三种定价衍生品定价方式

杨弘毅

创建: 2020 年 2 月 26 日
修改: 2020 年 4 月 2 日

1 衍生品定价基本假设

衍生品定价一般使用相对定价法，即利用标的资产价格与衍生品价格之间的内赞关系，根据标的资产的价格求出衍生品价格。与绝对定价法不同，绝对定价法为使用适当的贴现率将未来现金流贴现加总，但贴现率和未来现金流都难以预测。相对定价法则有贴近市场，易于实现的优点，以下为衍生品定价基本假设：

- 市场不存在摩擦
- 市场是完全竞争
- 市场不存在无风险套利机会
- 市场不存在对手风险

2 简单例子

市价为10元，三个月后，该股票价格存在两种状态，或上涨为11元，或下跌至9元。假设无风险年利率$r_f = 10\%$，为三个月协议价格为10.5元的以该股票为标的资产的看涨期权定价。

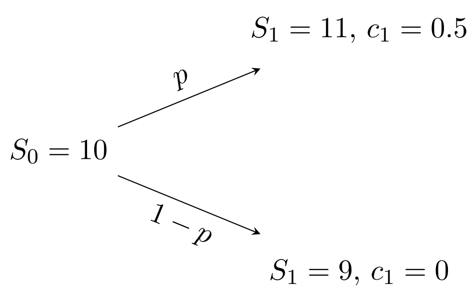

图 1: 两种资产，两种状态

2.1 复制定价

第一种方法，使用股票和期权构建无风险债券组合。即由Δ单位股票多头和一单位看涨空头构建，无论上涨下跌状态下，在T时刻，其价值都应等于K单位无风险债券（零息债券，Zero-coupon Bond，$B_T = 1$）。上涨状态下$K = 11\Delta - 0.5$，下跌状态下$K = 9\Delta$，得到$11\Delta - 0.5 = 9\Delta = K$，即$\Delta = 0.25$。

即有使用0.25单位的股票多头和一单位的看涨期权空头，即可构建K单位无风险资产$K=2.25$。在t时刻，有$0.25S_0-c_0=2.25e^{-r_f(T-t)}$，有$c_0=0.30555$。

第二种方法，使用无风险资产和股票复制期权。假设买进Δ单位股票，K单位无风险资产，在T时刻有：

$$\begin{cases}11\Delta+K=0.5\\ 9\Delta+K=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\Delta=0.25\\ K=-2.25\end{cases}$$

即可以使用0.25单位股票多头，以及2.25单位无风险债券空头复制期权。在t时刻，$c_0=0.25S_0-2.25e^{r_f(T-t)}=0.30555$。

2.2 状态价格定价

使用状态价格证券（State-price Security）为衍生品定价。假设股票价格上涨状态回报为1（T时刻）的状态价格证券在t时刻的价格，称为状态价格PC_u。同样，股票价格下跌状态回报为1（T时刻）的状态价格（t时刻）为PC_d。

$$PC_u=\begin{cases}1,&\text{上涨}\\ 0,&\text{下跌}\end{cases}\qquad PC_d=\begin{cases}0,&\text{上涨}\\ 1,&\text{下跌}\end{cases}$$

使用状态价格证券复制出股票收益，以及无风险债券收益。

$$\begin{cases}11PC_u+9PC_d=10,&\text{股票}\\ 11PC_u+9PC_d=10,&\text{债券}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}PC_u=0.611105\\ PC_d=0.364205\end{cases}$$

由期权收益可知$c_0=0.5PC_u\times 0PC_d=0.30555$。

2.3 风险中性定价

使用风险中性定价法，假设风险中性下股票上涨概率为Q，股票下跌的概率为$1-Q$。根据资产定价基本原理，$P_t=E_t[M_{t+1}X_{t+1}]$（贴现率$M_{t+1}=e^{-r_f(T-t)}$已知）。

$$S_0=e^{-R_f(T-t)}[11Q+9(1-Q)]=10\qquad\Rightarrow\qquad Q=0.626576$$

此时可计算出期权价格：

$$c_0=M^Q[Q_1X_1+Q_2X_2]=e^{-R_f(T-t)}[0.5Q+0(1-Q)]=0.30555$$

3 复杂例子

在t时刻，市场上有两种互相不可复制的可交易资产$S_a=8$元和$S_b=9$元，且未来T时刻有三种状态，其回报分别问（10，8，0）和（8，12，0）。求行权价为7元，标的资产为S_a的看涨期权价格。（注意：没有无风险债券，只有资产S_a和S_b）

3.1 复制定价

使用S_a和S_b复制看涨期权回报，a和b分别代表复制期权所需S_a以及S_b的资产数量

$$\begin{cases}10a+8b=3\\ 8a+12b=1\\ 0a+0b=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=0.5\\ b=-0.25\end{cases}$$

得到$a=0.5b=-0.25$，即使用0.5份S_a资产多头和0.25份S_b资产空头，即可复制期权。从而得到在t时刻，期权价格为$c_a=0.5S_a-0.25S_b=1.75$元。

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 10 & & & 8 & & & 3 \\
S_a = 8 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 8 & & S_b = 9 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 12 & & c_a = 10 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \\
 & 0 & & & 0 & & & 0
\end{tikzcd}
$$

图 2: 三种资产，三种状态

3.2 状态价格定价

其定价思路为先用可交易资产计算出状态价格证券价格$PC_1, PC_2, \ldots, PC_n$，而后再用状态价格证券为其他证券定价。假设三种状态价格证券，分别为PC_1，PC_2和PC_3，其回报为（1，0，0），（0，1，0）以及（0，0，1）。如下所示：

$$
PC_1 = \begin{cases} 1, & \text{状态}1 \\ 0, & \text{状态}2 \\ 0, & \text{状态}3 \end{cases} \qquad PC_2 = \begin{cases} 0, & \text{状态}1 \\ 1, & \text{状态}2 \\ 0, & \text{状态}3 \end{cases} \qquad PC_3 = \begin{cases} 0, & \text{状态}1 \\ 0, & \text{状态}2 \\ 1, & \text{状态}3 \end{cases}
$$

由此可复制S_a和S_b回报，并计算期权价格$c_a = 3PC_1 + 1PC_2 = 1.75$元。

$$
\begin{cases} 10PC_1 + 8PC_2 + 0PC_3 = 8 \\ 8PC_1 + 12PC_2 + 0PC_3 = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} PC_1 = 0.42857 \\ PC_2 = 0.46429 \end{cases}
$$

状态价格为未来特定状态下的1元的现值。所以状态价格应取决于三个因素：状态发生概率、对不同状态的风险偏好（不同状态之间现值的差异）以及无风险利率（贴现率）。

3.3 风险中性定价

假设状态1对应概率为P_1，状态2对应概率为P_2，对应状态3的概率为$1 - P_1 - P_2$。同样根据资产定价原理$P_t = E_t[M_{t+1}X_{t+1}]$，则有$S = P_1M_1X_1 + P_2M_2X_2 + (1 - P_1 - P_2)M_3X_3$。在状态价格定价中，有$\Pi_i = P_iM_i$使得方程可以求解。但使用风险中性定价，$M_1$、$M_2$、$M_3$、$P_1$、$P_2$和$C_a$均为未知，无法求解。即使市场为完全市场（三种资产和三种状态），但三种资产即有三个方程，六个未知数，方程组存在无穷多解（现实世界中状态数远大于资产数）。**注意：1.M_i为随机贴现因子只取决于状态，即对状态的风险态度，而不随着资产不同而改变。2.$E_t[MX]$只有当其为无风险贴现因子时可写成$ME_t[X]$，因为无风险利率r_f为常数且不因状态改变而改变。**

$$
\begin{cases} S_a = P_1M_1 \times 10 + P_2M_2 \times 8 + (1 - P_1 - P_2)M_3 \times 0 = 8 \\ S_b = P_1M_1 \times 8 + P_2M_2 \times 12 + (1 - P_1 - P_2)M_3 \times 0 = 9 \\ C_a = P_1M_1 \times 3 + P_2M_2 \times 1 + (1 - P_1 - P_2)M_3 \times 0 \end{cases}
$$

我们可以对多余变量自由设定，并不影响等式成立，最简单的设定就是令三种状态下贴现因子都相等，都为M^Q无风险贴现因子。此时投资者对风险持中性态度，即对未来不存在任何偏好。由于对不同的状态下贴现因子都相同，可把M^Q提出为$M^QE_t[X]$。由$Q_iM^Q = P_iM_i$（即PC_i），得到$Q_i = P_i\frac{M_i}{M_Q}$，则此时有$S = M^QE^Q[X] = M^Q[Q_1X_1 + Q_2X_2 + Q_3X_3]$，简化方程组得：

$$
\begin{cases} S_a = P_1M_1 \times 10 + P_2M_2 \times 8 \quad = 8 \\ S_b = P_1M_1 \times 8 + P_2M_2 \times 12 \quad = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_1M_1 = 3/7 \\ P_2M_2 = 13/28 \end{cases}
$$

在风险中性下：

$$\begin{cases} Q_1 = P_1M_1/M^Q = \dfrac{3}{7M^Q} \\ Q_2 = P_2M_2/M^Q = \dfrac{13}{28M^Q} \\ Q_3 = 1 - \dfrac{25}{28M^Q} \end{cases}$$

计算期权价格：

$$c_a = M^Q E^Q[X] = M^Q[3Q_1 + Q_2 + 0Q_3] = M^Q[3\frac{3}{7M^Q} + \frac{13}{28M^Q}] = 1.75$$

所以风险中性定价法基本思路为，为了方便定价过程，我们可以从现实测度转换至风险中性测度，而定价结果同样适用于现实测度。即将现实测度P转化为Q测度，进行测度转换，在Q测度下计算预期回报$E^Q[X]$，并且使用无风险贴现因子M^Q贴现为现值。

4 概念

可复制证券

在这个例子中只有两种可交易资产，有三种状态，为不完全市场（Imcomplete Market）。但由于需要定价的期权，在S_0，S_1生成的平面上，可以被复制，因此可以被准确定价。而对于**不可复制资产**，虽然无法准确定价，但可以确定M^Q的合理范围，从确定新资产的价格合理范围。（**注意：可复制不代表是完全市场**）

不可复制证券

假设需要为t=1时刻回报为（3，2，1）的资产S_3进行定价，因为其不可被复制，只能确定其范围。当$Q_3 = 0$时，$Q_1 + Q_2 \leq 1$，由$M^Q(Q_1 + Q_2) = 25/28$得到$M^Q \geq 25/28$。因为随机贴现因子$M^Q \leq 1$，确定其范围为$25/28 \leq M^Q \leq 1$。当$M^Q = 25/28$时，$Q_1 = 12/25$，$Q_2 = 13/25$，此时资产价格$S_3 = 2.21$。当$M^Q = 1$时，$Q_1 = 3/7$，$Q_2 = 13/28$，$Q_3 = 3/28$，此时资产价格$S_3 = 2.32$。得到该资产S_3价格的合理范围在$2.21 \sim 2.32$之间。

完全市场

在完全市场中（Complete Market），三种资产（S_a、S_b和S_c）对应三种状态，在风险中性测度下：

$$\begin{cases} S_a = M^Q[Q_1X_{a,1} + Q_2X_{a,2} + (1 - Q_1 - Q_2)X_{a,3}] \\ S_b = M^Q[Q_1X_{b,1} + Q_2X_{b,2} + (1 - Q_1 - Q_2)X_{b,3}] \\ S_c = M^Q[Q_1X_{c,1} + Q_2X_{c,2} + (1 - Q_1 - Q_2)X_{c,3}] \end{cases}$$

如果$(X_{a,1}, X_{a,2}, X_{a,3})$，$(X_{b,1}, X_{b,2}, X_{b,3})$和$(X_{c,1}, X_{c,2}, X_{c,3})$为线性独立（相互不可复制），即能生成整个三维线性空间，即**空间内任意资产都可复制**。此时有三个未知数Q_1，Q_2和M^Q，三个方程，能求解所有未知数。相反，在现实测度下则无法求解所有未知数，只能整体求解$PC_i = P_iM_i$，即求解状态价格证券。如上述例子中，资产S_a与S_b之间互相不可复制，即互相独立，但可由这两种证券复制出第三种证券c_a，市场为可复制，但非完美市场。即c_a在S_a与S_b生成的平面上，但S_a和S_b无法生成整个三维的状态空间，并非任何资产都可被复制。（**注意：在可复制基础上，需要无套利条件，资产才能被定价**）

$$
\begin{cases}
S_a = P_1M_1X_{a,1} + P_2M_2X_{a,2} + P_3M_3X_{a,3} \\
S_b = P_1M_1X_{b,1} + P_2M_2X_{b,2} + P_3M_3X_{b,3} \\
S_c = P_1M_1X_{c,1} + P_2M_2X_{c,2} + P_3M_3X_{c,3}
\end{cases}
$$

完美市场

完美市场（Perfect Market），指没有交易摩擦的市场，能够自由做空做多。