

# BSM 公式

杨弘毅

创建: 2020 年 4 月 19 日

修改: 2021 年 9 月 6 日

## 1 布朗运动、维纳过程

标准布朗运动简易表达式有:

$$dZ_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

其离散形式的表达式有:

$$Z_T - Z_t = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

### 1.1 特征

标准布朗运动 (Brownian motion) 或维纳过程 (Wiener process) 的特征有:

- 初值为零
- 连续
- 独立增量: 对于任意两个不同时间点  $\Delta t_i$  与  $\Delta t_j$ , 其增量  $\Delta Z_i$  与  $\Delta Z_j$  相互独立
- 独立同分布 (方差可加): 增量  $\Delta Z$  服从均值为零、方差等于时间长度的正态分布, 即  $\Delta Z_i \sim N(0, \Delta t_i)$

### 1.2 为何使用标准布朗运动

- 股价不能为负, 所以不能遵循正态分布, 但股票连续复利收益率 ( $d\ln S_t$ ) 近似服从正态分布
- 维纳过程是一个马尔可夫随机过程, 增量  $\Delta Z$  独立, 与弱式 EMH 相同, 即技术分析无效, 无法使用历史信息预测未来, 过去信息跟未来信息相互独立
- 维纳过程对时间处处不可导, 且二次变分 (Quadratic Variation) 不为零, 与股票价格变化存在转折尖点的性质相符

### 1.3 部分证明

增量均值为零, 方差为时间长度, 当  $X$  与  $Y$  独立时, 则有:

$$\text{Var}(XY) = \text{Var}(X) \text{Var}(Y) + [E(X)]^2 \text{Var}(Y) + [E(Y)]^2 \text{Var}(X)$$

此时, 由于  $\varepsilon_t$  与  $dt$  独立, 套用上式, 同时由于  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ , 则有:

$$E(dZ_t) = E(\varepsilon_t \sqrt{dt}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(dZ_t) &= \text{Var}(\varepsilon_t \sqrt{dt}) \\
&= \text{Var}(\varepsilon_t) \text{Var}(\sqrt{dt}) + [\text{E}(\varepsilon_t)]^2 \text{Var}(\sqrt{dt}) + [E(\sqrt{dt})]^2 \text{Var}(\varepsilon_t) \\
&= \text{Var}(\varepsilon_t) \left[ \text{Var}[(\sqrt{dt})^2] - [\text{E}(\sqrt{dt})]^2 \right] \\
&= \text{Var}(\varepsilon_t) \left[ \text{E}[(\sqrt{dt})^2] - [\text{E}(\sqrt{dt})]^2 + [\text{E}(\sqrt{dt})]^2 \right] \\
&= 1 \cdot \text{E}(dt) = dt
\end{aligned}$$

方差可加性，由下式可见，由于独立增量，导致协方差项为零，使得方差可加。

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) \\
&= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) \\
&\quad + \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_2, X_3) + \text{Cov}(X_1, X_3)
\end{aligned}$$

由上可知，增量在连续形式  $dZ_t$  以及离散形式  $Z_T - Z_t$  下，均服从均值为零，方差为时间长度的正态分布，即有：

$$\begin{aligned}
dZ_t &\sim N(0, dt) \\
Z_T - Z_t &\sim N(0, T - t)
\end{aligned}$$

## 1.4 几种随机过程

**广义维纳过程 (generalized Wiener process)**， $a$  与  $b$  为常数。此时，易知其均值为  $\text{E}(dX_t) =adt$ ，由于  $b$  为常数，且  $\text{Var}(dZ_t) = dt$ ，则有方差为  $\text{Var}(dX_t) = b^2dt$ 。

$$dX_t = adt + bdZ_t$$

**普通布朗运动**， $a(t)$  与  $b(t)$  都是  $t$  的确定性函数。由于都为确定函数，所以如上可知，其均值方差为  $\text{E}(dX_t) = a(t)dt$ ，由于  $b$  为常数，且  $\text{Var}(dZ_t) = dt$ ，则有方差为  $\text{Var}(dX_t) = b(t)^2dt$ 。

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dZ_t$$

**扩散过程 (Diffusion Process)**，此时  $a(X(t), t)$  与  $b(X(t), t)$  都为  $X_t$  和  $t$  的确定性函数。由于漂移项与方差项都包含  $X(t)$ ，使得扩散之后过程的条件分布无法保证仍是正态分布。但更能刻画一般动态变化，未加入新的风险源，仍具有独立增量，马尔可夫性，和方差可加性等性质。

$$dX_t = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW_t$$

**伊藤过程 (Itô Process)**，最一般化的随机过程， $a_t$  和  $b_t$  为任意函数或随机过程。

$$dX_t = a_tdt + b_tdW_t$$

## 2 伊藤引理 (Itô lemma)

若变量  $X_t$  遵循伊藤过程：

$$dX_t = a_tdt + b_tdW_t$$

在导数  $\frac{\partial f}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial X}$  与  $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$  存在的前提下，则有变量  $X_t$  和  $t$  的函数  $f(X(t), t)$  将遵循如下过程：

$$df_t = \left( \frac{\partial f}{\partial X} a_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} b_t dW_t$$

为方便记忆，可记为（金融随即分析第二卷 P118）：

$$df(X(t), t) = f_t(X(t), t)dt + f_x(X(t), t)dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X(t), t)dX(t)dX(t)$$

或

$$df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2}f_{xx} dX dX$$

## 2.1 证明

$f(X, t)$  的泰勒展开式为：

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Delta X^2 + \frac{\partial f}{\partial X \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时， $(\Delta t)^2$ ，认为是高阶无穷小，可忽略。而对于  $\Delta X \Delta t$  项有：

$$\begin{aligned} \Delta X &= a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \\ \Delta X \Delta t &= a(\Delta t)^2 + b\varepsilon(\Delta t)^{3/2} \end{aligned}$$

其中的  $(\Delta t)^{3/2}$  项，也被认为是高阶无穷小项，可忽略。同时由于  $(\Delta X)^2$  项中包含  $\Delta t$  项，因此需要保留。因此仅考虑前三项（**注意：**此与常微分不同，而在常微分中， $(\Delta X)^2$  项也是高阶无穷小项），展开得到：

$$\begin{aligned} \Delta f_t &= \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Delta X^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} [a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 \varepsilon^2 \Delta t \end{aligned}$$

对于  $\varepsilon^2 \Delta t$  项，由于  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ ，因此有  $E(\varepsilon) = 0$ 。又因  $\text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$ ，得到  $E(\varepsilon^2) = 1$ ，同时有  $E(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t$ 。计算  $\varepsilon^2 \Delta t$  的方差可得：

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon^2 \Delta t) &= \text{Var}(\varepsilon^2) \text{Var}(\Delta t) + [E(\varepsilon^2)]^2 \text{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2 \text{Var}(\varepsilon^2) \\ &= \text{Var}(\varepsilon^2) \text{Var}(\Delta t) + 1 \cdot \text{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2 \text{Var}(\varepsilon_t^2) \\ &= O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

可以认为  $\varepsilon^2 \Delta t$  方差为高阶无穷小，其期望为 1。因此，可认为  $\varepsilon^2 \Delta t \approx \Delta t$ ，可将原式化简为：

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 \Delta t$$

而连续形式为：

$$\begin{aligned} df_t &= \frac{\partial f}{\partial X} dX_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial X} (a_t dt + b_t dZ_t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 dt \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial X} a_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} b_t dZ_t \end{aligned}$$

### 3 几何布朗运动

由于衍生品价格是标的资产价格与时间的函数，即只需要假定标的资产遵循过程，即可用伊藤引理求得其衍生品遵循过程。假设股票价格服从几何布朗运动（Geometric Brownian Motion, GBM）：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

令  $G_t = \ln S_t$ ，此时：

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

代入伊藤引理之中，此时  $a_t = \mu S_t$ ， $b_t = \sigma S_t$ ，则有：

$$\begin{aligned} dG_t &= d \ln S_t = \left( \frac{1}{S_t} \mu S_t + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dZ_t \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dZ_t \end{aligned}$$

即有：

$$d \ln S_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dZ_t \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right)$$

同时又离散形式下：

$$\ln S_T - \ln S_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (Z_T - Z_t) \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right)$$

此时股票价格连续复利收益率（Continuously compounded return），或称为对数收益率（Logarithmic return），为未年化收益率：

$$R = d \ln S_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \ln(1 + r) \quad (1)$$

服从期望值为  $(\mu - \sigma^2/2)dt$ ，方差为  $\sigma^2 dt$  的正态分布，与现实较为吻合。且  $d \ln S_t$  的定义，使得股票价格非负。**注意：** $d \ln S$ （极短时间内）和  $\ln S_T - \ln S_t$ （较长时间内）都服从正态分布，而  $dS$  在极短时间内服从正态分布，而在较长时间内因  $S_t$  的大小改变，使得  $S_T - S_t$  的均值和方差的变化而不服从正态分布。

$$\begin{aligned} \ln S_T - \ln S_t &\sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right) \\ \ln S_T &\sim N \left( \ln S_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right) \end{aligned}$$

可以看到此时股票价格的对数服从正态分布（Log-normal distribution），因此可知，股票价格服从对数正态分布。由正态分布与对数正态分布的性质可知，对一个服从正态分布的随机变量  $X$  取指数，则  $e^X$  服从对数正态分布。相反，对一个服从对数正态分布的随机变量  $X$  取对数，则  $\ln X$  服从正态分布。因此有如下关系：

$$\ln S_T \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \leftrightarrow \quad S_T \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$$

并且已知对数正态分布  $X \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$ ，其期望与标准差为：

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \text{Var}(X) &= e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

因股票价格  $S_T$  服从对数正态分布，代入上式可知其期望及方差为：

$$\begin{aligned}
E(S_T) &= \exp(\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)) \\
&= \exp(\ln S_t + \mu(T-t)) \\
&= S_t e^{\mu(T-t)} \\
\text{Var}(S_T) &= [\exp(\sigma^2(T-t)) - 1] \exp \left\{ 2 \left[ \ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \right] + \sigma^2(T-t) \right\} \\
&= [\exp(\sigma^2(T-t)) - 1] \exp [2 \ln S_t + 2\mu(T-t)] \\
&= S_t^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]
\end{aligned}$$

### 3.1 对数正态分布

如果一组数值做对数变换后服从正态分布，我们就称其服从对数正态分布。假设随机变量  $X$  服从正态分布，则有  $\ln x$  服从对数正态分布，两者累积分布函数（Cumulative distribution function, CDF）相同：

$$F_L(x) = F_N(\ln x)$$

对公式两边取倒数，则可得到其概率密度函数（probability density function, PDF）：

$$f_L(x) = \frac{1}{x} f_N(\ln x)$$

此时，带入已知正态分布 PDF，即可得到对数正态分布 PDF：

$$f_L = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**注意：**对于对数正态分布， $\mu$  与  $\sigma$  并非其均值与标准差，仅为确定其对数正态分布的两个参数。只是使用其确定正态分布时，就正好为其期望和标准差。对于相同的  $\mu$  与  $\sigma$  参数确定的正态分布与对数正态分布，可以通过对服从对数正态分布的随机变量取对数转换为正态分布。相反，通过对服从正态分布的随机变量取指数转换为对数正态分布。两者之间的期望与标准差（方差）通过如下关系转化：

	正态分布	对数正态分布
期望	$E_N(X) = \mu = \ln[E_L(X)] - \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}_L(X)}{[E_L(X)]^2} \right]$	$E_L(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
方差	$\text{Var}_N(X) = \sigma^2 = \ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}_L(X)}{[E_L(X)]^2} \right]$	$\text{Var}_L(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

#### 3.1.1 期望推导

根据对数正态分布的 PDF，可计算其期望：

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法，令  $t = \frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$ ，则有  $x = e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu}$ ，则原积分转化为：

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} d e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu} \\
&= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2} dt \\
&= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})
\end{aligned}$$

由于  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} = \sqrt{\pi}$ , 可得到:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

### 3.1.2 方差推导

已知:

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

同上, 已知对数正态分布 PDF:

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法, 令  $t = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ , 则有  $x = e^{\sigma t + \mu}$ :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + 2\sigma t} dt \\ &= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-2\sigma)^2 + 2\sigma^2} dt \quad \left( \text{对 } -\frac{t^2}{2} + 2\sigma t \text{ 配方} \right) \\ &= \frac{e^{2\mu+2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}} d\left(\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}}\right) \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} \end{aligned}$$

此时则有:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} - (e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}})^2 \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= e^{2\mu+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

### 3.1.3 求正态分布 $\mu$ 与 $\sigma$

已知  $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 、 $E(X)$  与  $\text{Var}(x)$ , 即随机变量  $X$  服从对数正态分布, 其对数服从正态分布, 则有:

$$\mu = \ln[E(X)] - \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}(X)}{[E(X)]^2} \right]$$

$$\sigma = \sqrt{\ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}(x)}{[E(X)]^2} \right]}$$

## 4 BSM 偏微分方程 (PDE)

### 4.1 假设

- 人性假设
  - 不存在无风险套利机会 (无套利)
- 完美世界

- 允许卖空标的证券
- 没有交易费用和税收
- 证券交易时连续的，价格变动也是连续的
- 所有证券都完全可分
- 可交易资产
  - 证券价格遵循几何布朗运动，即  $\mu$  和  $\sigma$  为常数
  - 衍生品有效期内，无风险利率  $r$  为常数
  - 衍生证券有效期内，标的证券没有现金收益支付

## 4.2 推导

假设股票价格  $S_t$  遵循几何布朗运动，以及其离散形式有：

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \\ \Delta S_t &= \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t \end{aligned}$$

假设衍生品价格  $f(S_t, t)$  为  $S_t$  以及  $t$  的函数，根据伊藤引理可得其连续和离散形式有：

$$\begin{aligned} df(S_t, t) &= \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t dZ_t \\ \Delta f(S_t, t) &= \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t \end{aligned}$$

由此可见，股票价格与衍生品价格的风险源均来自  $\Delta Z_t$ ，因此可以构建投资组合，由一单位衍生品空头，以及  $\partial f / \partial S$  单位证券多头构成，进行对冲消除该风险源：

$$\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t$$

在  $\Delta t$  时间内，该投资组合价值的变化  $\Delta \Pi_t$  来源其标的资产以及衍生品的价格变动，代入  $\Delta S_t$  与  $\Delta f_t$  可得：

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_t &= -\Delta f_t + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S_t \\ &= - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t \right] + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t) \\ &= - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t \end{aligned}$$

由于此时组合消除了风险，因此组合只应获得无风险收益率：

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_t &= r \Pi_t \Delta t \\ - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t &= r \left( -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t \right) \Delta t \end{aligned}$$

整理等式，消去  $\Delta t$ ，即可得到 **BSM 偏微分方程**：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f_t$$

## 5 BSM 公式（鞅方法）

在风险中性世界中，无收益资产在  $t$  时刻，其看涨期权价值的期望为：

$$\tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)]$$

欧式看涨期权的现值应为其期望值以无风险利率进行贴现：

$$c = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)]$$

同时在风险中性世界下，漂移率  $\mu$  应等于无风险收益率  $r$ ，因此有：

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t), \sigma^2 (T-t) \right)$$

已知：

$$S_T = S_t \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (Z_T - Z_t) \right]$$

已知  $Y = \frac{Z_T - Z_t}{\sqrt{T-t}} \sim N(0, 1)$ ，其概率密度函数（PDF）为：

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

在风险中性下的期望，可以改写为如下积分的形式：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)] &= \tilde{\mathbb{E}}_t \left[ S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y} - K \right]^+ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} - K \right)^+ \varphi(y) dy \end{aligned}$$

当  $S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y} - K \geq 0$  时，有  $y \geq \frac{\ln(K/S_t) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ，设其为  $-d_2$ ，同时假设  $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ 。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} - K \right)^+ \varphi(y) dy \\ &= S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y} \varphi(y) dy - K \int_{-d_2}^{\infty} \varphi(y) dy \\ &= S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K N(d_2) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left( -\frac{\sigma^2(T-t)}{2} + \sigma\sqrt{T-t}y - \frac{y^2}{2} \right)} dy - K N(d_2) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{y=-d_2}^{y=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} dy - K N(d_2) \quad (\text{换元法: } u = y - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{u=-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - K N(d_2) \quad (dy = du) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - K N(d_2) \\ &= S_t e^{r(T-t)} N(d_1) - K N(d_2) \end{aligned}$$

得到 **BSM 公式**，即欧式看涨期权的解析解（注： $N(\cdot)$  为标准正态分布的累积分布函数（CDF），而  $N'(\cdot)$  为标准正态分布的概率分布函数（PDF））：

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)] \\ &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$



已知期权平价公式：

$$c + Ke^{r(T-t)} = p + S_t$$

代入 BSM 看涨期权解析解中，可得：

$$\begin{aligned} p &= c + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\ &= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\ &= S_t (N(d_1) - 1) - Ke^{-r(T-t)} (N(d_2) - 1) \\ &= S_t (-N(-d_1)) - Ke^{-r(T-t)} (-N(-d_2)) \\ &= Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \end{aligned}$$

此时  $d_1$  和  $d_2$  分别为：

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

## 6 内在价值（考虑中国市场的新定义）

由于：

$$\text{期权价值 (Option value)} = \text{内在价值 (Intrinsic value)} + \text{时间价值 (Time value)}$$

内在价值为即不考虑资产价格波动的情况下，期权条款赋予期权多头的最高价值。而时间价值为标的资产价格波动为期权多头（权利方）所带来的隐含价值，由于期权权利方只有权力而无义务，因此期权的时间价值应该大于 0。内在价值不受时间价值的影响，因而可以使用二分法。

若定义内在价值为，期权若在当下时点到期，期权所含的价值（Hull, CME）。这样考虑的缺点为没有考虑货币的时间价值，且在中国市场由于现货的卖空限制，其价格高于其真实价格。

$$\text{看涨期权内在价值} = \max(S_t - K)$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max(K - S_t)$$

在考虑货币时间价值的情形内在价值如下，缺点为依然没有考虑中国市场的卖空限制。

$$\text{看涨期权内在价值} = \max(S_t - Ke^{-r(T-t)})$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t)$$

因此考虑使用期货价格代替现货价格，以为期货市场多空双方均能自由表达其看法，因此有：

$$\text{看涨期权内在价值} = \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)})$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)})$$

由于在中国市场 ETF 期权有红利保护机制，即会下调行权价格，放大每手期权数量，相当于变相抬高了股票价格，或复权（加挂 A 标记的期权）。且在 ETF 中的成分股分红，其分红留在 ETF 当中。而 ETF 没有期货，只有股指期货，而股指期货不对分红进行调整，即没有红利保护，即其成分股分红后股指自然下跌。因而在使用股指期货或期权以及 ETF 现货或期权时，需要做红利调整。即在 ETF 现货中将红利剔除，此时有：

$$F_{t,T} = (S_t - I)e^{r(T-t)}$$

此时则有，将上式代入，在中国市场中：

$$\text{看涨期权内在价值} = \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)} + I)$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)} - I)$$

因为平值点为使内在价值为零，则平值点定义为  $F_{t,T} = K$ ，这样定义使得实值虚值部分左右较为对称，有利于比较。此时有当  $F < K$  为 OTM，此时值域为正，当  $F > K$  为 ITM，则有值域为负。此时有对数在值状态 (log-moneyness)：

$$\ln \frac{K}{K_{atm}} = \ln \frac{K}{F}$$

同时可以发现，在 PCP 下：

$$c = p + (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$$

对于平直期权 ATM，则有  $F_{t,T} = K$ ，易得此时  $c = p$ 。而当看涨期权为 ITM，其内在价值部分不为零。而对于此时得看跌期权为 OTM，其内在价值为零，而仅有时间价值，因此可以得到，在新平值点定义下的，相同行权价，相同期限的看涨看跌期权：

$$c_{\text{时间价值}} = p_{\text{时间价值}}$$

## 7 平价期权

当平值点为  $S = Ke^{-r(T-t)}$  时，将其带入看涨 BSM 公式当中，则有：

$$\frac{c}{S} = N(d_1) - N(d_2) \quad (2)$$

对于看跌期权则有：

$$\begin{aligned} \frac{p}{S} &= N(-d_2) - N(-d_1) \\ &= 1 - N(d_2) - [1 - N(d_1)] \\ &= N(d_1) - N(d_2) = \frac{c}{S} \end{aligned}$$

对于  $d_1$  和  $d_2$ ，此时有：

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \quad (3)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \quad (4)$$

则对于欧式平价期权：

$$\begin{aligned} \frac{c}{S} &= \frac{p}{S} = N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) \\ &= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} - \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^3}{6} + \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^5}{40} - \dots + \dots\right)\right] - 1 \quad (\text{使用泰勒展开}) \\ &\approx \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2\pi} \approx 0.4\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

## 8 波动率

为人们对未来给定期限的波动率的预期值

- 历史波动率 (Historical volatility): 使用过去代替未来
  - 样本对数收益率标准差 (日频数据)
  - 已实现波动率 (Realized volatility, 日内高频, 5 分钟, 假设均值为零)
  - 极差波动率
- 历史波动率 (Historical volatility): 利用历史数据进行建模, 并且预测
  - 广义自回归条件异方差 (GARCH, 计量方法)
  - 随机波动率 (Stochastic volatility, 随机过程)
- 隐含波动率 (Implied volatility): 直接从期权价格中提取未来预期

## 9 Delta 对冲

Delta 为衍生品价格变动与其标的资产价格变动的比率。如果假定股票价格 (X) 与期权价格 (Y) 为折线, 则其斜率应为 Delta, 即对股票价格变动一单位, 期权价格变动  $\Delta$  单位。而现实中并非折线, Delta 则为两者切线斜率。

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

而从持有标的资产和衍生品数量分别为  $N_S$  和  $N_V$  而言, 为了维持对冲结果为 0, 易知对于每一单位标的资产, 应使用  $\Delta$  单位衍生品进行对冲。

$$\Delta V \times N_V = \Delta S \times N_S \Rightarrow \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{N_S}{N_V}$$

如上所述, 假定股票价格遵循几何布朗运动, 则有在物理测度 (Physical probability measure) 下:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

根据伊藤引理:

$$f(T, W_T) = f(t, W_t) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial S} dW_t \frac{1}{2} + \int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

在 Bakshi and Kapadia 2003 中,

在一段时间内的使用看涨看跌期权进行 Delta 对冲 (注意: 由几何布朗运动与伊藤过程推到而来, 因此看涨看跌期权形式相同, 买入看涨看跌期权, 并卖出股票, 净投资金额获得无风险收益)。

$$\text{Call Gain} = C_{t+\tau} - C_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(C_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

$$\text{Put Gain} = P_{t+\tau} - P_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(P_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

Long call, short delta stock / short call, long delta stock

Long put, long delta stock / short put, short delta stock

## 10 注意与备注

- 期限、无风险利率、波动率应匹配（以年为单位，一般使用交易日计算，美国交易日 252 天）
- 无风险利率选择即期利率（Spot rate）而非到期收益率（YTM，真实收益率，票息 5%，但非平价发行）
- 由于只有交易日才有历史数据与收益率数据，波动率使用交易天数进行年化，中国 240 天左右，美国 252 天
- 波动率为一个时间窗口（一般为年，252 天交易日，较以月每 21 天为窗口更为平滑）内连续复利收益率或对数收益率（ $\ln S_t/S_{t-1}$ ）标准差进行年化。即日波动率乘以  $\sqrt{252}$ （一天的方差为  $s^2$ ，由于方差可加，252 个交易日的方差即为  $s^2 \times 252$ ，标准差或波动率为  $s\sqrt{252}$ ），月波动率应乘以  $\sqrt{252/21}$  进行年化。

### 10.1 比例收益率与对数收益率

股票价格服从几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

其离散形式可写作：

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

其期望有，可以看到  $\Delta S_t/S_t$  为  $\Delta t$  时间内百分比年化收益率或比例收益率（percentage returns）为  $\mu$ ：

$$E\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right) = \mu \Delta t$$

而连续复利收益率或对数收益率（log returns）的期望则为：

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dZ_t$$
$$E(d \ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt$$

比例收益率在实际应用过程中意义较小，假设 4 年盈亏为 +50%，-50%，+50%，-50%，其比例收益率期望与均值  $\mu$  均为 0，但实际上相比期初有 -43.75% 的亏损。而使用几何平均（复利）计算，年化亏损 -13.40% 即盈亏应使用几何平均的方式计算，简单的算术平均比例收益率没有意义。而使用对数收益率，其期望为  $\mu - \sigma^2/2$ ，即算术平均  $\mu$  需要减去  $\sigma^2/2$ ，才是几何平均期望。在此例子中均值为 0，方差为 0.25，此时对数收益率的期望为 -12.5%。即波动越大，降低实际收益率，符合现实情况，具有经济学意义。

### 10.2 做空限制

且在中国市场中现货存在较大的做空限制，即在现货市场的价格由看多者和少量看空者决定，并不能反应所有投资者的真实情绪，以至于难以复制期权，违法 BSM 公式假设条件。解决方法有：

1. 使用期货进行贴现，得到其隐含现货价格，使用 BSM 进行计算，其中有：

- 期货隐含现货价格

$$S^* = F e^{-q(T-t)}$$

- 期权隐含现货价格

$$S^* = (c - p) + K e^{-r(T-t)}$$

2. 直接使用 Black 公式，使用期货价格进行计算，即：

$$c = e^{-r(T-t)} [F_t N(d_1) - K N(d_2)]$$