

买卖权平价关系

杨弘毅

创建: 2020 年 3 月 20 日

修改: 2020 年 3 月 28 日

1 欧式期权PCP

使用远期合约（适用于中国市场与美国市场），构建如下两个组合：

- 组合A：欧式看涨多头
- 组合B：欧式看跌多头 + 远期合约多头（交割价格（Delivery Price）为K）

在T时刻，组合A与组合B价值为：

当 $S_T \geq K$ 时：

- 组合A： $S_T - K$
- 组合B： $0 + (S_T - K)$

当 $S_T < K$ 时：

- 组合A：0
- 组合B： $(K - S_T) + (S_T - K)$

可以发现组合A与组合B，在T时刻，无论哪种情况下两者价值都相等。因此根据无套利原则，t时刻两个组合价格也必须相同，则有对于远期的PCP公式（ $S_T = F_T$ ）：

$$c = p + (F_T - K)e^{-r(T-t)} \quad \text{或} \quad c = p + S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

对于已知红利资产，支付红利现值为 I_t ，红利率为 q ：

$$c = p + S_t - I_t - Ke^{-r(T-t)} \quad (\text{已知红利})$$

$$c = p + S_t e^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \quad (\text{已知红利率})$$

2 期权隐含价格

隐藏期货价格：

$$F_t^* = (c - p)e^{r(T-t)} + K$$

隐藏现货价格：

$$S_t^* = (c - p) + Ke^{r(T-t)}$$

对于中国市场，ETF期权有红利保护。而期货为指数期货无红利保护，自动回落，需要调整红利：

$$F_t^* = (c - p)e^{r(T-t)} + K + I_t e^{r(T-t)}$$

3 美式期权提前行权的影响

	美式看涨期权	美式看跌期权
无红利	1.需提前支付行权价，损失行权价格利息 2.损失期权时间价值	1.提前获得行权价格，可获得行前价格利息 2.失去期权时间价值
有红利	3.提前行权获得股票，因此获得红利	3.放弃红利

4 美式期权PCP

4.1 无红利资产

构造如下两个组合：

- 组合A：欧式看涨多头（c） + K单位现金（用无风险利率投资）
- 组合B：美式看跌多头（P，用大写表示） + 一单位股票

在不提前行权的情况下，如下所示，组合A的价值都将大于组合B的价值：

当 $S_T \geq K$ 时：

- 组合A： $(S_T - K) + Ke^{r(T-t)}$
- 组合B： S_T

当 $S_T < K$ 时：

- 组合A： $Ke^{r(T-t)}$
- 组合B： $(K - S_T) + S_T$

只有当 $S_T < K$ 时，才会提前行权。此时欧式看涨期权内在价值为零，但仍有时间价值。此时仍有组合A价值大于组合B价值：

- 组合A：时间价值 + $Ke^{r(T-t)}$
- 组合B： $(K - S_T) + S_T$

即无论美式期权是否提前行权，都有组合A价值大于等于组合B的价值，且由于美式期权价格大于等于欧式期权（可提前行权和获得股票，进而获得红利），则有：

$$c + K \geq P + S_t \rightarrow C + K \geq P + S_t$$

又由于 $P \geq p$ （可提前获得行权价格，进而获得行权价的利息），由3欧式期权PCP可得， $P \geq p = c + Ke^{-r(T-t)} - S_t$ 。当标的资产为无收益资产（无股息红利）时， $c = C$ ，则有：

$$C - P \leq S_t - Ke^{r(T-t)}$$

因此：

$$S_t - K \leq C - P \leq S_t - Ke^{r(T-t)}$$

4.2 有红利资产

假设股票将派发红利，其现值 I_t ，构造如下两个组合，注意组合B由于持有股票，将在T时刻获得红利 $I_t e^{r(T-t)}$ ：

- 组合A：欧式看涨多头（c） + （K+I）单位现金（用无风险利率投资）
- 组合B：美式看跌多头（P，用大写表示） + 一单位股票

在不提前行权的情况下，组合A的价值都将大于组合B的价值：

当 $S_T \geq K$ 时:

- 组合A: $(S_T - K) + (K + I_t)e^{r(T-t)}$
- 组合B: $S_T + I_te^{r(T-t)}$

当 $S_T < K$ 时:

- 组合A: $(K + I_t)e^{r(T-t)}$
- 组合B: $K - S_T + S_T + I_te^{r(T-t)}$

同理, 只有在 $S_\tau < K$ 时, 才会提前行权, 假设此时时刻为 $t < \tau < T$, 虽然看涨期权内在价值为0, 但仍有时间价值, 则有:

- 组合A: $< + (K + I_t)e^{r(T-t)}$
- 组合B: $(K - S_\tau) + S_\tau + I_te^{r(T-t)}$

即无论是否提前行权, 都有组合A价值大于组合B价值, 同时因 $C \geq c$, 则有:

$$c + K + I \geq P + S_t \rightarrow C + K + I \geq P + S_t$$

即:

$$C - P \geq S_t - K - I$$

因有红利资产, 再发放红利之后股价自然回落, 因此看涨期权价格更低, 看跌期权更高, $C - P$ 组合价值更低, 并由无红利资产美式期权推导得:

$$C - P \leq S_t - Ke^{r(T-t)}$$

因此:

$$S_t - K - I \leq C - P \leq S_t - Ke^{r(T-t)}$$

5 中国ETF期权PCP

ETF期权受红利保护, 则有PCP为:

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + F_te^{-r(T-t)} + I_t$$