BSM 公式

杨弘毅

创建: 2020 年 4 月 19 日
修改: 2021 年 8 月 17 日

1 布朗运动、维纳过程

标准布朗运动简易表达式有：

$$dZ_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

其离散形式的表达式有：

$$Z_T - Z_t = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

1.1 特征

标准布朗运动（Brownian motion）或维纳过程（Wiener process）的特征有：

- 初值为零
- 连续
- 独立增量：对于任意两个不同时间点 Δt_i 与 Δt_j，其增量 ΔZ_i 与 ΔZ_j 相互独立
- 独立同分布（方差可加）：增量 ΔZ 服从均值为零、方差等于时间长度的正态分布，即 $\Delta Z_i \sim N(0, \Delta t_i)$

1.2 为何使用标准布朗运动

- 股价不能为负，所以不能遵循正态分布，但股票连续复利收益率（$d\ln S_t$）近似服从正态分布
- 维纳过程是一个马尔可夫随机过程，增量 ΔZ 独立，与弱式 EMH 相同，即技术分析无效，无法使用历史信息预测未来，过去信息跟未来信息相互独立
- 维纳过程对时间处处不可导，且二次变分（Quadratic Variation）不为零，与股票价格变化存在转折尖点的性质相符

1.3 部分证明

增量均值为零，方差为时间长度，当 X 与 Y 独立时，则有：

$$\operatorname{Var}(XY) = \operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y) + [\mathrm{E}(X)]^2 \operatorname{Var}(Y) + [E(Y)]^2 \operatorname{Var}(X)$$

此时，由于 ε_t 与 dt 独立，套用上式，同时由于 $\varepsilon_t \sim N(0,1)$，则有：

$$\mathrm{E}(dZ_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t \sqrt{dt}) = 0$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(dZ_t) &= \operatorname{Var}(\varepsilon_t\sqrt{dt}) \\
&= \operatorname{Var}(\varepsilon_t)\operatorname{Var}(\sqrt{dt}) + [\mathrm{E}(\varepsilon_t)]^2\operatorname{Var}(\sqrt{dt}) + [E(\sqrt{dt})]^2\operatorname{Var}(\varepsilon_t) \\
&= \operatorname{Var}(\varepsilon_t)\left[\operatorname{Var}[(\sqrt{dt})^2] - [\mathrm{E}(\sqrt{dt})]^2\right] \\
&= \operatorname{Var}(\varepsilon_t)\left[\mathrm{E}[(\sqrt{dt})^2] - [\mathrm{E}(\sqrt{dt})]^2 + [\mathrm{E}(\sqrt{dt})]^2\right] \\
&= 1\cdot\mathrm{E}(dt) = dt
\end{aligned}
$$

方差可加性，由下式可见，由于独立增量，导致协方差项为零，使得方差可加。

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}(X_1+X_2+X_3) \\
&= \operatorname{Var}(X_1)+\operatorname{Var}(X_2)+\operatorname{Var}(X_3) \\
&+ \operatorname{Cov}(X_1,X_2)+\operatorname{Cov}(X_2,X_3)+\operatorname{Cov}(X_1,X_3)
\end{aligned}
$$

由上可知，增量在连续形式 dZ_t 以及离散形式 $Z_T - Z_t$ 下，均服从均值为零，方差为时间长度的正态分布，即有：

$$
\begin{aligned}
dZ_t &\sim N(0,dt) \\
Z_T - Z_t &\sim N(0,T-t)
\end{aligned}
$$

1.4 几种随机过程

广义维纳过程（generalized Wiener process），a 与 b 为常数。此时，易知其均值为 $\mathrm{E}(dX_t) = adt$，由于 b 为常数，且 $\operatorname{Var}(dZ_t) = dt$，则有方差为 $\operatorname{Var}(dX_t) = b^2dt$。

$$dX_t = adt + bdZ_t$$

普通布朗运动，a(t) 与 b(t) 都是 t 的确定性函数。由于都为确定函数，所以如上可知，其均值方差为 $\mathrm{E}(dX_t) = a(t)dt$，由于 b 为常数，且 $\operatorname{Var}(dZ_t) = dt$，则有方差为 $\operatorname{Var}(dX_t) = b(t)^2dt$。

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dZ_t$$

扩散过程（Diffusion Process），此时 $a(X(t),t)$ 与 $b(X(t),t)$ 都为 X_t 和 t 的确定性函数。由于漂移项与方差项都包含 $X(t)$，使得扩散之后过程的条件分布无法保证仍是正态分布。但更能刻画一般动态变化，未加入新的风险源，仍具有独立增量，马尔可夫性，和方差可加性等性质。

$$dX_t = a(X(t),t)dt + b(X(t),t)dW_t$$

伊藤过程（Itô Process），最一般化的随机过程，a_t 和 b_t 为任意函数或随机过程。

$$dX_t = a_tdt + b_tdW_t$$

2 伊藤引理（Itô lemma）

若变量 X_t 遵循伊藤过程：

$$dX_t = a_tdt + b_tdW_t$$

在导数 $\dfrac{\partial f}{\partial t}$、$\dfrac{\partial f}{\partial X}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ 存在的前提下，则有变量 X_t 和 t 的函数 $f(X(t),t)$ 将遵循如下过程：

$$df_t = \left(\frac{\partial f}{\partial X}a_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b_t^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}b_t dW_t$$

为方便记忆，可记为（金融随即分析第二卷 P118）：

$$\boxed{df(X(t),t) = f_t(X(t),t)dt + f_x(X(t),t)dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X(t),t)dX(t)dX(t)}$$

或

$$\boxed{df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2}f_{xx}dXdX}$$

2.1 证明

$f(X,t)$ 的泰勒展开式为：

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\Delta X^2 + \frac{\partial f}{\partial X \partial t}\Delta X \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + \dots$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$(\Delta t)^2$，认为是高阶无穷小，可忽略。而对于 $\Delta X \Delta t$ 项有：

$$\Delta X = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta X \Delta t = a(\Delta t)^2 + b\varepsilon(\Delta t)^{3/2}$$

其中的 $(\Delta t)^{3/2}$ 项，也被认为时高阶无穷小项，可忽略。同时由于 $(\Delta X)^2$ 项中包含 Δt 项，因此需要保留。因此仅考虑前三项（**注意**：此与常微分不同，而在常微分中，$(\Delta X)^2$ 项是也是高阶无穷小项），展开得到：

$$\begin{aligned}\Delta f_t &= \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\Delta X^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}[a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2\varepsilon^2\Delta t\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon^2\Delta t$ 项，由于 $\varepsilon \sim N(0,1)$，因此有 $\mathrm{E}(\varepsilon)=0$。又因 $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \mathrm{E}(\varepsilon^2) - [\mathrm{E}(\varepsilon)]^2 = 1$，得到 $\mathrm{E}(\varepsilon^2)=1$，同时有 $\mathrm{E}(\varepsilon^2\Delta t) = \Delta t$。计算 $\varepsilon^2\Delta t$ 的方差可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\varepsilon^2\Delta t) &= \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\,\mathrm{Var}(\Delta t) + [\mathrm{E}(\varepsilon^2)]^2\,\mathrm{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon^2) \\ &= \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\,\mathrm{Var}(\Delta t) + 1\cdot\mathrm{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon_t^2) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t^2)\end{aligned}$$

可以认为 $\varepsilon^2\Delta t$ 方差为高阶无穷小，其期望为 1。因此，可认为 $\varepsilon^2\Delta t \approx \Delta t$，可将原式化简为：

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2\Delta t$$

而连续形式为：

$$\begin{aligned}df_t &= \frac{\partial f}{\partial X}dX_t + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2 dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}(a_t dt + b_t dZ_t) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial X}a_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b_t^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}b_t dZ_t\end{aligned}$$

3 几何布朗运动

由于衍生品价格是标的资产价格与时间的函数，即只需要假定标的资产遵循过程，即可用伊藤引理求得其衍生品遵循过程。假设股票价格服从几何布朗运动（Geometric Brownian Motion，GBM）：

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dW_t$$

令 $G_t = \ln S_t$，此时：

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

代入伊藤引理之中, 此时 $a_t = \mu S_t$，$b_t = \sigma S_t$，则有：

$$\begin{aligned} dG_t = d\ln S_t &= \left(\frac{1}{S_t}\mu S_t + 0 - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt + \frac{1}{S_t}\sigma S_t dZ_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ_t \end{aligned}$$

即有：

$$d\ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ_t \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt, \sigma^2 dt\right)$$

同时又离散形式下：

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma(Z_T - Z_t) \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

此时股票价格连续复利收益率（Continuously compounded return），或称为对数收益率（Logarithmic return），为**未年化**收益率：

$$R = d\ln S_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \ln\frac{S_t}{S_{t-1}} = \ln(1+r) \tag{1}$$

服从期望值为 $(\mu - \sigma^2/2)dt$，方差为 $\sigma^2 dt$ 的**正态分布**，与现实较为吻合。且 $d\ln S_t$ 的定义，使得股票价格非负。**注意**：$d\ln S$（极短时间内）和 $\ln S_T - \ln S_t$（较长时间内）都服从正态分布，而 dS 在极短时间内服从正态分布，而在较长时间内因 S_t 的大小改变，使得 $S_T - S_t$ 的均值和方差的改变而不服从正态分布。

$$\begin{aligned} \ln S_T - lnS_t \sim & N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \\ \ln S_T \sim & N\left(\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \end{aligned}$$

可以看到此时股票价格的对数 服从正态分布（Log-normal distribution），因此可知，股票价格服从对数正态分布。由正态分布与对数正态分布的性质可知，对一个服从正态分布的随机变量 X 取指数，则 e^X 服从数正态分布。相反，对一个服从对数正态分布的随机变量 X 取对数，则 $\ln X$ 服从正态分布。因此有如下关系：

$$\ln S_T \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \leftrightarrow \quad S_T \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$$

并且已知对数正态分布 $X \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$，其期望与标准差为：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \mathrm{Var}(X) &= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

因股票价格 S_T 服从对数正态分布，代入上式可知其期望及方差为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T) &= \exp(\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)) \\
&= \exp(\ln S_t + \mu(T-t)) \\
&= S_t e^{\mu(T-t)} \\
\mathrm{Var}(S_T) &= \left[\exp(\sigma^2(T-t)) - 1\right] \exp\left\{2\left[\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right] + \sigma^2(T-t)\right\} \\
&= \left[\exp(\sigma^2(T-t)) - 1\right] \exp\left[2\ln S_t + 2\mu(T-t)\right] \\
&= S_t^2 e^{2\mu(T-t)} \left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right]
\end{aligned}$$

3.1 对数正态分布

如果一组数值做对数变换后服从正态分布，我们就称其服从对数正态分布。假设随机变量 X 服从正态分布，则有 lnx 服从对数正态分布，两者累积分布函数（Cumulative distribution fuction，CDF）相同：

$$F_L(x) = F_N(\ln x)$$

对公式两边取倒数，则可得到其概率密度函数（probability density function，PDF）：

$$F_L(x) = \frac{1}{x} F_N(\ln x)$$

此时，带入已知正态分布 PDF，即可得到对数正态分布 PDF：

$$f_L = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

注意：对于对数正态分布，μ 与 σ 并非其均值与标准差，仅为确定其对数正态分布的两个参数。只是使用其确定正态分布时，就正好为其期望和标准差。对于相同的 μ 与 σ 参数确定的正态分布与对数正态分布，可以通过对服从对数正态分布的随机变量取对数转换为正态分布。相反，通过对服从正态分布的随机变量取指数转换为对数正态分布。两者之间的期望与标准差（方差）通过如下关系转化：

	正态分布	对数正态分布
期望	$\mathrm{E}_N(X) = \mu = \ln[\mathrm{E}_L(X)] - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{\mathrm{Var}_L(X)}{[\mathrm{E}_L(X)]^2}\right]$	$\mathrm{E}_L(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
方差	$\mathrm{Var}_N(X) = \sigma^2 = \ln\left[1 + \frac{\mathrm{Var}_L(x)}{[\mathrm{E}_L(X)]^2}\right]$	$\mathrm{Var}_L(X) = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

3.1.1 期望推导

根据对数正态分布的 PDF，可计算其期望：

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法，令 $t = \frac{lnx-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$，则有 $x = e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu}$，则原积分转化为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} d e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu} \\
&= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2} dt \\
&= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d e^{-(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2} d(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})
\end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} = \sqrt{\pi}$，可得到：

$$\mathrm{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

3.1.2 方差推导

已知：

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2\mu\,\mathrm{E}(X) + \mu^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

同上，已知对数正态分布 PDF：

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法，令 $t = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$，则有 $x = e^{\sigma t + \mu}$：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + 2\sigma t} dt \\
&= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-2\sigma)^2 + 2\sigma^2} dt \qquad \left(\text{对} -\frac{t^2}{2} + 2\sigma t \text{配方}\right) \\
&= \frac{e^{2\mu + 2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}})^2} d\left(\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}}\right) \\
&= e^{2\mu + 2\sigma^2}
\end{aligned}$$

此时则有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \\
&= e^{2\mu + 2\sigma^2} - (e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}})^2 \\
&= e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} \\
&= e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

3.1.3 求正态分布 μ 与 σ

已知 $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$、$\mathrm{E}(X)$ 与 $\mathrm{Var}(x)$，即随机变量 X 服从对数正态分布，其对数服从正态分布，则有：

$$\mu = \ln[\mathrm{E}(X)] - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{\mathrm{Var}(X)}{[\mathrm{E}(X)]^2}\right]$$

$$\sigma = \sqrt{\ln\left[1 + \frac{\mathrm{Var}(x)}{[\mathrm{E}(X)]^2}\right]}$$

4 BSM 偏微分方程（PDE）

4.1 假设

- 人性假设
  - 不存在无风险套利机会（无套利）
- 完美世界

- 允许卖空标的证券
- 没有交易费用和税收
- 证券交易时连续的，价格变动也是连续的
- 所有证券都完全可分

- 可交易资产
  - 证券价格遵循几何布朗运动，即 μ 和 σ 为常数
  - 衍生品有效期内，无风险利率 r 为常数
  - 衍生证券有效期内，标的证券没有现金收益支付

4.2 推导

假设股票价格 S_t 遵循几何布朗运动，以及其离散形式有：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$
$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t$$

假设衍生品价格 $f(S_t, t)$ 为 S_t 以及 t 的函数，根据伊藤引理可得其连续和离散形式有：

$$df(S_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t dZ_t$$
$$\Delta f(S_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t$$

由此可见，股票价格与衍生品价格的风险源均来自 ΔZ_t，因此可以构建投资组合，由一单位衍生品空头，以及 $\partial f / \partial S$ 单位证券多头构成，进行对冲消除该风险源：

$$\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t$$

在 Δt 时间内，该投资组合价值的变化 $\Delta \Pi_t$ 来源其标的资产以及衍生品的价格变动，代入 ΔS_t 与 Δf_t 可得：

$$\begin{aligned}
\Delta \Pi_t &= -\Delta f_t + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S_t \\
&= -\left[\left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t \right] + \frac{\partial f}{\partial S} \left(\mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t \right) \\
&= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t
\end{aligned}$$

由于此时组合消除了风险，因此组合只应获得无风险收益率：

$$\Delta \Pi_t = r \Pi_t \Delta t$$
$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t = r \left(-f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t \right) \Delta t$$

整理等式，消去 Δt，即可得到 **BSM 偏微分方程**：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f_t$$

5 BSM 公式（鞅方法）

在风险中性世界中，无收益资产在 t 时刻，其看涨期权价值的期望为：

$$\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T-K,0)\right]$$

欧式看涨期权的现值应为其期望值以无风险利率进行贴现：

$$c=e^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T-K,0)\right]$$

同时在风险中性世界下，漂移率 μ 应等于无风险收益率 r，因此有：

$$\ln S_T-\ln S_t\sim N\left((r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t),\sigma^2(T-t)\right)$$

已知：

$$S_T=S_t\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\left(Z_T-Z_t\right)\right]$$

已知 $Y=\frac{Z_T-Z_t}{\sqrt{T-t}}\sim N(0,1)$，其概率密度函数（PDF）为：

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

在风险中性下的期望，可以改写为如下积分的形式：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T-K,0)\right]&=\tilde{\mathrm{E}}_t\left[S_te^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y}-K\right]^+\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_te^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y}-K\right)^+\varphi(y)dy\end{aligned}$$

当 $S_te^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y}-K\geq 0$ 时，有 $y\geq\frac{\ln(K/S_t)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$，设其为 $-d_2$，同时假设 $d_1=d_2+\sigma\sqrt{T-t}$。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T-K,0)\right]&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_te^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y}-K\right)^+\varphi(y)dy\\&=S_te^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\sigma\sqrt{T-t}y}\varphi(y)dy-K\int_{-d_2}^{\infty}\varphi(y)dy\\&=S_te^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\sigma\sqrt{T-t}y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy-KN\left(d_2\right)\\&=S_te^{r(T-t)}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}+\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{y^2}{2}\right)}dy-KN(d_2)\\&=S_te^{r(T-t)}\int_{y=-d_2}^{y=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}dy-KN(d_2)\quad\text{（换元法：}u=y-\sigma\sqrt{T-t}\text{）}\\&=S_te^{r(T-t)}\int_{u=-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{u=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du-KN(d_2)\quad\text{（}dy=du\text{）}\\&=S_te^{r(T-t)}\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du-KN(d_2)\\&=S_te^{r(T-t)}N(d_1)-KN(d_2)\end{aligned}$$

得到 **BSM 公式**，即欧式看涨期权的解析解（注：$N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数（CDF），而 $N'(\cdot)$ 为标准正态分布的概率分布函数（PDF））：

$$\begin{aligned}c&=e^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T-K,0)\right]\\&=S_tN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\end{aligned}$$

已知期权平价公式：

$$c + Ke^{r(T-t)} = p + S_t$$

代入 BSM 看涨期权解析解中，可得：

$$\begin{aligned}
p &= c + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\
&= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\
&= S_t (N(d_1) - 1) - Ke^{-r(T-t)} (N(d_2) - 1) \\
&= S_t (-N(-d_1)) - Ke^{-r(T-t)} (-N(-d_2)) \\
&= Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)
\end{aligned}$$

此时 d_1 和 d_2 分别为：

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

6 内在价值（考虑中国市场的新定义）

由于：

$$\text{期权价值（Option value）} = \text{内在价值（Intrinsic value）} + \text{时间价值（Time value）}$$

内在价值为即**不考虑资产价格波动**的情况下，期权条款赋予期权多头的最高价值。而时间价值为**标的资产价格波动**为期权多头（权利方）所带来的隐含价值，由于期权权利方只有权力而无义务，因此期权的时间价值应该大于 0。内在价值不受时间价值的影响，因而可以使用二分法。

若定义内在价值为，期权若在当下时点到期，期权所含的的价值（Hull，CME）。这样考虑的缺点为没有考虑货币的时间价值，且在中国市场由于现货的卖空限制，其价格高于其真实价格。

$$\begin{aligned}
\text{看涨期权内在价值} &= \max(S_t - K) \\
\text{看跌期权内在价值} &= \max(K - S_t)
\end{aligned}$$

在考虑货币时间价值的情形内在价值如下，缺点为依然没有考虑中国市场的卖空限制。

$$\begin{aligned}
\text{看涨期权内在价值} &= \max(S_t - Ke^{-r(T-t)}) \\
\text{看跌期权内在价值} &= \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t)
\end{aligned}$$

因此考虑使用期货价格代替现货价格，以为期货市场多空双方均能自由表达其看法，因此有：

$$\begin{aligned}
\text{看涨期权内在价值} &= \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}) \\
\text{看跌期权内在价值} &= \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)})
\end{aligned}$$

由于在中国市场 ETF 期权有红利保护机制，即会下调行权价格，放大每手期权数量，相当于变相抬高了股票价格，或复权（加挂 A 标记的期权）。且在 ETF 中的成分股分红，其分红留在 ETF 当中。而 ETF 没有期货，只有股指期货，而股指期货不对分红进行调整，即没有红利保护，即其成分股分红后股指自然下跌。因而在使用股指期货或期权以及 ETF 现货或期权时，需要做红利调整。即在 ETF 现货中将红利剔除，此时有：

$$F_{t,T} = (S_t - I)e^{r(T-t)}$$

此时则有，将上式代入，在中国市场中：

$$\text{看涨期权内在价值} = \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)} + I)$$
$$\text{看跌期权内在价值} = \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)} - I)$$

因为平值点为使内在价值为零，则平值点定义为为 $F_{t,T} = K$，这样定义使得实值虚值部分左右较为对称，有利于比较。此时有当 $F < K$ 为 OTM，此时值域为正，当 $F > K$ 为 ITM，则有值域为负。此时有对数在值状态（log-moneyness）：

$$\ln \frac{K}{K_{atm}} = \ln \frac{K}{F}$$

同时可以发现，在 PCP 下：

$$c = p + (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$$

对于平直期权 ATM，则有 $F_{t,T} = K$，易得此时 $c = p$。而当看涨期权为 ITM，其内在价值部分不为零。而对于此时得看跌期权为 OTM，其内在价值为零，而仅有时间价值，因此可以得到，在新平值点定义下的，相同行权价，相同期限的看涨看跌期权：

$$c_{\text{时间价值}} = p_{\text{时间价值}}$$

7 平价期权

当平值点为 $S = Ke^{-r(T-t)}$ 时，将其带入看涨 BSM 公式当中，则有：

$$\frac{c}{S} = N(d_1) - N(d_2) \tag{2}$$

对于看跌期权则有：

$$\begin{aligned}\frac{p}{S} &= N(-d_2) - N(-d_1) \\ &= 1 - N(d_2) - [1 - N(d_1)] \\ &= N(d_1) - N(d_2) = \frac{c}{S}\end{aligned}$$

对于 d_1 和 d_2，此时有：

$$d_1 = \frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \tag{3}$$

$$d_2 = \frac{ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \tag{4}$$

则对于欧式平价期权：

$$\begin{aligned}\frac{c}{S} = \frac{p}{S} &= N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) \\ &= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} - \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^3}{6} + \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^5}{40} - \cdots + \ldots\right)\right] - 1 \qquad \text{(使用泰勒展开)} \\ &\approx \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2\pi} \approx 0.4\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

8 波动率

为人们对未来给定期限的波动率的预期值

- 历史波动率（Historical volatility）：使用过去代替未来
  - 样本对数收益率标准差（日频数据）
  - 已实现波动率（Realized volatility，日内高频，5 分钟，假设均值为零）
  - 极差波动率
- 历史波动率（Historical volatility）：利用历史数据进行建模，并且预测
  - 广义自回归条件异方差（GARCH，计量方法）
  - 随机波动率（Sochastic volatility，随机过程）
- 隐含波动率（Implied volatility）：直接从期权价格中提取未来预期

9 Delta 对冲

Delta 为衍生品价格变动与其标的资产价格变动的比率。如果假定股票价格（X）与期权价格（Y）为折线，则其斜率应为 Delta，即对股票价格变动一单位，期权价格变动 Δ 单位。而现实中并非折线，Delta 则为两者切线斜率。

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

而从持有标的资产和衍生品数量分别为 N_S 和 N_V 而言，为了维持对冲结果为 0，易知对于每一单位标的资产，应使用 Δ 单位衍生品进行对冲。

$$\Delta V \times N_V = \Delta S \times N_S \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{N_S}{N_V}$$

如上所述，假定股票价格遵循几何布朗运动，则有在显示测度（Physical probability measure）下：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

根据伊藤引理：

$$f(T, W_T) = f(t, W_t) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial S} dW_t \frac{1}{2} + \int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

在 Bakshi and Kapadia 2003 中，

在一段时间内的使用看涨看跌期权进行 Delta 对冲（**注意**：由几何布朗运动与伊藤过程推到而来，因此看涨看跌期权形式相同，买入看涨看跌期权，并卖出股票，净投资金额获得无风险收益）。

$$\text{Call Gain} = C_{t+\tau} - C_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(C_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

$$\text{Put Gain} = P_{t+\tau} - P_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(P_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

Long call, short delta stock/ short call, long delta stock

Long put, long delta stock/ short put, short delta stock

10 注意与备注

- 期限、无风险利率、波动率应匹配（以年为单位，一般使用交易日计算，美国交易日 252 天）
- 无风险利率选择即期利率（Spot rate）而非到期收益率（YTM，真实收益率，票息 5%，但非平价发行）
- 由于只有交易日才有历史数据与收益率数据，波动率使用交易天数进行年化，中国 240 天左右，美国 252 天
- 波动率为一个时间窗口（一般为年，252 天交易日，较以月每 21 天为窗口更为平滑）内连续复利收益率或对数收益率（$\ln S_t/S_{t-1}$）标准差进行年化。即日频波动率乘以 $\sqrt{252}$（一天的方差为 s^2，由于方差可加，252 个交易日的方差即为 $s^2 \times 252$，标准差或波动率为 $s\sqrt{252}$），月频波动率应乘以 $\sqrt{252/21}$

10.1 比例收益率与对数收益率

股票价格服从几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

其离散形式可写作：

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

其期望有，可以看到 $\Delta S_t/S_t$ 为 Δt 时间内百分比年化收益率或**比例收益率**（percentage returns）为 μ：

$$\mathrm{E}(\frac{\Delta S_t}{S_t}) = \mu \Delta t$$

而连续复利收益率或**对数收益率**（log returns）的期望则为：

$$d\ln S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dZ_t$$
$$\mathrm{E}(d\ln S_t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt$$

比例收益率在实际应用过程中意义较小，假设 4 年盈亏为 +50%，−50%，+50%，−50%，其比例收益率期望与均值 μ 均为 0，但实际上相比期起初有-43.75% 的亏损。而使用几何平均（复利）计算，年化亏损 −13.40% 即盈亏应使用几何平均的方式计算，简单的算术平均比例收益率没有意义。而使用对数收益率，其期望为 $\mu - \sigma^2/2$，即算术平均 μ 需要减去 $\sigma^2/2$，才是几何平均期望。在此例子中均值为 0，方差为 0.25，此时对数收益率的期望为 −12.5%。即波动越大，降低实际收益率，符合现实情况，具有经济学意义。

10.2 做空限制

且在中国市场中现货存在较大的做空限制，即在现货市场的价格由看多者和少量看空者决定，并不能反应所有投资者的真实情绪，以至于难以复制期权，违法 BSM 公式假设条件。解决方法有：

1. 使用期货进行贴现，得到其隐含现货价格，使用 BSM 进行计算，其中有：
   - 期货隐含现货价格
   $$S^* = Fe^{-q(T-t)}$$
   - 期权隐含现货价格
   $$S^* = (c-p) + Ke^{-r(T-t)}$$
2. 直接使用 Black 公式，使用期货价格进行计算，即：

$$c = e^{-r(T-t)}\left[F_t N(d_1) - KN(d_2)\right]$$