimbing Utama yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
5. Drs. Wuryanto, M.Si, Pembimbing Pendamping yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan pengarahan.
6. Ayah dan Ibu tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan baik secara moral maupun spiritual.
7. Anak matematika 2005 yang telah memberikan dorongan dan motivasi hingga terselesaiannya penulisan skripsi ini.
8. Semua pihak yang telah membantu terselesaiannya penulisan skripsi ini.

Penulis sadar dengan apa yang telah disusun dan disampaikan masih banyak kekurangan dan jauh dari sempurna. Untuk itu penulis menerima segala kritik dan saran yang sifatnya membangun untuk skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, Agustus 2009

Penulis

## ABSTRAK

Ustadi, Hidayat. 2009. *Solusi Persamaan Diferensial Tak Linear Menggunakan Metode Three-time Multiple Scale*. Skripsi, Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Negeri Semarang. Pembimbing I: Dr. S. T. Budi Waluya. Pembimbing II: Drs. Wuryanto, M. Si.

Kata kunci: Solusi Persamaan Diferensial Tak Linear, Metode *Three-time Multiple Scale*.

Analisis matematis tentang gejala-gejala berayun yang timbul dalam alam dan dalam teknologi dapat membawa ke penyelesaian persamaan diferensial tak linear. Sistem semacam itu misalnya bandul yang melakukan ayunan besar, aliran arus listrik dalam suatu rangkaian adalah contoh khas sistem yang analisinya membawa ke persamaan diferensial tak linear. Persamaan diferensial tak linear dapat diselesaikan menggunakan metode perturbasi, *Three-time Multiple Scale*, contohnya persamaan Osilator Harmonik dan Van der Pol. Persamaan Osilator Harmonik dapat diselesaikan secara eksak, tetapi persamaan Van der Pol sangat sulit diselesaikan secara analitik untuk memperoleh solusi eksak. Persamaan Osilator Harmonik digunakan untuk menunjukkan kevalidan dan kesahihan metode *Three-time Multiple Scale* dan memperluasnya pada persamaan Van der Pol.

Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale* dan bagaimana visualisasinya menggunakan *Maple*. Metode yang digunakan untuk menganalisis masalah adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan masalah, merumuskan, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan kesimpulan.

Pembahasan dilakukan dengan menyelesaikan persamaan Osilator Harmonik dan Van der Pol. Persamaan Osilator Harmonik yang berbentuk  $y'' + 2\epsilon y' + y = 0$  dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$  mempunyai solusi eksak  $y = \frac{e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin(\sqrt{1-\epsilon^2}t)$ . Solusi Aproksimasi Reguler diberikan dengan  $y = \sin(t) - \epsilon t \sin(t)$  dan solusi *Three-time Multiple Scale*-nya adalah  $y = e^{-\epsilon t} \sin(t)$ . Persamaan Van der Pol yang berbentuk  $\ddot{y} + y = \epsilon(1-y^2)y'$  dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0$  mempunyai solusi Aproksimasi Reguler  $y = A_0 \sin(t) + \epsilon \left[ \left( -\frac{1}{4}A_0 + \frac{3}{32}A_0^3 \right) \cos(t) + \frac{1}{4}A_0 \cos(t) + \frac{1}{2}A_0 t \sin(t) - \frac{1}{32}A_0^3 \cos(3t) - \frac{1}{16}A_0^3 \cos(t) - \frac{1}{8}A_0^3 t \sin(t) \right]$

Sedangkan solusi *Three-time Multiple Scale*-nya adalah  $y = \frac{2A_0 \sin(t)}{\sqrt{A_0^2 + (4-A_0^2)\epsilon^{-\epsilon t}}}$ .

Dengan menggunakan *Maple*, dapat diperoleh visualisasi solusi-solusi persamaan Osilator Harmonik dan persamaan Van der Pol dimana solusi *Three-time Multiple Scale* memberikan hasil yang lebih akurat dibandingkan dengan solusi Aproksimasi Reguler. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusi Aproksimasi Reguler dapat dihilangkan dengan teknik *Three-time Multiple Scale*.

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>Halaman Judul .....</b>	i
<b>Halaman Pengesahan .....</b>	ii
<b>Pernyataan .....</b>	iii
<b>Motto dan Persembahan .....</b>	iv
<b>Prakata .....</b>	v
<b>Abstrak .....</b>	vii
<b>Daftar Isi .....</b>	viii
<b>Daftar Gambar .....</b>	xi
<b>Daftar Lampiran .....</b>	xiii
<b>BAB</b>	
<b>1. PENDAHULUAN .....</b>	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Pembatasan Masalah .....	4
1.4 Tujuan Penelitian .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	5
1.6 Sistematika Penulisan Skripsi .....	5
<b>2. LANDASAN TEORI .....</b>	7
2.1 Persamaan Diferensial .....	7
2.2 Order Persamaan Diferensial .....	8

2.3	Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linear .....	9
2.4	Solusi Persamaan Diferensial .....	9
2.5	Metode Koefisien Tak Tentu .....	11
2.6	Metode Vareasi Parameter .....	13
2.7	Metode Ekspansi Reguler .....	17
2.8	Metode Three-time Multiple Scale .....	18
2.9	Maple .....	20
<b>3.</b>	<b>METODE PENELITIAN .....</b>	<b>22</b>
3.1	Menentukan Masalah .....	22
3.2	Perumusan Masalah .....	22
3.3	Mengkaji Pustaka .....	22
3.4	Analisis dan Pemecahan Masalah .....	23
3.5	Penarikan Simpulan .....	23
<b>4.</b>	<b>PEMBAHASAN .....</b>	<b>24</b>
4.1	Solusi Persamaan Osilator Harmonik .....	24
4.1.1	Solusi Eksak Persamaan Osilator Harmonik .....	24
4.1.2	Solusi Aproksimasi Reguler Persamaan Osilator Harmonik .....	26
4.1.3	Solusi Three-time Multiple Scale Persamaan Osilator Harmonik .....	29
4.2	Solusi Persamaan Van der Pol .....	36
4.2.1	Solusi Aproksimasi Reguler Persamaan Van der Pol .....	36
4.2.2	Solusi <i>Three-time Multiple Scale</i> Persamaan Van der Pol .....	42
4.3	Aplikasi Maple untuk Visualisasi Persamaan Osilator Harmonik dan Persamaan Van der Pol .....	49

<b>5.</b>	<b>PENUTUP .....</b>	<b>59</b>
5.1	Simpulan .....	59
5.2	Saran .....	62
	<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>63</b>
	<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>64</b>

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
4.1 Plot solusi eksak persamaan Osilator Harmonik .....	49
4.2 Plot solusi aproksimasi reguler persamaan Osilator Harmonik .....	50
4.3 Plot solusi Three-time Multiple Scale persamaan Osilator Harmonik .....	51
4.4 Plot solusi aproksimasi reguler persamaan Van der Pol .....	52
4.5 Plot solusi Three-time Multiple Scale persamaan Van der Pol .....	53
4.6 Plot solusi eksak dan solusi aproksimasi regular persamaan Osilator Harmonik .....	54
4.7 Plot solusi eksak dan solusi Three-time Multiple Scale persamaan Osilator Harmonik .....	54
4.8 Plot solusi eksak, solusi aproksimasi regular, dan solusi Three-time Multiple Scale persamaan Osilator Harmonik .....	55
4.9 Plot solusi aproksimasi regular dan solusi Three-time Multiple Scale persamaan Van der Pol untuk $\varepsilon = \frac{1}{10}$ .....	56
4.10 Plot solusi aproksimasi regular dan solusi Three-time Multiple Scale persamaan Van der Pol untuk $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .....	56
4.11 Phaseportrait persamaan Van der Pol untuk $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .....	57
4.12 Phaseportrait persamaan Van der Pol untuk $\varepsilon = \frac{1}{10}$ .....	58
4.13 Plot solusi eksak, solusi aproksimasi regular, dan solusi Three-time Multiple Scale persamaan Osilator Harmonik .....	60

4.14 Plot solusi aproksimasi regular dan solusi Three-time Multiple Scale persamaan Van der Pol .....	61
--	----

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Print out <i>Maple</i> solusi eksak persamaan Osilator Harmonik .....	65
2. Print out <i>Maple</i> solusi aproksimasi reguler persamaan Osilator Harmonik .....	66
3. Print out <i>Maple</i> solusi Three-time Multiple Scale persamaan Osilator Harmonik .....	68
4. Print out <i>Maple</i> solusi aproksimasi reguler persamaan Van der Pol .....	72
5. Print out <i>Maple</i> solusi Three-time Multiple Scale persamaan Van der Pol .....	74
6. Print out <i>Maple</i> Perbandingan Plot solusi eksak, solusi aproksimasi regular, dan Three-time Multiple Scale persamaan Osilator Harmonik .....	79
7. Print out <i>Maple</i> Perbandingan Plot solusi aproksimasi regular dan Three-time Multiple Scale persamaan Van der Pol .....	82
8. Print out <i>Maple</i> Phaseportrait Persamaan Van der Pol .....	85

# **BAB 1**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Ada pendapat yang memandang matematika sebagai pelayan dan sekaligus raja dari ilmu-ilmu lain. Sebagai pelayan, matematika adalah ilmu yang mendasari dan melayani berbagai ilmu pengetahuan lain. Sejak masa sebelum masehi, misalnya zaman Mesir kuno, cabang tertua dan termudah dari matematika (aritmetika) sudah digunakan untuk membuat piramida, digunakan untuk menentukan waktu turun hujan, dan sebagainya. Sebagai raja, perkembangan matematika tak tergantung pada ilmu-ilmu lain. Banyak cabang matematika yang dulu biasa disebut matematika murni, dikembangkan oleh beberapa matematikawan yang mencintai dan belajar matematika hanya sebagai kegemaran tanpa mempedulikan fungsi dan manfaatnya untuk ilmu-ilmu lain. Dengan perkembangan teknologi, banyak cabang-cabang matematika murni yang ternyata dikemudian hari bisa diterapkan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan teknologi mutakhir. Salah satu cabang dari matematika tersebut adalah persamaan diferensial (Anonim, 2009).

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tak diketahui (Finizio/Ladas. 1988:1). Persamaan diferensial menyatakan hubungan yang dinamik yaitu memuat besaran yang berubah. Persamaan diferensial merupakan dasar untuk matematika teknik yang sering dijumpai dalam berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang

terlibat bergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Transformasi masalah fisik ke dalam model matematika disebut pembentukan model (*modeling*). Pembentukan model ini dilakukan supaya masalah fisik tersebut dapat dikerjakan dan dimengerti dengan pendekatan matematis. Sistem fisik yang paling sederhana dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan sistem fisik yang lebih kompleks biasanya dimodelkan dengan persamaan diferensial tak linear atau persamaan diferensial parsial.

Analisis matematis tentang gejala-gejala berayun yang timbul dalam alam dan dalam teknologi dapat membawa ke penyelesaian persamaan diferensial tak linear. Sistem semacam itu misalnya bandul yang melakukan ayunan besar, aliran arus listrik dalam suatu rangkaian terdiri dari suatu kapasitansi yang terhubung seri dengan suatu kumparan induktansi berteras besi, ayunan bebas suatu pengayun triode regenerative, gerakan suatu massa yang dikendalikan oleh suatu pegas dan yang mengalami suatu gesekan kering atau padat adalah contoh khas sistem-sistem yang analisisnya membawa ke persamaan diferensial tak linear (Pipes, 1991:795).

Persamaan diferensial tak linear dapat diselesaikan dengan menggunakan metode perturbasi. Salah satu metode tersebut adalah metode *Multiple Time Scale* (*Three-time Multiple Scale*). Untuk persamaan diferensial tak linear tertentu dapat juga diselesaikan dengan menemukan solusi eksak (analitik) dari persamaan tersebut. Akan tetapi, ada juga persamaan yang tidak dapat diselasaikan secara analitik untuk memperoleh solusi eksaknya. Pada tahun 1927 Van der Pol dan Van der Mark memperkenalkan sebuah contoh rangkaian elektronika tak linear

yang nantinya menjadi suatu contoh yang sangat terkenal yang dinamakan persamaan Van der Pol yang merupakan rujukan penting ketika seseorang mengembangkan suatu metode perturbasi, karena persamaan Van der Pol ini merupakan contoh sistem yang memiliki suatu solusi yang stabil (Waluya, 2009:65).

Salah satu contoh persamaan diferensial yang dapat diselesaikan menggunakan metode *Three-time Multiple Scale* adalah persamaan Osilator Harmonik dan persamaan Van der Pol. Persamaan Osilator Harmonik yang berbentuk  $y'' + 2\epsilon y' + y = 0$  dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$  mempunyai solusi eksak  $y = \frac{e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin(\sqrt{1-\epsilon^2}t)$ . Persamaan harmonik ini dapat diselesaikan secara eksak. Akan tetapi, persamaan Van der Pol yang berbentuk  $y'' + y = \epsilon(1 - y^2)y'$  sangat sulit diselesaikan secara analitik untuk memperoleh solusi eksak, dimana terdapat  $(1 - y^2)y'$  sebagai suku perturbasi. Oleh karena itu, solusi eksak persamaan Osilator Harmonik digunakan untuk menunjukkan kevalidan dan kesahihan metode *Three-time Multiple Scale* dan memperluasnya pada persamaan Van der Pol.

Untuk menyelesaikan dan menentukan solusi suatu persamaan diferensial, keberadaan suatu alat bantu akan mempermudah dalam mencari solusi-solusi secara cepat dan tepat. Salah satu hasil perkembangan teknologi dan perangkat lunak (*software*) yang berbasis metematika adalah *Maple*. *Maple* merupakan perangkat lunak yang komunikatif sehingga banyak digunakan oleh ilmuwan matematika murni. Selain mampu menyelesaikan berbagai masalah persamaan diferensial, *Maple* menyediakan penyelesaian persamaan diferensial parsial

termasuk pemberian nilai awal sampai *initial value problem (IVP)* dan *boundary value problem (BVP)* (Tung, 2003:37-38).

Berdasarkan uraian tersebut, penulis mengangkat judul “**Solusi Persamaan Diferensial Tak Linear Menggunakan Metode *Three-time Multiple Scale*.**”

Pada penulisan skripsi ini, penulis berusaha menyelesaikan persamaan diferensial tak linear Van der Pol menggunakan metode *Three-time Multiple Scale* dan visualisasinya menggunakan *Maple* dengan persamaan Osilator Harmonik digunakan untuk menunjukkan kevalidan dan kesahihan solusi metode *Three-time Multiple Scale*.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Permasalahan yang akan dikaji dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

- (1) Bagaimana solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale*?
- (2) Bagaimana visualisasi solusi dari persamaan diferensial tak linear dengan menggunakan program *Maple*?

## **1.3 Pembatasan Masalah**

Pada penulisan skripsi ini, penulis membahas tentang solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale* dan visualisasinya menggunakan *Maple*. Persamaan diferensial yang dibahas adalah persamaan Osilator Harmonik yang berbentuk  $y'' + 2\epsilon y' + y = 0$  dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$ , dan persamaan Van der Pol yang berbentuk  $y'' + y = \epsilon(1 - y^2)y'$  dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0$ .

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

- (1) Menjelaskan bagaimana solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale*.
- (2) Menjelaskan bagaimana visualisasi solusi dari persamaan diferensial tak linear dengan menggunakan program *Maple*.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

### 1.5.1 Untuk Kalangan Mahasiswa

- (1) Membantu mahasiswa dalam mempelajari solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale*.
- (2) Membantu mahasiswa dalam penggunaan program *Maple* sebagai visualisasi solusi dari persamaan diferensial tak linear dengan menggunakan program *Maple*.

### 1.5.2 Untuk Bidang Matematika

Menambah pembendaharaan ilmu atau materi persamaan diferensial tak linear, sekaligus memberikan sumbangan pemikiran dan bahan kajian dalam penelitian selanjutnya.

## 1.6 Sistematika Penulisan Skripsi

Penulisan skripsi disusun dalam tiga bagian utama yaitu bagian awal, bagian inti, dan bagian akhir skripsi. Bagian awal skripsi terdiri dari halaman sampul, halaman judul, abstrak, pengesahan, motto dan persembahan, daftar isi, daftar gambar, dan daftar lampiran. Bagian inti terdiri dari lima bab yaitu:

## BAB 1: PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan skripsi.

## BAB 2: LANDASAN TEORI

Landasan teori berisi mengenai teori-teori yang mendukung dan berkaitan dengan permasalahan skripsi sehingga dapat dijadikan sebagai teori penunjang yang menjadi dasar teori disusunnya skripsi ini. Pada bagian ini terdiri dari persamaan diferensial, order persamaan diferensial, persamaan diferensial linear dan tak linear, solusi persamaan diferensial, metode koefisien tak tentu (tebakan), metode vareasi parameter, metode ekspansi regular, metode *Three-time Multiple Scale*, dan *Maple*.

## BAB 3: METODE PENELITIAN

Metode penelitian berisi tentang proses atau langkah penelitian. Bab ini meliputi penemuan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis pemecahan masalah, dan penarikan simpulan.

## BAB 4: PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi pembahasan dari solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale* dan visualisasinya menggunakan *Maple*.

## BAB 5: PENUTUP

Bab ini berisi tentang simpulan dan saran yang diperoleh dari penelitian.

Bagian akhir skripsi berisi daftar pustaka.

## BAB 2

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Persamaan Diferensial

Dalam ilmu pengetahuan dan teknik, model matematika dikembangkan untuk membantu memahami fenomena fisik. Model ini sering mengacu pada suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan atau fungsi yang tidak diketahui. persamaan ini disebut sebagai persamaan diferensial (Nagle, 1996:1).

Suatu persamaan diferensial yang mengandung turunan biasa dengan satu peubah bebas dinamakan persamaan diferensial biasa. Sedangkan persamaan diferensial yang mengandung turunan parsial dengan lebih dari satu peubah bebas dinamakan persamaan diferensial parsial (Nagle, 1996:3).

Persamaan diferensial parsial adalah suatu identitas yang mengaitkan variabel bebas, variabel tak bebas  $u$ , dan turunan-turunan parsial dari  $u$ . Persamaan umum order satu dengan dua variabel bebas  $F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ . Sedangkan persamaan order dua dengan dua variabel bebas adalah  $F(x, y, u_x, u_{xy}, u_{yy}, u_{xx}) = 0$ . Solusi persamaan diferensial parsial adalah suatu fungsi  $u(x, y, z, \dots)$  yang memenuhi persamaan dalam daerah dari variabel  $x, y, z, \dots$  (Strauss, 1992:1).

Contoh:

- (1)  $\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = 0$ ; merupakan persamaan diferensial biasa,
- (2)  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$ ; merupakan persamaan diferensial parsial,

(3)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ; merupakan persamaan diferensial parsial, dan

(4)  $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + 4y = 0$ ; merupakan persamaan diferensial biasa.

## 2.2 Order Persamaan Diferensial

Order dari persamaan diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dari persamaan. Contoh (1) merupakan persamaan diferensial order dua karena  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  adalah pangkat tertinggi dari turunan yang muncul pada persamaan. Sedangkan contoh (2) merupakan persamaan diferensial order satu (Nagle, 1996:4).

Secara umum persamaan diferensial beroeder  $n$  dapat ditulis sebagai

$$F[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0 \quad (2.1.1)$$

Persamaan (2.1.1) menyatakan relasi antara variabel bebas  $t$  dan nilai-nilai dari fungsi  $u, u', \dots, u^{(n)}$ . Untuk lebih mudahnya dalam persamaan (2.1.1) biasanya ditulis  $y$  untuk  $u(t)$ ,  $y'$  untuk  $u'(t)$  dan seterusnya, sehingga persamaan (2.1.1) dapat ditulis sebagai

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1.2)$$

(Waluya, 2006:4).

Contoh:

(1)  $y' + y^2 = 1$ ; merupakan persamaan diferensial order satu,

(2)  $y'' + 2y' + 1 = 0$ ; merupakan persamaan diferensial order dua, dan

(3)  $y''' + y'' = 0$ ; merupakan persamaan diferensial order tiga.

## 2.3 Persamaan Diferensial Linear dan Tak Linear

Persamaan diferensial biasa  $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  dikatakan linear jika  $F$  adalah linear dalam variabel-variabel  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . Definisi serupa juga berlaku untuk persamaan diferensial sebagian. Jadi secara umum persamaan diferensial biasa linear order  $n$  diberikan dengan

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t) \quad (2.1.3)$$

Persamaan yang tidak dalam bentuk persamaan (2.1.3) merupakan persamaan tak linear (Waluya, 2006:6).

Contoh:

- (1)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ ; merupakan persamaan diferensial linear,
- (2)  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$ ; merupakan persamaan diferensial tak linear, karena suku  $\sin\theta$ , dan
- (3)  $y'' + 2e^t y' + yy' + y^2 = t^4$ ; merupakan persamaan diferensial tak linear, karena suku  $yy'$  dan  $y^2$ .

## 2.4 Solusi Persamaan Diferensial

Perhatikan persamaan diferensial biasa orde  $n$  berikut.

$$\varphi^n(t) = f[t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{n-1}(t)] \quad (2.1.4)$$

Sebuah solusi dari persamaan (2.1.4) pada interval terbuka  $\alpha < t < \beta$  adalah sebuah fungsi  $\varphi$  sedemikian sehingga  $\varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^n(t)$  ada dan memenuhi persamaan (2.1.4) untuk setiap  $t$  dalam  $\alpha < t < \beta$ . Asumsikan bahwa fungsi  $f$  untuk persamaan (2.1.4) adalah fungsi bernilai riil dan tertarik untuk mendapatkan solusi-solusi yang bernilai riil  $y = \varphi(t)$  (Waluya, 2006:5).

Sebagai contoh, fungsi  $y_1(t) = \cos t$  dan  $y_2(t) = \sin t$  adalah solusi dari persamaan  $y'' + y = 0$  untuk semua  $t$ , karena apabila  $y_1(t)$  dan/atau  $y_2(t)$  disubstitusikan ke dalam persamaan  $y'' + y = 0$ , akan diperoleh kesamaan.

Suatu penyelesaian (solusi) persamaan diferensial (dalam peubah  $x$  dan  $y$ ) merupakan suatu hubungan antara  $x$  dan  $y$ , yang jika disubstitusikan ke dalam persamaan tersebut akan memberikan kesamaan (identitas). Solusi umum persamaan diferensial adalah solusi yang memuat konstanta-konstanta sehingga setiap solusi dapat diperoleh dari solusi umum dengan mengambil konstanta-konstanta yang sesuai (Supriyono/Hendikawati, 2008:74).

Jika  $y' = f(x)$  diintegralkan, diperoleh  $y = \int f(x) dx + C$  yang mengandung satu tetapan integrasi, yaitu  $C$ . Jika  $y' = g(x)$  diintegralkan dua kali untuk mendapatkan  $y$ , maka  $y$  mengandung dua tetapan integrasi. Penyelesaian seperti ini dinamakan penyelesaian umum dari persamaan diferensial linear tersebut. Hal yang sama untuk persamaan diferensial tak linear. Solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil konstanta/tetapan yang sesuai dinamakan solusi khusus atau solusi komplemen. Akan tetapi, kebanyakan persamaan diferensial tak linear tidak dapat diselesaikan secara eksplisit. Cara yang tepat dalam mempelajari persamaan diferensial tak linear beserta solusinya ialah membuat persamaan tersebut menjadi linear, yaitu dengan menghapiri persamaan tersebut oleh persamaan diferensial linear (aproksimasi).

## 2.5 Metode Koefisien Tak Tentu

Sebuah solusi  $\textcolor{brown}{Y}$  dari persamaan linear tak homogen orde ke- $\textcolor{blue}{n}$  dengan koefisien konstan dapat diperoleh dengan metode koefisien tak tentu (tebakan) bila  $\textcolor{brown}{g}(t)$  dalam bentuk tertentu.

Perhatikan persamaan tak homogen berikut ini.

$$\textcolor{brown}{y}'' + p(t)y' + q(t)y = \textcolor{brown}{g}(t),$$

dimana  $p(t)$ ,  $q(t)$ , dan  $\textcolor{brown}{g}(t)$  adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu interval  $I$ .

Teorema

Solusi umum persamaan tak homogen dapat dinyatakan sebagai

$$y = \phi(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + Y(t),$$

dimana  $y_1$  dan  $y_2$  adalah basis dari persamaan homogen,  $c_1$  dan  $c_2$  adalah konstanta-konstanta, dan  $\textcolor{brown}{Y}(t)$  adalah penyelesaian khusus dari persamaan tak homogen (Waluya, 2006:77).

Teorema ini memberikan langkah-langkah membangun solusi persamaan tak homogen adalah sebagai berikut.

- (1) Temukan solusi umum persamaan homogennya,
- (2) Temukan sebuah solusi untuk persamaan tak homogen,
- (3) Jumlahkan keduanya, dan
- (4) Temukan  $c_1$  dan  $c_2$  dari kondisi-kondisi awalnya.

Jika fungsi tebakan merupakan salah satu dari solusi homogennya, maka fungsi tebakan yang dipilih tak pernah membangun sebuah suku yang memenuhi ruas kanan tak homogen  $g(t)$  sehingga fungsi tebakannya harus dikalikan dengan  $t$ .

Ada beberapa aturan yang relatif mudah untuk menemukan solusi khusus dengan metode koefisien tak tentu, yaitu sebagai berikut.

- (1) Jika  $g(t) = e^{\alpha t}$ , maka fungsi tebakannya  $y_p = Ae^{\alpha t}$ .
- (2) Jika  $g(t) = \cos(\alpha t)$  atau  $\sin(\alpha t)$ , maka  $y_p = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$ .
- (3) Jika  $g(t) = a_n t^n + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ , maka  
 $y_p = A_n t^n + \dots + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$ .
- (4) Jika  $g(t) = t^2 e^{\alpha t}$ , maka  $y_p = (A_2 t^2 + A_1 t + A_0) e^{\alpha t}$ .
- (5) Jika  $g(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  atau  $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ , maka  
 $y_p = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$ .
- (6) Jika  $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ ,  $y_p^1$  tebakan untuk  $g_1(t)$  dan  $y_p^2$  untuk  $g_2(t)$ , maka  $y_p = y_p^1 + y_p^2$ .

(Waluya, 2006:80).

Contoh:

Temukan solusi khusus persamaan  $y'' + 4y = 3 \sin(2t)$ .

Penyelesaian:

Persamaan homogen dari persamaan tersebut adalah  $y'' + 4y = 0$ , yang akan memberikan solusi komplemen, yaitu:

$$y_c = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t).$$

Untuk menemukan solusi khususnya, digunakan metode menebak yang memuat fungsi-fungsi  $\sin(2t)$  dan  $\cos(2t)$ . Akan tetapi, fungsi-fungsi tersebut merupakan solusi-solusi homogennya. Oleh karena itu, jika menebak solusi khususnya dengan fungsi-fungsi tersebut, maka tak akan pernah memenuhi bagian tak homogennya, sehingga digunakan fungsi tebakannya yaitu:

$$y_p = At \sin(2t) + Bt \cos(2t),$$

yang akan menemukan bentuk sederhana  $\sin(2t)$  dan  $\cos(2t)$  setelah didiferensialkan.

Dari  $y_p$  diperoleh

$$\begin{aligned} y'_p &= A \cos(2t) + B \sin(2t) - 2At \sin(2t) + 2B \cos(2t), \\ y''_p &= -4A \sin(2t) + 4B \cos(2t) - 4At \cos(2t) - 4B \sin(2t). \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan  $y_p$ ,  $y'_p$ , dan  $y''_p$  diperoleh

$$-4A \sin(2t) + 4B \cos(2t) - 4At \cos(2t) - 4B \sin(2t)$$

$$\Leftrightarrow +4(At \sin(t) + Bt \cos(t)) = 3 \cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow -4A \sin(2t) + 4B \cos(2t) = 3 \cos(2t).$$

Jadi diperoleh

$$4B = 0 \Leftrightarrow B = 0, \text{ dan}$$

$$-4A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{4}.$$

Jadi solusi khususnya adalah

$$y_p = \frac{3}{4}t \sin(t),$$

Jadi solusi umumnya adalah

$$y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + \frac{3}{4}t \sin(t).$$

## 2.6 Metode Vareasi Parameter

Metode vareasi parameter digunakan untuk menentukan solusi khusus dari persamaan linear tak homogen order ke- $n$  yang merupakan perluasan langsung dari persamaan diferensial order dua. Metode ini masih lebih umum dari pada metode koefisien tak tentu yakni menggunakan ekspresi untuk solusi khususnya untuk sembarang fungsi kontinu  $g$ , sebaliknya metode koefisien tak tentu hanya terbatas pada sebagian fungsi dari  $g$  (Waluya, 2006:120).

Misalkan  $y' + py' + qy = g(t)$  dengan  $y' = \frac{dy}{dt}$ . Untuk  $g(t) = 0$ , persamaan tersebut menjadi persamaan homogen yang solusi umumnya dapat ditentukan, yaitu  $y(t) = u_1 y_1(t) + u_2 y_2(t)$  dengan  $u_1$  dan  $u_2$  merupakan fungsi terhadap  $t$ , sehingga diperoleh  $y' = u'_1 y_1 + u_1 y'_1 + u'_2 y_2 + u_2 y'_2$ . Jika didiferensialkan sekali lagi, maka akan diperoleh suku-suku dalam bentuk  $u''_1$  dan  $u''_2$ , tetapi ini malah akan menjadi rumit dari persamaan semula karena mengubah persamaan order dua dengan dua persamaan order dua yang lain. Untuk mengatasi masalah tersebut, pilih

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0.$$

Jadi dipunyai

$$y' = u_1 y'_1 + u_2 y'_2.$$

Sehingga diperoleh

$$y'' = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2.$$

Dengan mensubstitusikan  $y'$  dan  $y''$  ke persamaan  $y'' + py' + qy = g(t)$  diperoleh

$$u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2 + p(u_1 y'_1 + u_2 y'_2) + q(u_1 y_1 + u_2 y_2) = g(t)$$

$$\Leftrightarrow u_1(y''_1 + py'_1 + qy_1) + u_2(y''_2 + py'_2 + qy_2) + u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(t).$$

Akan tetapi, dua suku pertama persamaan tersebut sama dengan nol karena  $y_1$  dan  $y_2$  adalah solusi-solusi dari persamaan homogen, sehingga persamaan tersebut menjadi

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(t).$$

Jadi diperoleh

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = 0,$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(t).$$

Untuk menemukan  $u_1$  dan  $u_2$  dari sistem persamaan tersebut, maka dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Jadi } \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y'_2 & -y_2 \\ -y'_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} -y_2 g(t) \\ y_1 g(t) \end{pmatrix}.$$

Jadi diperoleh

$$u'_1 = -\frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} \quad \text{dan} \quad u'_2 = \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)}.$$

Dengan mengintegalkan kembali  $u'_1$  dan  $u'_2$  akan diperoleh

$$u_1 = - \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt \quad \text{dan} \quad u_2 = \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt.$$

Jadi

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -y_1 \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_2 \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt.$$

Jadi solusi umumnya adalah  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ , dengan  $c_1$  dan  $c_2$  konstanta yang dapat ditentukan dari kondisi awal.

Contoh:

Selesaikan  $y'' + 4y = 3 \csc(t)$ .

Penyelesaian:

Persamaan homogen dari persamaan tersebut adalah  $y'' + 4y = 0$ , sehingga diperoleh solusi homogennya atau solusi komlpemennya adalah

$$y_c = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t).$$

Untuk menemukan sulusi khususnya terlebih dahulu dihitung Wronskiannya,

$$W(y_1, y_2) = \cos(2t) (\sin(2t))' - \sin(2t) (\cos(2t))' = 2.$$

Jadi solusi partikularnya adalah

$$\begin{aligned}
 y_p &= -\frac{3}{2} \cos(2t) \int \sin(2t) \csc(t) dt + \frac{3}{2} \sin(2t) \int \cos(2t) \csc(t) dt \\
 &= -3 \cos(2t) \int \frac{\sin(t) \cos(t)}{\sin(t)} dt + \frac{3}{2} \sin(2t) \int \frac{1 - 2 \sin^2(t)}{\sin(t)} dt \\
 &= -3 \cos(2t) \int \cos(t) dt + \frac{3}{2} \sin(2t) \int \left[ \frac{1}{\sin(t)} - 2 \sin(t) \right] dt \\
 &= -3 \cos(2t) \sin(t) + \frac{3}{2} \sin(2t) [\ln|\csc t - \cot(t)|] + 3 \sin(2t) \cos(t) \\
 &= 3 \sin(t) + \frac{3}{2} \sin(2t) [\ln|\csc t - \cot(t)|].
 \end{aligned}$$

Jadi solusi umumnya adalah

$$y = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + 3 \sin(t) + \frac{3}{2} \sin(2t) [\ln|\csc t - \cot(t)|]$$

dimana  $c_1$  dan  $c_2$  ditentukan dari kondisi awal yang diberikan.

## 2.7 Metode Ekspansi Reguler

Metode ekspansi regular (aproksimasi) adalah metode perturbasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, dimana solusinya mempunyai deret ekspansi regular (Holmes, 1995:106).

Misalkan

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (2.1.5)$$

Misalkan pula solusi (2.1.5) ditulis dalam bentuk

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots, \quad (2.1.6)$$

Dari persamaan (2.1.6) diperoleh

$$y' = y'_0 + \varepsilon y'_1 + \varepsilon^2 y'_2 + \dots, \text{ dan}$$

$$y'' = y''_0 + \varepsilon y''_1 + \varepsilon^2 y''_2 + \dots. \quad (2.1.7)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1.6) dan (2.1.7) ke persamaan (2.1.5) diperoleh

$$(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \dots) + \varepsilon(y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \dots)$$

$$+ (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'' + \dots) + (\varepsilon y_0' + \varepsilon^2 y_1' + \varepsilon^3 y_2' + \dots)$$

$$+ (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y_0'' + y_0) + \varepsilon(y_1'' + y_0' + y_1) + \varepsilon^2(y_2'' + y_1' + y_2) + \dots = 0. \quad (2.1.8)$$

Dari persamaan (2.1.8), dengan mengumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat  $\varepsilon$ , diperoleh

$$\text{Order } \mathcal{O}(\varepsilon^0): y_0'' + y_0 = 0,$$

$$\text{Order } \mathcal{O}(\varepsilon^1): y_1'' + y_0' + y_1 = 0,$$

$$\text{Order } \mathcal{O}(\varepsilon^2): y_2'' + y_1' + y_2 = 0,$$

dan seterusnya.

## 2.8 Metode *Three-time Multiple Scale*

Metode *Three-time Multiple Scale* adalah salah satu metode perturbasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear yang mengandung suku-suku perturbasi. Metode *Three-time Multiple Scale* memberikan solusi bagaimana menghilangkan suku-suku tersebut, sehingga dapat menghasilkan solusi yang tidak menjauh dari solusi eksaknya.

Misalkan

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (2.1.9)$$

Misalkan pula solusi persamaan (2.1.9) ditulis dalam bentuk

$$y = y_0(t_1, t_2, t_3) + \varepsilon y_1(t_1, t_2, t_3) + \varepsilon^2 y_2(t_1, t_2, t_3) + \dots, \quad (2.1.10)$$

dengan  $t_1 = t$ ,  $t_2 = \varepsilon t$ ,  $t_3 = \varepsilon^2 t$ , dan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3}. \quad (2.1.11)$$

Dari persamaan (2.1.10) dan (2.1.11) diperoleh

$$y' = \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) y$$

$$y'' = \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} \right.$$

$$\left. + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \right) y. \quad (2.1.12)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1.10) dan (2.1.12) ke persamaan (2.1.9) diperoleh

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \right) \\ & (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 \\ & + \dots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[ \left( \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} + \dots \right) + \left( 2\varepsilon \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1 \partial t_2} + \dots \right) + \left( 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_3} + 2\varepsilon^4 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1 \partial t_3} + \dots \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$+ \dots] + \left[ \left( \varepsilon \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \varepsilon^3 \frac{\partial y_2}{\partial t_1} + \dots \right) \right.$$

$$\left. + \left( \varepsilon^2 \frac{\partial y_0}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial y_1}{\partial t_2} + \varepsilon^4 \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \dots \right) + \dots \right] + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + y_1 \right) + \varepsilon^2 \left( 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} \right. \\ \left. + y_2 + \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_2^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_0}{\partial t_2} \right) = 0. \quad (2.1.13)$$

Dari persamaan (2.1.13), dengan mengumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat  $\varepsilon$ , diperoleh

$$\text{Order } O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + y_1 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^2): 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} + y_2 + \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_2^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + \frac{\partial y_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y_0}{\partial t_2} = 0,$$

dan seterusnya.

## 2.9 Maple

*Maple* merupakan salah satu perangkat lunak (*software*) yang dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada. *Maple* sering digunakan untuk keperluan Computer Algebraic System (CAS). Menu-menu yang terdapat pada tampilan program *Maple* ini terdiri dari menu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window, dan Help*. Sebagian besar menu-menu di atas merupakan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada sistem operasi Windows.

*Maple* sering digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya, karena *Maple* memiliki kemampuan menyederhanakan persamaan, hingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Keunggulan lain dari *Maple* untuk aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat batas (Kartono, 2001).

Statement yang sering digunakan untuk keperluan menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial antara lain: *diff* digunakan untuk mendiferensialkan (menurunkan) suatu fungsi, *dsolve* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, *evalf* memberikan nilai numerik dari suatu

persamaan, dan *simplify* digunakan untuk menyederhanakan suatu persamaan. Namun tentu saja pernyataan-pernyataan awal seperti *restart* dan deklarasi variabel/konstanta yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Untuk membuat grafik pada *Maple* digunakan perintah *plot*, *plot2d*, *plot3d*, tergantung dimensi dari pernyataan yang dimiliki. Untuk membuat gerakan animasi digunakan perintah *animate3d*.

## **BAB 3**

### **METODE PENELITIAN**

Studi pustaka adalah metode yang digunakan dalam penelitian penulisan skripsi. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

#### **3.1 Menentukan Masalah**

Dalam tahap menentukan masalah, peneliti mencari berbagai sumber pustaka dan menyeleksi untuk ditetapkan sebagai suatu masalah yang harus diselesaikan.

#### **3.2 Perumusan Masalah**

Berbagai macam masalah yang telah ditentukan selanjutnya dirumuskan dalam beberapa pertanyaan yang harus diselesaikan, yaitu sebagai berikut.

- (1) Bagaimana solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale*?
- (2) Bagaimana visualisasi solusi dari persamaan diferensial tak linear dengan menggunakan program *Maple*?

#### **3.3 Mengkaji Pustaka**

Dalam langkah ini peneliti melakukan pengkajian pustaka dari berbagai sumber dengan cara mengumpulkan berbagai masalah dan informasi yang berkaitan dengan penelitian yang penulis lakukan. Mengumpulkan berbagai referensi pendukung, seperti definisi untuk menyelesaikan masalah yang diteliti,

sehingga di dapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

### **3.4 Analisis Pemecahan Masalah**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan untuk memecahkan masalah ini adalah sebagai berikut.

- (1) Menjelaskan bagaimana solusi persamaan diferensial tak linear menggunakan metode *Three-time Multiple Scale*.
- (2) Menjelaskan bagaimana visualisasi solusi dari persamaan diferensial tak linear dengan menggunakan program *Maple*.

### **3.5 Penarikan Simpulan**

Langkah paling akhir dalam metode penelitian adalah penarikan simpulan yang diperoleh dari pembahasan-pembahasan dan pemecahan masalah.

## BAB 4

### PEMBAHASAN

#### 4.1 Solusi Persamaan Osilator Harmonik

Perhatikan persamaan osilator harmonik berikut ini.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0. \quad (4.1.1)$$

Akan dicari solusi eksak, solusi aproksimasi regular, dan solusi *Three-time Multiple Scale* untuk persamaan (4.1.1) dengan  $\varepsilon$  adalah parameter kecil yang memenuhi  $0 < \varepsilon \ll 1$  dan dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $\frac{dy}{dt}(0) = 1$ .

##### 4.1.1 Solusi Eksak Persamaan Osilator Harmonik

Dipunyai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1, \quad (4.1.2)$$

dengan  $\varepsilon$  adalah parameter kecil yang memenuhi  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Persamaan karakteristik persamaan (4.1.2) adalah

$$m^2 + 2\varepsilon m + 1 = 0.$$

Jadi akar karakteristiknya adalah

$$m_{1,2} = \frac{-2\varepsilon \pm \sqrt{(2\varepsilon)^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2\varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon^2 - 4}}{2} \\
 &= -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Dipunyai  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Jelas

$$m_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2} i.$$

Jadi solusi persamaan (4.1.2) adalah

$$y(t) = c_1 e^{-\varepsilon t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t) + c_2 e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t). \quad (4.1.3)$$

Jelas

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= -\varepsilon c_1 e^{-\varepsilon t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t) - (\sqrt{1 - \varepsilon^2}) c_1 e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t) \\
 &\quad - \varepsilon c_2 e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t) + (\sqrt{1 - \varepsilon^2}) c_2 e^{-\varepsilon t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t).
 \end{aligned}$$

Dipunyai kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$ .

Jelas

$$y(0) = c_1 = 0.$$

dan

$$\begin{aligned}
 y'(0) &= -\varepsilon c_1 + (\sqrt{1 - \varepsilon^2}) c_2 = 1 \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{1 - \varepsilon^2}) c_2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow c_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan  $c_1$  dan  $c_2$  ke persamaan (4.1.3), diperoleh

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t).$$

Jadi solusi eksak persamaan Osilator Harmonik adalah

$$y(t, \varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t).$$

#### 4.1.2 Solusi Aproksimasi Reguler Persamaan Osilator Harmonik

Dipunyai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0; \quad y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = 1. \quad (4.1.4)$$

Asumsikan solusi persamaan (4.1.12) ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots, \quad (4.1.5)$$

Dari persamaan (4.1.5) diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots, \text{ dan}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2y_1}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2y_2}{dt^2} + \dots, \quad (4.1.6)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.1.5) dan (4.1.6) ke persamaan (4.1.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2y_1}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2y_2}{dt^2} + \dots \right) + 2\varepsilon \left( \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right) \\
 & + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 \right) + \varepsilon \left( \frac{d^2y_1}{dt^2} + 2 \frac{dy_0}{dt} + y_1 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{d^2y_2}{dt^2} + 2 \frac{dy_1}{dt} + y_2 \right) \\
 & + O(\varepsilon^3) + \dots = 0. \tag{4.1.7}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.1.7), dengan mengumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat  $\varepsilon$ , diperoleh

$$\text{Order } O(\varepsilon^0): \frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^1): \frac{d^2y_1}{dt^2} + 2 \frac{dy_0}{dt} + y_1 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^2): \frac{d^2y_2}{dt^2} + 2\frac{dy_1}{dt} + y_2 = 0,$$

dan seterusnya.

Dari kondisi awal masalah (4.1.4), maka untuk order  $O(\varepsilon^0)$  menjadi

$$O(\varepsilon^0): \frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0, y_0(0) = 0, \frac{dy_0}{dt}(0) = 1. \quad (4.1.8)$$

Solusi masalah persamaan (4.1.8) dapat diberikan dengan

$$y_0(t) = a_0 \sin(t) + b_0 \cos(t).$$

Dari kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$y_0(0) = 0 \rightarrow y_0(0) = a_0 \sin(0) + b_0 \cos(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow b_0 = 0,$$

dan

$$\frac{dy(0)}{dt} = 1 \rightarrow \frac{dy(0)}{dt} = a_0 \cos(0) - b_0 \sin(0)$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 1.$$

Jadi diperoleh  $a_0 = 1$  dan  $b_0 = 0$ .

Jadi solusi dari persamaan (4.1.8) menjadi

$$y_0 = \sin(t).$$

Masalah order  $O(\varepsilon^1)$  diberikan dengan

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2 \frac{dy_0}{dt} + y_1 = 0, y_0 = \sin(t), \frac{dy_0}{dt} = \cos(t). \quad (4.1.9)$$

Persamaan (4.1.9) dapat ditulis dengan

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 = -2 \cos(t). \quad (4.1.10)$$

Persamaan homogen dari persamaan (4.1.10) adalah

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 = 0,$$

yang akan memberikan solusi komplemennya atau solusi homogennya, yaitu:

$$y_c = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t).$$

Untuk menemukan solusi khususnya, digunakan metode koefisien tak tentu (metode menebak) yang memuat fungsi  $\sin(t)$  dan  $\cos(t)$ , fungsi tebakannya adalah

$$y_p = At \sin(t) + Bt \cos(t), \quad (4.1.11)$$

yang akan menemukan bentuk sederhana  $\sin(t)$  dan  $\cos(t)$  setelah didiferensialkan.

Dari persamaan (4.1.11) diperoleh

$$y_p' = A \sin(t) + B \cos(t) + At \cos(t) - Bt \sin(t),$$

$$y_p'' = A \cos(t) - B \sin(t) + A \cos(t) - B \sin(t) - At \sin(t) - Bt \cos(t)$$

$$= 2A \cos(t) - 2B \sin(t) - At \sin(t) - Bt \cos(t).$$

Dengan mensubstitusikan  $y_p$ ,  $y_p'$  dan  $y_p''$  ke persamaan (4.1.10), diperoleh

$$2A \cos(t) - 2B \sin(t) - At \sin(t) - Bt \cos(t) + At \sin(t)$$

$$+ Bt \cos(t) = -2 \cos(t)$$

$$\Leftrightarrow 2A \cos(t) - 2B \sin(t) = -2 \cos(t),$$

Jadi diperoleh

$$2A = -2 \Leftrightarrow A = -1, \text{ dan}$$

$$-2B = 0 \Leftrightarrow B = 0.$$

Jadi solusi khusus persamaan (4.1.10) adalah

$$y_p = -t \sin(t).$$

Dari kondisi awal  $y_1(0) = 0$  dan  $\frac{dy_1}{dt}(0) = 0$ , diperoleh nilai  $c_1$  dan  $c_2$ , yaitu:

$$c_1 = 0 \text{ dan } c_2 = 0.$$

Jadi solusi umum persamaan (4.1.9) adalah

$$y_1 = -t \sin(t).$$

Jadi solusi persamaan Osilator Harmonik dengan menggunakan metode aproksimasi regular adalah

$$y(t; \varepsilon) = \sin(t) - \varepsilon t \sin(t).$$

#### 4.1.3 Solusi *Three-time Multiple Scale* Persamaan Osilator Harmonik

Dipunyai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1. \quad (4.1.12)$$

Asumsikan solusi persamaan (4.1.12) ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$$y = y_0(t_1, t_2, t_3) + \varepsilon y_1(t_1, t_2, t_3) + \varepsilon^2 y_2(t_1, t_2, t_3) + \dots, \quad (4.1.13)$$

dengan  $t_1 = t$ ,  $t_2 = \varepsilon t$ ,  $t_3 = \varepsilon^2 t$ , dan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \quad (4.1.14)$$

Dari persamaan (4.1.13) dan (4.1.14) diperoleh

$$y' = \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) y, \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} y'' = & \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right. \\ & \left. + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \right) y \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.1.13) dan (4.1.15) ke persamaan (4.1.12) diperoleh

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \right)$$

$$(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + 2\varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right)$$

$$(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ \left( \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} + \dots \right) + \left( 2\varepsilon \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1 \partial t_2} + \dots \right) + \left( 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_3} + 2\varepsilon^4 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1 \partial t_3} + \dots \right) \right]$$

$$+ \dots] + \left[ \left( 2\varepsilon \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial y_2}{\partial t_1} + \dots \right) + \left( 2\varepsilon^2 \frac{\partial y_0}{\partial t_2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \right. \right.$$

$$+ 2\varepsilon^4 \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \dots) + \dots] + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2 \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + y_1 \right)$$

$$+ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + 2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + y_2 \right) + \dots = 0 \quad (4.1.16)$$

Dari persamaan (4.1.16), dengan mengumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat  $\varepsilon$ , diperoleh

$$\text{Order } O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2 \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + y_1 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^2): \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + 2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + y_2 = 0,$$

dan seterusnya.

Dari kondisi awal masalah (4.1.12), maka untuk order  $O(\varepsilon^0)$  menjadi

$$O(\varepsilon^0): \begin{cases} \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 = 0, \\ y_0(0) = 0, \frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0) = 1 \text{ untuk } t_1 = t_2 = t_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Solusi umum masalah dalam persamaan (4.1.17) adalah

$$y_0 = a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1) \quad (4.1.18)$$

dimana  $a_0(t_2)$  dan  $b_0(t_2)$  adalah sembarang fungsi dalam  $t_2$ .

Dipunyai kondisi awal  $y_0(0) = 0$  dan  $\frac{\partial y_0}{\partial t_1}(0) = 1$ .

Jelas

$$y_0(0,0,0) = a_0(0) \sin(0) + b_0(0) \cos(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow b_0(0) = 0,$$

dan

$$\frac{\partial y_0(0,0,0)}{\partial t_1} = a_0(0) \cos(0) - b_0(0) \sin(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow a_0(0) = 1.$$

Jadi diperoleh  $a_0(0) = 1$  dan  $b_0(0) = 0$ .

Jadi solusi persamaan (4.1.17) menjadi

$$y_0 = \sin t_1.$$

Masalah dalam order  $O(\varepsilon^1)$  didapat

$$O(\varepsilon): \begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2 \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + y_1 = 0 \\ y_1(0) = 0, \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_0}{\partial t_2} = 0 \text{ untuk } t_1 = t_2 = t_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.19)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.1.18) ke persamaan (4.1.19) diperoleh

$$\left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 \right) = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} - 2 \frac{\partial y_0}{\partial t_1}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 1 \right) y_1 = -2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} [a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1)]$$

$$-2 \frac{\partial}{\partial t_1} [a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1)]$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 1 \right) y_1 = -2a'_0(t_2) \cos(t_1) - 2a_0(t_2) \sin(t_1)$$

$$+ 2b'_0(t_2) \sin(t_1) + 2b_0(t_2) \cos(t_1)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 1 \right) y_1 = [2b'_0(t_2) + 2b_0(t_2)] \sin t_1 - [2a'_0(t_2) + 2a_0(t_2)] \cos t_1. \quad (4.1.20)$$

Dengan menggunakan metode vareasi parameter, dipunyai solusi homogen atau solusi komplemennya adalah sebagai berikut.

$$y_c = c_1 \sin(t_1) + c_2 \cos(t_1).$$

Untuk menemukan solusi khususnya, maka terlebih dahulu dihitung Wronskian atau determinannya dengan  $y_1 = \cos(t)$  dan  $y_2 = \sin(t)$ .

$$W(y_1, y_2) = \sin(t_1) (\cos(t_1))' - \cos(t_1) (\sin(t_1))'$$

$$= -\sin^2(t_1) - \cos^2(t_1)$$

$$= -1.$$

Tulis solusi persamaan (4.1.20) ditulis dalam bentuk

$$y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \quad (4.1.21)$$

Dengan menggunakan metode vareasi parameter dipunyaai

$$u_1(t)\sin(t_1) + u_2(t)\cos(t_1) = 0$$

$$u_1(t) \cos(t_1) - u_1(t) \sin(t_1) = (2b'_0(t_2) + 2b_0(t_2)) \sin(t_1)$$

$$-(2a'_0(t_2) + 2a_0(t_2)) \cos(t_1)$$

Jelas

$$\begin{aligned} u'_1 &= -\frac{\cos(t_1) [[2b'_0(t_2) + 2b_0(t_2)] \sin t_1 - [2a'_0(t_2) + 2a_0(t_2)] \cos t_1]}{\sin(t_1) [\cos(t_1)]' - \cos(t_1) [\sin(t_1)]'} \\ &= -\frac{\cos(t_1) [[2b'_0(t_2) + 2b_0(t_2)] \sin t_1 - [2a'_0(t_2) + 2a_0(t_2)] \cos t_1]}{-1} \\ &= [2b'_0(t_2) + 2b_0(t_2)] \sin(t_1) \cos(t_1) - [2a'_0(t_2) + 2a_0(t_2)] \cos^2(t_1) \\ &= [b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \sin(2t_1) - [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] (\cos(2t_1) + 1) \\ &= [b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \sin(2t_1) - [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \cos(2t_1) \\ &\quad - [a'_0(t_2) + a_0(t_2)], \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} u'_2 &= \frac{\sin(t_1) [[2b'_0(t_2) + 2b_0(t_2)] \sin(t_1) - [2a'_0(t_2) + 2a_0(t_2)] \cos(t_1)]}{\sin(t_1) [\cos(t_1)]' - \cos(t_1) [\sin(t_1)]'} \\ &= \frac{[2b'_0(t_2) + 2b_0(t_2)] \sin^2(t_1) - [2a'_0(t_2) + 2a_0(t_2)] \cos(t_1) \sin(t_1)}{-1} \\ &= -[b'_0(t_2) + b_0(t_2)][1 - \cos(2t_1)] + [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \sin(2t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -[b'_0(t_2) + b_0(t_2)] + [b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \cos(2t) \\
&\quad + [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \sin(2t_1).
\end{aligned}$$

Dengan mengintegralkan  $u'_1$  dan  $u'_2$  diperoleh

$$u_1 = \int [[b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \sin(2t_1) - [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \cos(2t_1)$$

$$- [a'_0(t_2) + a_0(t_2)]] dt_1$$

$$= -\frac{1}{2} [b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \cos(2t_1) - \frac{1}{2} [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \sin(2t_1)$$

$$- [a'_0(t_2) + a_0(t_2)]] t_1,$$

dan

$$\begin{aligned}
u_2 = & \int [-[b'_0(t_2) + b_0(t_2)] + [b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \cos(2t_1) \\
& + [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \sin(2t_1)] dt_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -[b'_0(t_2) + b_0(t_2)]t_1 + \frac{1}{2}[b'_0(t_2) + b_0(t_2)]\sin(2t_1) \\
&\quad - \frac{1}{2}[a'_0(t_2) + a_0(t_2)]\cos(2t_1).
\end{aligned}$$

Dengan mensubtitusikan  $u_1$  dan  $u_2$  ke persamaan (4.1.21) diperoleh solusi khusus persamaan (4.1.20), yaitu

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \\
&= \sin(t_1) \left[ -\frac{1}{2}[b'_0(t_2) + b_0(t_2)]\cos(2t_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}[a'_0(t_2) + a_0(t_2)]\sin(2t_1) - [a'_0(t_2) + a_0(t_2)]t_1 \right] \\
&\quad + \cos(t_1) \left[ -[b'_0(t_2) + b_0(t_2)]t_1 + \frac{1}{2}[b'_0(t_2) + b_0(t_2)]\sin(2t_1) \right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \cos(2t_1) \Big]$$

$$= -\frac{1}{2} [b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \cos(2t_1) \sin(t_1)$$

$$-\frac{1}{2} [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \sin(2t_1) \sin(t_1) - [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] t_1 \sin(t_1)$$

$$-[b'_0(t_2) + b_0(t_2)] t_1 \cos(t_1) + \frac{1}{2} [b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \sin(2t_1) \cos(t_1)$$

$$-\frac{1}{2} [a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \cos(2t_1) \cos(t_1)$$

$$= -[a'_0(t_2) + a_0(t_2)]t_1 \sin(t_1) - [b'_0(t_2) + b_0(t_2)]t_1 \cos(t_1)$$

$$+ \frac{1}{2}[b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \sin(t_1) - \frac{1}{2}[a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \cos(t_1)$$

Jadi solusi umum masalah pada persamaan (4.1.20) adalah

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1(t_2) \sin(t_1) + b_1(t_2) \cos(t_1) - [a'_0(t_2) + a_0(t_2)]t_1 \sin(t_1) \\ &\quad - [b'_0(t_2) + b_0(t_2)]t_1 \cos(t_1) + \frac{1}{2}[b'_0(t_2) + b_0(t_2)] \sin(t_1) \\ &\quad - \frac{1}{2}[a'_0(t_2) + a_0(t_2)] \cos(t_1), \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

dengan kondisi awal yang diberikan dari persamaan (4.1.19).

Untuk menghilangkan suku-suku sekuler pada persamaan (4.1.22) harus dipunyai

$$b'_0(t_2) + b_0(t_2) = 0, \tag{4.1.23}$$

$$a'_0(t_2) + a_0(t_2) = 0. \tag{4.1.24}$$

Dari persamaan (4.1.23) dan (4.1.24) diperoleh

$$\frac{d[b_0(t_2)]}{dt_2} = -b_0(t_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d[b_0(t_2)]}{b_0(t_2)} = -dt_2$$

$$\Leftrightarrow \ln|b_0(t_2)| = -t_2 + C$$

$$\Leftrightarrow b_0(t_2) = Ce^{-t_2},$$

dan

$$\frac{d[a_0(t_2)]}{dt_2} = -a_0(t_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d[a_0(t_2)]}{a_0(t_2)} = -dt_2$$

$$\Leftrightarrow \ln|a_0(t_2)| = -t_2 + D$$

$$\Leftrightarrow a_0(t_2) = De^{-t_2},$$

Dengan menggunakan kondisi awal  $a_0(0) = 1$  dan  $b_0(0) = 0$  diperoleh  $b_0 = 0$  dan  $a_0 = e^{-t_2}$ .

Dengan mensubstitusikan  $a_0 = e^{-t_2}$  dan  $b_0 = 0$  ke persamaan (4.1.18), diperoleh

$$y = e^{-t_2} \sin(t_1) = e^{-\varepsilon t} \sin(t)$$

Jadi solusi persamaan Osilator Harmonik dengan menggunakan metode *Three-time Multiple Scale* adalah

$$y(t; \varepsilon) = e^{-\varepsilon t} \sin(t).$$

## 4.2 Solusi Persamaan Van der Pol

Perhatikan persamaan Van der Pol berikut ini.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} \quad (4.2.1)$$

Akan dicari solusi aproksimasi reguler dan solusi *Three-time Multiple Scale* untuk persamaan (4.2.1) dengan  $\varepsilon$  adalah parameter kecil yang memenuhi  $0 < \varepsilon \ll 1$  dan dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $\frac{dy}{dt}(0) = A_0$ .

### 4.2.1 Solusi Aproksimasi Reguler Persamaan Van der Pol

Dipunyai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt}, \quad y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = A_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4.2.2)$$

Asumsikan solusi persamaan (4.2.2) ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (4.2.3)$$

Dari persamaan (4.2.3) diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots, \text{ dan}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2y_1}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2y_2}{dt^2} + \dots \quad (4.2.4)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.2.3) dan (4.2.4) ke persamaan (4.2.2), diperoleh

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2y_1}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2y_2}{dt^2} + \dots \right) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\ &= \varepsilon(1 - (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots)^2) \left( \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right) \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 \right) + \varepsilon \left( \frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{d^2y_2}{dt^2} + y_2 \right) \\ &= (\varepsilon - \varepsilon(y_0^2 + 2\varepsilon y_0 y_1 + \varepsilon^2(2y_0 y_2 + y_1^2) + \dots)) \left( \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right) \\ &= [\varepsilon - \varepsilon(y_0^2 + 2\varepsilon y_0 y_1 + \varepsilon^2(2y_0 y_2 + y_1^2) + \dots)] \end{aligned}$$

$$\left( \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right)$$

$$= [\varepsilon - (\varepsilon y_0^2 + 2\varepsilon^2 y_0 y_1 + \varepsilon^3 (2y_0 y_2 + y_1^2) + \dots)]$$

$$\left( \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right)$$

$$= \varepsilon \left( \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right)$$

$$-(\varepsilon y_0^2 + 2\varepsilon^2 y_0 y_1 + \varepsilon^3 (2y_0 y_2 + y_1^2) + \dots)$$

$$\left( \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right)$$

$$= \left( \varepsilon \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^3 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right)$$

$$- \left( \varepsilon y_0^2 \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon^2 y_0^2 \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon^3 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right)$$

$$- \left( 2\varepsilon^2 y_0 y_1 \frac{dy_0}{dt} + 2\varepsilon^3 y_0 y_1 \frac{dy_1}{dt} + 2\varepsilon^4 y_0 y_1 \frac{dy_2}{dt} + \dots \right)$$

$$= \varepsilon (1 - y_0^2) \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{dy_1}{dt} - y_0^2 \frac{dy_1}{dt} - 2y_0 y_1 \frac{dy_0}{dt} \right) + \dots$$

$$= \varepsilon(1 - y_0^2) \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon^2 \left( (1 - y_0^2) \frac{dy_1}{dt} - 2y_0 y_1 \frac{dy_0}{dt} \right) + \dots,$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 \right) + \varepsilon \left( \frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 \right) \\ & = \varepsilon(1 - y_0^2) \frac{dy_0}{dt} + \varepsilon^2 \left( (1 - y_0^2) \frac{dy_1}{dt} - 2y_0 y_1 \frac{dy_0}{dt} \right) + \dots \quad (4.2.5) \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.2.5), dengan mengumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat  $\varepsilon$ , diperoleh

$$\text{Order } O(\varepsilon^0): \frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^1): \frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = (1 - y_0^2) \frac{dy_0}{dt},$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^2): \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 = (1 - y_0^2) \frac{dy_1}{dt} - 2y_0 y_1 \frac{dy_0}{dt},$$

dan seterusnya.

Dari kondisi awal masalah (4.2.2), maka untuk order  $O(\varepsilon^0)$  menjadi

$$O(\varepsilon^0): \frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 = 0, y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = A_0. \quad (4.2.6)$$

Solusi masalah persamaan (4.2.6) dapat diberikan dengan

$$y_0(t) = a_0 \sin(t) + b_0 \cos(t).$$

Dari kondisi awal yang diberikan diperoleh

$$y_0(0) = 0 \rightarrow y_0(0) = a_0 \sin(0) + b_0 \cos(0) \Leftrightarrow b_0 = 0.$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = A_0 \rightarrow \frac{dy(0)}{dt} = a_0 \cos(0) - b_0 \sin(0) \Leftrightarrow a_0 = A_0.$$

Jadi diperoleh  $a_0 = A_0$  dan  $b_0 = 0$ .

Jadi solusi dari persamaan (4.2.6) menjadi

$$y_0 = A_0 \sin(t),$$

Masalah order  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  diberikan dengan

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = (1 - y_0^2) \frac{dy_0}{dt}, y_0 = A_0 \sin(t), \frac{dy_0}{dt} = -A_0 \cos(t). \quad (4.2.7)$$

Persamaan (4.2.7) dapat ditulis dengan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 &= (1 - (A_0 \sin(t))^2)(A_0 \cos(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 &= A_0 \cos(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos(t) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Persamaan homogen dari persamaan (4.2.8) adalah

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = 0,$$

Jadi solusi homogen atau solusi komplemennya adalah

$$y_c = a_0 \sin(t) + b_0 \cos(t),$$

Untuk menemukan solusi khususnya, maka terlebih dahulu dihitung Wronskiannya atau determinan dengan  $y_1 = \cos(t)$  dan  $y_2 = \sin(t)$ .

$$W(y_1, y_2) = \sin(t) (\cos(t))' - \cos(t) (\sin(t))'$$

$$= -\sin^2(t) - \cos^2(t)$$

$$= -1.$$

Misalkan solusi persamaan (4.2.8) ditulis dalam bentuk

$$y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \quad (4.2.9)$$

Dengan menggunakan metode vareasi parameter dipunyai

$$\begin{aligned} u_1(t)\sin(t) + u_2(t)\cos(t) &= 0, \\ u_1(t)\cos(t) - u_2(t)\sin(t) &= A_0 \cos(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos(t) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Dari persamaan (4.2.10) diperoleh

$$\begin{aligned}
u'_1 &= - \frac{\cos(t) [A_0 \cos(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos(t)]}{\sin(t) (\cos(t))' - \cos(t) (\sin(t))'} \\
&= - \frac{\cos(t) (A_0 \cos(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos(t))}{-\sin^2(t) - \cos^2(t)} \\
&= - \frac{\cos(t) (A_0 \cos(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos(t))}{-1} \\
&= A_0 \cos^2(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos^2(t) \\
&= A_0 \left( \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) - A_0^3 \left( \frac{1 - \cos(4t)}{8} \right) \\
&= \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} A_0 \cos(2t) - \frac{1}{8} A_0^3 + \frac{1}{8} A_0^3 \cos(4t),
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
u'_2 &= \frac{\sin(t) [A_0 \cos(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos(t)]}{\sin(t) (\cos(t))' - \cos(t) (\sin(t))'} \\
&= \frac{\sin(t) (A_0 \cos(t) - A_0^3 \sin^2(t) \cos(t))}{-\sin^2(t) - \cos^2(t)} \\
&= \frac{A_0 \cos(t) \sin(t) - A_0^3 \sin^3(t) \cos(t)}{-1} \\
&= -A_0 \cos(t) \sin(t) + A_0^3 \sin^3(t) \cos(t) \\
&= -A_0 \left( \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + A_0^3 \left( -\frac{1}{8} \sin(4t) + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) \\
&= -\frac{1}{2} A_0 \sin(2t) - \frac{1}{8} A_0^3 \sin(4t) + \frac{1}{4} A_0^3 \sin(2t).
\end{aligned}$$

Dengan mengintegralkan  $u'_1$  dan  $u'_2$  diperoleh

$$u_1 = \int \left( \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} A_0 \cos(2t) - \frac{1}{8} A_0^3 + \frac{1}{8} A_0^3 \cos(4t) \right) dt$$

$$= \frac{1}{2}A_0 t + \frac{1}{4}A_0 \sin(2t) - \frac{1}{8}A_0^3 t + \frac{1}{32}A_0^3 \sin(4t).$$

$$u_2 = \int \left( -\frac{1}{2}A_0 \sin(2t) - \frac{1}{8}A_0^3 \sin(4t) + \frac{1}{4}A_0^3 \sin(2t) \right) dt$$

$$= \frac{1}{4}A_0 \cos(2t) + \frac{1}{32}A_0^3 \cos(4t) - \frac{1}{8}A_0^3 \cos(2t).$$

Dengan mensubtitusikan  $u_1$  dan  $u_2$  ke persamaan (4.2.9) diperoleh solusi khusus (4.2.8), yaitu

$$y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

$$= \sin(t) \left[ \frac{1}{2}A_0 t + \frac{1}{4}A_0 \sin(2t) - \frac{1}{8}A_0^3 t + \frac{1}{32}A_0^3 \sin(4t) \right]$$

$$+ \cos(t) \left[ \frac{1}{4} A_0 \cos(2t) + \frac{1}{32} A_0^3 \cos(4t) - \frac{1}{8} A_0^3 \cos(2t) \right]$$

$$= \frac{1}{2} A_0 t \sin(t) + \frac{1}{4} A_0 \sin(2t) \sin(t) - \frac{1}{8} A_0^3 t \sin(t)$$

$$+ \frac{1}{32} A_0^3 \sin(4t) \sin(t) + \frac{1}{4} A_0 \cos(2t) \cos(t)$$

$$+ \frac{1}{32} A_0^3 \cos(4t) \cos(t) - \frac{1}{8} A_0^3 \cos(2t) \cos(t)$$

$$= \frac{1}{2} A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8} A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{4} A_0 \cos(t) + \frac{1}{32} A_0^3 \cos(3t)$$

$$-\frac{1}{8}A_0^3 \cos(2t) \cos(t)$$

$$= \frac{1}{2}A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8}A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{4}A_0 \cos(t) + \frac{1}{32}A_0^3 \cos(3t)$$

$$-\frac{1}{16}A_0^3[\cos(3t) + \cos(t)]$$

$$= \frac{1}{2}A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8}A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{4}A_0 \cos(t) - \frac{1}{32}A_0^3 \cos(3t)$$

$$-\frac{1}{16}A_0^3 \cos(t).$$

Jadi solusi masalah dari persamaan (4.2.7) adalah

$$y_1 = a_0 \sin(t) + b_0 \cos(t) + \frac{1}{2}A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8}A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{4}A_0 \cos(t)$$

$$- \frac{1}{32}A_0^3 \cos(3t) - \frac{1}{16}A_0^3 \cos(t).$$

Dari kondisi awal  $y_1(0) = 0$  dan  $\frac{dy_1}{dt}(0) = 0$ , diperoleh nilai  $a_0$  dan  $b_0$  yaitu

$$a_0 = 0 \text{ dan } b_0 = -\frac{1}{4}A_0 + \frac{3}{32}A_0^3.$$

Jadi solusi persamaan (4.2.7) menjadi

$$y_1 = \left(-\frac{1}{4}A_0 + \frac{3}{32}A_0^3\right) \cos(t) + \frac{1}{2}A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8}A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{4}A_0 \cos(t)$$

$$- \frac{1}{32}A_0^3 \cos(3t) - \frac{1}{16}A_0^3 \cos(t)$$

$$= \frac{1}{2}A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8}A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{32}A_0^3 \cos(3t) - \frac{1}{16}A_0^3 \cos(t).$$

Jadi solusi persamaan Van der Pol menggunakan metode aproksimasi regular adalah

$$y(t; \varepsilon) = A_0 \sin(t) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8} A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{32} A_0^3 \cos(3t) - \frac{1}{16} A_0^3 \cos(t) \right].$$

#### 4.2.2 Solusi Three-time Multiple Scale Persamaan Van der Pol

Dipunyai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt}, y(0) = 0, \frac{dy}{dt}(0) = A_0, 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (4.2.11)$$

Asumsikan solusi persamaan (4.2.11) ditulis dalam bentuk sebagai berikut.

$$y = y_0(t_1, t_2, t_3) + \varepsilon y_1(t_1, t_2, t_3) + \varepsilon^2 y_2(t_1, t_2, t_3) + \dots \quad (4.2.12)$$

dengan  $t_1 = t$ ,  $t_2 = \varepsilon t$ ,  $t_3 = \varepsilon^2 t$ , dan

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \quad (4.2.13)$$

Dari persamaan (4.2.12) dan (4.2.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
 y' &= \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) y, \text{ dan} \\
 y'' &= \left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \right) y \tag{4.2.14}
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.2.12) dan (4.2.14) ke persamaan (4.2.11) diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \right) \\
 &(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\
 &= \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} \\
 \Leftrightarrow &\left[ \left( \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1^2} + \dots \right) + \left( 2\varepsilon \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} y_2 + \dots \Big) + \left( 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_3} \right. \\
& \left. + 2\varepsilon^4 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t_1 \partial t_3} + \dots \right) + \dots \Big] + (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\
& = \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} \\
\Leftrightarrow & \left( \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} \right) + \varepsilon^2 \left( y_2 + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} y_0 + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} y_2 + 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} \right) = \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} \\
& = \varepsilon [1 - (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots)^2] \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) \\
& (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\
& = [\varepsilon - \varepsilon(y_0^2 + 2\varepsilon y_0 y_1 + \varepsilon^2(2y_0 y_2 + y_1^2) + \dots)] \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) \\
& (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\
& = \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\
& - \varepsilon(y_0^2 + 2\varepsilon y_0 y_1 + \varepsilon^2(2y_0 y_2 + y_1^2) + \dots) \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3} \right) \\
& (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots) \\
& = \left[ \left( \varepsilon \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \varepsilon^3 \frac{\partial y_2}{\partial t_1} + \dots \right) + \left( \varepsilon^2 \frac{\partial y_0}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon^4 \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \dots \right) + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$+ \varepsilon^4 \frac{\partial y_2}{\partial t_2} + \dots \Big) + \dots \Big] - \left[ \left( \varepsilon \frac{\partial y_0^2}{\partial t_1} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial y_0 y_1}{\partial t_1} + \dots \right) \right.$$

$$\left. + \left( \varepsilon^2 \frac{\partial y_0^2}{\partial t_2} + 2\varepsilon^3 \frac{\partial y_0 y_1}{\partial t_2} + \dots \right) + \dots \right]$$

$$= \varepsilon \left( \frac{\partial y_0}{\partial t_1} - \frac{\partial y_0^2}{\partial t_1} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_0}{\partial t_2} - \frac{\partial y_0^3}{\partial t_2} - 3 \frac{\partial y_0 y_1}{\partial t_1} \right) + \dots$$

$$= \varepsilon \left( 1 - \frac{\partial y_0^2}{\partial t_1} \right) \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \left( (1 - y_0^2) \left( \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_0}{\partial t_2} \right) - 2y_0^2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} \right) + \dots$$

Jadi diperoleh

$$\left( \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} \right) + \varepsilon^2 \left( y_2 + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_3} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} y_0 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} y_2 + 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1 \partial t_2} \Big) \\
& = \varepsilon (1 - y_0^2) \frac{\partial y_0}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \left( (1 - y_0^2) \left( \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_0}{\partial t_2} \right) - 2y_0^2 \frac{\partial y_1}{\partial t_1} \right) + \dots, \quad (4.2.15)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.2.15), dengan mengumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat  $\varepsilon$ , diperoleh

$$\text{Order } O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 = 0,$$

$$\text{Order } O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} = (1 - y_0^2) \frac{\partial y_0}{\partial t_1},$$

dan seterusnya.

Dari kondisi awal masalah (4.2.11), maka untuk order  $O(\varepsilon^0)$  menjadi

$$O(\varepsilon^0): \begin{cases} \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1^2} + y_0 = 0, \\ y_0(0) = 0, \frac{\partial y_0}{\partial t_1} = A_0 \text{ untuk } t_1 = t_2 = t_3 = 0. \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Solusi umum masalah dalam persamaan (4.2.16) adalah

$$y_0 = a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1) \quad (4.2.17)$$

dimana  $a_0(t_2)$  dan  $b_0(t_2)$  adalah sembarang fungsi dalam  $t_2$ .

Dari kondisi awal  $y_0(0,0,0) = 0$  dan  $\frac{\partial y_0}{\partial t_1} = A_0$  untuk  $t_1 = t_2 = t_3 = 0$  maka diperoleh

$$0 = a_0(0) \sin(0) + b_0(0) \cos(0) \Leftrightarrow 0 = b_0,$$

dan

$$A_0 = a_0(0) \cos(0) \Leftrightarrow A_0 = a_0.$$

Jadi solusi umumnya

$$y_0 = A_0 \sin(t_1),$$

Masalah dalam order  $O(\varepsilon^1)$  didapat

$$O(\varepsilon): \begin{cases} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_1 \partial t_2} = (1 - y_0^2) \frac{\partial y_0}{\partial t_1}, \\ y_1(0) = 0, \frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_0}{\partial t_2} = 0 \text{ untuk } t_1 = t_2 = t_3 = 0. \end{cases} \quad (4.2.18)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.2.17) ke persamaan (4.2.18) diperoleh

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} (a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1)) \\
 &= (1 - [a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1)]^2) \frac{\partial}{\partial t_1} (a_0(t_2) \sin(t_1) \\
 &\quad + b_0(t_2) \cos(t_1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = -2[a'_0(t_2) \cos(t_1) + b'_0(t_2) \sin(t_1)] \\
 & \quad + [1 - [a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1)]^2] (a_0(t_2) \cos(t_1) - b_0(t_2) \sin(t_1)) \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = -2[a'_0 \cos(t_1) + b'_0 \sin(t_1)] \\
 & \quad a_0 \cos(t_1) - b_0 \sin(t_1) = [a_0^2 \sin^2(t_1) + 2a_0 b_0 \sin(t_1) \cos(t_1) \\
 & \quad + b_0^2 \cos^2(t_1)] (a_0 \cos(t_1) - b_0 \sin(t_1)) \\
 & \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = -2a'_0 \cos(t_1) + 2b'_0 \sin(t_1) + a_0 \cos(t_1)
 \end{aligned}$$

$$-b_0 \sin(t_1) - a_0^3 \sin^2(t_1) \cos(t_1) + a_0^2 b_0 \sin^3(t_1)$$

$$-2a_0^2 b_0 \sin(t_1) \cos^2(t_1) + 2a_0 b_0^2 \sin^2(t_1) \cos(t_1)$$

$$-a_0 b_0^2 \cos^3(t_1) + b_0^3 \sin(t_1) \cos^2(t_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = -2a'_0 \cos(t_1) + 2b'_0 \sin(t_1) + a_0 \cos(t_1)$$

$$-b_0 \sin(t_1) - \frac{1}{4} a_0^3 \cos(t_1) + \frac{1}{4} a_0^3 \cos(3t_1) + \frac{1}{4} a_0^2 b_0 \sin(t_1)$$

$$-\frac{3}{4}a_0^2b_0 \sin(3t_1) - \frac{1}{4}a_0b_0^2 \cos(t_1) - \frac{3}{4}a_0b_0^2 \cos(3t_1)$$

$$+\frac{1}{4}b_0^3 \sin(3t_1) + \frac{1}{4}b_0^3 \sin(t_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = \left( 2b_0' - b_0 \left[ 1 - \frac{(a_0^2 + b_0^2)}{4} \right] \right) \sin(t_1)$$

$$+ \left( -2a_0' + a_0 \left[ 1 - \frac{(a_0^2 + b_0^2)}{4} \right] \right) \cos(t_1)$$

$$+ \left( -\frac{3}{4}a_0^2b_0 + \frac{1}{4}b_0^3 \right) \sin(3t_1) + \left( \frac{1}{4}a_0^3 - \frac{3}{4}a_0b_0^2 \right) \cos(3t_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y_1}{\partial t_1^2} + y_1 = f_1. \quad (4.2.19)$$

Pada persamaan (4.2.19), untuk  $y_1$  terkandung turunan dengan nilai  $t$  sebagai persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas  $t$  dimana solusi umum telah ditentukan dengan menggunakan identitas trigonometri standar,  $f_1$  dapat diketahui dari linear ekspansi dalam  $\cos(t), \sin(t), \cos(3t), \sin(3t)$ . Untuk kasus  $\cos(t)$  dan  $\sin(t)$  pada  $f_1$  diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{Untuk } 2b'_0 - b_0 \left[ 1 - \frac{(a_0^2 + b_0^2)}{4} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow 2b'_0 &= b_0 \left[ 1 - \frac{(a_0^2 + b_0^2)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } -2a'_0 + a_0 \left[ 1 - \frac{(a_0^2 + b_0^2)}{4} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow -2a'_0 &= -a_0 \left[ 1 - \frac{(a_0^2 + b_0^2)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Dengan menggunakan kondisi awal  $a_0(0) = A_0$  dan  $b_0(0) = 0$ , dari persamaan (4.2.20) diperoleh

$$2b'_0 = 0 \Leftrightarrow b_0 = C.$$

Karena untuk  $t_2 = 0$  dan  $b_0(t_2) = 0$ , maka diperoleh  $C = 0$ , sehingga

$$b_0(t_2) = 0. \quad (4.2.22)$$

Dengan menggunakan kondisi awal  $a_0(0) = A_0$  dan  $b_0(0) = 0$ , dari persamaan (4.2.21) diperoleh

$$-2a'_0 = -a_0 \left( 1 - \frac{a_0^2}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow -2a'_0 = -a_0 + \frac{a_0^3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a'_0 = \frac{a_0}{2} - \frac{a_0^3}{8} \quad (4.2.23)$$

Dengan menyelesaikan persamaan diferensial order satu pada persamaan (4.2.23), diperoleh

$$a_0(t_2) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4Ce^{-t_2}}}.$$

Dari kondisi awal  $a_0(0) = A_0$  diperoleh

$$A_0 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4C}}$$

$$\Leftrightarrow A_0^2(1 + 4C) = 4$$

$$\Leftrightarrow 4CA_0^2 = 4 - A_0^2$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{4 - A_0^2}{4A_0^2}.$$

Jadi solusi persamaan (4.2.23) menjadi

$$a_0(t_2) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4e^{-t_2} \left( \frac{4 - A_0^2}{4A_0^2} \right)}}$$

$$\Leftrightarrow a_0(t_2) = \frac{2A_0}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-t_2}}}. \quad (4.2.24)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.2.22) dan (4.2.24) ke dalam persamaan (4.2.17), yaitu  $y_0 = a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1)$ , maka diperoleh

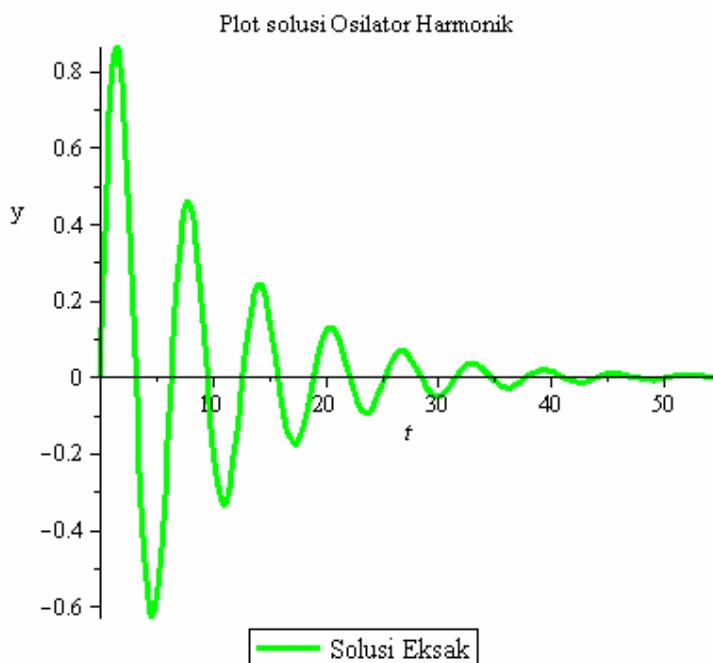
$$y_0 = \frac{2A_0 \sin(t_1)}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-t_2}}} = \frac{2A_0 \sin(t)}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-st}}}, \quad (4.2.25)$$

Jadi solusi persamaan Van der Pol menggunakan metode *Three-time Multiple Scale* adalah

$$y(t; \varepsilon) = \frac{2A_0 \sin(t)}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-\varepsilon t}}}$$

### 4.3 Aplikasi Maple untuk Visualisasi Persamaan Osilator Harmonik dan Persamaan Van der Pol

#### 4.3.1 Plot Solusi Eksak Persamaan Osilator Harmonik



Gambar 4.1. Plot solusi eksak persamaan Osilator Harmonik

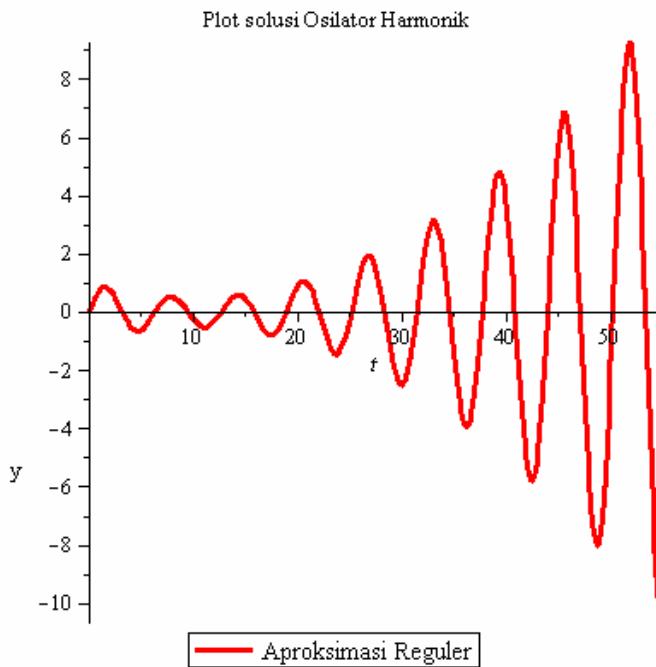
Gambar (4.1) merupakan plot solusi eksak persamaan Osilator Harmonik,

$y'' + 2\varepsilon y' + y = 0$ , untuk  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$ .

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa untuk nilai  $t$  yang semakin besar solusinya akan semakin mengecil.

#### 4.3.2 Plot Solusi Aproksimasi Reguler Persamaan Osilator Harmonik

Plot solusi  $y'' + 2\epsilon y' + y = 0$  untuk  $\epsilon = \frac{1}{10}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$ .

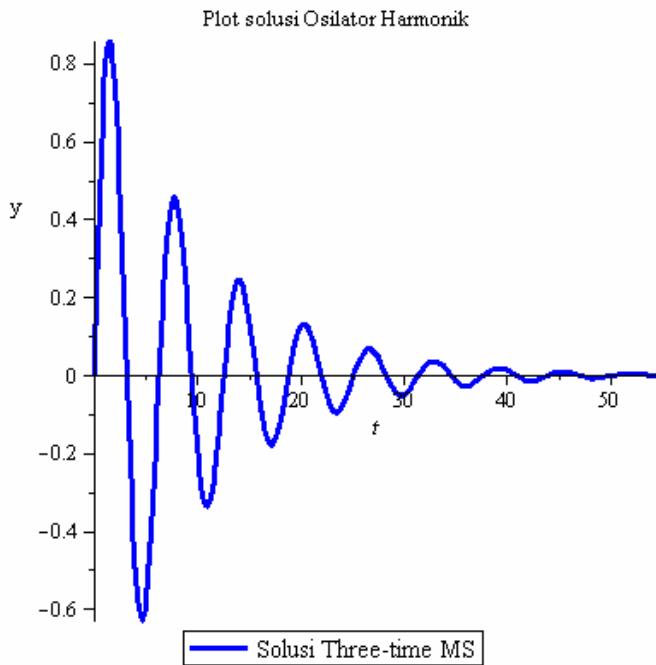


Gambar 4.2. Plot solusi aproksimasi reguler persamaan Osilator Harmonik

Gambar (4.2) merupakan plot solusi aproksimasi reguler persamaan Osilator Harmonik, yaitu  $y(t; \epsilon) = \sin(t) - \epsilon t \sin(t)$ . Dari Gambar (4.2) dapat dilihat bahwa solusinya semakin membesar untuk nilai  $t$  yang semakin besar. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusinya, yaitu  $t \sin(t)$ , yang akan menyebabkan solusi menjadi tak terbatas.

#### 4.3.3 Plot Solusi *Three-time Multiple Scale* Persamaan Osilator Harmonik

Plot solusi  $y'' + 2\epsilon y' + y = 0$  untuk  $\epsilon = \frac{1}{10}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$ .

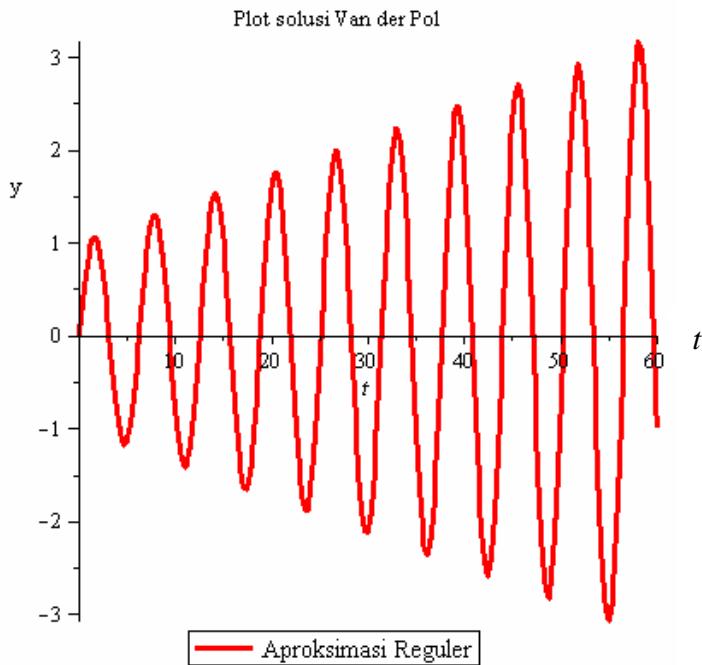


Gambar 4.3. Plot solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik

Gambar (4.3) merupakan plot solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik, yaitu  $y(t; \varepsilon) = e^{-\varepsilon t} \sin(t)$ . Dari Gambar (4.3) dapat dilihat bahwa untuk nilai  $t$  yang semakin besar solusinya akan semakin mengecil. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusi Aproksimasi Reguler dapat dihilangkan dengan teknik *Three-time Multiple Scale*.

#### 4.3.4 Plot Solusi Aproksimasi Reguler Persamaan Van de Pol

Plot solusi  $y'' + y = \varepsilon(1 - y^2)y'$  untuk  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0 = 1$ .



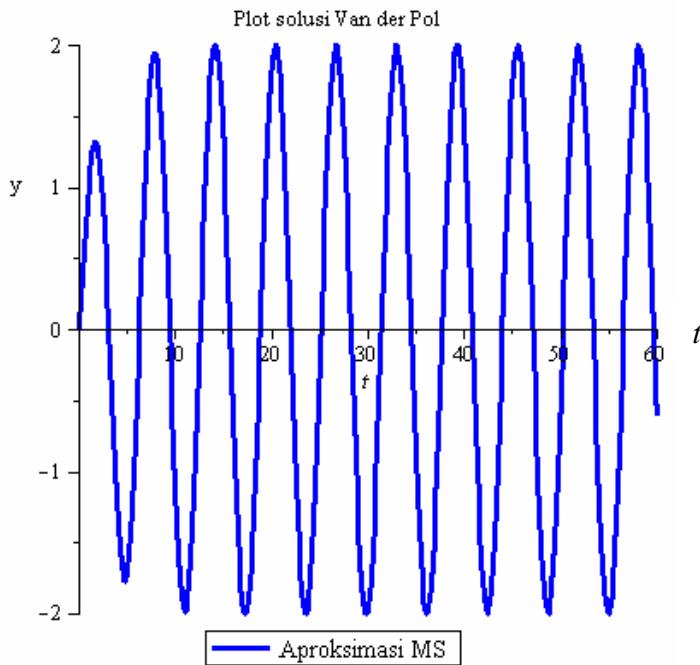
Gambar 4.4. Plot solusi aproksimasi reguler persamaan Van der Pol

Gambar (4.4) merupakan plot solusi aproksimasi reguler persamaan Van der Pol, yaitu  $y(t; \varepsilon) = A_0 \sin(t) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8} A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{32} A_0^5 \cos(3t) - \frac{1}{16} A_0^3 \cos(t) \right]$ .

Dari Gambar (4.4) dapat dilihat bahwa solusinya semakin membesar untuk nilai  $t$  yang semakin besar. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusinya, yaitu  $\frac{1}{2} A_0 t \sin(t)$  dan  $\frac{1}{8} A_0^3 t \sin(t)$ , yang menyebabkan solusi menjadi tak terbatas.

#### 4.3.5 Plot Solusi Three-time Multiple Scale Persamaan Van de Pol

Plot solusi  $y'' + y = \varepsilon(1 - y^2)y'$  untuk  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0 = 1$ .



Gambar 4.5. Plot solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Van der Pol

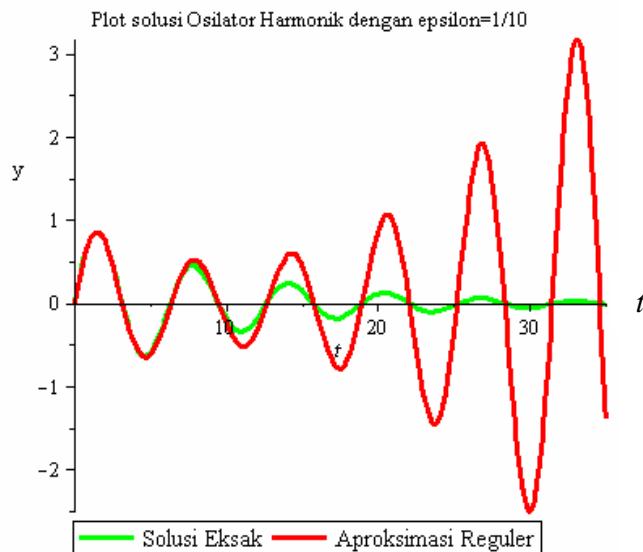
Gambar (4.5) merupakan plot solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Van der Pol, yaitu  $y(t; \varepsilon) = \frac{2A_0 \sin(t)}{\sqrt{A_0^2 + (4-A_0^2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}t}}}$ . Dari Gambar (4.5) dapat dilihat

bahwa untuk nilai  $t$  yang semakin besar solusinya akan membentuk solusi periodik. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusi Aproksimasi Reguler dapat dihilangkan dengan teknik *Three-time Multiple Scale*.

#### 4.3.6 Perbandingan Plot Solusi Eksak, Solusi Aproksimasi Reguler, dan Solusi *Three-time Multiple Scale* Persamaan Osilator Harmonik

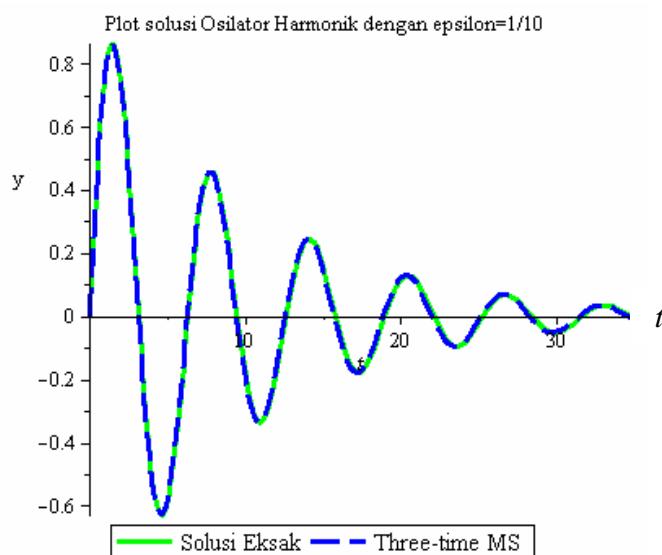
Plot solusi  $y'' + 2\varepsilon y' + y = 0$  untuk  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$

dan  $y'(0) = 1$ .

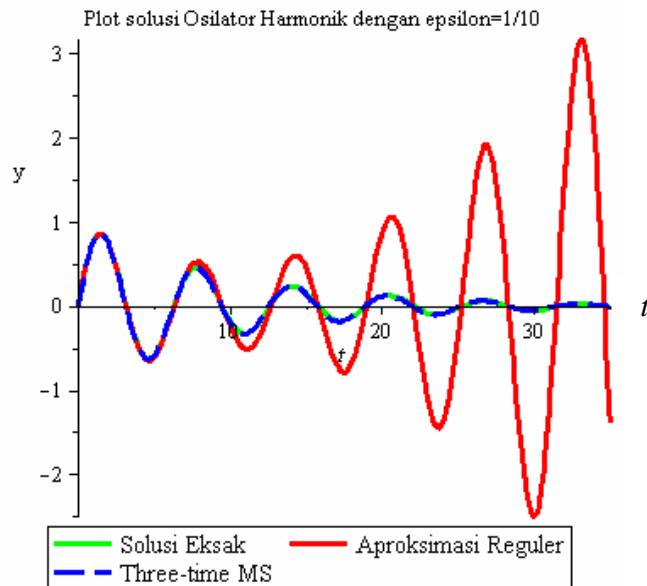


Gambar 4.6. Plot solusi eksak dan solusi aproksimasi regular persamaan Osilator Harmonik

Dari Gambar (4.6) dapat dilihat bahwa solusi aproksimasi regular akan memberikan hasil yang tepat untuk nilai  $\epsilon$  yang sangat kecil dan untuk waktu yang tidak terlalu lama. Untuk waktu yang lama, hasil aproksimasi ini menjadi tidak akurat lagi karena suku-suku sekuler yang muncul dalam solusinya yang akan menyebabkan solusi menjadi tak terbatas.



Gambar 4.7. Plot solusi eksak dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik

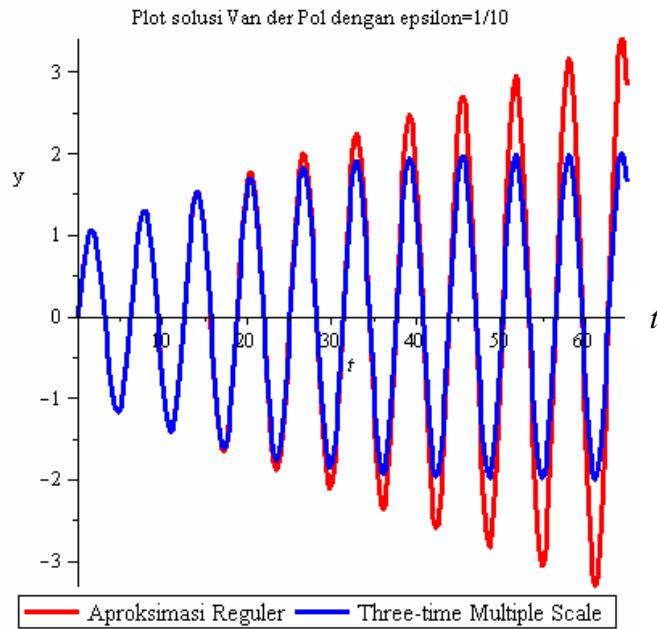


Gambar 4.8. Plot solusi eksak, solusi aproksimasi regular, dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik

Gambar (4.7) merupakan perbandingan plot solusi eksak dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik untuk  $\epsilon = \frac{1}{10}$  dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$ . Sedangkan Gambar (4.8) merupakan perbandingan plot solusi eksak, solusi aproksimasi regular, dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik dengan kondisi awal yang sama. Dari Gambar (4.7) dan Gambar (4.8) dapat dilihat bahwa solusi *Three-time Multiple Scale* akan memberikan hasil yang cukup akurat dibandingkan solusi aproksimasi reguler. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam aproksimasi reguler dapat dihilangkan dengan menggunakan teknik *Three-time Multiple Scale*.

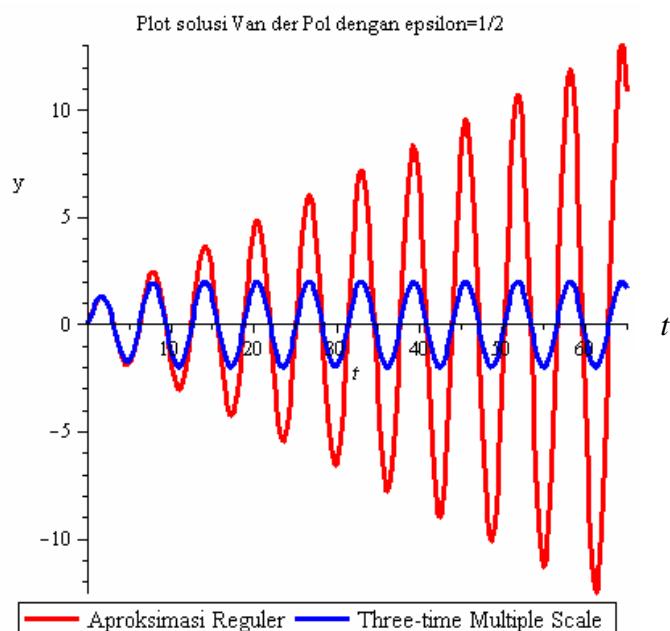
#### 4.3.7 Perbandingan Plot Solusi Aproksimasi Reguler dan Solusi *Three-time Multiple Scale* Persamaan Van der Pol

Plot solusi  $y'' + y = \epsilon(1 - y^2)y'$  untuk  $\epsilon = \frac{1}{10}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0 = 1$ .



Gambar 4.9. Plot solusi aproksimasi regular dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Van der Pol untuk  $\epsilon = \frac{1}{10}$

Plot solusi  $y'' + y = \epsilon(1 - y^2)y'$  untuk  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0 = 1$ .

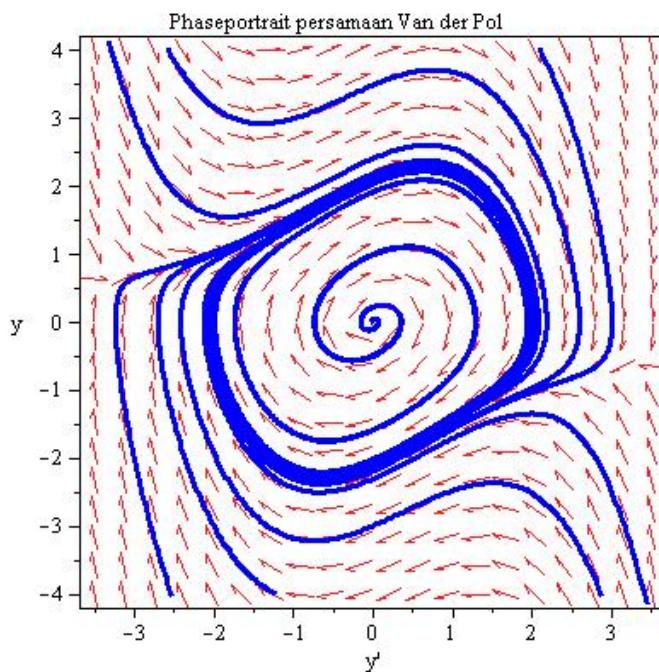


Gambar 4.10. Plot solusi aproksimasi regular dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Van der Pol  $\epsilon = \frac{1}{2}$

Dari Gambar (4.9) dan Gambar (4.10) dapat dilihat bahwa metode *Three-time Multiple Scale* memberikan hasil yang berbeda dengan solusi aproksimasi reguler. Tidak seperti solusi aproksimasi reguler, solusi *-Time Multiple Scale* dapat menggambarkan solusi yang periodik.

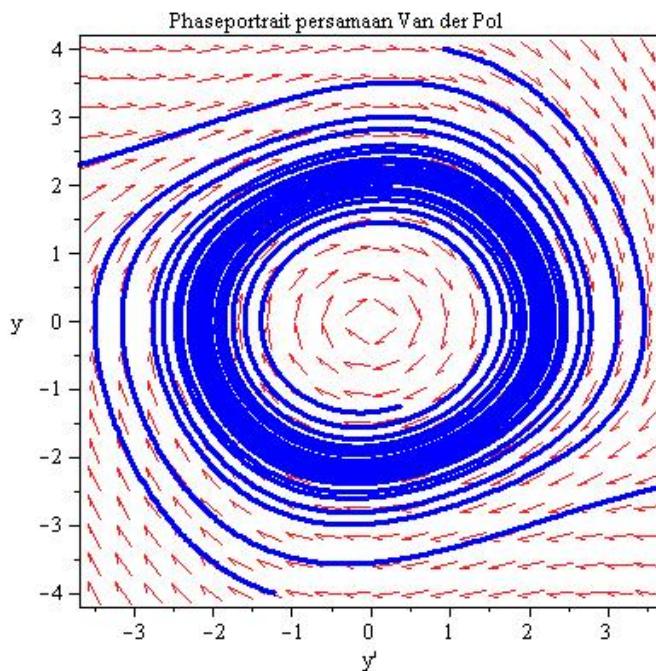
#### 4.3.8 Phaseportrait Persamaan Van der Pol

Phaseportrait persamaan Van der Pol,  $y'' + y = \varepsilon(1 - y^2)y'$  untuk  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  dan dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0 = 1$  diberikan pada Gambar (4.11).



Gambar 4.11. Phaseportrait persamaan Van der Pol untuk  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Phaseportrait persamaan Van der Pol,  $y'' + y = \varepsilon(1 - y^2)y'$  untuk  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  dan dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0 = 1$  diberikan pada Gambar (4.12).



Gambar 4.12. Phaseportrait persamaan Van der Pol untuk  $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Dari Gambar (4.11) dan Gambar (4.12) dapat dilihat bahwa untuk persamaan Van der Pol terdapat sebuah solusi periodik. Lintasan akan menuju ke sebuah kurva tertutup yang merupakan sebuah solusi periodik atau lintasan tutup dari persamaan osilator tak linear Van der Pol. Solusi tersebut dapat diaproksimasikan dengan  $y(t; \varepsilon) = \frac{2A_0 \sin(t)}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)\varepsilon^{-\varepsilon t}}}$ .

## BAB 5

### PENUTUP

#### 5.1. Simpulan

1. Persamaan Osilator Harmonik yang berbentuk  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0$ , dengan  $\varepsilon$  adalah parameter kecil yang memenuhi  $0 < \varepsilon \ll 1$  dan dengan kondisi awal

$y(0) = 0$  dan  $\frac{dy}{dt}(0) = 1$ , mempunyai solusi eksak

$y(t; \varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin(\sqrt{1-\varepsilon^2}t)$ , solusi aproksimasi regular

$y(t; \varepsilon) = \sin(t) - \varepsilon t \sin(t)$ , dan solusi *Three-time Multiple Scale*

$y(t; \varepsilon) = e^{-\varepsilon t} \sin(t)$ .

Persamaan Van der Pol yang berbentuk  $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon(1 - y^2)\frac{dy}{dt}$ , dengan  $\varepsilon$

adalah parameter kecil yang memenuhi  $0 < \varepsilon \ll 1$  dan dengan kondisi awal

$y(0) = 0$  dan  $\frac{dy}{dt}(0) = A_0$ , mempunyai solusi aproksimasi regular

$y(t; \varepsilon) =$

$A_0 \sin(t) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} A_0 t \sin(t) - \frac{1}{8} A_0^3 t \sin(t) + \frac{1}{32} A_0^3 \cos(3t) - \frac{1}{16} A_0^3 \cos(t) \right]$

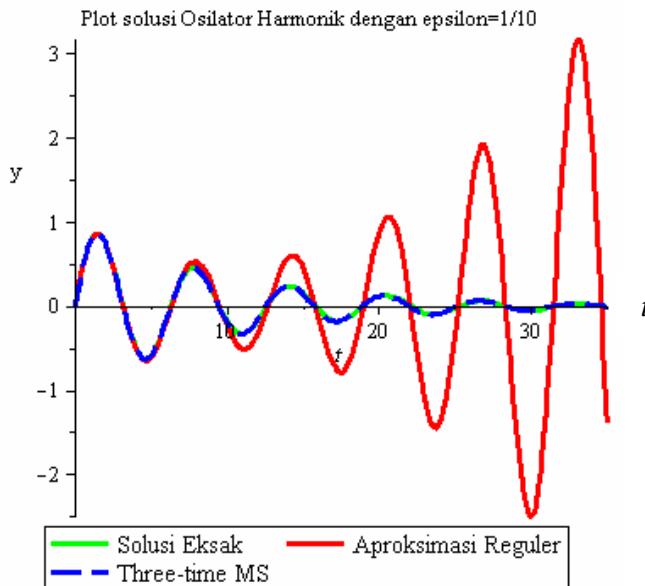
dan solusi *Three-time Multiple Scale*  $y(t; \varepsilon) = \frac{2A_0 \sin(t)}{\sqrt{A_0^2 + (4 - A_0^2)e^{-\varepsilon t}}}$ .

2. Visualisasi persamaan Osilator Harmonik dan persamaan Van der Pol menggunakan *Maple* ditunjukkan pada Gambar (4.13) dan Gambar (4.14).

Gambar (4.13) merupakan plot solusi eksak, aproksimasi regular, dan *Three-*

*time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0$ ,

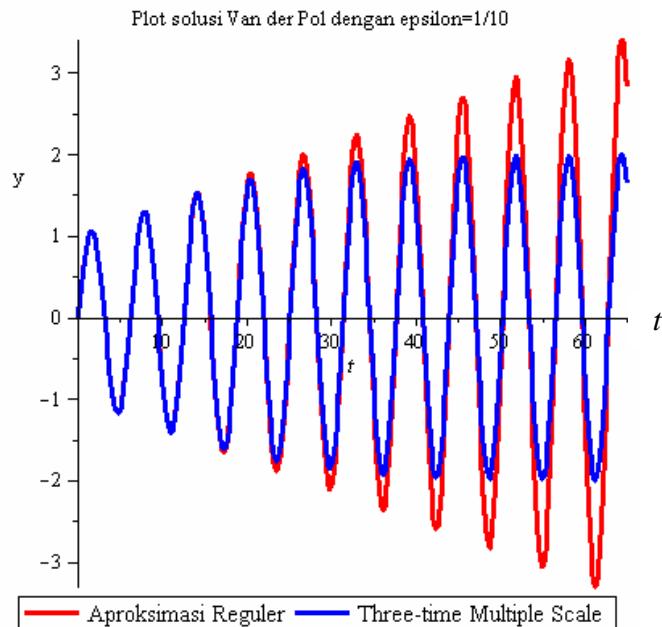
untuk  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  dan dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 1$ .



Gambar 4.13. Plot solusi eksak, solusi aproksimasi regular, dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Osilator Harmonik

Dari Gambar (4.13) dapat dilihat bahwa solusi aproksimasi regular akan memberikan hasil yang tepat untuk nilai  $\epsilon$  yang sangat kecil dan untuk waktu yang tidak terlalu lama. Untuk waktu yang lama, hasil aproksimasi ini menjadi tidak akurat lagi karena suku-suku sekuler yang muncul dalam solusinya, yaitu  $t \sin(t)$ , yang akan menyebabkan solusi menjadi tak terbatas. Sedangkan solusi *Three-time Multiple Scale* memberikan solusi yang cukup akurat. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusi Aproksimasi Reguler dapat dihilangkan dengan teknik *Three-time Multiple Scale*.

Gambar (4.14) merupakan plot solusi aproksimasi regular dan *Three-time Multiple Scale* persamaan Van der Pol  $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \epsilon(1 - y^2)\frac{dy}{dt}$ , untuk  $\epsilon = \frac{1}{10}$  dan dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = A_0 = 1$ .



Gambar 4.14. Plot solusi aproksimasi regular dan solusi *Three-time Multiple Scale* persamaan Van der Pol

Dari Gambar (4.14) dapat dilihat bahwa solusi aproksimasi reguler semakin membesar untuk nilai  $t$  yang semakin besar. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusinya, yaitu  $\frac{1}{2}A_0 t \sin(t)$  dan  $\frac{1}{8}A_0^3 t \sin(t)$ , yang akan menyebabkan solusi menjadi tak terbatas. Sedangkan solusi *Three-time Multiple Scale* untuk nilai  $t$  yang semakin besar solusinya akan membentuk solusi periodik. Hal ini dikarenakan suku-suku sekuler yang muncul dalam solusi Aproksimasi Reguler dapat dihilangkan dengan teknik *Three-time Multiple Scale*.

## 5.2. Saran

1. Penelitian ini mengkaji masalah persamaan diferensial Osilator Harmonik dan Van der Pol menggunakan metode *Three-rime Multiple Scale*. Oleh karena itu, perlu pengkajian lebih lanjut nuntuk masalah-masalah persamaan diferensial yang lain.
2. Metode *Three-time Multiple Scale* memberikan solusi yang tidak menjauh dari solusi eksaknya (akurat). Oleh karena itu, metode yang tepat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial tak linear ialah menggunakan metode *Three-time Multiple Scale*.
3. Visualisasi solusi suatu persamaan diferensial dapat digunakan untuk melihat perilaku solusi dalam waktu yang lama. Oleh karena itu, perlu disajikan plot (grafik) dan intepretasinya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anonim. 2009. *Matematika Sebagai Raja Sekaligus Pelayan*. Tersedia di: <http://www.id.wikipedia.org>. [15 Mei 2009].
- Finizio, N. & Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. (alih bahasa: Santoso, W). Jakarta: Erlangga.
- Holmes, M. H., 1995. *Introduction to Perturbation Methods*, Applied Math. Springer-Verlag. New York.
- Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: J & J Learning Yogyakarata.
- Kreyzig, E. 1999. *Advance Engeneering Mathematics*, (8th edition). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Pipes, L. A. 1991. *Matematika Terapan untuk Para Insinyur dan Fisikawan*. Yogyakarta : UGM PRESS.
- Supriyono & Hendikawati, P. 2008. *Persamaan Diferensial Biasa*. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA UNNES.
- Strauss, W. A. 1992. *Partial Diferential Equation an Introduction*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Tung, K. Y. 2003. *Visualisasi dan Simulasi Fisika dengan Aplikasi Program Maple*. Yogyakarta: ANDI OFFSET.
- Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Waluya, S. B. 2009. *Metode Perturbasi untuk Nonlinear Oscilator*. Semarang: Unnes Press.