

数量金融

杨弘毅

创建：2020 年 4 月 19 日

修改：2022 年 11 月 6 日

目录

1	期权基础	6
2	布朗运动与维纳过程	8
2.1	特征	9
2.2	部分证明	9
2.3	二次变差	10
2.4	几种随机过程	14
3	伊藤引理	14
3.1	古典微积分为何失效	14
3.2	伊藤引理与证明	15
4	几何布朗运动	17
5	对数正态分布	19
5.1	PDF 与 CDF	20
5.2	PDF 推导	21
5.2.1	期望推导	22
5.2.2	方差推导	22
6	百分比收益率与对数收益率	23
6.1	对数收益率推导	25

6.2	单期收益	26
6.3	多期平均收益率	27
6.4	年化收益率	28
6.5	期望	30
6.6	性质	31
7	BSM 偏微分方程 (PDE 方法)	32
7.1	假设	32
7.2	推导	33
8	BSM 公式 (鞅方法)	34
8.1	风险中性世界	34
8.2	BSM 期权定价公式	35
8.3	关于 $N(d_1)$ 与 $N(d_2)$	37
8.4	使用 BSM 公式注意事项	38
8.5	期权价格合理边界	39
8.6	Black 公式与分红	39
9	希腊值	40
9.1	正态分布与性质	40
9.2	希腊值定义与理解	41
9.2.1	多空对希腊字母的影响	41
9.2.2	Delta	42
9.2.3	Gamma	45
9.2.4	Vega	48
9.2.5	Theta	48
9.3	Delta 对冲	50
9.4	希腊值分解	52
9.4.1	泰勒级数	52
9.4.2	基于 S 与 t 的希腊值分解	53
9.4.3	基于 S 与 σ 的希腊值分解	55
9.4.4	BSM 分解	55
9.5	Black 模型的希腊值推导	56

9.5.1	Delta	57
9.6	BSM 模型的希腊值推导	58
9.6.1	Delta	59
9.6.2	Gamma	60
9.6.3	Vega	60
9.6.4	Theta	61
9.6.5	Rho	63
10	波动率	63
10.1	波动率特征	63
10.1.1	尖峰肥尾	64
10.1.2	波动率聚类	64
10.1.3	不对称性	64
10.2	收益率与波动率	65
10.3	历史波动率	67
10.4	已实现波动率	68
10.5	条件异方差模型	69
10.5.1	ARCH 波动率	69
10.5.2	GARCH 波动率	70
10.5.3	GJR-GARCH 波动率	70
10.6	随机波动率	71
10.6.1	局部波动率	71
10.7	隐含波动率	71
10.7.1	BS 隐含波动率	72
10.7.2	无模型波动率	72
10.7.3	方差互换与 VIX	73
10.7.4	积分型余项的泰勒公式方法	78
10.7.5	狄拉克 δ 函数性质	79
10.7.6	狄拉克 δ 函数方法	81
10.7.7	DDKZ 方差与 BJN 方差	84
10.7.8	自适应无模型波动率 (AVIX)	85

11 波动率微笑	88
11.1 波动率风险溢价	88
11.2 看涨看跌期权与波动率微笑	88
11.3 波动率微笑与偏斜的一些解释	89
11.4 波动率微笑与波动率偏斜	90
11.5 波动率微笑与隐含风险中性分布	91
12 波动率曲面	92
12.1 样条插值	92
12.2 其他方法	93
13 远期（期货）	93
13.1 定价	93
13.2 红利资产调整	95
13.3 $F_{t,T}$ 与 S_t	96
13.4 $F_{t,T}$ 与 $\mathbb{E}_t[S_T]$	99
13.5 $F_{t,T}$ 、 S_t 与 $\mathbb{E}_t[S_t]$	100
14 远期（期货）套期保值	101
14.1 基差风险	101
14.2 套保（金额）比率	103
14.3 套保（数量）比率	103
14.4 最小方差套保（数量）比率	104
14.5 OLS 估计	105
14.6 风险降低百分比	106
15 看跌-看涨平价关系（欧式期权）	107
15.1 无红利资产	107
15.2 有红利资产	109
15.3 中国市场 PCP	110
15.4 ETF 期权分红调整	111
16 中国市场特殊处理	114
16.1 做空限制与隐含信息	114

16.2 内在价值	115
16.2.1 John Hull 定义	115
16.2.2 完美市场定义	116
16.2.3 中国市场定义	116
16.2.4 ETF 期权股指期货定义	117
16.3 平值点与在值程度	117
17 平价期权估计	118
18 可转债	120
18.1 可转债条款	121
18.2 可转债的分解	125
18.3 可转债的定价	125
19 数值方法	126
19.1 二叉树等	126
19.2 蒙特卡罗模拟	126
19.3 有限差分	126
Appendices	126
A 牛顿迭代法	126
A.1 $f(x)$ 的根	126
A.2 $f'(x)$ 的根	127
B 股利与除权除息	127
C 股指计算方法	132
C.1 道琼斯	132
C.2 标准普尔 500	132
D 外汇	133
D.1 汇率表示方法	133
D.2 利率平价	133

1 期权基础

期权主要分为两种，认购期权（看涨期权）和认沽期权（看跌期权）。认购期权为双方约定在未来某个时点，买方（权利方）有权利向卖方（义务方）以约定的价格买入标的资产，可为股票或 ETF。而相反，认沽期权为双方约定在未来某个时点，买方有权利向卖方以约定的价格卖出标的资产（股票或 ETF）。

在期权交易中，可以买入开仓，或卖出开仓。权利方（买方）在支付权利金后获得以合约规定的价格买入或卖出标的资产的权利，而不必承担义务。而义务方（卖方）则有被动履约的义务，即承担买入或卖出标的资产的义务，不享受权利，因此需要缴纳规定数额的保证金，作为履行义务的担保。而权利方不承担任何义务，因此不需要缴纳保证金。如上所述，因此可分为以下四种情形：

- **买入看涨（权利买入）：**看涨期权权利方，有权利在未来时点，以约定价格 K 买入标的资产。因此需支付权利金 C ，一旦标的资产价格超过 $K+C$ ，即可以更低的价格买进，开始获利。
- **卖出看涨（义务卖出）：**看涨期权义务方，有义务在未来时点，以约定价格 K 卖出标的资产。因此可获得权利金 C ，一旦标的资产价格超过 $K+C$ ，则必须以更低的价格卖出标的资产，因此开始亏损。
- **买入看跌（权利卖出）：**看跌期权权利方，有权利在未来时点，以约定价格 K 卖出标的资产。因此需支付权利金 P ，因此一旦资产价格低于 $K-P$ ，则可以以更高的价格卖出，开始获利。
- **卖出看跌（义务买入）：**看跌期权义务方，有义务在未来时点，以约定价格 K 买入标的资产。因此可收获权利金 P ，因此一旦资产价格低于 $K-P$ ，则必须以更低的价格买入，开始亏损。

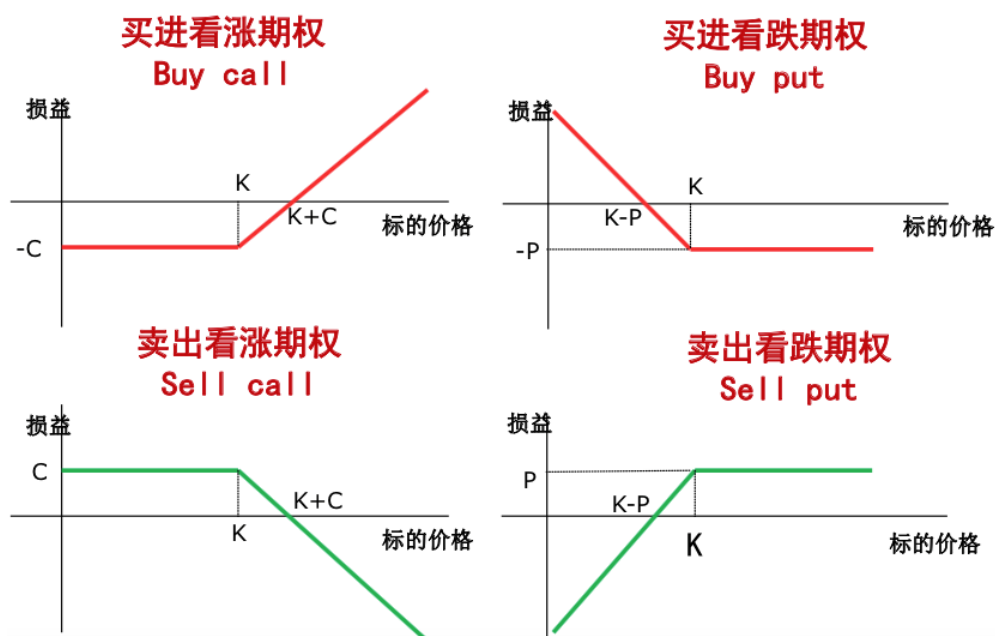


图 1: 期权到期收益

术语

- Option Type: 指看涨或看跌期权
- Option Style: 指欧式期权或美式期权
- Option Chain: 相同标的, 所有的看涨期权和所有看跌期权 (即所有期权)
- Option Class: 相同标的, 所有的看涨期权或所有看跌期权 (即所有相同 Option Type 的期权)
- Option Series: 相同标的, 相同行权价、相同到期月份的所有的看涨期权或所有看跌期权

以 Option Series 为例, 可以看到相同标的百度、相同到期月份为 3 月、相同行权价为 80 的有 3 个, 分别为如下所示, 其中除了前四位为标的, 接下去的六位为 YYMMDD, 此时可以看到, 在三月到期的有 3 月 16 日, 3 月 22 日与 3 月 28 日三个期权, 其中 16 号为 Quarterly option, 而 22 号为 Weekly option, 28 号为由于周五为 Easter friday, 那么就移动到最近的交易日为周四:

- BIDU130316C00080000
- BIDU130322C00080000
- BIDU130328C00080000

Baidu, Inc. (BIDU) - NasdaqGS							
89.22 +1.20 (1.33%) Mar 8, 4:00PM EST After Hours : 89.22 0.00 (0.00%) Mar 8, 7:59PM EST							
Options Get Option							
View By Expiration: Mar 13 Apr 13 May 13 Jun 13 Sep 13 Jan 14 Jan 15							
Call Options				Expire at close Friday, March 15, 2013			
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
47.50	BIDU130316C00047500	41.90	0.00	41.60	42.25	0	26
60.00	BIDU130316C00060000	31.90	0.00	29.15	29.50	3	116
70.00	BIDU130316C00070000	20.25	0.00	19.15	19.30	1	77
75.00	BIDU130316C00075000	15.20	0.00	14.15	14.30	11	277
80.00	BIDU130316C00080000	9.72	↓1.30	9.20	9.35	2	354
80.00	BIDU130322C00080000	9.40	↓2.25	9.30	9.45	9	43
80.00	BIDU130328C00080000	10.80	0.00	9.45	9.60	1	39
82.50	BIDU130316C00082500	8.60	↑0.60	6.75	6.90	13	125
82.50	BIDU130322C00082500	8.50	0.00	7.00	7.15	2	27

图 2: Option Series

2 布朗运动与维纳过程

布朗运动 (Brownian motion) 指的是微小粒子或者颗粒在流体中做无规则运动。在数学中将这种运动定义为维纳过程 (Wiener process) 是一种连续时间随机过程，为描述证券价格随机性的基本模型，而对于期权以及其他的金融衍生品则可认为是证券价格的函数，此时衍生品价格为证券价格这一随机过程的函数。即只需要假定标的资产遵循的随机过程，利用伊藤引理可得到衍生品遵循随机过程，使得我们可以利用随机分析 (Stochastic calculus) 这一工具，对期权以及其他金融衍生品的价格进行量化建模。早在 1900 年法国人路易斯 • 巴舍利耶 (Louis Bachelier) 在他的博士论文《投机理论》(Théorie de la spéculation) 中首次使用随机过程 (现称布朗运动) 分析股票和期权的价格。比爱因斯坦于 1905 年提出的描述花粉粒子在水中运动的论文提早了 5 年。

标准布朗运动 (Standard Brownian motion) 简易表达式 (连续形式) 有，其中 $\varepsilon \sim N(0, 1)$ ：

$$dW_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

离散形式有：

$$W_T - W_t = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

2.1 特征

布朗运动或维纳过程，为定义在非负时域 t 上连续随机过程。虽然连续但其处处不可微分，其特征有：

- 初值为零
- 独立增量：对于任意两个不同时间点 Δt_i 与 Δt_j ，其增量 ΔW_i 与 ΔW_j 相互独立
- 平稳性：增量 ΔW 服从均值为零、方差等于时间长度的正态分布，即 $\Delta W_i \sim N(0, \Delta t_i)$

并且由如上性质可知，布朗运动是一个马尔科夫过程（Markov process），即该过程在任意 t 时刻之后的位置，仅和 t 时刻的位置有关，与之前的历史轨迹无关。即该过程的当前值就包含了对其未来做预测所需的全部信息。并且由于其虽然连续，但处处不可微分的性质，使得几个点微积分无法使用，只能使用伊藤微积分（Itô calculus）进行运算。

2.2 部分证明

增量均值为零，方差为时间长度，当 X 与 Y 独立时，则有：

$$\text{Var}(XY) = \text{Var}(X) \text{Var}(Y) + [\mathbb{E}(X)]^2 \text{Var}(Y) + [E(Y)]^2 \text{Var}(X)$$

此时，由于 ε_t 与 dt 独立，套用上式，同时由于 $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ ，则有：

$$\mathbb{E}(dW_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t \sqrt{dt}) = 0$$

应为方差有：

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(dW_t) &= \text{Var}(\varepsilon_t \sqrt{dt}) \\
 &= \text{Var}(\varepsilon_t) \text{Var}(\sqrt{dt}) + [\mathbb{E}(\varepsilon_t)]^2 \text{Var}(\sqrt{dt}) + [E(\sqrt{dt})]^2 \text{Var}(\varepsilon_t) \\
 &= \text{Var}(\varepsilon_t) \left[\text{Var}[(\sqrt{dt})^2] - [\mathbb{E}(\sqrt{dt})]^2 \right] \\
 &= \text{Var}(\varepsilon_t) \left[\mathbb{E}[(\sqrt{dt})^2] - [\mathbb{E}(\sqrt{dt})]^2 + [\mathbb{E}(\sqrt{dt})]^2 \right] \\
 &= 1 \cdot \mathbb{E}(dt) = dt
 \end{aligned}$$

方差可加性，由于独立增量，因此协方差为零，即 $\sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ ，使得方差可加。

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) \\
 &\quad + \cancel{\text{Cov}(X_1, X_2)} + \cancel{\text{Cov}(X_2, X_3)} + \cancel{\text{Cov}(X_1, X_3)}
 \end{aligned}$$

由上可知，增量在连续形式 dW_t 以及离散形式 $W_T - W_t$ 下，均服从均值为零，方差为时间长度的正态分布，即有：

$$\begin{aligned}
 dW_t &\sim N(0, dt) \\
 W_T - W_t &\sim N(0, T - t)
 \end{aligned}$$

2.3 二次变差

考虑区间 $[0, T]$ ，定义 $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T\}$ 和最大步幅 $\|\Pi\| = \max_i (t_{i+1} - t_i)$ 。为方便后续推导，假设步幅相同，即 $t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n}$ 。 $s_i \in (t_i, t_{i+1})$ ，则有对于任意一个连续函数 $f(t)$ ，其二次变差（Quadratic variation）定义为：

$$\sum_{i=0}^{N-1} [f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2$$

对于一个连续且在 $[0, T]$ 中处处可微的函数 $f(t)$ ， $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ ，利用微分中值定理，可以看到随着时间的越来越细的划分， $\|\Pi\|$ 趋近于零。则可得到处处可微的连续函数，在区间 $[0, T]$ 的二

次变分为 0。

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N-1} [f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i^*)^2 (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= \|\Pi\| \sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i^*)^2 (t_{i+1} - t_i)\end{aligned}$$

于是有：

$$\begin{aligned}[f, f](T) &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \left[\sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i^*)^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \cdot \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} f'(t_i^*)^2 (t_{i+1} - t_i) \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \cdot \int_0^T f'(t_i^*)^2 dt = 0\end{aligned}$$

证明需要假设 $\int_0^T f'(t_i^*)^2 dt$ 为有限，如果为无限则会出现 $0 \cdot \infty$ 的情形。

定理 2.1. 设 $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T\}$ 为 $[0, T]$ 的分划。布朗运动对应的样本二次变差有：

$$Q_\Pi = \sum_{i=0}^{N-1} [W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 = T \quad \text{almost surely.}$$

证明. 样本二次变差为独立随机变量所组成，因此其均值为这些随机变量的均值，方差为这些随机变量方差之和。并且有 $\text{Var } X = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}^2X$ ：

$$\mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] = \text{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \mathbb{E}^2[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i$$

由此可以得到：

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \mathbb{E}(Q_\Pi) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] = \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) = T$$

对于方差，应有：

$$\text{Var}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] = \mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4] - \mathbb{E}^2[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2]$$

对于四次方项 $\mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4]$ ，可通过对正态分布矩母函数 $M_X(t)$ 对 t 不断求导得到其期望，需求四阶导数 $M_X^{(4)}(t)$ ：

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{xt}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\ M'_X(t) &= (\mu + \sigma^2 t)e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\ M''_X(t) &= (\mu^2 + 2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2 + \sigma^2)e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\ M_X^{(3)}(t) &= (\mu^3 + 3\mu^2\sigma^2 t + 3\mu\sigma^4 t^2 + 3\mu\sigma^2 + \sigma^6 t^3 + 3\sigma^4 t)e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\ M_X^{(4)}(t) &= (\mu^4 + 4\mu^3\sigma^2 t + 6\mu^2\sigma^4 t^2 + 6\mu^2\sigma^2 + 4\mu\sigma^6 t^3 \\ &\quad + 12\mu\sigma^4 t + \sigma^8 t^4 + 6\sigma^6 t^2 + 3\sigma^4)e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned}$$

因为 $W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim N(0, t_{i+1} - t_i)$ ，其均值 $\mu = 0$ 计算四阶中心矩 $M_X^{(4)}(0) = 3\sigma^2$ ，令 $t = 0$ ：

$$\mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4] = 3(t_{i+1} - t_i)^2$$

因此可继续计算单个时间间隔的方差：

$$\begin{aligned} \text{Var}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] &= \mathbb{E}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4] - \mathbb{E}^2[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] \\ &= 3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= 2(t_{i+1} - t_i)^2 \end{aligned}$$

因此在 $[0, T]$ 的方差为:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Q_\Pi) &= \sum_{i=0}^{N-1} \text{Var}[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2] \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{N-1} 2\|\Pi\| (t_{i+1} - t_i) \\
 &= 2\|\Pi\| \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \\
 &= 2\|\Pi\| T
 \end{aligned}$$

由此可知当最大步幅 $\|\Pi\|$ 趋近于零时, 方差也将趋近于零:

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \text{Var}(Q_\Pi) = 0$$

利用切比雪夫不等式 (Chebyshev's inequality):

$$\begin{aligned}
 P\left(|Q_\Pi - \mathbb{E}(Q_\Pi)| \geq \frac{1}{n}\right) &\leq n^2 \text{Var}(Q_\Pi) \\
 \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} P\left(|Q_\Pi - T| \geq \frac{1}{n}\right) &\leq n^2 \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \text{Var}(Q_\Pi) \\
 \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} P\left(|Q_\Pi - T| \geq \frac{1}{n}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

因此在概率上几乎必然成立, 即虽然有可能存在某些布朗运动使得其二次变差为 T 不成立, 但这样的情形概率为 0:

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} Q_\Pi = \mathbb{E}Q_\Pi = T$$

□

可以看到而对于布朗运动 $B(t)$, 虽然连续但处处不可微分, 使得其无法像其他连续可微分函数一样计算二次变差。其非零的二次变分说明随机性使得它的波动太频繁, 以至于不管我们如何细分区间、得到多么微小的划分区间 T , 累加这些微小区间上的变化总和, 二次变分都不会消失 (即二次变分不为 0), 而是等于这个区间的长度 T 。布朗运动的二次变差可简写为无穷小量, 为

$(dB)^2 = dt$ 。其中无穷小量在英文中应为 differential 或 infinitesimal difference, 其中 infinitesimal 即 infinitely small。

2.4 几种随机过程

广义维纳过程 (generalized Wiener process), a 与 b 为常数。此时, 易知其均值为 $\mathbb{E}(dX_t) =adt$, 由于 b 为常数, 且 $\text{Var}(dW_t) = dt$, 则有方差为 $\text{Var}(dX_t) = b^2dt$ 。

$$dX_t = adt + bdW_t$$

普通布朗运动, $a(t)$ 与 $b(t)$ 都是 t 的确定性函数。由于都为确定函数, 所以如上可知, 其均值方差为 $\mathbb{E}(dX_t) = a(t)dt$, 由于 b 为常数, 且 $\text{Var}(dW_t) = dt$, 则有方差为 $\text{Var}(dX_t) = b(t)^2dt$ 。

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$$

伊藤扩散过程 (Itô diffusion), 此时 $a(X(t), t)$ 与 $b(X(t), t)$ 都为 X_t 和 t 的确定性函数。由于漂移项与方差项都包含 $X(t)$, 使得扩散之后过程的条件分布无法保证仍是正态分布。但更能刻画一般动态变化, 未加入新的风险源, 仍具有独立增量, 马尔可夫性, 和方差可加性等性质。

$$dX_t = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW_t$$

以上都为**随机微分方程** (Stochastic differential equation, SDE), 与普通微分方程的延伸, 特指的是包含随机过程的微分方程。**注意:** 虽然 $B(t)$ 处处不可微, 单 $dB(t)$ 指布朗运动在一个无限小的时间间隔内的变化。

3 伊藤引理

3.1 古典微积分为何失效

有了随机过程 X_t 或维纳过程 W_t , 由于衍生品价格是标的资产价格 S_t 与时间 t 的函数。我们就需要进一步研究随机过程的函数, 研究 f 在无穷小的时间间隔内的变化, 即 $df(\cdot)$ 。由上在分

析二次变差可以发现，由于布朗运动处处不可微的性质，使得古典微积分无法适用于随机过程。日本数学家伊藤清（Itô Kiyoshi）提出伊藤微积分解决了这一问题。

对于古典的微积分中的链式法则，由于布朗运动处处不可微分，即 dW_t/dt 不存在，使得等式无意义。

$$\frac{df(W_t)}{dt} = f'(W_t) \frac{dW_t}{dt}$$

对于函数 $f(x)$ 使用泰勒展开，应有：

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)(\Delta x) + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(\Delta x)^3 + \dots$$

对于普通变量 X ，可以发现当 Δx 趋近于 0 时，除了第一项，其他项都为高阶小量，因此均可被忽略，因此其无穷小量形式应为 $df = f'(x)dx$ 。而对于随机变量 W_t ，进行泰勒展开：

$$df = f(W_t + \Delta W_t) - f(W_t) = f'(W_t)(\Delta W_t) + \frac{1}{2}f''(W_t)(\Delta W_t)^2 + \frac{1}{6}f'''(W_t)(\Delta W_t)^3 + \dots$$

与普通随机变量相同的是第一项需要保留，但第二项对于普通随机变量来说已经是高阶小量了，但对于随机过程变量 W_t ，已知其二次变差为 $(dW_t)^2 = dt$ ，与第一项为同阶，不能忽略。而从第三项开始之后的所有项才可以被忽略，因此得到伊藤引理的最基本形式：

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt$$

3.2 伊藤引理与证明

引理 3.1. 伊藤引理 (Itô lemma)，假设变量 X_t 遵循如下随机过程：

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

在导数 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial X}$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ 存在的前提下，则有变量 X_t 和 t 的函数 $f(X(t), t)$ 将遵循如下过程：

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial X} dW_t$$

证明. $f(X, t)$ 的泰勒展开式为:

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Delta X^2 + \frac{\partial f}{\partial X \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $(\Delta t)^2$, 认为是高阶无穷小, 可忽略。而对于 $\Delta X \Delta t$ 项有:

$$\begin{aligned} \Delta X &= a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \\ \Delta X \Delta t &= a(\Delta t)^2 + b\varepsilon(\Delta t)^{3/2} \end{aligned}$$

其中的 $(\Delta t)^{3/2}$ 项, 也被认为是高阶无穷小项, 可忽略。同时由于 $(\Delta X)^2$ 项中包含 Δt 项, 因此需要保留。仅考虑前三项, 展开得到:

$$\begin{aligned} \Delta f_t &= \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Delta X^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} [a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 \varepsilon^2 \Delta t \end{aligned}$$

对于 $\varepsilon^2 \Delta t$ 项, 由于 $\varepsilon \sim N(0, 1)$, 因此有 $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ 。又因 $\text{Var}(\varepsilon) = \mathbb{E}(\varepsilon^2) - [\mathbb{E}(\varepsilon)]^2 = 1$, 得到 $\mathbb{E}(\varepsilon^2) = 1$, 同时有 $\mathbb{E}(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t$ 。计算 $\varepsilon^2 \Delta t$ 的方差可得:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon^2 \Delta t) &= \text{Var}(\varepsilon^2) \text{Var}(\Delta t) + [\mathbb{E}(\varepsilon^2)]^2 \text{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2 \text{Var}(\varepsilon^2) \\ &= \text{Var}(\varepsilon^2) \text{Var}(\Delta t) + 1 \cdot \text{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2 \text{Var}(\varepsilon_t^2) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

可以认为 $\varepsilon^2 \Delta t$ 方差为高阶无穷小, 其期望为 1。因此, 可认为 $\varepsilon^2 \Delta t \approx \Delta t$, 可将原式化简为:

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 \Delta t$$

而连续形式为：

$$\begin{aligned}
 df_t &= \frac{\partial f}{\partial X} dX_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 dt \\
 &= \frac{\partial f}{\partial X} (a_t dt + b_t dW_t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b^2 dt \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial X} a_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X} b_t dW_t
 \end{aligned}$$

□

由此可知， f 作为随机过程 X 与时间 t 的函数，其本身也是一个随机过程。而 df_t 与 dX_t 的随机性来源于同一布朗运动 dW_t ，而非两个独立的布朗运动。为方便记忆，可记为（金融随机分析第二卷 P118）：

$$df(X(t), t) = f_t(X(t), t)dt + f_x(X(t), t)dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X(t), t)dX(t)dX(t)$$

或可写为更简洁的形式：

$$df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2}f_{xx}dXdX$$

4 几何布朗运动

由上可知随机过程 $X(t)$ 随着时间 t 的变化，可能为负数，但股票价格显然不可能为负。收益率却有正有负，因此可以使用 $X(t)$ 来描绘收益率。假设 S_t 为股票价格，可以假设其百分比收益率遵循如下随机过程：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

因此 S_t 的随机微分形式如下，此时股票价格 S_t 服从几何布朗运动（Geometric Brownian Motion, GBM）：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

令 $f(S_t) = \ln S_t$, 此时:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

代入伊藤引理之中, 此时 $a_t = \mu S_t$, $b_t = \sigma S_t$, 则有:

$$\begin{aligned} df_t = d \ln S_t &= \left(\frac{1}{S_t} \mu S_t + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

连续形式下有:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right)$$

离散形式下为:

$$\begin{aligned} \Delta \ln S &= \ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (W_T - W_t) \\ \Delta \ln S &\sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right) \end{aligned}$$

可以看到连续复合收益率或对数收益率服从期望值为 $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt$, 方差为 $\sigma^2 dt$ 的正态分布, 与现实较为吻合。且 $d \ln S_t$ 的定义, 使得股票价格非负。对于日频收益率的计算, 此时得到的正态分布均值以及方差均为日频 ($T - t = \frac{1}{252}$), 需乘以 252 进行年化, 得到年化的收益率均值与波动率。在 T 时刻, 股票价格的对数 ($\ln S$), 也服从正态分布, 则有股票价格 (S) 服从对数正态分布。

$$\ln S_T \sim N \left(\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right)$$

可以看到选择几何布朗运动描绘股票价格 S_t 有如下几大优点:

- 正态分布: 经验事实证明, 股票价格的连续复合收益率, 近似地服从正态分布
- 马尔科夫过程: 由布朗运动的性质可知, 利用几何布朗运动描绘的股票价格是一个马尔科夫过程, 即当前价格就包含了对其未来做预测所需的全部信息, 这与

弱有效市场假说相符

- 布朗运动在时间上处处不可微以及二次变分不为零的性质符合股票收益率在时间上存在转折尖点的特征。

5 对数正态分布

由股票价格的对数服从正态分布可知，股票价格应服从对数正态分布（Log-normal distribution）。由正态分布与对数正态分布的性质可知，对一个服从正态分布的随机变量 X 取指数，则 e^X 服从对数正态分布。相反，对一个服从对数正态分布的随机变量 X 取对数，则 $\ln X$ 服从正态分布（因而得名，取对数得到正态分布的分布）。因此有如下关系：

$$\ln S_T \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \leftrightarrow \quad S_T \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$$

对于对数正态分布 $X \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$ ，其期望与标准差为：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \text{Var}(X) &= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)\end{aligned}$$

已知股票价格的对数 $\ln S_T$ 服从如下正态分布：

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t), \sigma^2(T - t)\right)$$

那么股票价格 S_T 服从如下对数正态分布：

$$S_T \sim \text{Log-normal}\left(\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t), \sigma^2(T - t)\right)$$

可求得股票价格得期望与方差为：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_T) &= \exp \left(\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} \right) \\
&= \exp (\ln S_t + \mu(T-t)) \\
&= S_t e^{\mu(T-t)} \\
\text{Var}(S_T) &= [\exp(\sigma^2(T-t)) - 1] \exp \left\{ 2 \left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right] + \sigma^2(T-t) \right\} \\
&= [\exp(\sigma^2(T-t)) - 1] \exp [2 \ln S_t + 2\mu(T-t)] \\
&= S_t^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]
\end{aligned}$$

注意

对于正态分布只需要 μ 与 σ 两个参数即可确定其分布，同时 μ 与 σ^2 也是正态分布的均值与方差。对于对数正态分布，也仅需要 μ 与 σ 两个参数便可确定其分布，但并非其均值与方差。对于相同的 μ 与 σ 参数确定的正态分布与对数正态分布，两者之间的期望与方差通过如下表格关系转化：

	正态分布 $N \sim (\mu, \sigma)$	对数正态分布 $\log N \sim (\mu, \sigma)$
期望	$\mathbb{E}_N(X) \equiv \mu = \ln[\mathbb{E}_L(X)] - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{\text{Var}_L(X)}{[\mathbb{E}_L(X)]^2} \right]$	$\mathbb{E}_L(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$
方差	$\text{Var}_N(X) \equiv \sigma^2 = \ln \left[1 + \frac{\text{Var}_L(X)}{[\mathbb{E}_L(X)]^2} \right]$	$\text{Var}_L(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

5.1 PDF 与 CDF

如下图所示，通过对服从正态分布的随机变量取指数，可以将其转换为对数正态分布。同理，通过对服从对数正态分布的随机变量取对数，使其转换为正态分布。假设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 服从正态分布，随机变量 $X \sim \text{Log}N(\mu, \sigma^2)$ ，对正态分布随机变量 Y 取指数 $x = e^y$ ，此时有 $y = \ln x$ ，带入 CDF 中，可得到对数正态函数 CDF。对两者求导，可得 PDF 函数。

	正态分布	对数正态分布
PDF	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}$
CDF	$\frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$	$\frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$

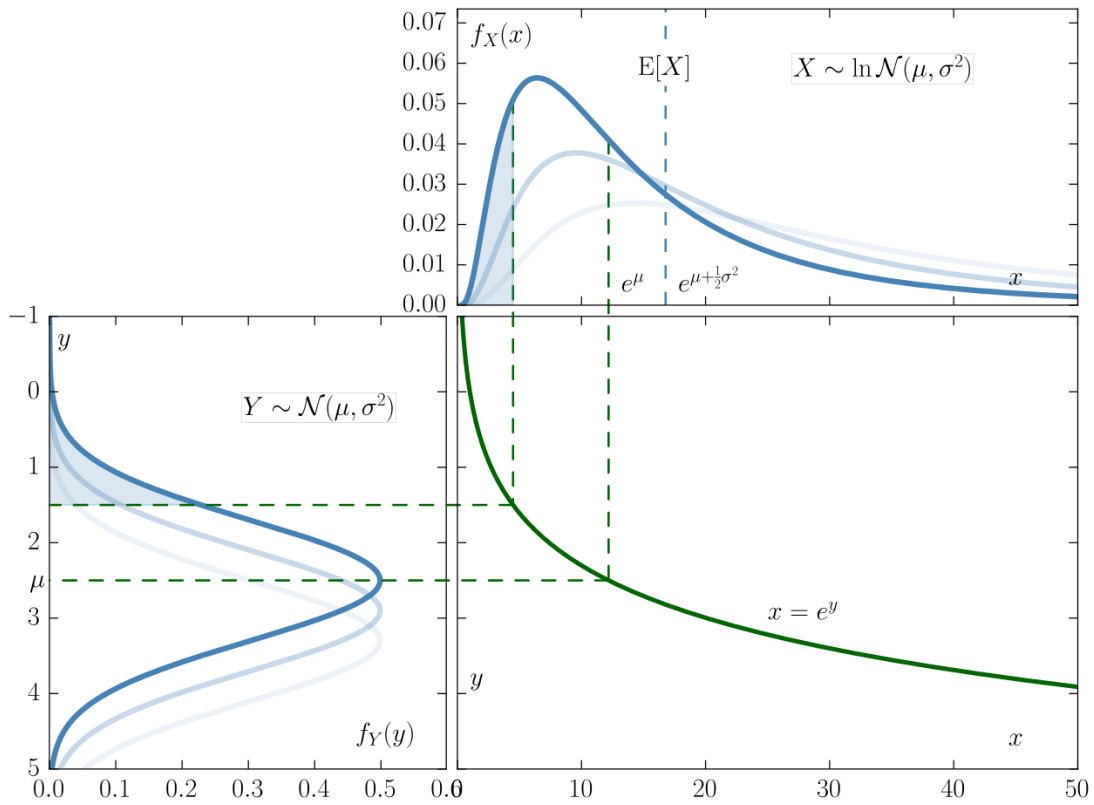


图 3: 两者相互转换

5.2 PDF 推导

如上文所述, 对于相同参数 μ 与 σ^2 的正态分布与对数正态分布可以相互转化。两者互相经过转化后, 其累积分布函数 (Cumulative distribution function, CDF) 相同。如图3所示, 假设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 服从正态分布, 随机变量 $X \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$, 则应有如下关系, 对服从对数正态分布的随机变量 X 取对数, 使其转化为正态分布:

$$\text{CDF}_{\text{logN}}(x) = \text{CDF}_N(\ln x) = \text{CDF}_N(y)$$

对公式两边取导数, 则可得到其概率密度函数 (Probability density function, PDF):

$$\text{PDF}_{\text{logN}}(x) = \frac{1}{x} \text{PDF}_N(\ln x)$$

此时，带入已知正态分布 PDF，即可得到对数正态分布 PDF：

$$\text{PDF}_{\log N} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

5.2.1 期望推导

根据对数正态分布的 PDF，可计算其期望：

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法，令 $t = \frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$ ，则有 $x = e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu}$ ，则原积分转化为：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} d e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu} \\ &= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2} dt \\ &= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d e^{-(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2} d(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2}) \end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ ，可得到：

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

5.2.2 方差推导

已知：

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

同上，已知对数正态分布 PDF：

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法，令 $t = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ ，则有 $x = e^{\sigma t + \mu}$ ：

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X^2) &= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + 2\sigma t} dt \\
 &= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-2\sigma)^2 + 2\sigma^2} dt \quad \left(\text{对 } -\frac{t^2}{2} + 2\sigma t \text{ 配方} \right) \\
 &= \frac{e^{2\mu+2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}})^2} d\left(\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= e^{2\mu+2\sigma^2}
 \end{aligned}$$

此时则有：

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\
 &= e^{2\mu+2\sigma^2} - (e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}})^2 \\
 &= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\
 &= e^{2\mu+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)
 \end{aligned}$$

6 百分比收益率与对数收益率

在金融研究中，在计算收益率的是哦户，一般使用对数收益率。其对比百分比收益率的优势在于，对于单一资产的收益率，对数收益率时序可加。如一个资产在第一年上涨 50%，而在第二年下跌 50%，其算术平均收益率为 0（即时序上不可加），但显然该资产年年的投资亏损的初始金额的 25%。同样的例子，若使用对数收益率计算，则该资产两年的对数收益率分别为 $\ln(1.5) = 40.5\%$ 与 $\ln(0.5) = -69.3\%$ ，利用对数收益率时序可加的特点，其两年算术平均为 -28.77% ，转换为百分比收益率为 $e^{-28.77\%} - 1 = -25\%$ ，为实际真实的收益率。可以看到上述对数收益率与百分比收益率的计算是等价的，但是能大大降低运算难度。

由于对数收益率时序上可加的特点（线性），即只需要对单期的收益率进行加总即可获得多期

的收益率：

$$\begin{aligned}\ln \frac{X_T}{X_0} &= \ln \left[\frac{X_1}{X_0} \times \frac{X_2}{X_1} \times \cdots \times \frac{X_T}{X_{T-1}} \right] \\ &= \ln \frac{X_1}{X_0} + \ln \frac{X_2}{X_1} + \cdots + \ln \frac{X_T}{X_{T-1}}\end{aligned}$$

并且利用该特点，可以得到“中心极限定理”与“大数定理”。若不同期之间的对数收益率相互独立，那么 T 期的收益率相加，相当于 T 个独立随机变量相加，由中心极限定理可知，其和的分布将逼近正态分布。并且由“大数定理”可知，随着 T 的增大，单期收益率的均值，将收敛于期望：

$$\frac{1}{T} \left[\ln \frac{X_1}{X_0} + \ln \frac{X_2}{X_1} + \cdots + \ln \frac{X_T}{X_{T-1}} \right] \rightarrow \mathbb{E} \left[\ln \frac{X_T}{X_0} \right] \quad as \quad T \rightarrow \infty$$

对数压缩了数据的尺度，使得数据在较小时更敏感。对比上证指数与上证指数取对数后，在取对数之前可以看到 05-07 年大牛市从 998 到 6124 取得了 600% 的收益。而在取了对数之后，可以清晰看到，90 年代末期的牛市从 95 到 1558 点，得到 1500% 的收益率。即随着指数数值越来越大，绝对数值的变化越来越大，使得难以观察其相对数值的变化。以 2 为底取对数为例， $\log_2 2 = 1$ ， $\log_2 4 = 2$ ， $\log_2 8 = 3$ ，可以看到取对数后每单位的变化，对应着相同百分比的变化。以 2 为底，即对应着 2 倍的百分比变化 $2^{x+1}/2^x$ 。因此取对数的方法，是百分比变化为纵轴，而正常画图的方法，则是以绝对数值纵轴。

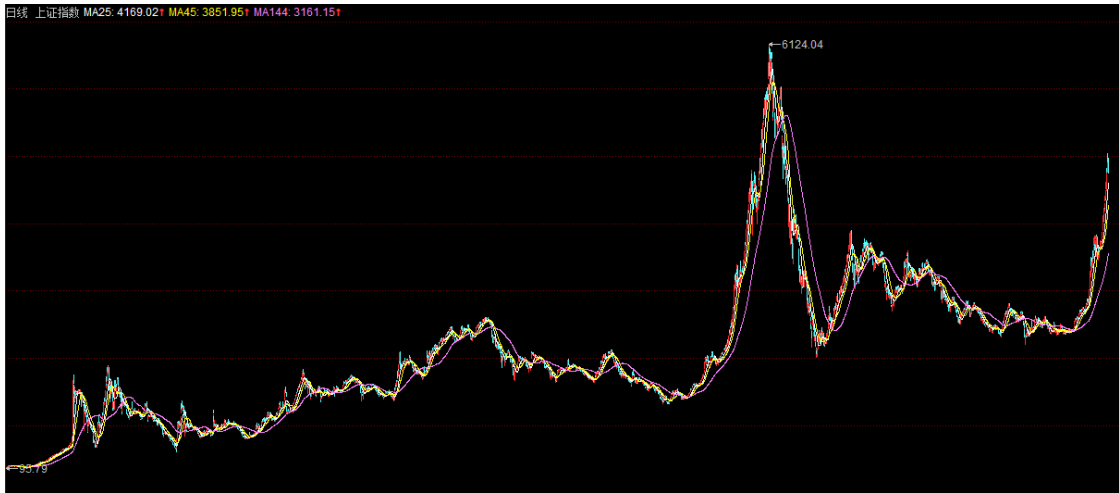


图 4: 上证指数

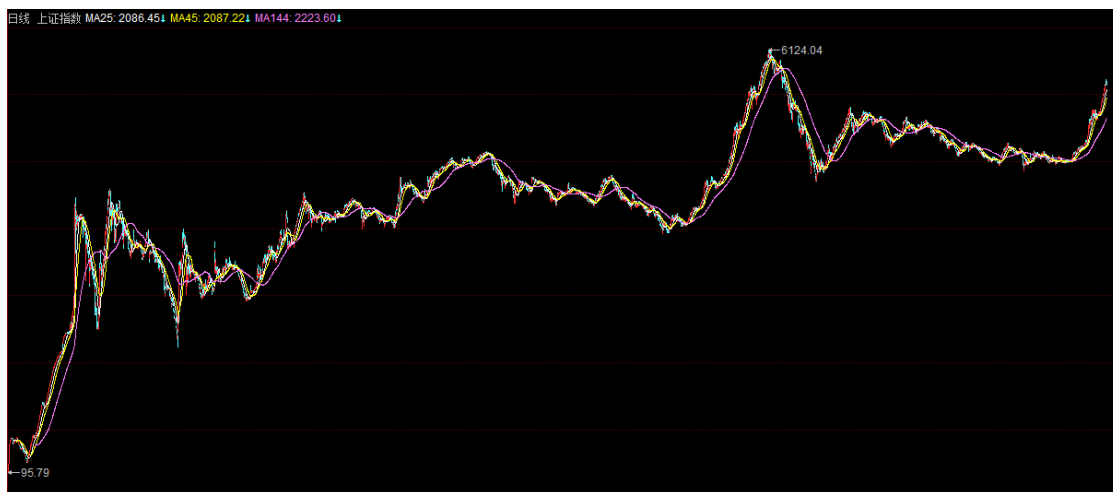


图 5: 上证指数取对数

而对于不同资产在截面上的收益率，则应使用百分比收益率，具有截面可加性。以两个资产为例，投资资金为 m_1 与 m_2 ，期末百分比收益率为 r_1 与 r_2 ，那么此时投资组合的收益率有：

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{m_1(1 + r_1) + m_2(1 + r_2)}{m_1 + m_2} - 1 \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_2 \end{aligned}$$

可以看到此时投资组合在截面上的收益率即为各个资产百分比收益率的投资金额加权平均。

注释 6.1. 在 *Excel* 中，计算算术平均函数为 *AVERAGE()*，而计算几何平均函数为 *GEOMEAN()*。

6.1 对数收益率推导

对数收益率 (Log return)，或称连续复合收益率 (Continuously compounded return)，以复合利率为例。假设名义利率 (Nominal interest rate) 为 r ，进行再投资，且一年计息 m 次，则有

实际利率（Effective interest rate, EIR）为：

$$\text{当 } m = 1 \text{ 时: } 1 + r$$

$$\text{当 } m = 2 \text{ 时: } \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

$$\text{当 } m = 3 \text{ 时: } \left(1 + \frac{r}{3}\right)^3$$

... ..

$$\text{当 } m = \infty \text{ 时: } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

已知，根据定义自然常数为如下极限值：

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

由下方推导可以看出，连续复合收益率为，一段时间内，给定名义利率 r ，当计息频率无限频繁 $m = \infty$ 时的实际利率：

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{\frac{m}{r} \times r} = e^r$$

以股票价格 S_t 为例，有对应的对数收益 R_{log} 为：

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = e^{R_{log}} \rightarrow R_{log} = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

6.2 单期收益

对于计算**单期**的收益，可分为**百分比收益**或（Arithmetic return）或称为简单收益（Simple return），与**连续复合收益**（Continuously compounded return），或称为对数收益（Logarithmic return，或 Log return）。

这里特指**收益**，用记号 R 表示，而非收益率，因为收益是指单期的，而收益率则可通过对单期收益率进行年化，或对多期收益率进行平均获得。记符号 r 为收益率（Rate of return）为将一段时间的收益（Return），转化为在标准化期限内的收益。对于标准化期限为**1 年**的收益率，称为年化收益率（Annulized return）。

	百分比收益	对数收益
单期	$R_{pct} = \frac{V_T}{V_t} - 1$	$R_{log} = \ln \frac{V_T}{V_t}$

由上表可知，百分比收益与对数收益有如下转换关系：

$$R_{pct} = e^{R_{log}} - 1 \quad \leftrightarrow \quad R_{log} = \ln(1 + R_{pct})$$

具体而言：

$$R_{log} = \ln(1 + R_{pct}) = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \ln S_t - \ln S_{t-1}$$

对于投资组合 p 而言，假设其在资产 i 上的权重为 w_i ， $R_{pct,i}$ 为资产 i 的百分比收益，那么该投资组合其百分比收益率有：

$$R_{pct,p} = \sum_i w_i R_{pct,i}$$

但对于该投资组合的对数收益却没有如上性质，只有当百分比收益的绝对值很小时，能近似的有：

$$R_{log,p} \approx \sum_i w_i R_{log,i}$$

6.3 多期平均收益率

在这里不称为收益，而称为**收益率**是因为在平均的过程中已经转化为标准化期限，即为原数据的频率，如日频的多期平均收益率，其标准化期限就为 1 天。但只有在标准化期限为年为单位是年时，才能称为是年化的收益率。

计算多期的平均收益率时，有**算术平均收益率**（Arithmetic mean rate of return），和**几何平均收益率**（Geometric mean rate of return）两种方式。假设共有 n 期，那么 n 期算术平均收益率有：

$$\bar{r}_{\text{算术}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \frac{1}{n} (r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$$

n 期几何平均收益率有：

$$\bar{r}_{\text{几何}} = \left(\prod_{i=1}^n (1 + r_i) \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

6.4 年化收益率

年化即将其标准期限调整为 1 年，则称为年化收益率。单期收益可直接进行年化，而多期收益，一般将其合并为单期收益，再根据持有资产期限长度，以年为单位进行年化（平均），最终得到年化收益率。

年化百分比收益率

对于没有再投资（Reinvestment）的**单期**百分比收益进行年化，得到年化百分比收益率为（ τ 单位为年）：

$$r_{pct} = \frac{R_{pct}}{\tau}$$

即如半年收益为 10%，则 1 年的年化为 20%。而对进行了再投资的，复合（Compound）百分比收益率为：

$$1 + R_{pct} = (1 + r_{pct})^{\tau} \rightarrow r_{pct} = (1 + R_{pct})^{\frac{1}{\tau}} - 1$$

此时假设 R_{pct} 为 2 年单期收益，则 $\tau = 2$ ，最终结果 r_{pct} 为将两年收益使用几何平均为年化百分比收益率。对于**多期**平均（几何平均）年化百分比收益率，假设 R 时间跨度为 1 年 k 期（若月收益，则有 $k = 12$ ），持有该资产的期限为 n 年，应有：

$$r_{pct} = \left[\prod_{i=1}^{n \times k} (1 + R_{pct,i}) \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

即先计算持有资产期限内所有收益的乘积，即为总收益，再按上述单期方法进行年化。对于单期或多期的百分比收益，都使用上式**几何平均**进行计算，得到其平均年化收益率，计算算术平均没有经济学意义。

对数收益率

将**单期**对数收益，可以直接进行年化，可得年化对数收益率：

$$e^{r_{log}\tau} = e^{R_{log}} \rightarrow r_{log} = \frac{R_{log}}{\tau}$$

假设一支股票在一个交易日内对数收益率 $R_{log} = 0.14\%$ ，平均一年有 252 个交易日（每个月 21 个交易日），则应有年化收益率为 $r_{log} = \frac{R_{log}}{1/252} = 252R_{log} = 35.28\%$ 。即 $V_t e^{r\tau} = V_T$ ，那么有 $r = \frac{1}{\tau} \ln \frac{V_T}{V_t}$ 。对于期数为 n 的**多期**对数收益率，根据其性质，只需要将每期收益相加，即可得到总收益：

$$\begin{aligned} R_{log} &= \sum_{i=1}^n R_{log,i} = R_{log,1} + R_{log,2} + \cdots + R_{log,n} \\ &= \ln \frac{V_2}{V_1} + \ln \frac{V_1}{V_0} + \cdots + \ln \frac{V_n}{V_{n-1}} \\ &= \cancel{\ln V_1} - \ln V_0 + \cdots + \ln V_n - \cancel{\ln V_{n-1}} \\ &= \ln \frac{V_n}{V_0} \end{aligned}$$

对于**多期**（多年）的对数收益，由于对数收益率可相加的性质，只需要计算其**算术平均**，即可得到标准期限与每期期限相同的收益率，而当标准化期限为 1 年时得到年化对数收益率。对于平均对数收益率有：

$$r_{log} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{log,i}$$

对于年化对数收益率有：

$$\begin{aligned} e^{r_{log}\tau} &= e^{R_{log,1}} e^{R_{log,2}} e^{R_{log,3}} \cdots e^{R_{log,n}} \\ r_{log}\tau &= \sum_{i=1}^n R_{log,i} \\ r_{log} &= \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n R_{log,i} \end{aligned}$$

若使用相同频率的百分比收益进行改写，可以得到年化百分比收益率的算术平均计算方式：

$$\ln(1 + r_{pct}) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \ln(1 + R_{pct,i})$$

$$r_{pct} = \exp \left[\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \ln(1 + R_{pct,i}) \right] - 1$$

6.5 期望

如上式所述， μ 为 Δt 时间内百分比年化收益率的期望或预期收益率为 μ ：

$$\mathbb{E}\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right) = \mu \Delta t$$

而年化连续复合收益率或年化对数收益率的期望则为 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ ：

$$\mathbb{E}(d \ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt$$

比例收益率在实际应用过程中意义较小，假设 4 年盈亏为 +50%，-50%，+50%，-50%，其比例收益率期望值 μ 为 0，但实际上相比期初有 -43.75% 的亏损。使用几何平均计算，年化亏损 $\sqrt[4]{1.5 * 0.5 * 1.5 * 0.5} - 1 = -13.40\%$ 。可以发现，在盈亏的计算上，应使用几何平均的方式计算，使用算术平均比例收益率没有意义。

若使用对数收益率（模型），其期望为 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ ，即算术平均 μ 需要减去 $\frac{\sigma^2}{2}$ 。因此如果收益率越稳定，两者将越为接近。在此例子中百分比收益率均值为 0，样本方差为 $\frac{1}{3}$ ，此时对数收益率的期望为 $-\frac{1}{6} \approx -16.67\%$ 。即波动越大，降低实际收益率，更符合现实情况，贴近几何平均收益率，具有经济学意义。计算实际对数收益率的算术平均为 $2(\ln 1.5 + \ln 0.5)/4 = -14.38\%$ 。

6.6 性质

由上文可知，对数收益率或连续复合收益率的连续以及离散形式如下：

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dZ_t \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right)$$

$$\Delta \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (Z_T - Z_t) \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right)$$

已知正态分布有如下性质： X_1 与 X_2 为两个独立的正态分布的随机变量（均值为 μ_1 与 μ_2 ，标准差为 σ_1 与 σ_2 ），则有随机变量 $Y = X_1 + X_2$ 服从均值为 $\mu_1 + \mu_2$ ，方差为 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 的正态分布。**注意：**为随机变量相加（Sum of normally distributed random variables），而非正态分布相叠加（Sum of normal distribution）。如图 6 所示，正态分布相叠加将产生混合分布（Mixture distribution）。

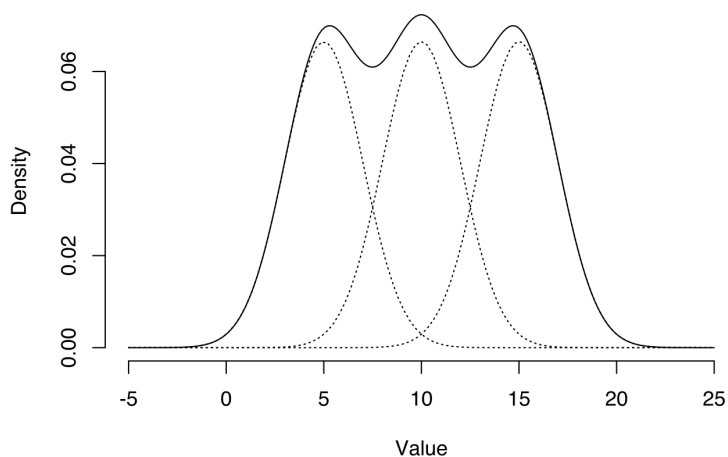


图 6: 混合分布

由于对数收益率的可叠加性（较长时间内的对数收益率可分解为较短时间间隔对数收益率相叠加），并且利用上述正态分布性质，可知正态分布随机变量 $d \ln S$ （极短时间内）与叠加之后的 $\Delta \ln S$ （较长时间内）都应服从正态分布。

对比比例收益率在极短时间内（连续形式）与较长时间内（离散形式）：

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dZ_t \\ \frac{\Delta S_t}{S_t} &= \mu \Delta t + \sigma(Z_T - Z_t)\end{aligned}$$

单期百分比收益率虽然在极短时间（连续形式）服从正态分布。对于期数为 n 的多期的百分比收益，应有：

$$1 + R_{0,n} = (1 + R_{0,1})(1 + R_{1,2}) \dots (1 + R_{n-1,n})$$

这里可以看到，若假定资产的收益率分布为正态分布，有如下**缺点**：首先，多期的百分比收益率为单期收益的乘积，因此将不再服从正态分布。且由于分母 S_t 不断改变，并不能通过叠加的形式得到较长时间的分布（对数收益率的优点），即：

$$\frac{S_n - S_0}{S_0} \neq \frac{S_1 - S_0}{S_0} + \frac{S_2 - S_1}{S_1} + \dots + \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$$

第二，百分比收益率的取值范围为 $[-100\%, +\infty)$ ，而正态分布可以取任何值，并不存在下边界。第三，实证结果发现许多资产收益率数据都具有正的超额峰度，即相比使用样本均值与方差确定的正态分布相比，具有尖峰肥尾的性质。

7 BSM 偏微分方程 (PDE 方法)

7.1 假设

- 人性假设
 - 不存在无风险套利机会（无套利）
- 完美世界
 - 允许卖空标的证券
 - 没有交易费用和税收
 - 证券交易时连续的，价格变动也是连续的
 - 所有证券都完全可分
- 可交易资产

- 证券价格遵循几何布朗运动，即 μ 和 σ 为常数
- 衍生品有效期内，无风险利率 r 为常数
- 衍生证券有效期内，标的证券没有现金收益支付

7.2 推导

假设股票价格 S_t 遵循几何布朗运动，以及其离散形式有：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t$$

假设衍生品价格 $f(S_t, t)$ 为 S_t 以及 t 的函数，根据伊藤引理可得其连续和离散形式有：

$$df(S_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t dZ_t$$

$$\Delta f(S_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t$$

由此可见，股票价格与衍生品价格的风险源均来自 ΔZ_t ，因此可以构建投资组合，由一单位衍生品空头，以及 $\partial f / \partial S$ 单位证券多头构成，进行对冲消除该风险源：

$$\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t$$

在 Δt 时间内，该投资组合价值的变化 $\Delta \Pi_t$ 来源其标的资产以及衍生品的价格变动，代入 ΔS_t 与 Δf_t 可得：

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_t &= -\Delta f_t + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S_t \\ &= - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t \right] + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t) \\ &= - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t \end{aligned}$$

由于此时组合消除了风险，因此组合只应获得无风险收益率：

$$\begin{aligned}\Delta \Pi_t &= r \Pi_t \Delta t \\ - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t &= r \left(-f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t \right) \Delta t\end{aligned}$$

整理等式，消去 Δt ，即可得到 **BSM 偏微分方程** (Black-Scholes equation)。由于使用了 Delta 对冲的方法消除了其中的随机性，最终结果中并不包含任何随机过程，为普通的偏微分方程，为非随机微分方程。求解 PDE 需要给定的边界条件，如对于欧式看涨期权，其边界条件有当时间 $t = T$ 到达其期限，期权价格 $C = \max(S(T) - K, 0)$ 。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f_t$$

8 BSM 公式（鞅方法）

8.1 风险中性世界

风险中性定价理论就来源于 BSM 微分方程中的一个关键性质，在推导的过程中所有变量，如：股票价格、时间、波动率、无风险利率，均都不涉及投资者的风险偏好。在推导 BSM 微分方程中，使用 Delta 对冲方法消除了随机源之后。在不存在无风险套利的市场中，投资组合的收益率必须等于无风险收益率，否则就存在套利机会（注意：这一性质来源于无套利，而非假设）。因此最终结果中并不包含预期收益率 μ ，因为投资者对于风险的厌恶程度越高，其所要求的 μ 也就越高。因此我们可以利用这个特点，即风险偏好在方程中不出现，即其可以随意取值，均不会影响方程的解。因此在计算期权价格中，可以使用任意风险偏好，而最简单的就是假设所有投资者都是风险中性的。所有投资的回报率期望均为无风险利率 r ，对风险中性的投资者而言，他们对风险的态度是中性的，因此不需要额外的风险溢价。在一个风险中性世界里，任何现金流的现值都可以通过对其期望值以无风险利率贴现来得到。因此利用风险中性定价原理对衍生品定价的过程如下：

- 假定标的资产的收益率期望为无风险利率（即假定 $\mu = r$ ）
- 计算衍生产品到期时收益的期望
- 用无风险利率 r 对衍生品收益期望进行贴现。

风险中性定价是获得期权定价公式的一个人为工具或数学方法，其求得的解不但在风险中性

世界中成立，在现实世界中也成立。当我们从风险中性世界换到风险厌恶世界时，两件事会发生：股票价格变动的增长率期望以及对衍生产品收益所必需使用的贴现率都将会变化，而这两种变化刚好相互抵消。

8.2 BSM 期权定价公式

在风险中性世界中，看涨期权价值的期望为：

$$\tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)]$$

欧式看涨期权的现值应为其在 T 时刻期望值以无风险利率进行贴现：

$$c = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)]$$

同时在风险中性世界下，漂移率 μ 应等于无风险收益率 r ，因此有：

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t), \sigma^2 (T-t) \right)$$

已知：

$$S_T = S_t \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (W_T - W_t) \right]$$

已知 $Y = \frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}} \sim N(0, 1)$ 服从标准正态分布，其概率密度函数为：

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

在风险中性下的期望，可以改写为如下积分的形式：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)] &= \tilde{\mathbb{E}}_t \left[S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y} - K \right]^+ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} - K \right)^+ \varphi(y) dy \end{aligned}$$

当 $S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y} - K \geq 0$ 时, 有 $y \geq \frac{\ln(K/S_t) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, 设其为 $-d_2$, 同时假设 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ 。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_t [\max(S_T - K, 0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} - K \right)^+ \varphi(y) dy \\
&= S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y} \varphi(y) dy - K \int_{-d_2}^{\infty} \varphi(y) dy \\
&= S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - KN(d_2) \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{\sigma^2(T-t)}{2} + \sigma\sqrt{T-t}y - \frac{y^2}{2}\right)} dy - KN(d_2) \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{y=-d_2}^{y=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} dy - KN(d_2) \\
&\quad (\text{换元法: } u = y - \sigma\sqrt{T-t}) \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{u=-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - KN(d_2) \quad (dy = du) \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - KN(d_2) \\
&= S_t e^{r(T-t)} N(d_1) - KN(d_2)
\end{aligned}$$

得到 **BSM 公式** (Black-Scholes formula), 即欧式看涨期权的定价公式, 其中 $N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数 (CDF)。

$$c = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

此时 d_1 和 d_2 分别为:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

并且已知期权平价公式:

$$c + K e^{r(T-t)} = p + S_t$$

将 BSM 看涨期权定价公式代入：

$$\begin{aligned}
 p &= c + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\
 &= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\
 &= S_t (N(d_1) - 1) - Ke^{-r(T-t)} (N(d_2) - 1) \\
 &= S_t (-N(-d_1)) - Ke^{-r(T-t)} (-N(-d_2)) \\
 &= Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)
 \end{aligned}$$

可得欧式看跌期权定价公式，有：

$$p = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

8.3 关于 $N(d_1)$ 与 $N(d_2)$

期权的价值取决于行权后的收益，对于未能行权的期权，其收益为零，价值也为零。对于行权的期权，其收益决定于两个重要的不确定性因素：

- 行权概率：期权到期是否能够行权，或是否为实值期权
- 行权收益：如果能够行权，那么收益的期望到底能有多少

那么 $N(d_2)$ 与 $N(d_1)$ 对应了上述两个不确定性的概率，以欧式看涨期权为例， $N(d_2)$ 为在风险中性世界中，股票被行权的概率，即为 $P(S_T > K)$ 。因此 BSM 欧式看涨期权第二项， $Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$ 为在当前时刻（折现后），考虑了行权概率后，所需支付的执行价格，为成本。

如果将第二项理解为成本，那么第一项代表着考虑行权概率后，在当前时间点的股票收益期望。要能有收益，先决条件是能行权，即首先应有 $S_T > K$ 。因此股票在行权时的价值应为一个条件期望 $\mathbb{E}[S_T | S_T > K]$ ，是基于在行权价之上。此条件期望在乘以行权概率 $N(d_2)$ ，并折现到当前时点，应为第一项。应有：

$$e^{r(T-t)} \mathbb{E}[S_T | S_T > K] N(d_2) = S_t N(d_1)$$

将上式中的 S_t 代换为 $e^{r(T-t)}E[S_T]$:

$$e^{r(T-t)}E[S_T|S_T > K]N(d_2) = S_t e^{r(T-t)}E[S_T]N(d_1)$$

得到:

$$N(d_1) = \frac{E[S_T|S_T > K]}{E[S_T]}N(d_2)$$

由于最终的股票的收益并不独立于股票价格，这与行权价独立于股票价格不同，因此 $N(d_1)$ 是基于股票价格加权后的行权概率。 $N(d_1)$ 在数学上还有另外的解释，它是“以股票波动率 $N(d_1)$ 为市场风险定价，并在以股票为计价单位时，期权被行权的概率”。

8.4 使用 BSM 公式注意事项

在实际使用过程，与进行计算的过程中有如下注意点

- 在计算时，期限、漂移率（无风险利率）、波动率的时间单位应匹配（一般以年为单位，使用交易日计算）
- 由于只有交易日才有历史数据与收益率数据，波动率使用交易天数进行年化，中国 240 天左右（240 天，每月 20 天），美国 252 天，每月 21 天
- 无风险利率选择即期利率（Spot rate）而非到期收益率（YTM，真实收益率，票息 5%，但非平价发行）
- 波动率为一个时间窗口内（为年），日频连续复合收益率或对数收益率（ $\ln \frac{S_{t+1}}{S_t}$ ）标准差进行年化得到。
- 已实现日频波动率（交易日才有波动率）乘以 $\sqrt{252}$ （一天的方差为 s^2 ，由于方差可加，252 个交易日的方差即为 $s^2 \times 252$ ，标准差或波动率为 $s\sqrt{252}$ ）。同理，月频收益率得到的波动率应乘以 $\sqrt{252/21}$ 进行年化。
- 如果到期时间（time to maturity）是根据日历日（calendar day）计算，那么此时的隐含波动率则为每日日历日（per calendar day），如 VIX 计算是根据 365 日历日年化
- BS 隐含波动率的如上所述，即为年化波动率

8.5 期权价格合理边界

对于期权价格，有上下边界如下，注意不是 BSM 偏微分方程中的边界条件：

- 由于期权只有权利没有义务，因此无论欧式期权或美式期权，其价格应为正，即 $C > 0$ 与 $P > 0$
- 看涨期权的上边界应为其标的资产价格，即 $C_t \leq S_t$ ，由于看涨期权给予购买标的资产的权利，因此其价值不应超过标的资产价格
- 看跌期权的上边界为行权价折现，即 $P_t \leq e^{-r(T-t)}K$ ，与看涨期权最大值同理，看跌期权给予以行权价 K 卖出标的资产的权利，且股票价格最低为 0，因此其价值不应超过行权价的现值
- 对于期权的下边界，则应有应大于其内在价值。对于有红利资产，则应扣除其红利，再计算其内在价值
- 对于完美市场，应有看涨期权下边界为 $C_t \geq \max[S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0]$
- 同理，在完美市场中，看跌期权下边界为 $P_t \geq \max[Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0]$
- 假设标的资产的红利率 (Dividend yield) 为 q ，那么应将股票价格 S 替换为 $Se^{-q(T-t)}$

因此对于看涨期权，其边界应有：

$$\max[S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0] \leq C_t \leq S_t \quad \text{或} \quad \max[(F_t - K)B_t, 0] \leq C_t \leq F_t B_t$$

同理对于看跌期权，其边界应用：

$$\max[Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0] \leq P_t \leq Ke^{-r(T-t)} \quad \text{或} \quad \max[(K - F_t)B_t, 0] \leq P_t \leq KB_t$$

8.6 Black 公式与分红

对于 Black 公式：

$$C = e^{-r\tau} [FN(d_1) - KN(d_2)]$$

$$P = e^{-r\tau} [KN(-d_2) - FN(-d_1)]$$

其中有：

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

假设分红的现值为 PVD 为未来一系列分红的贴现，即 $PVD = \sum_{i=1}^n D_{t_i} e^{r_{t_i} t_i}$ ， D_{t_i} 为在未来 t_i 时刻的分红， r_{t_i} 为在未来 t_i 时刻的贴现率。那么应有关系 $e^{-r\tau}F = S - PVD$ ，将其代入上述 Black 公式中，可得考虑了分红现值的 Black 公式：

$$C = (S - PVD) N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2)$$

$$P = e^{-r\tau} K N(-d_2) - (S - PVD) N(-d_1)$$

此时：

$$d_1 = \frac{\ln[(S - PVD) e^{-r\tau} / K] + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

9 希腊值

BSM 定价公式的核心价值在于它构建了量化数学模型，以此可以计算期权的各种风险敞口，这对于将期权交易者至关重要。由 BSM 公式出发可以方便的求出期权价格对标的资产、时间、利率、波动率的偏导数，从而确定期权在这些因素上的风险敞口，常见的风险敞口由五类，由希腊字母表示，称为希腊值，分别是：Delta、Gamma、Vega、Theta 与 Rho。

9.1 正态分布与性质

对于正态分布或高斯分布（Gaussian distribution），其概率密度函数（Probability Density Function, PDF）：

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

则有 $N(x)$ 为标准正态分布 (Standard normal distribution) 的累积分布函数 (CDF, Cumulative Distribution Function) 为:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

则有 $N'(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

由于正态分布的对称性, 易知有如下性质:

$$N(-x) = 1 - N(x) \quad N'(x) = N'(-x)$$

9.2 希腊值定义与理解

期权是可以高度量化的工具, 为了衡量单一因素对期权价格变化的影响, 在数学中即为求导。因此令期权价格为 V :

- Delta = $\frac{\partial V}{\partial S}$: 对标的价格的一阶导
- Gamma = $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$: 对标的价格的二阶导
- Vega = $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$: 对波动率的一阶导
- Theta = $-\frac{\partial V}{\partial \tau}$: 对期限的一阶导
- Rho = $\frac{\partial V}{\partial r}$: 对无风险利率的一阶导

9.2.1 多空对希腊字母的影响

对于 Delta, 很容易记忆, 看涨期权多头受益于标的资产上涨, 符号为正, 空头相反, 符号为负。而看跌期权多头, 由于标的资产价格上涨亏损, 符号为负, 空头相反, 符号为正。对于期权多头 (看涨或看跌) 其 Gamma 或 Vega 都为正, 都不断的损失时间价值, Theta 为负, 空方则相反。期权多方的曲线为下凸, 因 Gamma 的存在使得期权多头 “赚得多, 亏得少”, 符号为正。而期权空方的曲线为上凸, 由于 Gamma 存在使得其 “赚得少, 亏得快”, 符号为负。对于期权多头 (持有), 波动率上升, 使得期权价格上涨, 因此 Vega 为正。

	Delta	Gamma	Vega	Theta	Rho
Long Call	+	+	+	-	+
Long Put	-	+	+	-	-
Short Call	-	-	-	+	+
Short Put	+	-	-	+	+

9.2.2 Delta

如上公式所示：

$$\text{Delta} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Delta 描述了标的价格变动，对期权价格的影响，当 $\text{Delta} = 0.5$ 时，假设标的资产变动 1 元，那么期权价格将变动 $1 \times 0.5 = 0.5$ 元。显然应有 $|\text{Delta}| \in (0, 1)$ 。如下图所示看涨期权的 Delta 值在 $(0, 1)$ 之间，看跌期权的 Delta 值在 $(-1, 0)$ 之间。对于 BSM 而言，看涨期权 Delta 与看跌期权 Delta 有如下关系 $\text{Delta}_C - \text{Delta}_P = 1$ 。期权价格与标的资产价格的关系如下：

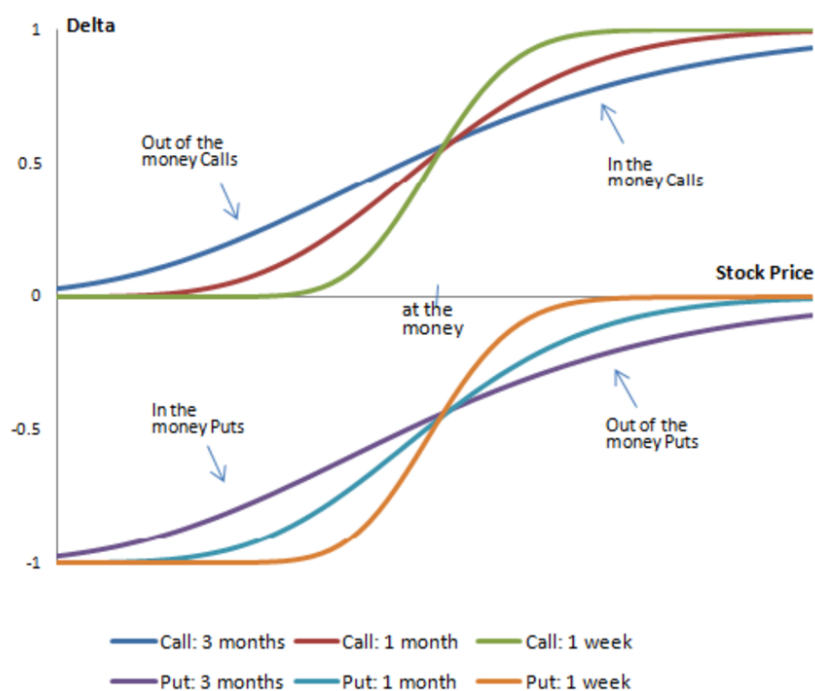


图 7: Delta 与标的资产价格之间的关系

如上图7所示，对于期权权利方（多方），无论看涨看跌期权，随着标的价格上涨，Delta 也增大。反之若为期权义务方（空方），则随着标的价格的下跌，Delta 也减小。并且可以看到当 Delta 的绝对值约在 0.25 附近时，看涨看跌期权都为虚值期权（OTM）。当期权处于虚值状态时，标的资产价格的变动对期权价格的影响较小。当 Delta 的绝对值约 0.5 附近时，看涨与看跌期权均为平值期权（ATM），可以看到此时斜率最大，即 Gamma 最大（Delta 对 S 求导）。当 Delta 的绝对值约 0.75 附近时，看涨与看跌期权均为实值期权（ITM），此时标的资产变动与期权价值变动接近于 1:1。

可以将 Delta 理解为期权价格与标的价格的贴合程度，以看涨期权为例，当为深度实值时，贴合程度最好，标的价格变化 1 单位，期权价格变化 1 单位。即实值贴合好，对股价变动敏感，相反虚值贴合差，对股价变动不敏感。如下图所示，随着期限不断衰减，期权价格曲线将越来越贴合期权内在价值。并且不同在值程度期权的 Delta，也将随着期限的衰减，差异不断加大。实值期权 Delta 将加速趋近 1，而虚值期权将加速趋近 0，平值期权变化较小。

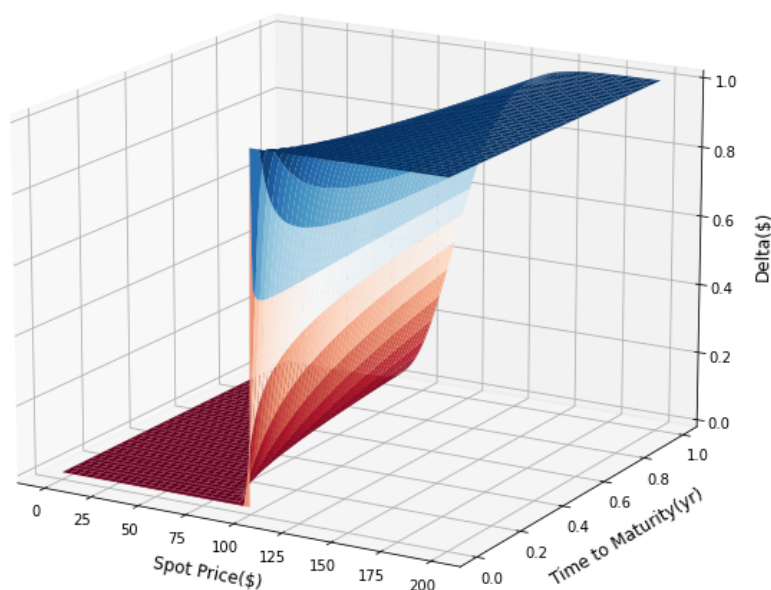


图 8: 看涨期权多方 Delta

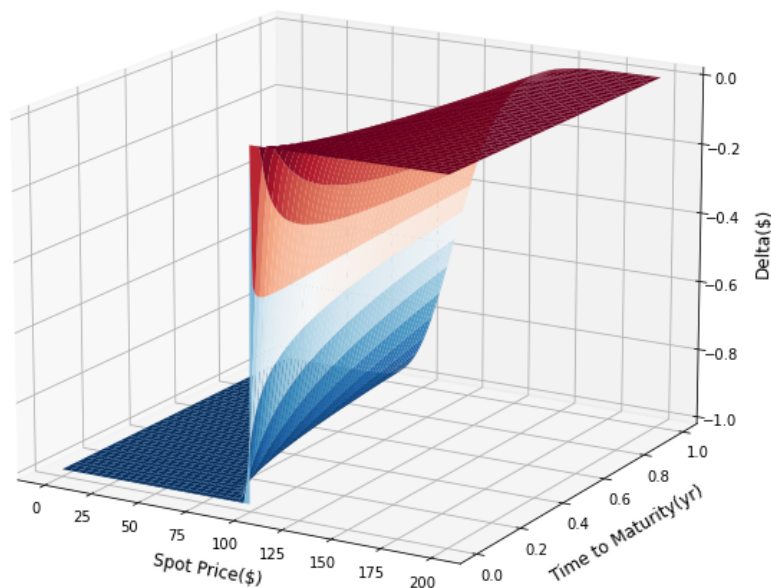


图 9: 看跌期权多方 Delta

Dollar Delta

Delta exposure 或称为现 Dollar Delta (现金 Delta) 或记为 $\$ \Delta$, 当投资期权时, 希望知道当前的期权投资, 相当于投资了多少头寸的标的资产 (金额计) (cash equivalent exposure of the underlying)。由 Δ 的定义可知, 其为对于价格敏感程度的指标, 同时也可以通过 Δ , 将其换算为数量之比。假设当前看涨期权 $\Delta = 0.5$, 标的资产价格为 100 元, 那么标的资产每变动 1 元, 期权价格变动 0.5 元。那么此时, 对于持有的每份期权, 相当于持有 0.5 份的标的资产, 乘以标的资产的价格, 即得到 $\$ \Delta = \Delta \times S = 0.5 \times 100 = 50$ 。即当前对于这一份期权, 相当于投资 50 元于标的资产。

使用 Dollar Delta 的好处是, 方便不同标的资产价格的期权之间进行比较。假设股票 A 价格为 100 元, 股票 B 价格为 50 元, 此时两者期权的 Delta 都为 0.5, 对于一份期权而言, 对于股票 A 期权, 相当于投资了 50 元于股票 A, 而对于股票 B, 相当于投资了 25 元于股票 B。在组合中, 若直接将 Delta 相加, Delta 为 1。若一个看涨一个看跌, 两者相加为 0, 并没有意义。

备注: 以 50ETF 期权为例, 合约单位为 10000 份, 当 $\Delta = 0.5$ 时, 那么一手期权即对应了 5000 份个股。

9.2.3 Gamma

同时 Gamma 如图7中所示，为 Delta 与标的资产价格关系的一阶导（资产为线性， $\Gamma = 0$ ）：

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

若以期权价格为纵轴，标的资产价格为横轴，得到期权收益，如图22。那么 Delta 为该曲线切线的斜率，为一阶导，衡量期权价格对标的资产变动的敏感程度。Gamma 为该曲线的二阶导，为 Delta 的变化速度，或曲线弯曲程度或加速度，衡量 Delta 对标的资产价格变动的敏感程度，或标的价格没变化 1 元，引起的 Delta 值的变动，假设标的资产价格为 200，Delta 为 0.3，Gamma 为 0.02，那么当标的资产价格上升 1 元至 201 时，那么 Delta 上升至 0.32。

期权权利方（多方），有正的 Gamma，标的资产价格的变化对投资者有利。具体而言，当价格上涨的时候，此时对投资者有利，随着标的资产价格的不断上涨，期权所带来的盈利越多。相反当价格下跌时，此时对投资者不利，但随着标的资产的不跌，损失越来越小。而作为做市商等，卖期权（期权空方），则有负的 Gamma。此时与期权投资者相反，价格上涨时，盈利减慢，而价格下跌时，损失增大。正 Gamma 为凸函数（Convex，下凸），负 Gamma 为凹函数（Concave，上凸），另外可以看到在平值点的 Gamma 最大，看涨期权与看跌期权的 Gamma 相同。

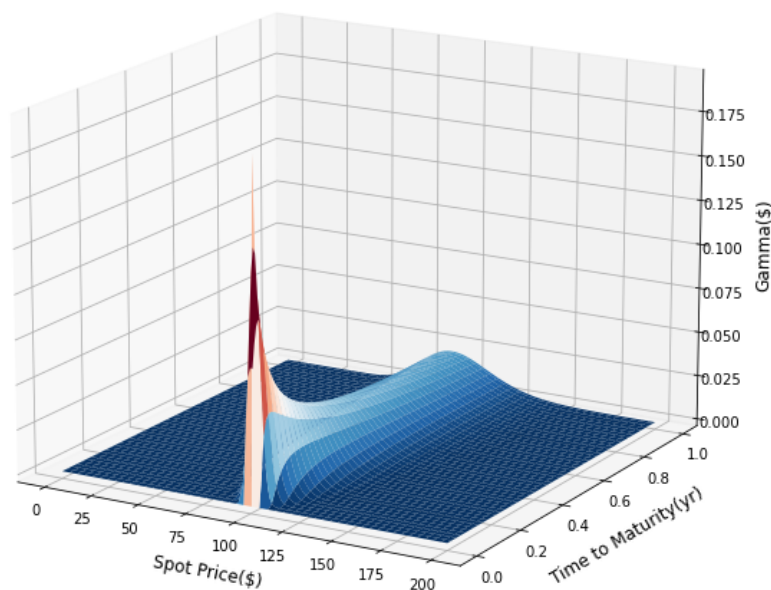


图 10: 看涨看跌期权多方 Gamma

另外需要注意，只有期权有 Gamma 值，因此为了达到投资组合 Π 的 Gamma 中性状态，只能通过期权头寸的调整获得。实现 Gamma 中性往往会带来 Delta 的非中性，还需要调整标的资产或者期货头寸才能使得投资组合同时达到 Delta 中性与 Gamma 中性。

Dollar Gamma

Gamma exposure 或称为 Dollar Gamma（现金 Gamma）或记为 $\$ \Gamma$ 。从下文对 BSM 模型 Delta 推导中可知，看涨看跌期权的 Delta 值分别为： $\Delta_C = N(d_1)$ ， $\Delta_P = N(d_1) - 1$ ，Delta 值并不与标的资产价格（水平）高低相关。而对于 Gamma 而言，对于看涨看跌期权其 Gamma 相同，即 Delta 对标的资产价格 S 求导： $\Gamma = N'(d_1)/(S\sigma\sqrt{\tau})$ ，可以发现 Gamma 与标的资产价格水平的倒数有关。因此，对于其他条件相同的两支期权，若 A 股价为 B 股票的 2 倍，那么 A 的 Gamma 为 B 的 $\frac{1}{2}$ ，这样显然无法直接进行对比。

由下文希腊值的分解可知，若期权价值为 V ，对标的资产价格 S 与时间 t 进行泰勒展开，并

忽略高与 Δt 的项（保留前三项），若忽略 Theta 的影响可得：

$$\begin{aligned} dV &= \frac{dV}{dS}dS + \frac{dV}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dS^2}(dS)^2 \\ &\approx \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2 \end{aligned}$$

由上对 Dollar Delta 的分析可知：

$$\$ \Delta = \Delta \times S = \frac{dV}{dS} \times S = \frac{dV}{(dS/S)}$$

通过变换，那么可以得到收益率的一阶展开，其意义也方便理解，即期权合约价值的变化，等于相当于投资了多少金额的标的资产，乘以标的资产价格的变动：

$$dV = (\$ \Delta) \frac{dS}{S}$$

此时可以看到同时 $\$ \Delta$ 还衡量了，期权合约价值对标的资产每变动 1% 的敏感程度。同样以标的资产价格 $S = 100$ ，期权 $\Delta = 0.5$ 为例：若持有一份期权合约，此时 $\$ \Delta = 50$ ，相当于买了半份标的资产（金额）；同时当标的资产价格变化每 1%，即标的资产变动 1 元，期权价格变化 0.5 元，此时 $\$ \Delta = 0.5/0.01 = 50$ 。

若将如上概念自然扩展至二阶：

$$dV \approx (\$ \Delta) \frac{dS}{S} + \frac{1}{2}(\$ \Gamma) \left(\frac{dS}{S} \right)^2$$

此时定义 Dollar Gamma ($\$ \Gamma$) 为：

$$\begin{aligned} \$ \Gamma &= \Gamma \times S^2 = \frac{d\Delta}{dS} \times S^2 \\ &= \frac{d\Delta \times S}{(dS/S)} = \frac{d\Delta \times S}{(dS/S)} \\ &= \frac{d\$ \Delta}{dS/S} \end{aligned}$$

可以看到此时 Dollar Gamma 衡量了，Dollar Delta 对标的资产价格每 1% 变动的敏感程度。

9.2.4 Vega

Vega 体现的为期权价格对波动率的敏感程度，即波动率变化 1% 对期权价格的影响。对于期权的多头，其 Vega 为正，意味着隐含波动率的正向变化对其有利，空头则相反。看涨期权与看跌期权的 Vega 相同。当调整期权头寸使投资组合为 Vega 中性时，Gamma 也会随之改变，因此要达到 Vega 与 Gamma 同时中性，需要使用同一标的的两种期权。

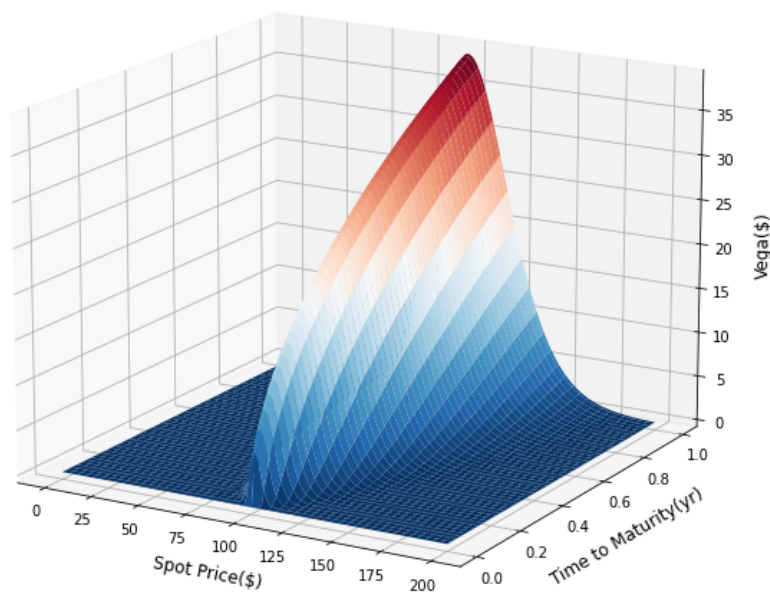


图 11: 看涨看跌期权多方 Vega

9.2.5 Theta

下图期权的时间价值曲线中，随着剩余期限的减小，期权的时间价值在加速衰减。

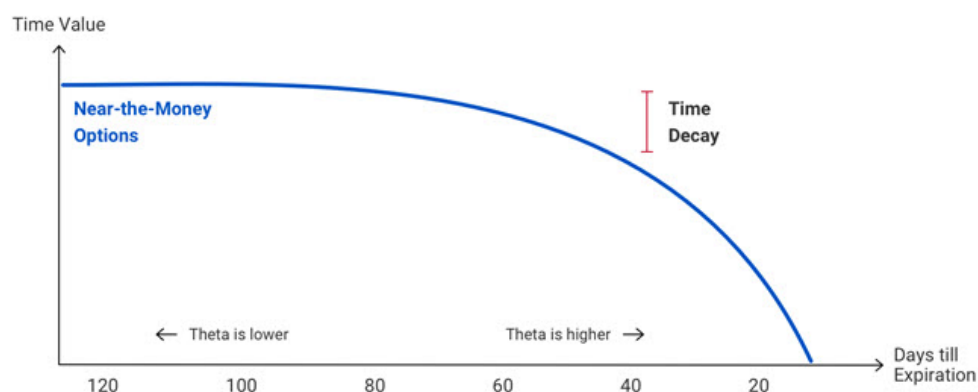


图 12: 期权多方时间价值的

因此对于期权的多方，其时间价值在不断衰减，有 Theta 为负。相反，空方则 Theta 为正。注意：对于 Theta 多空符号相同，但值不同。

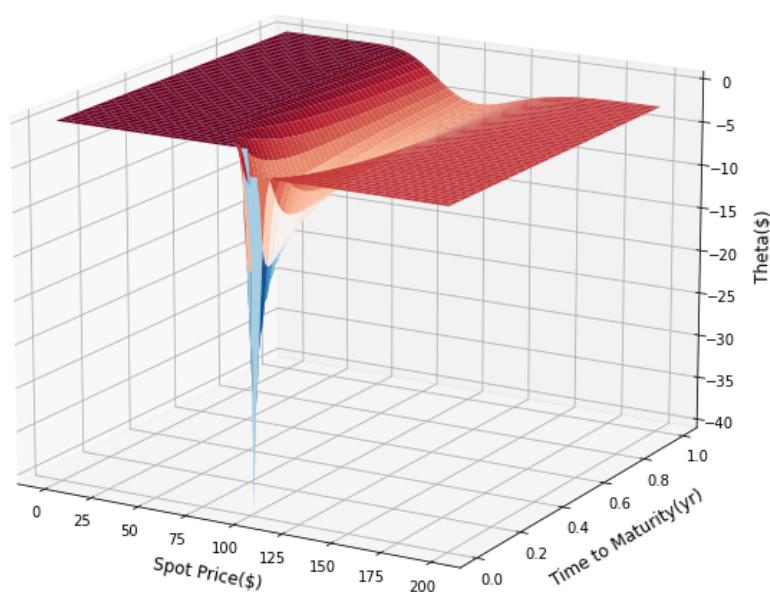


图 13: 看涨期权多方 Theta

只有具有高红利的欧式认购期权，Theta 也可能为正。另外，可以看到在下图看跌期权多方的 Theta 中，深度实值的看跌期权，拥有正的 Theta（深红色部分）。

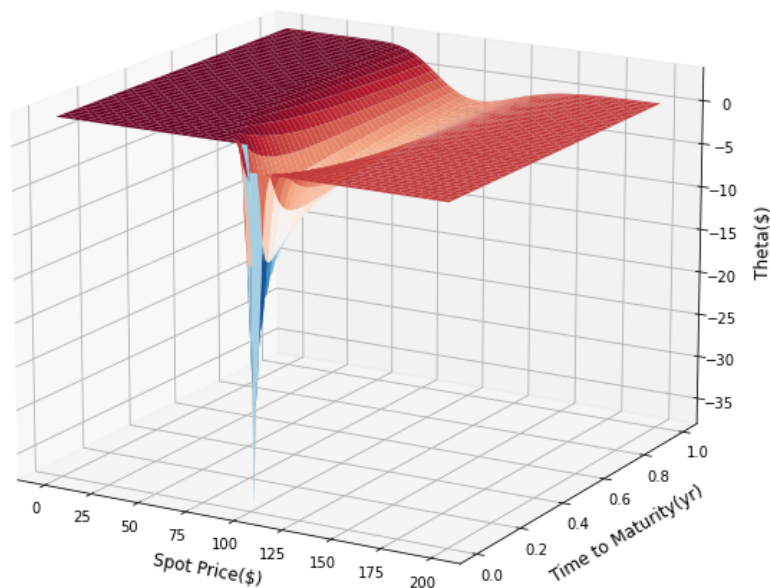


图 14: 看跌期权多方 Theta

9.3 Delta 对冲

Delta 为衍生品价格变动与其标的资产价格变动的比率。如果假定股票价格 (X) 与期权价格 (Y) 为折线, 则其斜率应为 Delta, 即对股票价格变动一单位, 期权价格变动 Δ 单位。而现实中并非折线, Delta 则为两者切线斜率。

$$\text{Delta} = \frac{\partial V}{\partial S}$$

而从持有标的资产和衍生品数量分别为 N_S 和 N_V 而言, 为了维持对冲结果, 易知对于每一单位标的资产, 应使用 Delta 单位衍生品进行对冲。

$$\Delta V \times N_V = \Delta S \times N_S \quad \Rightarrow \quad \text{Delta} = \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{N_S}{N_V}$$

而对于投资组合而言, 其净 Delta (Net portfolio delta) 应为组合内所有某合约 Delta 与该合约数量乘积之和:

$$\sum_{i=1}^n \text{Delta}_i \times \text{期权合约数}_i$$

同样对于 Vega 而言，投资组合净 Vega (Net portfolio vega) 为：

$$\sum_{i=1}^n \text{Vega}_i \times \text{期权合约数}_i$$

假定股票价格遵循几何布朗运动，则有在现实测度 (Physical probability measure) 下：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

根据伊藤引理：

$$f(T, W_T) = f(t, W_t) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial S} dW_t \frac{1}{2} + \int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

【待整理】在 Bakshi and Kapadia 2003 中，在一段时间内的使用看涨看跌期权进行 Delta 对冲（**注意：**由几何布朗运动与伊藤过程推到而来，因此看涨看跌期权形式相同，买入看涨看跌期权，并卖出股票，扣除净投资金额所应获得无风险收益，即计算超额收益）。

$$\text{Call Gain} = C_{t+\tau} - C_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(C_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

$$\text{Put Gain} = P_{t+\tau} - P_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(P_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

假设持有时间为 t 到 t+1，以看涨期权为例：具体操作为在 t 时刻时，买入 1 份看涨期权（消耗现金 $-C_t$ ），卖出 Δ_C 份股票（获得现金 $+\Delta_C S_t$ ）。而在 t+1 时刻进行平仓，即卖出 1 份看涨看跌期权（获得现金 C_{t+1} ），买入 Δ_C 份股票（消耗现金 $-\Delta_C S_{t+1}$ ）。因此整体投资组合的收益应为：

$$(C_{t+1} - \Delta_C S_{t+1}) + (-C_t + \Delta_C S_t) = (C_{t+1} - C_t) - \Delta_C(S_{t+1} - S_t)$$

对于看跌期权，同理与看涨期权公式相同，但此时需注意看跌期权 $\Delta_P < 0$ 为负：在 t 时刻，买入 1 份看跌期权（消耗现金 $-P_t$ ），“卖出” Δ_P 份股票（注意看跌期权 Δ 负，实则买入 $|\Delta_P|$ 份股票，“获得”（消耗）现金 $+\Delta_P S_t$ ）。在 t+1 时刻进行平仓，即卖出 1 份看跌期权（获得现金 P_{t+1} ），“买入” Δ 份股票（实则为卖出 $|\Delta_p|$ 份股票，“消耗”（获得）现金 $-\Delta_p S_{t+1}$ ）。因此整体

投资组合的收益应为：

$$(P_{t+1} - \Delta_P S_{t+1}) + (-P_t + \Delta_P S_t) = (P_{t+1} - P_t) - \Delta_P (S_{t+1} - S_t)$$

vega-neutral delta-hedged P&L 买 call 卖 put (相同 K)，但还有 delta 和 gamma 暴露，没有 vega 与 theta 暴露

9.4 希腊值分解

9.4.1 泰勒级数

级数为无穷的序列 (sequences) (或无穷多项) 的和。泰勒级数 (Taylor series) 使用无限项序列来表示一个函数，每项由该函数在某一点的导数求得。一个函数的有限项的泰勒级数叫做泰勒多项式 (Taylor polynomial)。对于一元函数在 $x = a$ 处展开的泰勒级数有：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \frac{f(a)}{1} (1) + \frac{f'(a)}{1} (x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6} (x-a)^3 + \dots \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6} (x-a)^3 + \dots \end{aligned}$$

例子 9.1. 当 $f(x) = \ln(x)$ 时候：

$$\ln(x) = \ln(a) + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 - \frac{1}{4a^4}(x-a)^4 + \dots$$

整理可知，对数变化与百分比变化：有如下近似关系：

$$\ln\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x-a}{a} + \left(-\frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 - \frac{1}{4a^4}(x-a)^4 + \dots\right)$$

即：

$$\ln x_2 - \ln x_1 = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \approx \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

对于多元函数在 (a, b) 处展开的泰勒级数为：

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + \frac{1}{2}f''_{yy}(a, b)(y - b)^2 + 2 \times \frac{1}{2}f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b)$$

原理

假设使用多项式 $P(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$ 近似原函数。则应有多项式与原函数，从零阶导开始至 n 阶导，在 $x = a$ 点的取值都与原函数相同（即从单个点，提取原函数所有导数信息）：

- $x - a$ 使得带入 a 进行计算时，除了当前导数对应次数的项之外都等于零。如原函数在 a 点的二阶导 $f''(a)$ ，对应泰勒级数 x 二次项的系数 c_2 ：一阶导为 $P'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + \dots$ ，二阶导为 $P''(x) = 2c_2 + 3c_3(x - a)^2 + \dots$ ，则有 $P''(a) = 2c_2 = f''(a)$ ，此时 $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$
- 小于当前求导次数的泰勒级数项，由于求导都为零（如上所示求二阶导后，常数项与一次项都为 0），使得多项式每一项的系数 c_n 都独立对应原函数 n 阶导数值
- 系数为 $\frac{1}{n!}$ 是为了取消多次求导的影响，如 $P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3(x - a) + \dots$

9.4.2 基于 S 与 t 的希腊值分解

假设投资组合 Π （或期权价格 V ），为标的资产价格 S 与时间 t 的函数，则有在 (S_0, t_0) 使用泰勒级数展开为：

$$\begin{aligned} \Pi(S, T) = & \Pi(S_0, t_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial S}(S - S_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t}(t - t_0) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}(S - S_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}(t - t_0)^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial t}(S - S_0)(t - t_0) + \dots \end{aligned}$$

整理可得（注意： Δ 代表变化，并非希腊值）：

$$\Delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial t} \Delta S \Delta t + \dots$$

将阶数高于 Δt 的项忽略（前三项之后）：

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}(\Delta S)^2$$

得到：

$$\Delta\Pi = \Delta S \times \text{Delta} + \Delta t \times \text{Theta} + \frac{1}{2}(\Delta S)^2 \times \text{Gamma}$$

若忽略 Theta 的影响，只考虑 Delta 与 Gamma。可以发现投资组合的变化可以主要分解为斜率部分与曲度部分。斜率部分由 Delta 解释，曲度部分由 Gamma 解释：

$$\Delta\Pi \approx \Delta S \times \text{Delta} + \frac{1}{2}(\Delta S)^2 \times \text{Gamma}$$

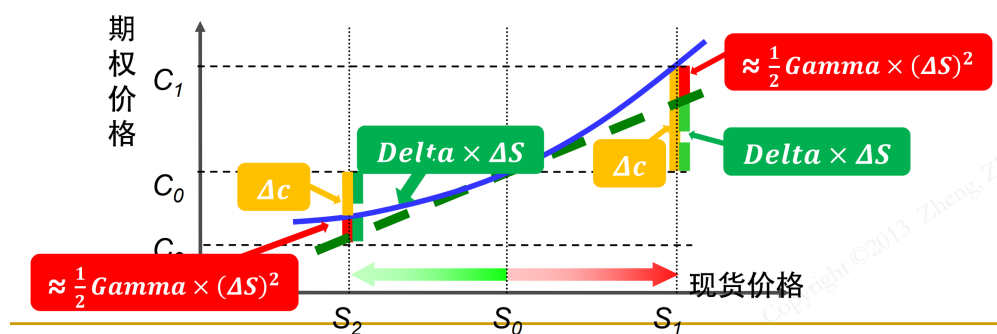


图 15: Delta 与 Gamma 分解

由上图可以看到，由于 $(\Delta S)^2$ 为大于等于零，且作为期权多方 Gamma 为正，因此 Gamma 项为正。因此可以清楚在图上看到，Gamma 对于期权多方的优势，即当标的资产价格上涨时，由于曲度存在，使得在 Delta 部分收益的基础上，还增加了 Gamma 部分的收益。而当标的资产下跌时，期权价格虽然损失了与上涨等量的 Delta 部分的收益，但依然获得了 Gamma 的收益。这样使得期权多方，赚得多，赔得少。相反，对于期权的空方，或一般为做市商，同理无论标的资产上涨或下跌，都必须损失 Gamma 部分的收益。使得空方，赚得少，赔得多。

另外可以发现对于一个 Delta 中立的投资组合，即当 $\text{Delta} = 0$ 时，即值只考虑 Theta 与

Gamma 时, 应有¹:

$$\Delta\Pi = \Delta t \times \text{Theta} + \frac{1}{2}(\Delta S)^2 \times \text{Gamma}$$

9.4.3 基于 S 与 σ 的希腊值分解

在实践中, 波动率并非为常数。在短时间内忽略无风险利率的变化, 仅仅关注标的资产价格 S 以及隐含波动率 σ_{imp} 的变化, 作为投资组合 Π (或期权价格 V) 的变化近似, 使用泰勒级数展开, 则有¹:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma_{imp}}\Delta\sigma_{imp} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial\sigma_{imp}}\Delta S\Delta\sigma_{imp} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma_{imp}^2}(\Delta\sigma_{imp})^2 + \dots \\ &= \Delta S \times \text{Delta} + \Delta\sigma_{imp} \times \text{Vega} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta S)^2 \times \text{Gamma} + \Delta S\Delta\sigma_{imp} \times \text{Vanna} + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_{imp})^2 \times \text{Vomma} + \dots\end{aligned}$$

Delta、Vega、Gamma 对应了上式中的前三项, 而交易员将 $\frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial\sigma_{imp}}$ 称为 Vanna, 或理解为 Delta 的 Vega, 即对于 σ_{imp} 的变动, Delta 的敏感程度。将 $\frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma_{imp}^2}$ 称为 Vomma, 即 Vega 对于 σ_{imp} 的敏感程度, 或 Vega 的 Vega。

9.4.4 BSM 分解

由 BSM 偏微分方程可知:

$$r\Pi = rS_t \frac{\partial\Pi}{\partial S} + \frac{\partial\Pi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}$$

改写为希腊值的形式:

$$r\Pi = rS_t \times \text{Delta} + \text{Theta} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \times \text{Gamma}$$

由上式可见, 当一个投资组合即 Delta 中性又 Gamma 中性时, 有 $\text{Theta} = r\Pi$, 即投资组

¹见 OFOD 第十版附录 19A

合的价值将随时间以无风险连续复利率的速度增长。若假设无风险利率为 0，则可得到 Theta 与 Gamma 的关系式：

$$\text{Theta} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \times \text{Gamma} = 0$$

那么可以看到 *Theta* 与 *Gamma* 的相互制约关系。对于期权的多头，其 Gamma 为正，但同时 Theta 为负。对于空头则相反，有 Gamma 为负，Theta 为正。

9.5 Black 模型的希腊值推导

对于 Black 期权模型，其公允价值（Fair value）应有：

$$\begin{aligned} C &= e^{-r\tau} [FN(d_1) - KN(d_2)] \\ P &= e^{-r\tau} [KN(-d_2) - FN(-d_1)] \end{aligned}$$

其中有：

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 &= \frac{\ln(F/K) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

其中有：

$$\frac{\partial d_1}{\partial F} = \frac{\partial d_2}{\partial F} = \frac{\frac{\partial \ln(F/K)}{\partial F} \sigma\sqrt{\tau}}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} = \frac{\partial(\ln F - \ln K)/\partial F}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{1}{F\sigma\sqrt{\tau}}$$

引理 9.2.

$$FN'(d_1) = KN'(d_2)$$

证明.

$$\begin{aligned}
 FN'(d_1) &= \frac{F}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \\
 KN'(d_2) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_2^2/2} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2 + d_1\sigma\sqrt{\tau} - \sigma^2\tau/2} \\
 &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2 + \ln(F/K)} \quad (d_1\sigma\sqrt{\tau} = \ln(F/K) + \sigma^2\tau) \\
 &= \frac{F}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} = FN'(d_1)
 \end{aligned}$$

□

9.5.1 Delta

可以看到对于 Black 公式而言, 有 $\text{Delta}_C - \text{Delta}_P = e^{-r\tau}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Delta}_C &= e^{-r\tau} \left[N(d_1) + FN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial F} - KN'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial F} \right] \\
 &= e^{-r\tau} N(d_1) \\
 \text{Delta}_P &= e^{-r\tau} \left[KN'(-d_2) \frac{\partial d_2}{\partial F} - N(-d_1) - FN'(-d_1) \frac{\partial d_1}{\partial F} \right] \\
 &= e^{-r\tau} [-N(-d_1)] = -e^{-r\tau} N(-d_1) \\
 &= e^{-r\tau} [N(d_1) - 1]
 \end{aligned}$$

由远期 (期货) 的 PCP 公式:

$$C = P + (F - K) e^{-r(T-t)}$$

对期货价格 F , 求导可得:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial F} &= \frac{\partial P}{\partial F} + e^{-r(T-t)} \\
 \text{Delta}_C &= \text{Delta}_P + e^{-r(T-t)}
 \end{aligned}$$

9.6 BSM 模型的希腊值推导

当红利率为 q 时，有：

$$\begin{aligned} C_t &= S_t e^{-q\tau} N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \\ P_t &= -S_t e^{-q\tau} N(-d_1) + K e^{-r\tau} N(-d_2) \end{aligned}$$

其中有：

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

引理 9.3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_2}{\partial S} &= \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\frac{\partial \ln(S/K)}{\partial S} \sigma\sqrt{\tau}}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} = \frac{\partial(\ln S - \ln K)/\partial S}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} \\ \frac{\partial d_2}{\partial \tau} &= \frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} \\ \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} &= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{\tau} \\ \frac{\partial d_2}{\partial r} &= \frac{\partial d_1}{\partial r} \end{aligned}$$

引理 9.4. 对于 BSM 公式，有：

$$S_t N'(d_1) = K e^{-r\tau} N'(d_2)$$

证明. 已知：

$$\begin{aligned} d_2^2 - d_1^2 &= (d_2 - d_1)(d_2 + d_1) \\ &= (-\sigma\sqrt{\tau})(2d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \\ &= (-\sigma\sqrt{\tau}) \left(\frac{2\ln(S_t/K) + 2(r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau} \right) \\ &= -2 \left[\ln \frac{S_t}{K} + r\tau \right] \end{aligned}$$

同时已知 $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则有:

$$\ln\left(\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)}\right) = -\frac{d_1^2}{2} + \frac{d_2^2}{2} = \frac{1}{2}(d_2^2 - d_1^2) = -\left[\ln\frac{S_t}{K} + r\tau\right]$$

对等式两边取指数:

$$\begin{aligned}\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} &= \exp\left(-\left[\ln\frac{S_t}{K} + r\tau\right]\right) \\ &= \exp\left(\ln\frac{K}{S_t} - r\tau\right) \\ &= \frac{K}{S_t}e^{-r\tau} \\ S_t N'(d_1) &= K e^{-r\tau} N'(d_2)\end{aligned}$$

□

9.6.1 Delta

对于无红利, 即 $q = 0$ 时, Delta (Δ), 如上所述, 此时看涨期权 Delta 与看跌期权 Delta 有如下关系 $\text{Delta}_C - \text{Delta}_P = 1$:

$$\begin{aligned}\text{Delta}_C &= \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} [S_t N'(d_1) - K e^{-r\tau} N'(d_2)] = N(d_1) \\ \text{Delta}_P &= \frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1) + \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} [S_t N'(d_1) - K e^{-r\tau} N'(d_2)] \\ &= -N(-d_1) = -[1 - N(d_1)] = N(d_1) - 1\end{aligned}$$

也可从看涨看跌平价关系 (PCP) 中, 对等式两侧对 S 求导得到:

$$\begin{aligned}C_{t,T} &= P_{t,T} + S_t - K e^{-r(T-t)} \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial P}{\partial S} + 1\end{aligned}$$

当已知红利率为 q 时，有：

$$\text{Delta}_C = -e^{-q\tau} N(d_1)$$

$$\text{Delta}_P = -e^{-q\tau} N(-d_1)$$

此时有：

$$\begin{aligned} \text{Delta}_C - \text{Delta}_P &= -e^{-q\tau} [N(d_1) + N(-d_1)] \\ &= -e^{-q\tau} [N(d_1) + 1 - N(d_1)] \\ &= -e^{-q\tau} \end{aligned}$$

9.6.2 Gamma

对于 Gamma (Γ) 而言，看涨与看跌期权 Gamma 相同：

$$\text{Gamma} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

9.6.3 Vega

对于 Vega 而言，看涨与看跌期权 Vega 相同（注意：此时计算出的波动率为每变化 1，期权价格变动情况，而在实际交易中，一般以波动率每变化 1%，即变化 0.01）：

$$\text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = SN'(d_1)\sqrt{\tau}$$

当红利率为 q 时有：

$$\text{Vega}_C = \text{Vega}_P = Se^{-q\tau} N'(d_1)\sqrt{\tau}$$

推导：

$$\begin{aligned}
 \text{Vega} &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} [SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)] \\
 &= SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
 &= SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r\tau}N'(d_2)\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{\tau}\right] \quad (\text{对 } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \text{ 求导}) \\
 &= [SN'(d_1) - Ke^{-r\tau}N'(d_2)]\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\sqrt{\tau} \\
 &= SN'(d_1)\sqrt{\tau} \quad (\text{已知 } SN'(d_1) = Ke^{-r\tau}N'(d_2))
 \end{aligned}$$

9.6.4 Theta

对于欧式看涨期权有其 Theta (Θ) (注意：此时计算为期限每变化 1，此时单位为年。实际交易中，一般以期限每变化 1 天，即变化 1/365)：

$$\text{Theta}_C = \frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{S_t N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}N(d_2)$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \text{Theta}_C &= -\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{\partial [S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)]}{\partial \tau} \\
 &= -\frac{\partial S_t N(d_1)}{\partial \tau} + \frac{\partial Ke^{-r\tau}N(d_2)}{\partial \tau} \\
 &= -S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - rKe^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \tau} \\
 &= -S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - rKe^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{-r\tau}N'(d_2)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}\right) \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial \tau} \left[-S_t N'(d_1) + Ke^{-r\tau}N'(d_2) \right] + Ke^{-r\tau} \left[-rN(d_2) - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}N'(d_2) \right] \\
 &= -\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}S_t N'(d_1) - rKe^{-r\tau}N(d_2)
 \end{aligned}$$

□

对于欧式看跌期权有：

$$\text{Theta}_P = \frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{S_t N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{\tau}} + rKe^{-r\tau} N(-d_2)$$

证明.

$$\begin{aligned} \text{Theta}_P &= -\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\partial [-S_t N(-d_1) + Ke^{-r\tau} N(-d_2)]}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial S_t N(-d_1)}{\partial \tau} - \frac{\partial Ke^{-r\tau} N(-d_2)}{\partial \tau} \\ &= S_t N'(-d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rKe^{-r\tau} N(-d_2) - Ke^{-r\tau} N'(-d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \tau} \\ &= S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \tau} + rKe^{-r\tau} N(-d_2) - Ke^{-r\tau} N'(d_2) \left(\frac{\partial d_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} \right) \\ &= \frac{\partial d_1}{\partial \tau} \left[S_t N'(d_1) - Ke^{-r\tau} N'(d_2) \right] + Ke^{-r\tau} \left[rN(-d_2) - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} N'(d_2) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} S_t N'(d_1) + rKe^{-r\tau} N(-d_2) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} S_t N'(d_1) + rKe^{-r\tau} [1 - N(d_2)] \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} S_t N'(d_1) - rKe^{-r\tau} N(d_2) \right] + rKe^{-r\tau} \\ &= \text{Theta}_C + rKe^{-r\tau} \end{aligned}$$

□

另有，利用 Put-Call Parity 可知：

$$C + Ke^{-r\tau} = P + S_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} - rKe^{-r\tau} = \frac{\partial P}{\partial \tau}$$

等式两边对 τ 求偏导：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} &= -\frac{\partial C}{\partial \tau} + rKe^{-r\tau} \\ \text{Theta}_P &= \text{Theta}_C + rKe^{-r\tau} \end{aligned}$$

9.6.5 Rho

欧式看涨期权，对无风险利率求导可得：

$$\begin{aligned}
 \text{Rho}_C &= \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial [S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2)]}{\partial r} \\
 &= S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - K e^{-r\tau} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} + \tau K e^{-r\tau} N(d_2) \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial \tau} \left[S_t N'(d_1) - K e^{-r\tau} N'(d_2) \right] + \tau K e^{-r\tau} N(d_2) \\
 &= \tau K e^{-r\tau} N(d_2)
 \end{aligned}$$

同理，对于欧式看跌期权：

$$\begin{aligned}
 \text{Rho}_P &= \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial [-S_t N(-d_1) + K e^{-r\tau} N(-d_2)]}{\partial r} \\
 &= -S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} + K e^{-r\tau} N'(-d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} - \tau K e^{-r\tau} N(-d_2) \\
 &= \frac{\partial d_1}{\partial \tau} \left[-S_t N'(d_1) + K e^{-r\tau} N'(d_2) \right] - \tau K e^{-r\tau} N(-d_2) \\
 &= -\tau K e^{-r\tau} N(-d_2)
 \end{aligned}$$

10 波动率

波动率为一种风险的度量，所有的计算方法都是一种近似估计，并不代表准确的波动率。波动率可以大致分为两类，一类为回望波动率（Backward looking），一类为前瞻波动率（Forward looking）。两者的区别在于回望波动率使用的是一段时间内的历史数据所计算出来的，是已经发生的波动率，如：历史波动率、已实现波动率、GARCH 波动率。而前瞻法或隐含法，是未来一段时间内波动率的期望，由于在期权交易中，所有的交易者都必须估计未来波动率，并以此为基础进行交易。因此在一个充分竞争的环境中，最后期权价格中的隐藏波动率就包含了市场对未来波动率的预期。具体而言可分为有模型法（如 BS 隐含波动率）和无模型法（为风险中性预期）。

10.1 波动率特征

波动率虽然不可以直接观测，但其一部分特征能在资产的收益率序列中观察到。

10.1.1 尖峰肥尾

收益率的分布相比正态分布，呈现尖峰肥尾的特征。也就是说，它们的峰度（用方差的平方根标准化的第四中心矩）通常都大于 3（高斯随机变量的峰度为 3）。事实上，一种流行的检验高斯分布假设的方法，Jarque-Bera 测试，能够同时测试此分布是否是对称的以及其峰度是否等于 3。如果收益率是肥尾分布的，则极端事件，即非常高或非常低的收益率的发生概率，会高于收益率分布满足正态分布时其发生的概率。

10.1.2 波动率聚类

波动率聚类（Volatility clustering）指波动率可能在一段时间内高，而在另一端时间内低。即如果 $t-1$ 时的波动率很高， t 时的波动率也很可能会很高。即，在 $t-1$ 时的冲击不仅会增加 $t-1$ 时的波动率，也会影响到 t 时的波动率。换句话说，市场在某些时期较为波动，在其他时间更为平静。波动率特征按照时间集中分类。GARCH 类模型能够很好地捕捉这一现象。事实上，这些模型更准确地来说，是衡量 t 时的波动率是如何依赖历史波动率（和其他可能的条件变量）。

10.1.3 不对称性

波动率对价格的大幅上升与价格的大幅下降翻译不同，这一不对称性过去被成为杠杆效应（Leverage effects），因为增加的风险，被认为是来自于负面冲击所引起杠杆的增加。具体而言指，当股票价格下跌时，使得公司股东权益下降，但由于公司负债不变，公司的债务股本比（Debt-to-equity ratio）会增大，公司会有更高的杠杆率。而更高的杠杆也会让公司的信用恶化，促使公司的股票价格进一步下跌。一些波动率模型具体针对已有模型刻画上述这些特征上的落点而提出的，例如 EGARCH 模型就是为了刻画波动率对资产收益率的不对称性而提出的。

10.2 收益率与波动率

假设收益率时间序列为 r_1, r_2, \dots, r_n ，并假设收益率之间相互独立，即 $\text{Cov}_{i \neq j}(r_i, r_j) = 0$ 。若假设年收益率为各期收益（日收益、月收益）之和时 $r^a = \sum_{i=1}^n r_i$ ，那么此时应有：

$$\begin{aligned}\text{Var}(r) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(r_i) \\ \sigma(r^a) &= \sqrt{n} \times \sigma(r)\end{aligned}$$

由上可见，当年收益率为各期收益率之和时，使用期数的根号（ \sqrt{n} ）对波动率（标准差）进行年化。即对日频波动率乘以 $\sqrt{252}$ （中国市场约为 240）年化，而对于月频波动率乘以 $\sqrt{12}$ 年化。而对于收益率一般计算为乘积，若 r^a 为年收益率，以月频收益率为例，那么应有其为月频收益率 $r = r_1, \dots, r_{12}$ 的乘积：

$$1 + r^a = (1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_{12})$$

对于标准差，有如下关系：

$$\text{std}[X] = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]}$$

因此年波动率应有：

$$\text{std}[r^a] = \text{std}[1 + r^a] = \sqrt{\mathbb{E}[(1 + r^a)^2] - (\mathbb{E}[1 + r^a])^2}$$

由于月频收益率 r 为独立同分布（i.i.d），因此乘积的期望等于期望的乘积，令 μ 为月收益率的期望 $\mathbb{E}[r]$ ：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[1 + r^a] &= \mathbb{E}[1 + r_1]\mathbb{E}[1 + r_2] \cdots \mathbb{E}[1 + r_n] \\ &= (1 + \mathbb{E}[r])^{12} \\ &= (1 + \mu)^{12}\end{aligned}$$

同样由于 r 独立同分布，令：

$$\begin{aligned} Q &= \mathbb{E}[(1+r)^2] \\ &= 1 + 2\mathbb{E}[r] + \mathbb{E}[r^2] \\ &= 1 + 2\mathbb{E}[r] + \text{Var}[r] + (\mathbb{E}[r])^2 \end{aligned}$$

因此有：

$$\mathbb{E}[(1+r^a)^2] = \mathbb{E}[(1+r_1)^2]\mathbb{E}[(1+r_2)^2] \cdots \mathbb{E}[(1+r_{12})^2] = Q^{12}$$

令月收益率的标准差 $\text{std}[r] = \sigma$ ，对于月收益 r 的方差有如下关系：

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}[1+r] \\ &= \mathbb{E}[(1+r)^2] - (\mathbb{E}[1+r])^2 \\ &= Q - (1+\mu)^2 \end{aligned}$$

整理可得 $Q = \sigma^2 + (1+\mu)^2$ ，并将 Q 和 μ 代回年波动率表达式中，可得：

$$\text{std}(r^a) = \sqrt{[\sigma^2 + (1+\mu)^2]^{12} - (1+\mu)^{24}}$$

可以看到修正后的年化波动率使用了月频收益率的期望 μ 与标准差 σ ，即前二阶矩，而相比简单乘以 $\sqrt{12}$ ，只使用了二阶矩。同理，对于 n 期收益率进行年化，其期望与标准差分别为 μ_n 和 σ_n ，应有年化波动率：

$$\sigma_a = \sqrt{[\sigma_n^2 + (1+\mu_n)^2]^n - (1+\mu_n)^{2n}}$$

Reference:

- Levy, Haim, and Deborah Gunthorpe, 1993, Optimal Investment Proportions in Senior Securities and Equities Under Alternative Holding Periods, The Journal of Portfolio Management 19, 30-36.
- Kaplan, Paul D., 2013, What's Wrong with Multiplying by the Square Root of Twelve, Morningstar.

10.3 历史波动率

历史波动率 (Historical volatility) 是基于历史信息得到的, 指资产收益率在过去一段时间内表现出的波动水平, 可以由资产收益率在过去一段时间内的标准差计算得到。一般使用日频数据, 如计算过去一个月内交易日的标准差。注意在计算标准差时, 若对日频数据计算标准差, 此时得到的为日频波动率, 需要乘以 $\sqrt{252}$ 进行年化 (见布朗运动中的方差可加性)。

假设 r_i 为一个资产的收益率, 对数收益率 $r_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$ (连续复利收益率) 时间序列, 令 $t = 1, 2, 3, \dots, N$, 其样本均值有 $\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i$, 则样本方差为:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2 \\
 &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 - 2\bar{r} \sum_{i=1}^N r_i + \sum_{i=1}^N \bar{r}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 - 2N\bar{r} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \right) + N\bar{r}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 - N\bar{r}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N r_i^2 - \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N r_i^2 - \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{i=1}^N r_i \right)^2
 \end{aligned}$$

由几何布朗运动可知, 在年化波动率为 σ , 则样本区间内的对数收益率的波动率应为 $\sigma\sqrt{T}$, 其中 T 以年为单位:

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]$$

若估计月波动率或年波动率, 如上计算样本标准差 s 即为 $\sigma\sqrt{T}$ 的估计, 因此波动率估计值为:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{T}}$$

对于在期间内支付了股息 D 的股票，该时间区间内的收益率应为：

$$r_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

【待核实】在 Black Scholes 的框架下，也就是假设股票价格服从 GBM 的时候，historical volatility 可以用 quadratic variation 计算。如下式：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = [X, X]_T = \sigma^2 T$$

其中 X_t 为股票价格的对数， t_0, t_1, \dots, t_n 为 $[0, T]$ 区间的一个划分。注意，这个和标准差不一样，这个其实是对数收益率的二阶距。可以证明，用 quadratic variation 得到的估计量是一致估计。???

10.4 已实现波动率

已实现波动率 (Realized volatility)，顾名思义，为已发生的波动率，即为对数收益率的标准差，实质上与历史波动率相同，都是已经发生的历史的波动率。在提到高频波动时，一般使用称之为已实现波动率。已实现波动率在文献中主要有几种作用：

- 已实现波动率即为历史波动率，例如过去一个月交易日波动率的标准差
- 高频日内已实现波动率，也可以作为历史波动率的替代
- 与其他波动率进行对比，在未来时点，可以对过去的波动率预测值如 GARCH、VIX 等，与对于期限内已实现波动率进行对比

对于高频波动率，当假设 $\bar{r} = 0$ ，并且日内有 n 个等时间区间的对数收益率时，日内已实现高频波动率（日波动率， $\times \sqrt{252}$ 年化）应有：

$$RV_t = \sum_{i=1}^N r_{t,i}^2 = \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{S_{t,i}}{S_{t,i-1}} \right)^2$$

在 Jiang 和 Tian (2005) 中，采用了对于时间跨度为 $[t, t + \tau]$ 的年化已实现方差 (Annulized ealized variance) 的调整，日内高频如五分钟收益率自相关系数较高，以 $l = 1$ 进行调整，而 30

分钟频率以上的数据则不作调整，其中 n 为在此期间内的期数。

$$V_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n r_i^2 + \frac{2}{\tau} \sum_{i=l}^{h=1} \left(\frac{n}{n-h} \right) \sum_{i=l}^{n-h} r_i r_{i+h}$$

当 $l = 1$ 时：

$$V_{t,\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n r_i^2 + \frac{2}{\tau} \left(\frac{n}{n-1} \right) \sum_{i=1}^{n-1} r_i r_{i+1}$$

以上只是最基础的计算日内高频波动率的方法，还有其他的计算日内波动率的方式如：

- Garman 和 Klass (1980)
- Andersen 和 Bollerslev (1998)
- Hansen 和 Lunde (2005)
- ...

10.5 条件异方差模型

用于对资产收益率的波动率建模的统计方法与计量模型，统称为条件异方差模型。Robert Engle 于 1982 年在《计量经济学》上提出了 ARCH 模型用于估计和预测波动率 (Engle 1982)。在此基础上，Bollerslev (1986) 提出了广义自回归条件异方差 (GARCH) 模型。后续还有如 Engle、Lilien 和 Robins (1987) 提出的 ARCH-M 模型，Newlson (1991) 提出的 EGARCH 模型，Glosten、Jagannathan 和 Runkle (1991) 提出的 GJR-GARCH 模型，Zakoian (1994) 的 TAGARCH 模型等等。

与随机波动率模型不同之处在于，ARCH 和 GARCH 模型，使用确定的函数来描绘 σ_t^2 的变化。而随机波动率模型，则使用随机方程，来描绘 σ_t^2 的变化。

10.5.1 ARCH 波动率

自回归条件异方差模型 (Autoregressive conditional heteroskedasticity model, ARCH 模型)。

10.5.2 GARCH 波动率

GARCH 为广义自回归条件异方差模型 (Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model)。

【核实】EWMA 方法即指数移动平均方法。EWMA 根据历史数据距当前时刻的远近，分别赋予不同的权重，距离现在越近，赋予的权重越大，我们认为越远的历史信息所起的作用越小，因此计算波动率时所赋予的权重越小。GARCH 与 EWMA 都使用到了指数移动平均，他们都赋予最近的信息以更大的权重，EWMA 事实上是一种特殊形式的 GARCH。

GARCH (1, 1) 模型方差如下：

$$\sigma_t^2 = a + br_{t-1,t}^2 + c\sigma_{t-1}^2$$

当取 $a = 0$, $b + c = 1$ 时，上式子有：

$$\text{GARCH}(1, 1) = a + br_{t-1,t}^2 + (1 - b)\sigma_{t-1}^2$$

同时又 EWMA 为

$$\text{EWMA} = a + \lambda r_{t-1,t}^2 + (1 - \lambda)\sigma_{t-1}^2$$

10.5.3 GJR-GARCH 波动率

GJR-GARCH 模型由 Glonsten、Jagannathan 和 Runkle (1993) 提出：

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma N_{t-1}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

其中 N_{t-1} 为新息 ε_{t-1} 的指示变量：

$$N_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

可以看出正的新息 ε_{t-1} 对 σ_t^2 的贡献为 $\alpha\varepsilon_{t-1}^2$ ，而负的新息 ε_{t-1} 对 σ_t^2 有更大的贡献 $(\alpha + \gamma)\varepsilon_{t-1}^2$ 。

10.6 随机波动率

随机波动率（Stochastic volatility）指随机过程的波动率为随机变量。

- Heston model
- SABR
- CEV（Constant elasticity of variance model）
- Local volatility

10.6.1 局部波动率

【核实】Local volatility，这个其实是一个作为 stochastic volatility 的一种替代做法，就是认为 volatility 是一个关于时间和资产价格的确定性函数 $\sigma(t, S_t)$ ，因此也叫 Deterministic Volatility Function (DVF)。这样做也就是为了避免 Heston Model 等 stochastic volatility 带来的计算复杂度。Dupire 给出了一种计算 local volatility 的方法：

$$\sigma^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

10.7 隐含波动率

如上文所述，隐含波动率（Implied volatility）指并不使用历史数据进行预测，从市场价格中得到的波动率信息。因为在一个充分竞争的市场交易之中，市场当前的价格已经包含了对未来波动率的预期，因此只需要将波动率信息从当前市场价格信息中提取出来。因为波动率隐藏在市场价格之中，称之为隐含波动率。

具体可分为有模型的波动率与无模型的波动率。有模型的波动率如 BS 隐含波动率，将市场价格通过 BS 模型提取其中的波动率。模型都需要基于一定的假定，而无模型波动率，不依赖期权定价模型（如 BS），只需要最基本的假设，即可直接从市场价格提取出隐含波动率。

【待核实】由于是根据期权市场价格求得，实际为风险中性下的，标的证券在到期日之内波动率的期望。而实际中，证券存续的时间远远超过期权存续的时间。因此隐含波动率，与现实波动率存在两个方向的差异，第一是风险中性测度与现实测度的差异，即不考虑风险溢价，第二为存续时间的差异，期权存续时间较短，而股票存续时间较长，在较长的时间内波动应该相对更为平稳。

BSIV 与 MFIV 为风险中性下的波动率

10.7.1 BS 隐含波动率

假定市场上的期权或者权证的交易价格满足 Black-Scholes-Merton (BSM) 期权定价公式，将市场上可以观测到的标的资产价格 (S)、执行价格 (K)、利率 (r)、期限 (τ) 作为已知变量代入定价公式中，则可以得到期权当前的市场价格所隐含的波动率，此时提取的为期限内的波动率 (option-implied volatility expectations until expiration)，BS 隐含波动率 (BS implied volatility) 为未来波动率的预期。

$$\begin{aligned} c &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ p &= K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

10.7.2 无模型波动率

虽然一般将无模型波动率 (Model-free implied volatility) 认为是“BS 隐含波动率的一种加权平均”更方便理解，但事实上无模型波动率与 BS 模型完全没有关系。虽然早期的 VIX 是由 8 个期权的隐含 BS 波动率加权得到的 30 天（日历日或 22 个交易日）波动率预期 (Whaley (1993))，标的为 S&P100 (OEX)，而当时 S&P500 (SPX) 交易量只有其五分之一。CBOE 于 2003 年将 VIX 更新为无模型波动率 (Demeterfi et al. (1999))，并保持了原有的 VIX 名称，而之前指数的

更名为 VXO。

如计算 BS 隐含波动率，使用这样的方法估计未来波动率的预期，其本质是基于 BS 期权定价模型的，即根据定价模型去拟合市场的价格，从而得到其中隐含的波动率。可想而知，根据定价模型的不同，得到的隐含波动率也不相同。由此引申出的无模型方法并不依赖具体的定价模型，只做最基本的假设，并且利用方差互换的原理进行计算。这样的波动率估计只需要假定股票价格的随机过程为 $dS_t/S_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ ，其中 μ_t 与 σ_t 均为时变，而不需要其他更严格的假定。这样计算出的无模型隐含波动率（如 VIX）并非某一合约的隐含波动率，而是未来一段时间内已实现波动率平方（Total variance）的期望。

对期权进行定价往往采用风险中性定价法，在风险中性的世界里，所有资产的预期收益率都等于无风险利率。同样对于未来一段时间内的波动率平均值的估计也可以认为是一种广义的“定价”，因此广义波动率被定义为风险中性的世界里从 0 时刻到 T 时刻期间的方差序列的平均值的平方根。

二次变差与波动率

对数收益率或连续收益率的平方应有：

$$\begin{aligned}(d \ln S_t)^2 &= \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma_t dW_t \right]^2 \\ &= \sigma_t^2 dW_t dW_t = \sigma_t^2 dt\end{aligned}$$

对其积分，有二次变差为：

$$QV_{0,T}^S = [\ln S, \ln S](0, T) = \int_0^T (d \ln S_t)^2 dt = \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

10.7.3 方差互换与 VIX

一个方差互换远期合约 f 在 $t = 0$ 时刻价值（Payoff）定义如下，其中 V 为未来已实现方差（ σ_R^2 ），为浮动端，而 K 为交割价格（Delivery price）。应为未来价值在风险中性下期望在当前时点的现值：

$$f = e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}}[V - K_{var}]$$

其中未来已实现方差的离散形式应有，假设一年有 252 个交易日：

$$V = \frac{252}{N} \sum_{i=1}^N (\ln S_i - \ln S_{i-1})^2 = \frac{252}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2$$

未来已实现方差的近似为，未来 N 个时间间距内的方差之和，并进而从离散形式逼近连续形式：

$$V = \frac{252}{N} \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 \approx \frac{1}{N\delta t} \sum_{i=1}^N \sigma_{t_{i-1}}^2 \delta t \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

因此在连续积分下，未来已实现方差应为：

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

只有在远期签订时，使得合约价值为 0 的固定方差 K_{var} 才是公平的：

$$f = e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 dt - K_{var} \right] = 0$$

此时具有公平交割价值（fair delivery value）的固定方差应为：

$$K_{var} = \frac{1}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right]$$

假设标的资产价格满足如下随机过程：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

使用 Ito 公式可得，对数收益率为：

$$d \ln S_t = \left(\mu_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dW_t$$

在风险中性测度下，此时 $\mu = r$ 为常数，由于 $\int_0^T \sigma_t d\widetilde{W}_t$ 为随机波动项，因此取期望后为 0。

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right] &= \widetilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T r dt + \int_0^T \sigma_t d\widetilde{W}_t \right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}} \left[r \int_0^T dt \right] = rT\end{aligned}$$

对于上述对数收益率 $d \ln S_t$ ，在风险中性下有：

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{\sigma_t^2}{2} dt &= \int_0^T r dt + \int_0^T \sigma_t d\widetilde{W}_t - \int_0^T d \ln S_t \\ &= rT - \ln S_T + \ln S_0 + \int_0^T \sigma_t d\widetilde{W}_t \\ &= \ln e^{rT} - \ln S_T + \ln S_0 + \int_0^T \sigma_t d\widetilde{W}_t \\ &= -[\ln S_T - \ln S_0 e^{rT}] + \int_0^T \sigma_t d\widetilde{W}_t \\ &= -\left[\ln \frac{S_T}{S_0 e^{rT}} \right] + \int_0^T \sigma_t d\widetilde{W}_t\end{aligned}$$

需要注意 S_T 为随机变量，并且有 $\widetilde{\mathbb{E}}_0(S_T) = S_0 e^{rT} = F_{0,T}$ 。

$$\begin{aligned}K_{var} &= \frac{1}{T} \widetilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \widetilde{\mathbb{E}} \left[-\ln \frac{S_T}{S_0 e^{rT}} \right] = \frac{2}{T} \widetilde{\mathbb{E}} \left[-\ln \frac{S_T}{F} \right] \\ &= \frac{2}{T} \widetilde{\mathbb{E}} \left[\ln \frac{F}{K_0} - \ln \frac{S_T}{K_0} \right]\end{aligned}$$

或将 $\frac{dS_t}{S_t}$ 与 $d \ln S_t$ 两式相减，进消去随机波动项 $\sigma_t dW_t$ ：

$$\frac{dS_t}{S_t} - d \ln S_t = \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

则未来已实现方差应为：

$$\begin{aligned}
 K_{var} &= \frac{1}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \int_0^T \left[\frac{dS_t}{S_t} - d \ln S_t \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \int_0^T d \ln S_t \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[rT - \ln \frac{S_T}{S_0} \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} [\ln S_0 e^{rT} - \ln K_0 + \ln K_0 - \ln S_T] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\ln \frac{S_0 e^{rT}}{K_0} - \ln \frac{S_T}{K_0} \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\ln \frac{F}{K_0} - \ln \frac{S_T}{K_0} \right]
 \end{aligned}$$

利用下述两种方法：带积分余项的泰勒展开式，以及狄拉克 δ 函数，在 $K = K_0$ 处展开带有随机变量的 S_T 的 $\ln \frac{S_T}{K_0}$ 项则有：

$$\begin{aligned}
 K_{var} &= \frac{1}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\ln \frac{F}{K_0} - \ln \frac{S_T}{K_0} \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\ln \frac{F}{K_0} - f'(K_0)(S_T - K_0) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{K_0} f''(K)(K - S_T)^+ dK - \int_{K_0}^\infty f''(K)(S_T - K)^+ dK \right] \\
 &= \frac{2}{T} \tilde{\mathbb{E}} \left[\ln \frac{F}{K_0} - \frac{S_T - K_0}{K_0} + \int_0^{K_0} \frac{(K - S_T)^+}{K^2} dK + \int_{K_0}^\infty \frac{(S_T - K)^+}{K^2} dK \right]
 \end{aligned}$$

对于前两项，并使用泰勒级数分解 $\ln \frac{F}{K_0}$ ，即令 $f(x) = \ln(x)$ ，并在 $\frac{F}{K_0}$ 处展开。在使用泰勒

展开时忽略了二次以上的高次项，因此存在着估计误差（Approximation error）：

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{E}} \left[\ln \frac{F}{K_0} - \frac{S_T - K_0}{K_0} \right] &= -\frac{\tilde{\mathbb{E}}(S_T) - K_0}{K_0} + \ln \frac{F}{K_0} \\
 &= -\frac{F - K_0}{K_0} + \left[f(1) + f'(1) \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} f''(1) \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^3 \right] \\
 &= -\left(\frac{F}{K_0} - 1 \right) + \left[0 + \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^3 \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^3
 \end{aligned}$$

对于后两项积分项，将其离散化，其中 $Q(K_i)$ 为行权价为 K_i ，**虚值**看涨和看跌期权的价格，注意在离散化的过程中会出现离散误差（Discretization error）的估计误差：

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{E}} \left[\int_0^{K_0} \frac{(K - S_T)^+}{K^2} dK + \int_{K_0}^{\infty} \frac{(S_T - K)^+}{K^2} dK \right] &= \int_0^{K_0} \frac{\tilde{\mathbb{E}}(K - S_T)^+}{K^2} dK + \int_{K_0}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbb{E}}(S_T - K)^+}{K^2} dK \\
 &= \int_0^{K_0} \frac{e^{rT} P(K)}{K^2} dK + \int_{K_0}^{\infty} \frac{e^{rT} C(K)}{K^2} dK \\
 &\approx \sum_{K_i < K_0} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} P(K_i) + \sum_{K_i \geq K_0} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} C(K_i) \\
 &= \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i)
 \end{aligned}$$

将上述部分合并，可得：

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &\approx \frac{2}{T} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2 + \int_0^{K_0} \frac{e^{rT} P(K)}{K^2} dK + \int_{K_0}^{\infty} \frac{e^{rT} C(K)}{K^2} dK \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{K_0} \frac{e^{rT} P(K)}{K^2} dK + \int_{K_0}^{\infty} \frac{e^{rT} C(K)}{K^2} dK \right] - \frac{1}{T} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2
 \end{aligned}$$

最终得到方差计算如下，其中 F 为到期期限与期权相同的远期价格， K_0 为第一个低于远期价格的行权价，而 $\Delta K = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$ ，为上下两个行权价间隔的一半，实则为平均行权价间隔。同时

由于现实中行权价范围并非无限，为 $[K_L, K_U]$ ，将出现截断误差（Truncation error）的估计误差：

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

VIX 为年化未来 30 天（日历日或约 22 天交易日）的波动率，将两个不同期限的方差进行线性插值即可得到：

$$\text{VIX} = 100 \times \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left[\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] + T_2 \sigma_2^2 \left[\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] \right\} \times \frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

10.7.4 积分型余项的泰勒公式方法

在 Carr 和 Wu（2006）《A Tale of Two Indices》中使用了带积分余项（Integral form of the remainder）的泰勒公式进行求解（三种余项分别为：积分余项、Lagrange 余项和 Peano 余项）。令 $f(x) = \ln x$ ， $x = F$ ， $a = K_0$ 和 $n = 1$ ，则有：

$$f(F) = \frac{f(K_0)}{0!} (F - K_0)^0 + \frac{f'(K_0)}{1!} (F - K_0)^1 + \frac{1}{1!} \int_{K_0}^F f''(K) (F - K)^1 dK$$

整理后得到：

$$\ln F = \ln K_0 + \frac{F - K_0}{K_0} - \int_{K_0}^F \frac{F - K}{K^2} dK$$

由于不能确定 S_T 与 S_0 之间的大小，因此将最后一项积分分解。第一项为 $S_T \geq S_0$ 的情形，而第二项为 $S_T \leq S_0$ 的情形：

$$\int_{K_0}^F \frac{F - K}{K^2} dK = \int_F^{K_0} \frac{(K - F)^+}{K^2} dK + \int_{K_0}^F \frac{(F - K)^+}{K^2} dK$$

由于 F 为随机变量在积分的上下限不方便处理，因此将其改写，加入积分为零的部分：

$$\int_{K_0}^F \frac{F - K}{K^2} dK = \int_0^{K_0} \frac{(K - F)^+}{K^2} dK + \int_{K_0}^\infty \frac{(F - K)^+}{K^2} dK$$

整理可得：

$$\ln F = \ln K_0 + \frac{F - K_0}{K_0} - \int_0^{K_0} \frac{(K - F)^+}{K^2} dK - \int_{K_0}^{\infty} \frac{(F - K)^+}{K^2} dK$$

10.7.5 狄拉克 δ 函数性质

对于狄拉克函数 (Dirac delta function) 定义如下。根据定义易知 $\delta(x) = \delta(-x)$ 。并且对其平移 $\delta(x - a)$ ，即在 $x = a$ 为无穷。

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \delta(-x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

推论 10.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) dx = 1$$

证明. 假设有函数：

$$d_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & -\tau < x < \tau \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

此时可以发现 d_{τ} 的积分， $\int_{-\infty}^{+\infty} d_{\tau}(x) dx = 1$ 。当 τ 不断变小的时候 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} d_{\tau}(t) = \delta(x)$ ，那么此时对于狄拉克函数，其积分应有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

进行换元，令 $x' = -x$ ，上下积分符号调换两次保持不变，则有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) dx = \int_{x'=\infty}^{x'=-\infty} \delta(x') d(-x') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') dx' = 1$$

□

推论 10.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

证明.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\delta(x-x_0)dx$$

在一个极小的区间内, 利用积分中值定理, $f(x) = f(x_0)$ 可以提出积分外:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

□

推论 10.3.

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$$

证明. 易知 δ 函数只在 $x = x_0$ 有定义, 因此等式两边函数性质相同, 并且由如上可知两者积分性质也相同, 因此等式两边相等。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\delta(x-x_0)dx$$

□

利用如上性质, 令 $f(x) = x$, $x_0 = 0$ 易知 $x\delta(x) = 0$

推论 10.4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)dx = \delta(x_1-x_2)$$

证明. 已知:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_1)dx = f(x_1)$$

并使用 $x' = x - x_2$ 换元, 可得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_2) \delta(x - x_1) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') \delta(x' - x_1 + x_2) dx' = \delta(x_1 - x_2)$$

□

推论 10.5. 已知赫维赛德阶跃函数 (*Heaviside step function*) 或单位阶跃函数定义如下:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \equiv \mathbb{1}(x \geq 0)$$

其中 $\mathbb{1}(\cdot)$ 为指示函数 (*Indicator function*)。并有狄拉克 δ 函数为赫维赛德阶跃函数的导数, 两者有如下关系:

$$H'(x) = \delta(x) \quad \text{且} \quad H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(s) ds$$

同时可知赫维赛德阶跃函数的积分为 $\max(x, 0)$ 函数:

$$(x)^+ = \max(x, 0) = \int H(x) dx$$

10.7.6 狄拉克 δ 函数方法

参考 Carr 和 Madan (1998) 在《Towards a Theory of Volatility Trading》中推导。假设 $f(x)$ 为 payoff, 则根据狄拉克 δ 函数的 Sifting corollary 改写函数为积分形式, 并将积分分解为两部分 (K_0 非负)。为方便后续计算, 利用狄拉克 δ 函数偶函数的性质将第一部分积分改写为 $K - F$ 。

$$\begin{aligned} f(F) &= \int_0^{\infty} f(K) \delta(F - K) dK \\ &= \int_0^{K_0} f(K) \delta(F - K) dK + \int_{K_0}^{\infty} f(K) \delta(F - K) dK \\ &= \int_0^{K_0} f(K) \delta(K - F) dK + \int_{K_0}^{\infty} f(K) \delta(F - K) dK \end{aligned}$$

使用分部积分法 (Integration by parts) 将积分项进行分解, 即 $\int u dv = uv - \int v du$, 或具体

而言：

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx\end{aligned}$$

已知对于狄拉克 δ 函数可使用赫维赛德阶跃函数或指示函数表示其积分。令 $u = f(K)$, $u' = f'(K)$, $v' = \delta(K - F)$, 1, 因此对于第一项积分有：

$$\begin{aligned}\int_0^{K_0} f(K)\delta(K - F)dK &= \left[f(K)\mathbb{1}(F < K) \right]_0^{K_0} - \int_0^{K_0} f'(K)\mathbb{1}(F < K)dK \\ &= f(K_0)\mathbb{1}(F < K_0) - \cancel{f(0)\mathbb{1}(F < 0)} - \int_0^{K_0} f'(K)\mathbb{1}(F < K)dK \\ &= f(K_0)\mathbb{1}(F < K_0) - \int_0^{K_0} f'(K)\mathbb{1}(F < K)dK\end{aligned}$$

同理对于第二项积分, 令 $u = f(K)$, $du = f'(K)dK$, $dv = \delta(F - K)dK$, 此时需注意链式法则, 如对 $H(F - K)$ 求导应有：

$$\frac{dH(F - K)}{dK} = H'(F - K) \frac{d(F - K)}{dK} = \delta(F - K) \cdot (-1)$$

因此有 $v = -H(F - K) = -\mathbb{1}(F - K \geq 0) = -\mathbb{1}(F \geq K)$, 得到：

$$\begin{aligned}\int_{K_0}^{\infty} f(K)\delta(F - K)dK &= \left[-f(K)\mathbb{1}(F \geq K) \right]_{K_0}^{\infty} + \int_{K_0}^{\infty} f'(K)\mathbb{1}(F \geq K)dK \\ &= -\cancel{f(\infty)\mathbb{1}(F \geq \infty)} + f(K_0)\mathbb{1}(F \geq K_0) + \int_{K_0}^{\infty} f'(K)\mathbb{1}(F \geq K)dK \\ &= f(K_0)\mathbb{1}(F \geq K_0) + \int_{K_0}^{\infty} f'(K)\mathbb{1}(F \geq K)dK\end{aligned}$$

将两部分积分代入原式整理可得：

$$\begin{aligned}f(F) &= f(K_0)\mathbb{1}(F < K_0) + f(K_0)\mathbb{1}(F \geq K_0) \\ &\quad - \int_0^{K_0} f'(K)\mathbb{1}(F < K)dK + \int_{K_0}^{\infty} f'(K)\mathbb{1}(F \geq K)dK\end{aligned}$$

再次使用分部积分法继续分解上式中的两项积分。对于指示函数的积分 $\int_0^{K_0} \mathbb{1}(F < K) dK$ ，即计算高度为 1 的矩形面积。其宽度为 F 至积分上限 K_0 ，如果 $F < K_0$ 则有其积分（面积）为 $K_0 - F$ ；如过 $F > K_0$ ，则有积分值为 0：

$$\int_0^{K_0} \mathbb{1}(F < K) dK = \begin{cases} K_0 - F & F < K_0 \\ 0 & F > K_0 \end{cases} \Leftrightarrow (K_0 - F)^+$$

或令 $u = f'(K)$ ， $du = f''(K)dK$ ， $dv = \mathbb{1}(F < K)dK$ ， $v = (K - F)^+$ ，因此第一项积分有：

$$\begin{aligned} \int_0^{K_0} f'(K) \mathbb{1}(F < K) dK &= \left[f'(K)(K - F)^+ \right]_0^{K_0} - \int_0^{K_0} f''(K)(K - F)^+ dK \\ &= f'(K_0)(K_0 - F)^+ - \cancel{f'(0)(0 - F)^+} - \int_0^{K_0} f''(K)(K - F)^+ dK \\ &= f'(K_0)(K_0 - F)^+ - \int_0^{K_0} f''(K)(K - F)^+ dK \end{aligned}$$

对于第二项积分，令 $u = f'(K)$ ， $du = f''(K)dK$ ，同时需注意链式法则带来的符号改变 $dv = \mathbb{1}(F \geq K)dK$ ， $v = -(F - K)^+$ ：

$$\begin{aligned} \int_{K_0}^{\infty} f'(K) \mathbb{1}(F \geq K) dK &= \left[-f'(K)(F - K)^+ \right]_{K_0}^{\infty} + \int_{K_0}^{\infty} f''(K)(F - K)^+ dK \\ &= -\cancel{f'(\infty)(F - \infty)^+} + f'(K_0)(F - K_0)^+ + \int_{K_0}^{\infty} f''(K)(F - K)^+ dK \\ &= f'(K_0)(F - K_0)^+ + \int_{K_0}^{\infty} f''(K)(F - K)^+ dK \end{aligned}$$

整理，最终结果为：

$$\begin{aligned}
 f(F) &= f(K_0)\mathbb{1}(F < K_0) + f(K_0)\mathbb{1}(F \geq K_0) \\
 &\quad - \left[f'(K_0)(K_0 - F)^+ - \int_0^{K_0} f''(K)(K - F)^+ dK \right] \\
 &\quad + \left[f'(K_0)(F - K_0)^+ + \int_{K_0}^{\infty} f''(K)(F - K)^+ dK \right] \\
 &= f(K_0) + f'(K_0) [(F - K_0)^+ - (K_0 - F)^+] \\
 &\quad + \int_0^{K_0} f''(K)(K - F)^+ dK + \int_0^{K_0} f''(K)(F - K)^+ dK \\
 &= f(K_0) + f'(K_0)(F - K_0) \\
 &\quad + \int_0^{K_0} f''(K)(K - F)^+ dK + \int_{K_0}^{\infty} f''(K)(F - K)^+ dK
 \end{aligned}$$

备注 10.6. 观察分解式，可以理解为对数期货的盈亏分解式，或人造对数合约 (*synthetic log-future*) 的合成。其中包含了四个部分：等式左边为对数期货多头；等式右边第一项为持有了 $\frac{1}{S_0}$ 份的期货多头；第二项为持有 $\frac{1}{K^2}$ 份，期限为 T ，行权价在 0 与 S_0 之间的认沽期权空头的组合；同样，第三项为 $\frac{1}{K^2}$ 份，期限为 T ，行权价在 S_0 与 ∞ 之间的认购期权空头的组合。

$$\ln F - \ln K_0 = \frac{F - K_0}{K_0} - \int_0^{K_0} \frac{(K - F)^+}{K^2} dK - \int_{K_0}^{\infty} \frac{(F - K)^+}{K^2} dK$$

10.7.7 DDKZ 方差与 BJN 方差

在 Jiang 和 Tian (2007) 中，证明了 Demeterfi et al. (1999) 或称 DDKZ 方差，Britten-Jones 和 Neuberger (2000) 与 Jiang 和 Tian (2005) 的无模型隐含方差 (Model-free implied variance) 为或称 BJN 方差等价关系。对于 BJN 方差，具体为：

$$V_{\text{BJN}} = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} \frac{e^{rT} C(T, K) - \max(0, S_0 e^{rT} - K)}{K^2} dK$$

并将积分以 $F_0 = S_0 e^{rT}$ 分为两个部分，即实值和虚值两部分，因此有：

$$V_{\text{BJN}} = \frac{2e^{rT}}{T} \left[\int_0^{F_0} \frac{C(T, K) - S_0 + K e^{-rT}}{K^2} dk + \int_{F_0}^{\infty} \frac{C(T, K)}{K^2} dK \right]$$

使用看涨-看跌平价关系，可以将第一项积分转化为看跌期权价格：

$$V_{\text{BJN}} = \frac{2e^{rT}}{T} \left[\int_0^{F_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dk + \int_{F_0}^{\infty} \frac{C(T, K)}{K^2} dK \right]$$

进一步改写为 S_* 与 F_0 为边界的积分：

$$V_{\text{BJN}} = \frac{2e^{rT}}{T} \left[\int_0^{S_*} \frac{P(T, K)}{K^2} dk + \int_{S_*}^{\infty} \frac{C(T, K)}{K^2} dK + \int_{S_*}^{F_0} \frac{P(T, K) - C(T, K)}{K^2} dK \right]$$

再次使用看涨-看跌平价关系，可以将第三项改写：

$$V_{\text{BJN}} = \frac{2e^{rT}}{T} \left[\int_0^{S_*} \frac{P(T, K)}{K^2} dk + \int_{S_*}^{\infty} \frac{C(T, K)}{K^2} dK + \int_{S_*}^{F_0} \frac{Ke^{-rT} - S_0}{K^2} dK \right]$$

将第三项积分可得：

$$\begin{aligned} \int_{S_*}^{F_0} \frac{Ke^{-rT} - S_0}{K^2} dK &= e^{-rT} \int_{S_*}^{F_0} \frac{1}{K} dK - S_0 \int_{S_*}^{F_0} \frac{1}{K^2} dK \\ &= e^{-rT} [\ln K]_{S_*}^{F_0} + S_0 \left[\frac{1}{K} \right]_{S_*}^{F_0} \\ &= e^{-rT} [\ln F_0 - \ln S_*] + S_0 \left[\frac{1}{F_0} - \frac{1}{S_*} \right] \\ &= e^{-rT} [\ln S_0 + \ln e^{-rT} - \ln S_*] + S_0 \left[\frac{S_* - F_0}{F_0 S_*} \right] \\ &= e^{-rT} rT - e^{-rT} \ln \frac{S_*}{S_0} + e^{-rT} \left[\frac{S_* - S_0 e^{rT}}{S_*} \right] \\ &= e^{-rT} \left[rT - \frac{S_0 e^{rT} - S_*}{S_*} - \ln \frac{S_*}{S_0} \right] \end{aligned}$$

代回原式：

$$V_{\text{BJN}} = \frac{2}{T} \left[rT - \frac{S_0 e^{rT} - S_*}{S_*} - \ln \frac{S_*}{S_0} + e^{rT} \int_0^{S_*} \frac{P(T, K)}{K^2} dk + e^{rT} \int_{S_*}^{\infty} \frac{C(T, K)}{K^2} dK \right]$$

10.7.8 自适应无模型波动率（AVIX）

由 Zheng, Jiang, 和 Chen (2017) 中提出，采用自适应（Adaptive）的方法计算无模型方差。

在远期测度下（ \mathbb{T} -forward measure）， t 时刻，标的资产 S 的二次变差可用如下方法计算：

$$\mathbb{E}_t^\mathbb{T} [QV_{t,T}^S] = \mathbb{E}_t^\mathbb{T} [QV_{t,T}^F] - \mathbb{E}_t^\mathbb{T} [QV_{t,T}^B] + 2\mathbb{E}_t^\mathbb{T} [CV_{t,T}^{B,S}]$$

其中远期得二次变差如下，对于 ε_t 为跳跃误差项（Jump error）可证明其足够小可以被忽略：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^\mathbb{T} [QV_{t,T}^F] &= \frac{2}{B_t} \int_0^\infty \frac{c_t(T, K) - B_t \max(F_t - K, 0)}{K^2} dK - 2\varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \mathbb{E}_t^\mathbb{T} \left[\int_t^T \int_{R^0} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} v_u^\mathbb{T}(dx) du \right) \right] \end{aligned}$$

与 VIX 相同，AVIX 计算 30 天（日历日）的二次变差的期望。因此第一项在实际计算中，需要通过前后插值得到 30 天值。其中 T_1 应为小于 30 天，而 T_2 应大于 30 天，但当 T_1 小于等于 3 天，应选取接下两组期限最近的期权作进行计算。

$$\frac{T_2 - 30}{T_2 - T_1} IV_{T_1} + \frac{30 - T_1}{T_2 - T_1} IV_{T_2}$$

其中 IV_{T_1} 与 IV_{T_2} 分别为，即为标的资产二次变差第一项进行离散化：

$$\begin{aligned} IV_{T_1} &= \frac{2}{B(t, T_1)} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{c}_t(T_1, K_i) - B(t, T_1) \max(F^*(t, T_1) - K_i, 0)}{K_i^2} \Delta K_i \\ IV_{T_2} &= \frac{2}{B(t, T_2)} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{c}_t(T_2, K_i) - B(t, T_2) \max(F^*(t, T_2) - K_i, 0)}{K_i^2} \Delta K_i \end{aligned}$$

相比 VIX, AVIX 为自适应（Adaptive）的，即选择流动性较好的期权数据进行计算 \bar{c}_t 。根据自适应选取的流动性较好的期权价格，再针对截断误差（Truncation errors）与离散误差（Discretization errors），进行插值（Interpolation）与外推（Extrapolation），从而计算第一项的离散积分值。

具体而言，选取实际市场中观察到的一系列的 $c(T, K)$ 与 K ，使用 BS 公式将其转换为其隐含波动率 σ 。随后在市场所观测到的行权价范围 (K_{\min}, K_{\max}) 之内，根据所需要的 K' 进行三次样条插值（Cubic spline interpolation），得到插值后的 σ' 。

对于市场可观测行权价范围之外的，需要插值的 K' ，对于 $K' < K_{\min}$ 则使用 $\sigma' = \sigma_{K_{\min}}$ 。同理，对于 $K' > K_{\max}$ 则使用 $\sigma' = \sigma_{K_{\max}}$ 。最后，将所有插值得到的 K' 与 σ' ，通过 BS 进行计算，

得到市场不能观察到的 $c'(T, K')$ ，进行积分最终得到第一项的离散化积分值。

在 Jiang 和 Tian (2005) 中证明了，当两侧截断的点超过 $2 \cdot \text{SD} \times F^*$ 时，截断误差可以忽略。而离散误差在 $\Delta K < 0.35 \cdot \text{SD}$ 可忽略。取当前计算期权组内最大交易量，即流动性最好的期权合约（看涨或看跌）的隐含波动率，作为上述 SD。需注意求出的隐含波动率为年化隐含波动率，作为 SD 时，应该匹配对应期限。

$$\bar{c}_t(T, K) = \begin{cases} c_t(T, K) & V_{\text{call}} > 150\% \cdot V_{\text{put}} \\ \frac{c_t(T, K) + p_t(T, K) + F_t^* B_t - K B_t}{2} & \frac{1}{150\%} \cdot V_{\text{put}} \leq V_{\text{call}} \leq 150\% \cdot V_{\text{put}} \\ p_t(T, K) + F_t^* B_t - K B_t & V_{\text{call}} < \frac{1}{150\%} \cdot V_{\text{put}} \end{cases}$$

F_t^* 由 PCP 关系计算获得，即：

$$\begin{aligned} c_t + K B_t &= p_t + S_t = p_t + F_t^* B_t \\ F_t^* &= \frac{c_t - p_t}{B_t} + K = (c_t - p_t)e^{r(T-t)} + K \end{aligned}$$

综上，对于标的资产 S 的二次变差，加入第二项与第三项，计算结果如下，其中 $w = T - t$ ：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^\mathbb{T} [QV_{t,T}^S] &\approx \frac{2}{B_t} \sum_{i=1}^m \frac{\bar{c}_t(T, K_i) - B_t \max(F_t^* - K_i, 0)}{K_i^2} dK \\ &\quad - \sum_{u=t-w}^t d \ln B_u \cdot \ln B_u + 2 \sum_{u=t-w}^t d \ln S_u \cdot \ln B_u \end{aligned}$$

因此对于 AVIX 年化后，最终结果为：

$$\text{AVIX} = 100 \times \sqrt{\mathbb{E}_t^\mathbb{T} [QV_{t,T}^S] \times \frac{365}{T}}$$

11 波动率微笑

11.1 波动率风险溢价

关于波动率风险溢价为现实预期与风险中性预期之差，在考虑了投资者情绪则应有：

$$\begin{aligned}\text{风险中性预期} &= \text{现实预期} - \text{波动率风险溢价} \\ &= \text{现实理性预期} + \text{投资者情绪} - \text{波动率风险溢价}\end{aligned}$$

如果波动率的系统性风险（无法通过分散化解）为正，波动率就不是好东西，人们不愿意够买与波动率正相关的产品，这类产品的价格就应该较低，因此波动率风险溢价为正，现实世界中的波动率预期应大于隐含波动率的预期。

如果波动率的系统性风险为负，那么波动率就是个好东西，人们愿意购买与波动率正相关的产品，这类产品的价格应该更高，因此波动率风险溢价为负，现实世界的波动率预期就应该小于隐含波动率的预期。

或者说只有正的系统性风险，增加了无法分散的风险，才需要获得整的风险溢价。而相反，负的系统性风险，则能减少系统性风险，因此获得了好处，不应获得风险溢价，而应该支付风险溢价。

11.2 看涨看跌期权与波动率微笑

欧式看涨与看跌期权具有执行价格（行权价）和期限时，他们的隐含波动率是一样的。这说明欧式看涨期权的波动率微笑，与相同期限的欧式看跌期权的波动率微笑应该相同。已知对于相同期限（ T ）、相同执行价格（ K ）的看涨看跌期权，根据 PCP 关系有：

$$C_{t,T} + Ke^{-r(T-t)} = P_{t,T} + S_t$$

假设 C_{BS} 与 P_{BS} 是由 BSM 得到的看涨看跌期权价格，同时假设 C_{mkt} 与 P_{mkt} 为期权的市

场价格，那么应有：

$$C_{BS} + Ke^{-r(T-t)} = P_{BS} + S_t$$

$$C_{mkt} + Ke^{-r(T-t)} = P_{mkt} + S_t$$

此时将两式相减，则有：

$$C_{BS} - C_{mkt} = P_{BS} - P_{mkt}$$

说明有由 BSM 公式得到的相同期限与执行价格的看涨看跌期权的定价，与市场价格误差完全相同。当由 C_{mkt} 得到的隐含波动率，假设为 20%，此时当 BSM 模型中的波动率为 20% 时，即有 $C_{BS} = C_{mkt}$ ，由于由 BSM 计算的 C_{BS} 与 P_{BS} 使用的波动率相同为 20%，此时则有 $P_{BS} = P_{mkt}$ 。此时由于看涨看跌期权期限与执行价格相同，意味着此时看跌期权 P_{mkt} 的隐含波动率也为 20%。说明欧式看涨期权的隐含波动率与具有同样执行价格和期限的看跌期权的隐含波动率相同，即对于欧式看涨期权与看跌期权，其波动率（隐含）微笑，波动率曲面应重合。

11.3 波动率微笑与偏斜的一些解释

从 BSM 假定不足解释：

- 资产对数收益率非正态：在 BS 的假设中资产价格服从对数正态分布，而资产对数收益率则服从正态分布。但在实证过程中，金融资产的收益率都呈现出尖峰肥尾的特征，即极端值发生的概率高于正态分布。假设中采用正态分布，实质上低估了极端事件发生的概率，因此低估了深度实值和深度虚值期权的价格
- 跳跃：BS 假设资产服从几何布朗运动，带忽略了资产价格出现跳跃的可能，因此低估了深度实值和深度虚值期权的价格（或理解为对于无法分散的风险，空方需要额外的补偿）

从交易机制解释：

- 深度实值供给：对于深度实值的期权，投资者一般不会出售，因此市场的供给量较小，因此其溢价较高，根据 PCP 可知，其波动率与对应的另一虚值期权的波动率应相同，因此出现微笑
- 虚值看跌：1987 年金融危机，市场一天内跌幅超过 20%，因此市场参与者们

得出结论，低行权价的看跌期权（虚值看跌），比高行权价的看涨期权更有价值，因此其价格更高，导致隐含波动率上升，形成负偏（向下倾斜）

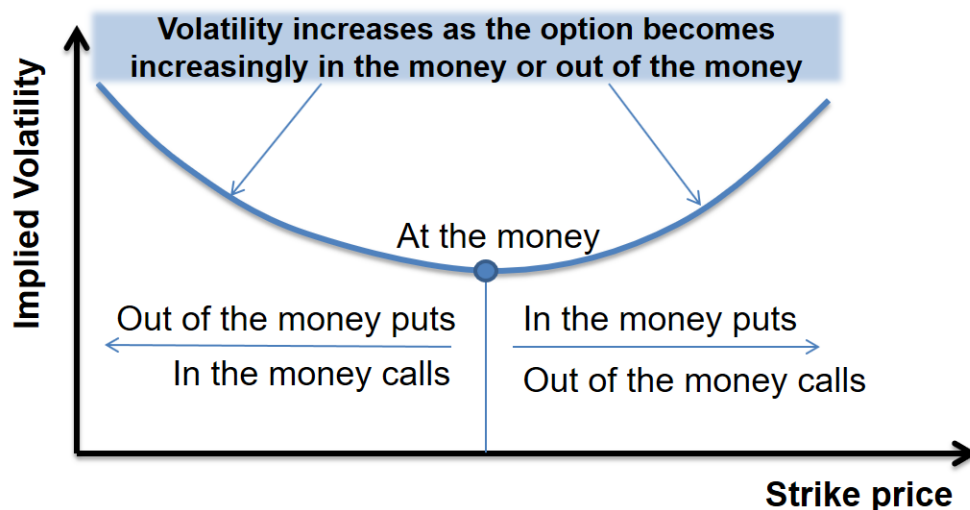


图 16: 波动率微笑

11.4 波动率微笑与波动率偏斜

波动率微笑 (Volatility smile) 定义为期权的隐含波动率与在值程度 (K/S 或 K/F) 的曲线。或可以定义为隐含波动率与期权 Delta 之间的关系，在这样定义下，一般将平值期权定义为 $\Delta = 0.5$ 的看涨期权，或 $\Delta = -0.5$ 的看跌期权，这些平值期权一般称为“50-delta 期权” (50-delta options)。

波动率微笑的不同取决于，资产的隐含分布：

- 若为标准正态分布（只有一、二阶矩），则应为一 条直线
- 若三阶矩有负偏（右偏），则投资者预期未来标的资产将大幅下跌概率大，则波动率微笑此时为一条斜向下的曲线，称为波动率偏斜 (Volatility skew)；若三阶矩为正偏（左偏），则变为斜向上的曲线
- 若四阶矩存在尖峰肥尾，则波动率微笑为对称，两侧向上弯曲的曲线，为波动率微笑

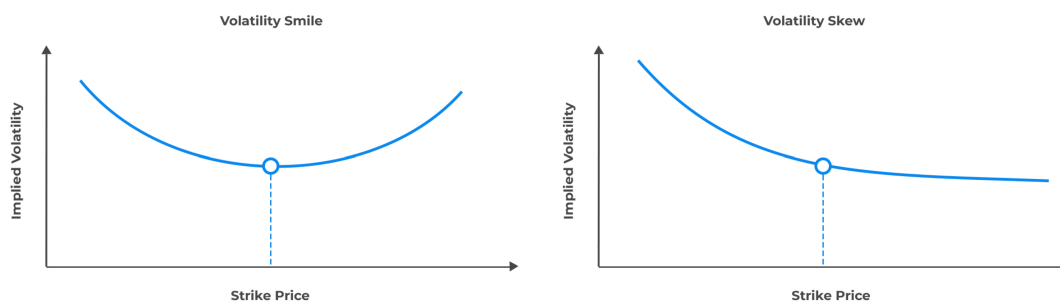


图 17: 波动率微笑与波动率偏斜

11.5 波动率微笑与隐含风险中性分布

通过在某一时刻到期的波动率微笑，可以确定这一时间的资产价格风险中性分布，将这一分布称之为隐含概率分布（Implied distribution）²

对于期限为 T 、执行价格为 K 的欧式看涨期权的价格应为如下所示。其中 r 为利率，假定为常数， g 为 S_T ：

$$c = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K) g(S_T) dS_T$$

此时如果对 K 求导，可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial K} &= -e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g(S_T) dS_T \\ &= -e^{-rT} \left[G(S_T) \right]_K^{\infty} \\ &= -e^{-rT} [G(\infty) - G(K)] \\ &= e^{-rT} [G(K) - G(\infty)] \end{aligned}$$

进一步对 K 求导：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2} &= \frac{\partial}{\partial K} [e^{-rT} G(K) - e^{-rT} G(\infty)] \\ &= e^{-rT} g(K) \end{aligned}$$

²见 OFOD 第十版第 20 章、章节末附录 20A 与 Breeden and Litzenberger (1978)

此时，概率密度函数 g 则：

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$$

这样就可以使用波动率微笑来估计风险中性概率分布。假定 c_1 、 c_2 和 c_3 为期限为 T ，执行价格为 $K - \delta$ 、 K 和 $K + \delta$ 的看涨期权，并假定 δ 较小，因此可得到近似：

$$\begin{aligned} g(K) &\approx e^{rT} \left[\frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2} \right] \\ &= e^{rT} \left[\frac{c(K - \delta, T) + c(K + \delta, T) - 2c(K, T)}{\delta^2} \right] \end{aligned}$$

12 波动率曲面

12.1 样条插值

使用最广泛的为样条插值 (Spline interpolation)，具体而言，为使用称之为样条的特殊分段多项式 (Piecewise polynomial) 进行插值。使用样条插值可以有效避免龙格现象 (Runge's phenomenon)，按照多项式次数，可分为线性（一次）样条插值（即数据点用直线进行连接）、二次样条插值、三次样条插值。对于三次样条插值 (Cubic spline interpolation) 要求函数值，一阶导数，二阶导数都连续（节点左右值相等）。而当使用的三次多项式形式为埃尔米特 (Hermite) 多项式时，又称之为三次埃尔米特样条插值 (Cubic Hermite interpolation)，要求节点 (knots) 值与一阶导数值相等。

假设对于带插值的 n 节点 x_0, x_1, \dots, x_n ，其中端点 (End points) 为 x_0, x_n 。可分为 n 个区间，假设区间内的样条函数为 S_1, \dots, S_n 。限制端点或数据点导数，或对其他条件进行限制，又可将三次样条插值方法进行如下划分：

- 钳制三次样条 (Clamped cubic spline)：限制端点的一阶导数值为任意值，即 $S'_1(x_0) = v_0$ 与 $S'_n(x_n) = v_n$
- 自然三次样条 (Natural cubic spline)：要求端点的二阶导数为零，即 $S''_1(x_0) = 0$ 与 $S''_n(x_n) = 0$
- 曲率调整三次 (Curvature-adjusted cubic spline)：端点的二阶导数不为零，为任意选择值，即 $S''_0(x_0) = v_0$ 与 $S''_n(x_n) = v_n$
- 非扭结三次样条 (Not-a-knot cubic spline)：不限制端点的导数，但限制除端点之外的第一个节点 x_1 ，与最后一个节点 x_{n-1} 两侧样条函数的三阶导数相等，

即 $S_1'''(x_1) = S_2'''(x_1)$ 与 $S_{n-1}'''(x_{n-1}) = S_n'''(x_{n-1})$

- 抛物线终结的三次样条（Parabolically terminated cubic spline）：第一段与最后一段的样条函数， S_1 与 S_n 的次数被限制在最高二次

另外有贝塞尔曲线（Bezier curves），为使得可以节点的导数值可以控制的样条，但作为牺牲，节点处的一阶与二阶导数的平滑性不再能保证，有线性贝塞尔曲线、二次贝塞尔曲线，三次贝塞尔曲线。B 样条（B-spline）或称为基样条（Basis spline），为贝塞尔曲线的一般化，可进一步推广为非均匀有理 B 样条（Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS）。

备注 12.1. *Python* 库

在 *python* 中可使用 `scipy.interpolate.CubicSpline` 进行插值

12.2 其他方法

在 Carr 和 Wu（2020）中，采用了 Independent bivariate Gaussian kernel 的方法。

13 远期（期货）

13.1 定价

定价思路为由于在签订远期合约时，双方签订在未来 T 时刻的交割价格（Delivery price），应基于双方公平的原则（Zero net market value at entry），使得远期合约签订之时其价值（Forward value）为零或 $f(0, S_0) = 0$ 。因此得到远期价格（Forward price） $F_{t,T}$ ，即在 t 时刻，使得远期合约价值为零的合理交割价格（可以理解为在 t 时刻不断的签订新的远期合约）。但在该合约签订之后，随着标的资产价格的变化，该合约的价值（ f ）将不断发生变化。

在无套利的框架下，并且远期价值和远期价格都只取决于当前的现货价格与持有成本，不额外反应对未来现货的预期。

- $F_{t,T}$ ：在 t 时刻时，到期时间为 T 的理论远期价格（标的物价格）
- $f(t, S_t)$ ：远期合约在 t 时刻的价值（合约价格）
- S_t ：远期（期货）标的资产在 t 时刻的价格
- K ：远期合约中的交割价格（Delivery price）

远期与期货的到期交割，保证了到期时远期或期货的价格与现货相同。另外需要注意，期货为标准化的远期合约，期货有逐日盯市制度（Mark-to-market），在每日现货发生变化，使得期货价格发生变化，根据合约的结算价格，计算各个投资者的盈亏，以此调整保证金账户。那么这样就相当于新签订一个到期时间不变的远期合约，即若不考虑期货合约日内的变化，期货合约的价值为零（每日结算将期货合约归零）。因此期货价格本质是交割价格或远期价格，而不是期货价值，由于期货价值日内很小，且当日结算后归 0。对于现金交割，由于盯市制度，因此交割实际反应的即当日的盈亏。同时，由于期货的盯市制度，使得每日的盈亏为“实盈实亏”，而远期则为“浮动盈浮亏”。多头若因市场下跌，而被强制平仓，那么其便由多头转为空头。反之，空头被强制平仓，则转换为多头，都将进一步加剧市场的波动。

并且与期权合约不同，期权买卖双方权利义务不对等。而期货买卖双方都有对等的权利与义务，期货买卖双方都需要支付保证金。对于期货的多头与空头，多头是持有资金购入商品，而空头是持有商品卖出获得资金。由于资金相较于商品更容易筹得，因此多头往往占据优势地位。容易进行逼空，即空头交不出那么多的商品。

风险中性定价

对于**远期合约**，其持有人在到期日 T 必须支付签订合同时约定的交割价格 K ，购买一份标的资产股票现货，此时远期合约的价值为 $S_T - K$ 。在风险中性条件下， t 时刻一份远期（期货）合约的价值 $f_t(t, S_t)$ 应为：

$$\begin{aligned} f(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}[S_T - K] \\ &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}(S_T) - e^{-r(T-t)} K \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} K \end{aligned}$$

在签订之时基于双方公平的原则，应有合约在签订 $t = 0$ 之时，远期合约的价值应为 0。因此可以确定合理的交割价格 K ，即为合理的远期价格 $F_{0,T}$ ：

$$f(0, S_0) = S_0 - e^{-rT} K = 0$$

此时合理的交割价格 $K = F_{0,T} = S_0 e^{rT}$ 。**远期价格**的定义为在 t 时刻，使得远期合约价值为

0 的交割价格。因此在 t 时刻，远期价格与现货价格之间的关系应为：

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$$

复制定价

假设投资者 A 购买了一份远期合约（多头），在 T 时刻到期时，履约时需要支付现金 K ，用于购买标的物其价格为 S_T 。因此在 t 时刻，此投资者持有的投资组合应为 $f_t + Ke^{-r(T-t)}$ 。假设投资者 B，在 t 时刻购买该远期合约的标的物，价格为 S_t ，并持有到期。两位投资者到期时都将持有一单位的标的资产，届时其价格为 S_T ，显然两个投资者在 t 时刻所拥有的投资组合价格应该相等，否则可进行套利，因此应有：

$$f(t, S_t) + Ke^{-r(T-t)} = S_t$$

由上可知，基于签订双方公平的原则，签订的远期价格 $F_{t,T}$ ，为使得远期合约为零的交割价格 K ，因此远期价格为 $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ 。对于金融期货而言，若无红利，可以发现远期价格 $F_{t,T}$ 与现货价格 S_t 之间仅相差货币时间价值，这部分货币的时间价值可理解为持有成本。购买远期不占用资金，无资金成本（假设保证金也会获得相应占用资金无风险利息）。相反购买现货则需要占用资金，应支付相应的无风险利息作为其持有成本。

13.2 红利资产调整

已知红利

远期合约期限之内，标的资产产生红利数额为 D ，其红利现值为 I_t ，由于股票进行分红后需要对股票进行除息处理，股票（现货）价格回落，并且由于持有远期合约并持有现货，因此不能获得红利，因此也应下调远期价格。则有 $S_t - I_t$ 为剔除红利的影响后，使其变为无红利资产。此时远期价格 $F_{t,T}$ 为使得远期合约价值为零的交割价格 K ：

$$f(t, S_t) + Ke^{-r(T-t)} = (S_t - I_t) = 0$$

则对于已知红利资产，其调整红利后的价格应为：

$$F_{t,T} = (S_t - I_t) e^{r(T-t)}$$

- **正红利：**付息债券（Coupon bond）、支付已知现金红利的股票。价格中包含红利，购买期货无法获得这部分收益，应从中扣除。
- **负红利：**黄金、白银，持有期间需要支付储藏成本。价格中不包含需要额外支付成本，可理解为如果黄金现货和期货价格相同，而黄金期货不需要储藏成本，那么所有人会直接购买黄金期货，所以在购买期货应加上这部分储藏成本，否则可以进行套利。

已知红利率

如上所述，若标的资产支付与现货价格成一定比率为 q 的红利（红利率），由于将使得股指回落，且持有远期不能获得红利，因此同样应剔除其影响。如对于股指期货而言，其成分会不断的进行分红，相当于是红利率，因此也应进行红利调整。由上述复制定价可知：

$$f(t, S_t) + K e^{-r(T-t)} = S_t e^{-q(T-t)} = 0$$

因此对于已知红利率 q 的资产，其调整之后的价格应为：

$$F_{t,T} = S_t e^{(r-q)(T-t)}$$

- 外汇远期和期货：外汇发行国的无风险利率
- 股指期货：市场平均红利率或零，取决于股指计算方式
- 远期利率协议：本国的无风险利率

13.3 $F_{t,T}$ 与 S_t

如上部分讨论，对于无红利金融期货与现货，由于持有远期不占用资金，而持有现货需占用资金，即利息成本，因此有关系 $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ 。并且对于有红利资产，也可以调整为无红利资产进行计算。而对于商品期货等则需要额外考虑储藏成本与便利收益。

在上述复制定价的例子中，根据一价定律（Law of one price）与无套利条件，持有远期合约 $f_{t,T}$ （与交割价格现值的资金）与持有现货持有到期，两者到期都将持有一单位现货 S_T 。由于持有远期合约，只在规定到期日交割标的资产，并不持有实际现货，因此无法获得持有现货的收益，因此持有现货获得的收益应该从中扣除。同样，持有现货到合约到期日的成本需计算在远期价格内。因此在 t 时刻，任意远期（期货）价格 F_t 与现货价格 S_t 有如下无套利关系：

$$\begin{aligned} F_{t,T} &= S_t + \text{净持有成本 (Net cost of carry)} \\ &= S_t + \text{合约期内持有成本 (Carry cost)} - \text{合约期内持有收益 (Carry return)} \\ &= S_t + \text{利息成本} + \text{储藏成本 (Storage cost)} - \text{红利收益} - \text{便利收益 (Convenience yield)} \end{aligned}$$

利息成本无可避免，若持有成本为 c ，那么应有 $F_{t,T} = S_t e^{(r+c)(T-t)}$ 。其中对于商品期货，便利收益指实际持有持有现货带来的收益，一般认为由于持有现货有两点优势：可从短期商品的紧缺中获利，也可保持生产线的运转。由于在 t 时刻，如现货价格和净持仓成本都为已知，则可确定期货价格。相反已知期货的价格与净持仓成本，则可确定现货价格，此为期货的价格发现功能。两者为相对价格关系，基于无套利条件得到。

基差与期货升贴水

对于商品期货而言，基差（Basis）指现货与远期价格之差（现货价格 Spot price 有时又被称为 Cash price）。通常基差指期限短减去期限长，而升贴水指对于期货而言，期货价格（期限长）大于现货价格（期限短）为升水，反之亦然。对于基差有：

$$\text{基差 (商品期货)} = \text{现货价格} - \text{期货价格}$$

那么对于商品期货而言：

- 正基差：现货价格高于期货价格，期货贴水（Backwardation），净持仓成本为负。此时的市场称为逆向市场（Inverted market），即期限较短合约（Near-maturity contract）的价格高于期限较远的合约（Far-maturity contract）。
- 负基差：现货价格低于期货价格，期货升水（Contango，支付交易延期费），净持仓成本为正。此时的市场被称之为正向市场或正常市场（Normal market），即期限较短的合约价格低于期限较远的合约。之所以称之为正向市场，由于大多

多数商品期货储藏成本较大，大于便利收益，使得期货升水。

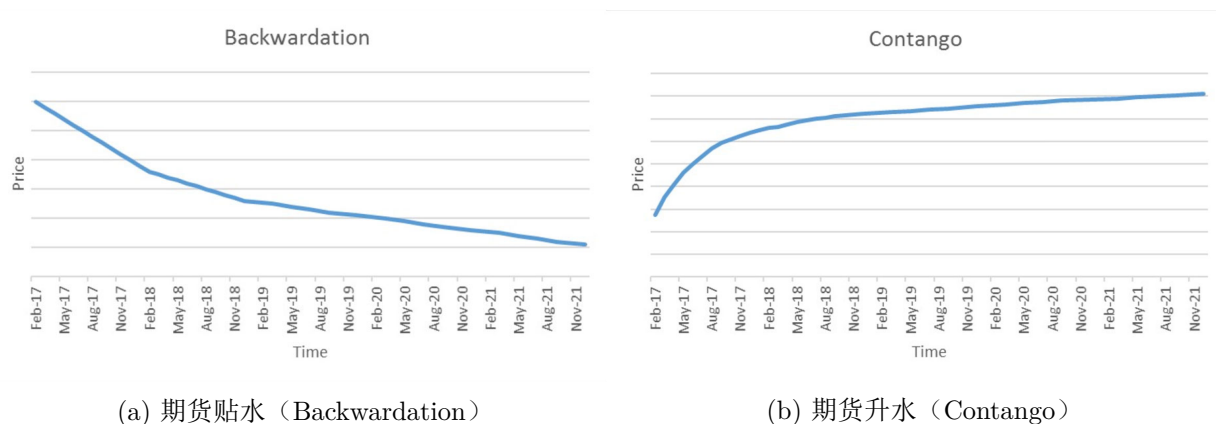


图 18: 商品期货贴水与升水

另外随着到期时间的临近，期货价格将收敛于现货价格：

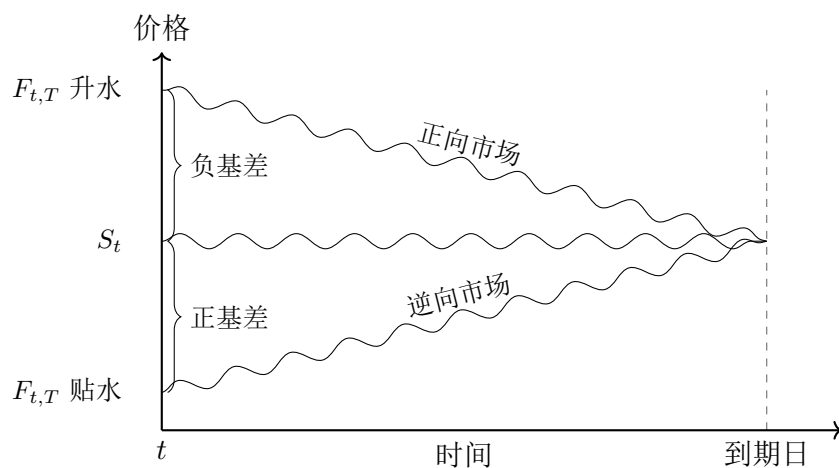


图 19: 商品期货市场 $F_{t,T}$ 与 S_t

金融期货

需要格外注意的是，与商品期货相反，在金融期货中，一般定义基差为期货价格减去现货价格，即：

$$\text{基差（金融期货）} = \text{期货价格} - \text{现货价格}$$

因此，当金融期货贴水，即期货价格小于现货价格，称有负基差。而金融期货升水，或期货价格大于现货价格，称有正基差。在中国市场中，在股指期货中一般存在期货贴水的现象，即现货价格 S_t 大于期货价格 F_t （期货贴水），现货价格被高估。

股指成分股集中分红时间约为每年 5 月至 8 月，即便扣除在股指期货存续期间由于分红造成的回落，股指期货仍有较大幅度的贴水。造成股指期货贴水的原因大致有如下几点：

- 中性交易：机构做空需求，市场中性策略或 Alpha 策略基金都需要做空股指期货，即支付“贴水”成本给提供流动性的做多者。并且中小盘股相较于大盘股更容易做 Alpha 策略，因此对中小盘的做空需求更高，因此 IC 与 IM 的贴水要比 IH 与 IF 高。【待核实】而在市场早期时，主要流行打新？因此卖 50，造成 50 贴水。
- 空头套保：指数大幅度下行，空头套保（Short hedge，卖出股指期货）的规模较大，若市场多头不够，导致期货贴水。
- 做空机制：现货做空机制不完善，难以进行融券，即使能融券成本也较高。使得套利投资者难以在现货被高估的情况下，通过卖出现货（卖出开仓）买进期货进行反向套利（Reversed cash and carry arbitrage；同样，当现货低估的时候，买入现货卖出期货的行为称为正向套利）。因此在期货市场，多空双方都能自由表达其对未来的预期。但现货市场只有多方，而空方只有持有现货才能表达其预期。因此造成现货与期货市场的分割，无法达到一体化的预期。
- 印花税：买卖现货需要交纳印花税，而期货不需要，且期货佣金往往低于现货。
- 市场预期：悲观情绪
- 停牌股的影响：研究表明，假设停牌复牌之后，股停牌期间涨幅与指数涨跌幅相同，并不能解释贴水

13.4 $F_{t,T}$ 与 $\mathbb{E}_t[S_T]$

在现实测度下， $F_{t,T}$ 与 $\mathbb{E}_t[S_T]$ 两者应相差风险溢价。但由于风险溢价的不确定性，因此两者关系并不确定：

$$F_{t,T} = \mathbb{E}_t[S_T] - \text{风险溢价}$$

从现货角度出发，假设在现实测度下，设 μ 为现货 S 的到期收益率，则应有 $\mathbb{E}_t[S_T] = S_t e^{\mu(T-t)}$ ，此时 μ 预期收益， r 为无风险收益率，两者之差 $rp = \mu - r$ 为风险溢价。对于风险溢价的符号，取

决于资产风险与系统性风险的相关性。若资产风险与系统性风险（无法分散的风险）正相关，即当市场变坏时，资产收益下降，当市场变好时，资产收益率上升，因此为其为“坏”资产，卖得便宜，收益率更高。相反，若与系统性风险为负相关，则为“好资产”，因为能对冲系统性风险，收益率应更低。

具体而言如果标的资产 S 系统性风险为正（与系统性风险正相关），则要求有正的风险溢价。承受了更高的系统性风险，因此应有超过无风险收益的更高回报，则有到期收益率大于无风险收益率 $\mu > r$ 。相反，如果标的资产 S 系统性风险为负（如 VIX 系统性风险为负），则应有负的风险溢价。标的资产能对冲风险，减少系统性风险敞口，此时风险溢价为负，因此只能获得小于无风险收益的回报，因此到期收益率小于无风险收益率 $\mu < r$ 。假设在 T 时刻期货价格期望为 $\mathbb{E}_t[S_T] = \mathbb{E}_t[F_{T,T}] = 2000$ ，由于标的资产的系统风险为正，对持有者不利，其要求 500 元的正的风险溢价为额外承担风险的补偿，那么此时 S_t 应为 1500 元。

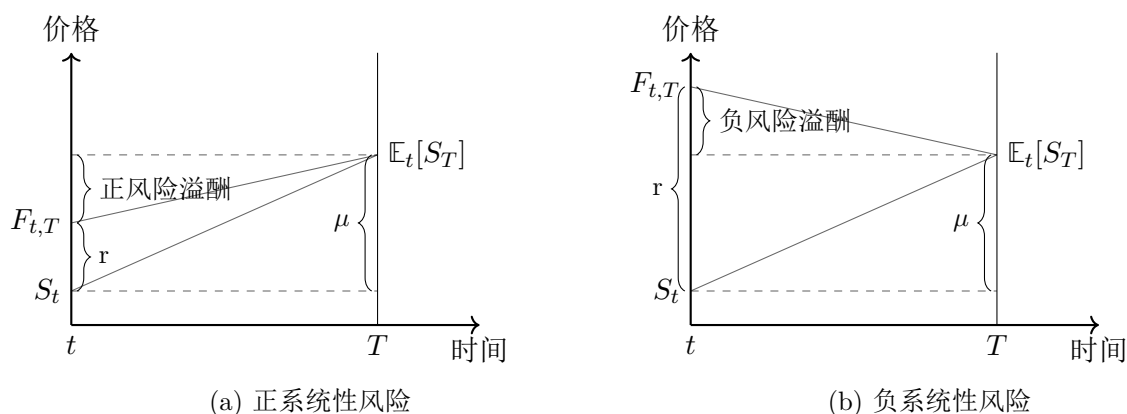


图 20: 现实测度下 $F_{t,T}$ 与 $\mathbb{E}_t(S_T)$

从期货角度出发，同样在现实测度下，因为购买期货无需占用资金（假设保证金可获得无风险收益），所以不要求无风险收益，并且投资期货并不需要支付仓储成本，无法获得红利。仅要求对其承担的未来不确定性风险，有对应的风险补偿（风险溢价），因此其收益率为 $rp = \mu - r$ ，单纯为风险溢价，即 $\mathbb{E}_t[F_{T,T}] = F_{t,T}e^{(\mu-r)(T-t)}$ 。同时可知，在风险中性世界中，期货的预期收益率为零。

13.5 $F_{t,T}$ 、 S_t 与 $\mathbb{E}_t[S_t]$

如上述章节所述，从期货价格出发 $F_{t,T}$ ，期货价格与现货价格 S_t 的关系由资产的净持有成本，无套利关系决定。而期货价格与未来现货价格的期望 $\mathbb{E}_t[S_T]$ 的关系，则由资产的风险溢价决定。

另外虽然现货价格可以从市场交易信息中得到，但由于期货市场交易成本较低，反应较为灵敏迅速，价格变化一般都由期货市场传递至现货市场。在 t 时刻，期货与现货以及其现实测度期望关系如下图所示：

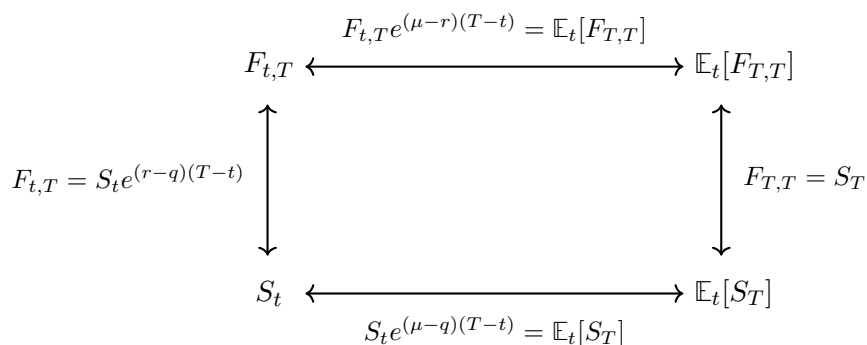


图 21: 四者之间的关系

14 远期（期货）套期保值

完美套期保值

- 远期（期货）的到期日、标的资产和交易金额等条件的设定使得远期（期货）与现货正好匹配
- 完全消除价格风险

不完美套期保值

- 常态
- 无法完全消除价格风险

14.1 基差风险

如前文定义，基差为现货价格 H （被套期保值对象）与期货价格 G （套期保值工具）的价差，即 $b = H - G$ ，未来基差的不确定性导致了**基差风险**。由于标的资产规模与期货合约标准数量之间的差异，导致了**数量风险**。基差风险、数量风险都可能使得套期保值策略无法对冲所有风险，即不完美的套期保值。

多头套期保值策略持有现货空头，担心未来价格上涨，买入期货锁定未来价格（期货多头）。由于价格上涨，期货多头获利，即称之为多头策略。相反，空头套期保值策略持有现货多头，担心未来价格下跌，卖出期货锁定未来卖出价格（期货空头）。以下表1为例，收益分为现货收益与期货收益两部分：

	多头套期保值	空头套期保值
初始仓位	1 单位现货空头，1 单位期货多头	1 单位现货多头，1 单位期货空头
基差收益	$(H_0 - H_1) + (G_1 - G_0)$ $= (H_0 - G_0) - (H_1 - G_1)$ $= b_0 - b_1$	$(H_1 - H_0) + (G_0 - G_1)$ $= (H_1 - G_1) - (H_0 - G_0)$ $= b_1 - b_0$
收益来源	基差变小 $b_0 > b_1$	基差变大 $b_0 < b_1$
收益条件	1. 现货涨幅小于期货涨幅 2. 现货跌幅大于期货跌幅 3. 现货价格下跌而期货价格上涨	1. 现货涨幅大于期货涨幅 2. 现货跌幅小于期货跌幅 3. 现货价格上涨而期货价格下跌

表 1: 多头与空头套期保值

b_0 已知，由此可知未来时刻基差 b_1 决定了是否能完美套期保值。当现货价格小于期货价格时，期货升水，基差为负。假设 $b_0 = -10$ ，多头套保策略要有正收益要求基差变小，即 $b_0 > b_1$ ， $b_0 = -10$ ，则有 $b_1 < -10$ 。注意此时虽然基差变小，但基差的绝对值在增大。

若期货标的与现货标的不同，假设期货标的的价格为 S ，那么可以将如上未来时刻基差 b_1 进行分解：

$$b_1 = H_1 - G_1 = (S_1 - G_1) + (H_1 - S_1)$$

可以看到等式右边第一项为未来时刻期货与其标的现货的基差 $S_1 - G_1$ ，由于日期不一致，可能导致两者不同。第二项为由于期货标的与现货不同 $H_1 - S_1$ ，即出现在交叉套期保值的情况下，现货价格的差异，这两者原因都可能造成无法实现完美的套期保值。

逼仓

对于进行交割的期货而言，期货多方容易进行逼仓，由于期货为合约，且多方为动用资金，资金容易筹集，用于购买现货。若有大量未平仓合约，即空方要交割大量现货，大多时候现货数量有限，且有各种运输储存成本，难以筹集，因此造成没有足够的现货供应，造成了逼空的产生。

同样逼多也有可能发生，即虽然资金容易筹集，但也需要有进行实务交割的能力，若多方完全不具备接收实物的能力，只能进行平仓，使得原油价格快速下跌（原油宝事件）。

【待考证】

14.2 套保（金额）比率

套期保值比率（Hedge Ratio），指现有头寸（金额）中，已有多少被套期保值（对冲）。假设当前有 1000 元的现货头寸，其中 600 元已使用期货进行套期保值，表示当前套期保值比率为 0.6 或 60%，同时表示还留有风险敞口 40%。

$$\text{套期保值（金额）比率} = \frac{\text{套期保值资产头寸}}{\text{被套期保值资产头寸}}$$

14.3 套保（数量）比率

在已知了目前风险暴露情况，即套保（金额）比率之后，还希望了解在现有的现货头寸（被套保资产）之下，需要多少数量的期货进行对冲。希望在期货到期时，最大化消除被套保资产价格变动所带来风险。

此时要求被套保资产价格的变动对整个组合价值影响最小，进而转化为求解最小值问题。即对 ΔH 求偏导，并使一阶条件 $\partial \Delta \Pi / \partial \Delta H = 0$ ，求得最优套期保值（数量）比率 n （价格无法控制，只能控制数量）。因只关注最终期货到期时刻的套保比率，而不关注过程中的套保比率，所以此处使用的是 ΔH 而非 ∂H 。

对于多头套期保值组合，有：

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= n \Delta G - \Delta H \\ \Rightarrow \frac{\partial(\Delta \Pi)}{\partial(\Delta H)} &= n \times \frac{\partial(\Delta G)}{\partial(\Delta H)} - 1 = 0 \\ \Rightarrow n &= \frac{\partial(\Delta H)}{\partial(\Delta G)} = \frac{\partial r_H \times H_0}{\partial r_G \times G_0} \end{aligned}$$

对于空头套期保值组合，同样有：

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= \Delta H - n\Delta G \\ \Rightarrow \frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial(\Delta H)} &= 1 - n \times \frac{\partial(\Delta G)}{\partial(\Delta H)} = 0 \\ \Rightarrow n &= \frac{\partial(\Delta H)}{\partial(\Delta G)} = \frac{\partial r_H \times H_0}{\partial r_G \times G_0}\end{aligned}$$

对多头套期保值或空头套期保值均有最优套保比率 $n = \partial(\Delta H)/\partial(\Delta G)$ ， r_H 和 r_G 为 H 与 G 在套期保值期间的收益率。 n 代表期货价格变动一个单位，现货价格变化多少，同时代表每单位数量现货需要 n 单位数量期货进行对冲。因现货与期货为线性关系，即套期保值后不需要随时调整两者之间比率 n ，此为静态套保（Static Hedge）。与之相反的为动态套保（Dynamic Hedge），需要不断随时调整两者之间比率。

得知每单位数量现货需要 n 单位期货进行对冲之后，根据持有现货 H 头寸数量 Q_H ，可计算出需要多少份（手）的期货 G 合约进行对冲。即可求得最优套期保值（期货）合约份数 N ，使得期货总价值变动等于持有现货总价值变动。

$$N = n \times \frac{Q_H}{Q_G} = \frac{\partial(\Delta H) \times Q_H}{\partial(\Delta G) \times Q_G} = \frac{\partial(r_H \times H_0 \times Q_H)}{\partial(r_G \times G_0 \times Q_G)} = \frac{\partial r_H \times V_H}{\partial r_G \times V_G}$$

由 $n \times Q_H$ 计算得到，对于现有头寸 Q_H 单位数量的现货，需要多少单位数量的期货进行对冲。再除以 Q_G 期货合约规模（乘数），计算得到需要 N 份（手）期货合约进行对冲。此时 V_H 为被套期保值的所持有现货资产总价值，而 V_G 则为每份期货合约价值（单位价格 \times 合约乘数）。注意： n 代表的是单位数量，而 N 为份数（手），为最小买卖单位。如螺纹钢期货报价单位为元/每吨，一份合约（手）包含 10 单位数量（吨）期货，即合约规模（乘数）为 10。

14.4 最小方差套保（数量）比率

当将风险定义为方差时，最优的套保比率可定义为，使套期保值组合收益 $\Delta\Pi$ 方差最小的套期保值（数量）比例 n ，即为最小方差套保比率。 σ_{Π}^2 为套期保值组合收益的方差，对 n 求导，使一阶条件为零，二阶条件 $d^2(\sigma_H^2)/dn^2 = 2\sigma_G^2 > 0$ ，有最小值。对于多头套保组合或空头套保组合，

其最小方差套期保值比一般公式为：

$$\begin{aligned}\sigma_{\Pi}^2 &= \sigma_H^2 + n^2 \sigma_G^2 - 2n\sigma_{HG} \\ \Rightarrow \frac{d\sigma_{\Pi}^2}{dn} &= 2n\sigma_G^2 - 2\sigma_{HG} = 0 \\ \Rightarrow n &= \frac{\sigma_{HG}}{\sigma_G^2} = \rho_{HG} \frac{\sigma_H}{\sigma_G}\end{aligned}$$

其中 $\sigma_H = \sigma_{\Delta H}$, $\sigma_G = \sigma_{\Delta G}$, σ_{HG} 为 ΔH 与 ΔG 的协方差, ρ_{HG} 为 ΔH 与 ΔG 的相关系数 ($\rho_{XY} = Cov(X, Y)/\sigma_X \sigma_Y$)。我们可以进而推导出基于收益率的最小方差套期保值比率, 首先:

$$\begin{aligned}\rho_{HG} &= \frac{Cov(\Delta H, \Delta G)}{\sqrt{Var(\Delta H)}\sqrt{Var(\Delta G)}} \\ &= \frac{Cov(r_H \times H_0, r_G \times G_0)}{\sqrt{Var(r_H \times H_0)}\sqrt{Var(r_G \times G_0)}} \\ &= \frac{H_0 G_0 Cov(r_H, r_G)}{H_0 \sqrt{Var(r_H)} \times G_0 \sqrt{Var(r_G)}} \\ &= \frac{Cov(r_H, r_G)}{\sqrt{Var(r_H)}\sqrt{Var(r_G)}} = \rho_{r_H r_G}\end{aligned}$$

其次:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_G} = \frac{\sqrt{Var(r_H \times H_0)}}{\sqrt{Var(r_G \times G_0)}} = \frac{H_0 \sqrt{r_H}}{G_0 \sqrt{r_G}} = \frac{\sigma_{r_H} H_0}{\sigma_{r_G} G_0}$$

因此有:

$$n = \rho_{r_H r_G} \frac{\sigma_{r_H} H_0}{\sigma_{r_G} G_0}$$

14.5 OLS 估计

可以观察 $n = Cov(\Delta H, \Delta G)/Var(\Delta G)$ 即为 OLS 回归中的系数 b 。则可用 OLS 回归, 估计 b :

$$\Delta H = a + b\Delta G + \varepsilon$$

需注意套保期限与回归中使用的 ΔH 和 ΔG 的期限应相同, 即如果要锁定未来一个月的现货价格, 需使用现货和期货的月价格变化进行回归。且调整后得到实际需要套期保值 (期货) 合约份

数 N 为:

$$N = b \frac{Q_H}{Q_G}$$

也可使用收益率进行 OLS 回归估计, 且在时间极短时, 百分比收益率 $\Delta P/P$ 与对数收益率可视为相等。且对数收益率更符合平稳序列和正态分布的假设, 在平稳假设的下对每日现货和期货的对数收益率进行回归:

$$r_H = a + b' r_G + \varepsilon$$

此时:

$$\begin{aligned} b &= \frac{Cov(\Delta H, \Delta G)}{Var(\Delta G)} \\ &= \frac{Cov(r_H \times H_0, r_G \times G_0)}{Var(r_g \times G_0)} \\ &= \frac{H_0 G_0 Cov(r_H, r_G)}{G_0^2 Var(r_G)} \\ &= b' \frac{H_0}{G_0} \end{aligned}$$

对应需套期保值合约份数 N (手):

$$N = b \frac{Q_H}{Q_G} = b' \frac{H_0 \times Q_H}{G_0 \times Q_G} = b' \frac{V_H}{V_G}$$

14.6 风险降低百分比

通过检验风险降低百分比, 可以检验使用最小方差套期保值比率的套期保值效果。将最小方差套期保值比率 $n = \rho_{HG} \frac{\sigma_H}{\sigma_G}$, 带回套期保值组合方差 $\sigma_{\Pi}^2 = \sigma_H^2 + n^2 \sigma_G^2 - 2n \sigma_{HG}$ 中。可以得到:

$$e^* = \frac{\sigma_H^2 - \sigma_{\Delta \Pi}^2}{\sigma_{\Delta H}^2} = \rho_{HG}^2 = \frac{Cov^2(\Delta H, \Delta G)}{Var(\Delta H) Var(\Delta G)} = \frac{Cov^2(r_H H_0, r_G G_0)}{Var(r_H H_0) Var(r_G G_0)} = \rho_{r_H r_G}^2$$

而在一元线性回归中判别系数 $R^2 = \rho$, 即回归效果越好, R^2 越接近 1, 套期保值的效果也越好。

15 看跌-看涨平价关系（欧式期权）

看跌-看涨期权平价关系（Put-call parity），指具有相同的行权价与到期日的欧式看涨期权与欧式看跌期权，其价格之间存在的关系。若平价关系不成立，则意味着存在套利的空间。现实市场中存在交易成本，又如在中国市场现货无法自由做多做空，因此买卖权平价关系不完全成立。然而欧美市场等流动性较好的市场中，可以近似认为买卖权平价关系成立。

PCP 平价可以直接从 BS 公式中推导：

$$\begin{aligned}
 C_{t,T} &= P_{t,T} + S_t - K \\
 S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) &= K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) S_t - K e^{-r(T-t)} \\
 &= K e^{-r(T-t)} [1 - N(d_2)] - S_t [1 - N(d_1)] + S_t - K e^{-r(T-t)} \\
 &= \cancel{K e^{-r(T-t)}} - K e^{-r(T-t)} N(d_2) - \cancel{S_t} + S_t N(d_1) + \cancel{S_t} - \cancel{K e^{-r(T-t)}} \\
 &= C_{t,T}
 \end{aligned}$$

也可以看到，相同行权价到期时间的看涨看跌期权，两者波动率应该相等，否则 PCP 平价不成立。

15.1 无红利资产

使用现货

对于无红利资产，使用股票（不支付股息），构建如下两个组合，且看涨期权与看跌期权具有相同的执行价格 K 与期限 T ：

- 组合 A：欧式看涨多头 + 在 T 时刻收益为 K 的零息债券
- 组合 B：欧式看跌多头 + 1 股股票

在 T 时刻，投资组合 A 与 B 有：

		$S_T > K$	$S_T < K$
组合 A	看涨期权	$S_T - K$	0
	零息债券	K	K
	总和	S_T	K
组合 B	看跌期权	0	$K - S_T$
	股票	S_T	S_T
	总和	S_T	K

根据无套利原理，在 T 时刻两个组合有相同的收益，因此在 t 时刻也必须有相同的价值，否则就可以进行套利。零息债券在 t 时刻现值为 $Ke^{-r(T-t)}$ ，因此可以得到：

$$C_{t,T} + Ke^{-r(T-t)} = P_{t,T} + S_t$$

使用远期

对于无红利资产，使用远期合约（适用于中国市场与美国市场），构建如下两个组合，且看涨期权与看跌期权具有相同的执行价格 K 与期限 T ：

- 组合 A：欧式看涨多头
- 组合 B：欧式看跌多头 + 远期合约多头

在 T 时刻，投资组合 A 与 B 有：

		$S_T > K$	$S_T < K$
组合 A	看涨期权	$S_T - K$	0
	总和	$S_T - K$	0
组合 B	看跌期权	0	$K - S_T$
	远期合约	$S_T - K$	$S_T - K$
	总和	$S_T - K$	0

可以发现在 T 时刻，两种情况之下 A、B 两个投资组合的收益相同：

$$C(T, S_T) = P(T, S_T) + f(T, S_T)$$

并且根据无套利原则，在任意 t 时刻两个投资组合的价值也必须相同，否则将存在套利机会：

$$C(t, S_t) = P(t, S_t) + f(t, S_t)$$

将远期合约在 t 时刻价值 $f(t, S_t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$ 代入，则有对于现货价格的 PCP 公式有：

$$C_{t,T} = P_{t,T} + S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

利用市场上观察到的看涨看跌期权价格，可求出隐藏现货价格。在中国市场中现货无法做空，可以用期权价格计算隐含现货价格：

$$S_t^* = (C_{t,T} - P_{t,T}) + Ke^{-r(T-t)}$$

或使用期货，则有远期合约在 t 时刻价值 $f(t, F_t) = (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$ ，可得到对于远期（期货）的 PCP 公式：

$$C_{t,T} = P_{t,T} + (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$$

同样利用市场上已知的看涨看跌期权价格，可求得隐藏期货价格：

$$F_{t,T}^* = (C_{t,T} - P_{t,T})e^{r(T-t)} + K$$

15.2 有红利资产

对于在到期日 T 之前支付已知红利的标的资产，设支付红利现值为 I_t ，则应有调整后的远期价格为 $F_{t,T} = (S_t - I_t)e^{r(T-t)}$ ，因此调整后的 PCP 公式有：

$$C_{t,T} = P_{t,T} + S_t - I_t - Ke^{-r(T-t)}$$

同理，对于已知红利率资产，设红利率为 q ，调整后的远期价格为 $F_{t,T} = S_te^{(r-q)(T-t)}$ ，因此有调整后的 PCP 公式为：

$$C_{t,T} = P_{t,T} + S_te^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

15.3 中国市场 PCP

在中国市场中，由于标的资产无法自由做多做空，因此现货 PCP 关系不完全成立。远期可以做多也可以做空，因此远期 PCP 关系成立，其中远期交割价格等于看涨与看跌期权的行权价，期限相同：

$$C_{t,T} = P_{t,T} + (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$$

目前中国市场中所拥有的金融衍生品与其标的资产如下：

金融衍生品	现货	期货	期权
股指（中金所）		上证 50 股指期货 沪深 300 股指期货 中证 500 股指期货	沪深 300 股指期权
ETF（上交所）	华夏上证 50ETF（510050） 华泰柏瑞沪深 300ETF（510300）		上证 50ETF 期权 沪深 300ETF 期权
ETF（深交所）	沪深 300ETF（159919）		沪深 300ETF 期权

在中国市场中，如上表所示，相同标的的股指期货与期权，或 ETF 现货与期权之间可以使用 PCP 关系而不做调整。对于 ETF 而言，ETF 成分股分红，分红会留存在 ETF 之内。50ETF 以及 300ETF 现货进行分红，期权则会进行相应调整，因此 ETF 现货与其期权，均受到红利保护，因此不需要调整红利，可视为无红利资产使用 PCP 关系式。

而对于股指期货而言，指数根据成分股价格加权计算得出，在到期日之内成分股分红，股指将自然回落，不做任何调整，因此股指期货无红利保护。对于沪深 300 股指期权与股指期货，为同一标的，虽然不受红利保护，但两者之间的 PCP 也不需要进行调整。可由远期与期权 PCP 关系计算，如使用股指期权估算隐含远期价格，不需要进行红利调整。注意：与股指期货与股指不同，股指期权与股指期货同时对期限内未来的除息进行调整，因此两者之间不需要进行调整。

ETF 有红利保护，ETF 远期（中国市场未上市）无红利保护，因此建立两者之间的 PCP 关系式则需要调整红利。已知 $F_{t,T} = (S_t - I_t)e^{r(T-t)}$ ，将其代入现货 PCP 公式可得下列关系式。可理解为由于远期无红利保护，而 ETF 期权有红利保护，应将远期加上分红，调整为有分红资产：

$$C_{t,T} = P_{t,T} + (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)} + I_t$$

利用如上 PCP 关系式，则可以使用 ETF 期权计算出隐藏 ETF 远期价格：

$$F_{t,T}^* = (C_{t,T} - P_{t,T}) e^{r(T-t)} + K - I_t e^{r(T-t)}$$

15.4 ETF 期权分红调整

对于股票股利，由于股票稀释，因此需要进行除权（XR, Ex-Right）调整。若配股比例为 25/1000 为 1000 股配 25 股，假设拥有 1000 股的股东，持有股票数目变为 1025。为了保持公司总市值不变，因此需要进行除权，将市场每股价格等比例下调，做法为将除权日前一天收盘价除以 $1 + 25/1000$ 。而对于现金股利，则称之为除息（XD, Ex-Dividend）。做法为将除息日前一天的收盘价对应减去现金股利。

交易所之所以会在分红后进行期权合约调整，是因为 ETF 分红后期权买卖双方的权利义务大小会相应变化。核心的问题是如何通过调整来维持期权合约买卖双方权利义务均衡。一般来说，期权合约调整有两个目标：

- 调整后，合约行权成本（行权价格 × 合约单位）不变
- 调整后，合约市值（结算价格 × 合约单位）不变

根据《上海证券交易所股票期权试点交易规则》第三章第十三条，对合约标的除权、除息的，期权合约的合约单位、行权价格按照下列公式进行调整：

$$\text{新合约单位} = \frac{\text{原合约单位} \times (1 + \text{流通股份实际变动比例}) \times \text{除权(息)前一日合约标的收盘价}}{(\text{除权(息)前一日合约标的收盘价格} - \text{现金红利}) + \text{配股价格} \times \text{流通股份实际变动比例}}$$

$$\text{新行权价格} = \frac{\text{原行权价格} \times \text{原合约单位}}{\text{新合约单位}}$$

调整后的合约单位，按照四舍五入的原则取整数；调整后的行权价格，按照四舍五入的原则取小数，合约标的为股票的，保留两位小数，合约标的为交易所交易基金的，保留 3 位小数。

例子 15.1. 华夏上证 50ETF

根据 510050 管理人华夏基金 2020 年 11 月 11 日发布《上证 50 交易型开放式指数证券投资基金利润分配公告》，2020 年 11 月 27 日为基金分红的权益登记日，11 月 30 日为基金分红的除

息日，分红发放日为 12 月 03 日，方案为每十份 510050 基金分红为 0.51 元，对象为登记日下午交易结束后所有基金份额持有人。根据交易规则，权益登记日下一交易日，即除息日进行除息除权处理。交易所利用前收盘价，计算除权除息参考价格，作为除息日开盘价（集合竞价产生）的参考。在此例子中 27 日不复权收盘价 3.557，前复权收盘价为 3.506，为调整了分红后的收盘价（决定涨跌幅）。

上交所于 11 月 11 日同日，发布公告将于 2020 年 11 月 30 日对 50ETF 期权合约的行权价格、合约单位、合约交易代码和合约简称进行调整，并对除息后的 50ETF 新挂 2020 年 12 月、2021 年 1 月、3 月和 6 月等 4 个月份的标准化合约。已知 510050 前一个交易日 11 月 27 日周五收盘价为 3.557 元/份，分红金额为每份分红 0.051 元，流通股份实际变动比例为 0，可计算 50ETF 期权合约的新合约单位为：

$$\text{新合约单位} = 10000 \times \frac{3.557}{3.557 - 0.051} = 10145$$

使用公式计算合约“50ETF 购 2020 年 12 月 3000”新行权价格：

$$\text{新行权价格} = \frac{10000}{10145} \times 3.000 = 2.957$$

根据新计算的行权价格，将原合约新挂为“50ETF 购 2020 年 12 月 2957A”。并由于行权价的下调，使得期权买卖双方的权利义务重新平衡。期权合约“50ETF 购 2020 年 12 月 3000”的于 27 日结算价为 0.5616 元，由如下公式计算该期权合约 30 日调整后前结算价（决定保证金）：

$$\text{新结算价格} = \frac{\text{原结算价格} \times \text{原合约单位}}{\text{新合约单位}} = \frac{10000}{10145} \times 0.5616 = 0.5536$$

可以看到期权合约对于分红的调整有如下几步，先根据 ETF27 日（除息日 30 日前一交易日）的收盘价及分红调整合约单位，其实质为缩放比例，为分红调整之后价格与分红之前价格比值的倒数。再根据新合约单位（缩放比例），等比例缩小行权价格与结算价格。合约单位比例放大与价格比例缩小相互抵消，使得合约行权与实际市值保持不变。

在处理这类数据时需要额外注意：

- 跨过除夕日的合约，会自动变为带 A 的合约，代表已经经过调整。如上所述，

其行权价 K 与合约单位都已经过调整。在事后时间点看，这些合约都会带上 A ，在事前进行计算时需要调整回原有的行权价与合约单位

- 一般使用不带 A 的进行计算，而且也有可能出现调整后的带 A 的期权行权价，与正常期权行权价正好重合的情况
- 对于510050.0F而言，从 2015-02-09 期权上市之后，其除息日有（上交所期权同一日进行除息处理）：

- 2016-11-29
- 2017-11-28
- 2018-12-03
- 2019-12-02
- 2020-11-30
- 2021-11-29

注意：在处理数据时，

关于结算价格

上交所在每个交易日收盘后向市场公布期权合约的结算价格，作为计算期权合约每日日终维持保证金、下一交易日开仓保证金、涨跌停价格等数据的基准。

原则上，期权合约的结算价格为该合约当日收盘集合竞价的成交价格。但是，如果当日收盘集合竞价未形成成交价格，或者成交价格明显不合理，那么上交所就会考虑期权交易的多重影响因素，另行计算合约的结算价格。即根据同标的、同到期日、同类型其他行权价的期权合约隐含波动率，推算该合约隐含波动率，并以此计算该合约结算价。

此外，期权合约最后交易日如果为实值合约的话，由上交所根据合约标的当日收盘价格和该合约行权价格，计算该合约的结算价格；期权合约最后交易日如果为虚值或者平值合约的话，结算价格为 0。

期权合约挂牌首日，以上交所公布的开盘参考价作为合约前结算价格。合约标的出现除权、除息的，合约前结算价格按照以下公式进行调整：新合约前结算价格 = 原合约前结算价格 \times （原合约单位/新合约单位）。除权除息日，以调整后的合约前结算价作为涨跌幅限制与保证金收取的计算依据。

16 中国市场特殊处理

在中国市场存在理论与实务脱节的问题。主要有卖空限制导致现货价格高估，内在价值与时间价值，与平值点定义需要更改。解决同一行权价到期期限的看涨看跌波动率相差大；解决隐含波动率为 0；看跌期权时间价值明显高于看涨期权的时间价值；期权时间价值为负；平值点时间价值不是最大等问题。

关于无套利与可复制：无套利指当套利机会出现，人们会利用套利机会获利，使得套利机会消失，表达的是人的主观意愿的假设。而可复制表达的是否能利用套利机会，表达是市场环境是否能允许套利进行。如现货价格被高估，期货价格被低估，虽然人们愿意进行套利，但在中国市场由于现货卖空存在限制，所以难以复制，最终导致了套利无法进行，无套利不满足。

16.1 做空限制与隐含信息

在中国市场中，现货市场存在较大的做空限制，使得市场中的价格由所以看多者和少量看空者决定，看空者的情绪无法表达，因此并不能反应所有投资者的真实情绪，现货价格相对被高估。现货由于卖空限制，难以复制并进行套利，违法 BSM 假设中允许卖空标的证券的条件。若使用现货价格进行隐含信息的计算存在较大误差，主要解决方法为从衍生品市场取得隐含现货期货价格。

1. 使用 BSM 公式，从衍生品市场提取隐含合理的现货价格：

- 期货中隐含的现货价格（无红利资产）：

$$S_t^* = F_{t,T} e^{-r(T-t)}$$

- ETF 期权中隐含的现货价格，虽然 ETF 有红利但期权会进行调整，可视为无红利资产：

$$S_t^* = (C_{t,T} - P_{t,T}) + K e^{-r(T-t)}$$

- 股指期货中隐含的现货价格（已知红利率），成分股分行股指不做调整自然回落，则有：

$$S_t^* = (C_{t,T} - P_{t,T}) e^{q(T-t)} + K e^{-(r-q)(T-t)}$$

2. 使用 Black 公式，从衍生品市场提取隐藏合理的期货价格：

$$F_{t,T}^* = (C_{t,T} - P_{t,T}) e^{r(T-t)} + K$$

由衍生品市场得到隐含的现货价格 S_t^* 与隐含的期货价格 $F_{t,T}^*$ ，就可以使用对应的 BSM 公式或 Black 公式，计算其隐含波动率。对于平价期权的确定一般选用价格最接近，即看涨看跌期权价差最小的一组期权作为平价期权。

16.2 内在价值

已知期权价值可分解为内在价值（Intrinsic value）与时间价值（Time value）两个部分，即：

$$\text{期权价值} = \text{内在价值} + \text{时间价值}$$

以波动划分，内在价值为**不考虑资产价格波动**的情况下，期权条款赋予期权多头的最高价值。而时间价值为**标的资产价格波动**为期权多头（权利方）所带来的隐含价值，由于期权的权利方只有权力而无义务，因此期权的内在价值以及时间价值都应大于 0。时间价值受内在价值的影响，但内在价值不受时间价值的影响，因而使用两分法。即先计算出期权的内在价值，使用二分法，再确定期权的时间价值。

16.2.1 John Hull 定义

定义内在价值为，期权若在当下时点到期，期权所含的的内在价值，如 OFOD 教科书、上交所、万得中。若美式期权，这样定义就是合理的，由于美式期权在到期日之前可以随时行权，则其内在价值都基于当前时点的股价与行权价进行计算。但如果是欧式期权，则没有考虑行权价货币的时间价值，现货价格为当前时点，但行权价为未来时点，应该对未来时点的行权价进行贴现。且在中国市场由于现货的卖空限制，其实际价格被高估。

$$\text{看涨期权内在价值} = \max(S_t - K, 0)$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max(K - S_t, 0)$$

期权的内在价值与时间价值关系如下，可以看到下边界为当标的资产价格趋近于零时，看涨期

权趋近于 S ，下边界为 $\max(S - K, 0)$ ：

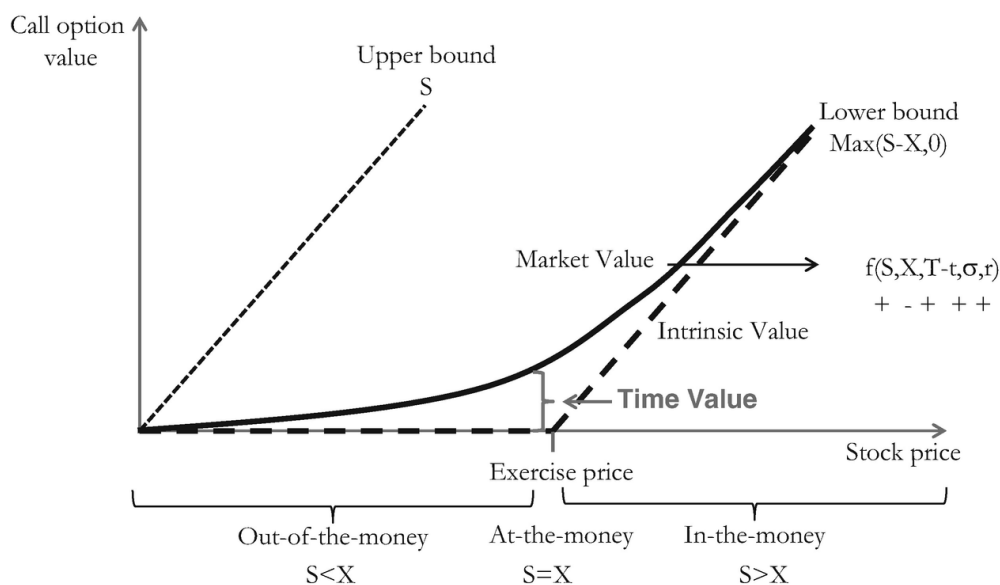


图 22: 看涨期权价格与标的价格

16.2.2 完美市场定义

在考虑货币时间价值的情形内在价值如下，在完美市场中可适用，但没有考虑中国市场的卖空限制，需要进一步进行调整。

$$\begin{aligned}\text{看涨期权内在价值} &= \max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0) \\ \text{看跌期权内在价值} &= \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0)\end{aligned}$$

16.2.3 中国市场定义

不考虑时间价值，那么欧式看涨权利方与远期合约多头的差别就是期权只有权利而没有义务，因此内在价值应为 $\max(f_{t,T}, 0)$ 。同理，对于欧式看跌期权应有 $\max(-f_{t,T}, 0)$ 。即使用期货价格代

替现货价格，在期货市场多空双方均能自由表达其看法，且中美市场均可使用，因此有：

$$\begin{aligned}\text{看涨期权内在价值} &= \max \left[(F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}, 0 \right] \\ \text{看跌期权内在价值} &= \max \left[(K - F_{t,T})e^{-r(T-t)}, 0 \right]\end{aligned}$$

16.2.4 ETF 期权股指期货定义

由于在中国市场 ETF 期权，如 50ETF，有红利保护机制。即会下调行权价格，放大每手期权数量，相当于变相抬高了股票价格进行复权，修复由于分红带来的影响，因此可视为无红利资产进行处理。而在中国市场中并没有 50ETF 期货，只有股指期货，且股指期货不对分红进行调整，即没有红利保护，即其成分股分红后股指自然下跌。因此使用股指期货计算 ETF 期权内在价值时，还需要再做红利调整。由于在计算期货时将现货中的红利剔除：

$$F_{t,T} = (S_t - I_t)e^{r(T-t)}$$

因此，在计算内在价值时应将剔除的红利加回：

$$\begin{aligned}\text{看涨期权内在价值} &= \max \left[(F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)} + I_t, 0 \right] \\ \text{看跌期权内在价值} &= \max \left[(K - F_{t,T})e^{-r(T-t)} - I_t, 0 \right]\end{aligned}$$

16.3 平值点与在值程度

平值点是使得期权内在价值由正值变化到零（内在价值非负）的临界行权价，因为平值点使得内在价值变为零，则平值点使用远期价格的定义应为 $F_{t,T} = K$ ，这样的定义使得实值虚值部分左右较为对称，利于比较，具体参考郑和陈（2018）与郑、杨与阮（2021）。

同理，对于现货（中国市场使用隐含现货价格）而言，平值点应有：

- 无红利： $S_t e^{r(T-t)}$
- 有红利： $(S_t - I_t) e^{r(T-t)}$
- 红利率： $S_t e^{(r-q)(T-t)}$

使用对数在值程度（Log-moneyness）作为在值程度的定义，优点是使得值域范围有 $(-\infty, \infty)$ ，

使得实值期权与虚值期权幅度上对称。

$$\ln \frac{K}{K_{\text{ATM}}} = \ln \frac{K}{F}$$

同时可以发现，根据 PCP 公式：

$$C_{t,T} = P_{t,T} + (F_{t,T} - K) e^{-r(T-t)}$$

根据平价期权 ATM 定义有 $F_{t,T} = K$ ，易得此时 $C_{t,T} = P_{t,T}$ 。

当 $F_{t,T} \geq K$ 时，此时看涨期权 ITM，同时具有内在价值与时间价值。而看跌期权 OTM，因此只具有时间价值。由如上定义，此时看涨期权内在价值为 $(F_{t,T} - K) e^{-r(T-t)}$ 。根据 PCP 可以看到：

$$\begin{aligned} C_{t,T} &= P_{t,T} + (F_{t,T} - K) e^{-r(T-t)} \\ \cancel{C_{\text{内在价值}}} + C_{\text{时间价值}} &= P_{\text{时间价值}} + \cancel{C_{\text{内在价值}}} \\ C_{\text{时间价值}} &= P_{\text{时间价值}} \end{aligned}$$

同理，当 $F_{t,T} < K$ 时，看跌期权为实值，同时具有内在价值与时间价值。因此，在新平值点定义下，相同行权价、相同期限的看涨期权与看跌期权的时间价值应该相等。

17 平价期权估计

当平值点为 $S_t = K e^{-r(T-t)}$ 时，将其带入看涨 BSM 公式当中，则有：

$$\frac{C}{S} = N(d_1) - N(d_2)$$

同样，对于看跌期权则有：

$$\begin{aligned}\frac{P}{S} &= N(-d_2) - N(-d_1) \\ &= 1 - N(d_2) - [1 - N(d_1)] \\ &= N(d_1) - N(d_2) = \frac{C}{S}\end{aligned}$$

也可用期货价格进行改写，即 $\frac{C}{Fe^{-r(T-t)}}$ 与 $\frac{P}{Fe^{-r(T-t)}}$ 。对于 d_1 和 d_2 ，此时有：

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \\ d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

则对于欧式平价看涨或看跌期权，有看涨与看跌期权价格相等，将期权价格记为 V ：

$$\begin{aligned}\frac{V}{S} &= N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) \\ &= N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) \\ &= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1\end{aligned}$$

对于正态分布有 CDF：

$$N(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

已知对于自然指数 e^x ，其泰勒展开有：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

替换将 x 替换为 $-\frac{x^2}{2}$ ：

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots$$

使用泰勒展开，将正态分布的自然指数替换：

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \int \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots \right) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

注意在求泰勒展开的积分之后，还需要加上常数项 C ，因此应有：

$$N(x) = G(x) + C$$

已知对于标准正态分布 CDF， $N(0) = G(0) + C = \frac{1}{2}$ ，因此 $C = \frac{1}{2}$ ，即：

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \dots \right)$$

令 $x = \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$ 代入上式，则对于欧式平价期权：

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{S} &= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1 \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} - \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^3}{6} + \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^5}{40} - \dots + \dots \right) \right] - 1 \\
 &\approx \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4\sigma\sqrt{T-t}
 \end{aligned}$$

18 可转债

可转换债券（Convertible bonds, convertibles 或 converts）赋予债券持有者（债权人）在一定时间内按照一定比例（转股比例，可以转换多少股股票）将债券转换成公司普通股股票的权利（变为股东）（郑 and 林 2004）。对于转股比率，即为 1 单位的债券能转换多少股票的比率，有如下公式（债券面值为 100）。注意分子用面值的原因是超过面值的部分为投资者所支付的溢价，并不能用于转股。初始转股价不能低于可转债“募集说明书”公告日之前 20 个交易日和前一个交易日的

均价中的高者。

$$\text{转股比率} = \frac{\text{债券面值 (100)}}{\text{转股价格}}$$

当转股比率不变时，若将可转债全部转换为股票，其价值由正股股价决定，称为转股价值：

$$\text{转股价值} = \text{转股比率} \times \text{正股价值}$$

当正股股价高于转股价，相当于可以低价买入股票从而获利。此时相当于一个看涨期权，而转股价即为执行价格，当正股股价（S）高于执行价格（K），那么行权获利。反之，当正股股价低于执行价格，不行权则获得债券的收益。即**到期赎回价**，为已知持有可转债直至到期，上市公司从投资者手中按赎回价买回可转债，相当于债券到期还本付息（赎回价包含最后一笔利息）。

18.1 可转债条款

显然，在可转债中包含着转股权，但除了转股权之外还包含着其他路径依赖期权：

- 转股权：将债券转换为公司普通股股票
- 回售权（Redemption option）：该期权规定，在回售期内，如果公司股票价格在若干个交易日内满足回售条件，则投资者有权按照回售价格将可转债回售给公司。
- 赎回权（Call option）：该期权规定，在一定期限内，如果公司股票的价格在若干个交易日内满足赎回条件，公司有权按照赎回价格，赎回公司的剩余可转债。
- 转股价格调低权（下修或修正）：该期权规定，在一定期限内，如果公司股票价格满足转股价格调整条件时，公司董事会有权在一定幅度内调整转股价格。一般同时规定，超过这个幅度则需股东大会通过。

同时，若按照期权权利方的不同，可将分为对于两大类：

	投资者	公司
权利	转股权 可回售 附加回售	可赎回 调低转股价格
决策目标	使得投资收益最大化	以尽可能高的转股价，尽早实现转股

对于上市公司，其目标是让投资者将可转债转股，从债权人身份转换为股东身份（借钱不还，减少债务）。为了使投资者尽早转股，那么应该推高转股价值，具体而言可提高转股比例（压低转股价，相当于可换得的股份数更多），或提高正股股价。

对于可赎回，实质是给正股股价设置上限，迫使那么投资者转股，若不转股只能获得相当低的赎回价值。而下修条款可降低转股价，从而推高每份债券可获得的股票数量，提高转股价值。但下修需要配合可赎回使用，不然投资者可能一直持有可转债（利益最大化），不进行转股。而当正股股价低于转股价时，投资者（债权人）可将可转债售回上市公司，迫使上市公司相近抬高转股价价值。

可赎回

以兴业转债（113052.SH）为例，其赎回条款为：

例子 18.1. 在本次发行可转债的转股期内，如果公司 A 股股票连续三十个交易日中至少有十五个交易日的收盘价格不低于当期转股价格的 130%（含 130%），公司有权按照债券面值加当期应计利息的价格赎回全部或部分未转股的可转债……

假设转股价为 10 元，那么当 30 个交易日内有 15 个交易日，正股价格大于等于 13 元，那么上市公司可以按照上述计算方法（以债券现值），赎回可转债。对于可赎回权，由于转换价值一般远大于公司的赎回价格，因此此条款作用为强制让投资者尽早转股（对转换价值封顶），缩短可转债期限（注意：赎回价价格与到期赎回价不同）。对于上市公司而言，会想尽办法促成“强赎”，使得正股股价超过 130%，由于可转债期限一般为 5、6 年，那么牛市可以使得正股股价大涨，或发布利好消息。

调低转股价格

调低转股价格（或称为下修或修正），同样以兴业转债为例：

例子 18.2. 在本次发行的可转债存续期间，当公司 A 股股票在任意连续三十个交易日中有十五个交易日的收盘价低于当期转股价格的 80% 时，公司董事会会有权提出转股价格向下修正方案并提交公司股东大会审议表决……

同样假设转股价为 10 元，那么当 30 个交易日内有 15 个交易日，正股价格小于 8 元，那么

上市公司就有权下修，调低转股价。假设下修后的转股价为 7 元，那么当市场变好，或者当利好消息来袭时，正股价格就有可能超过 130% 的转股价格，那么就有希望达到“强赎”标准。但下修的本质为上市公司“贱卖”公司股份，因此上市公司不到迫不得已不会调低转股价。

另外，公司股本发生变化也需要进行对转股价进行修正：

例子 18.3. 当公司派送股票股利、转增股本、增发新股或配股、派送现金股利（不包括因本次发行的可转债公司债券转股而增加的股本）使得公司股份发生变化时，将按下述公式进行转股价格的调整（保留小数点后两位，最后一位四舍五入），其中增发与配股属于再融资，因此分子需要变化。其中 P_0 为调整前转股价， P_1 为调整后转股价， D 为每股派送现金股利， n 为送股率或转增股本率， k 为增发新股或配股率， A 为增发新股价或配股价：

$$\text{派送股票股利或转增股本：} P_1 = \frac{P_0}{1+n}$$

$$\text{增发新股或配股：} P_1 = \frac{P_0 + A \times k}{1+k}$$

$$\text{上述两项同时进行：} P_1 = \frac{P_0 + A \times k}{1+n+k}$$

$$\text{派送现金股利：} P_1 = P_0 - D$$

$$\text{上述三项同时进行：} P_1 = \frac{P_0 - D + A \times k}{1+n+k}$$

可赎回

以隆基绿能（113053.SH），其回售条款如下：

例子 18.4. 本次发行的可转换公司债券最后两个计息年度，如果公司股票在任何连续三十个交易日的收盘价低于当期转股价格的 70% 时，可转换公司债券持有人有权将其持有的可转换公司债券全部或部分按债券面值加上当期应计利息的价格回售给公司……

假设转股价为 10 元，那么当连续 30 个交易日的收盘价小于 7 元，投资者就有权将可转债售回（退货）上市公司。上市公司的最终目的是促使投资者转股，从而（借钱不还），当可赎回条款条件满足时，就将迫使上市公司拉升股价，或下调转股价。

溢价率

转股溢价率，即使用购买可转债的方式购得上市公司股票（并非转股价格，转股价格为面值除以转股数，而此时为可转债价格除以转股数，包含期权），高于（溢价）直接购买正股股价比例。若转股溢价率为 20%，说明使用购买可转债获得上市公司股票，比直接在市场上购买贵 20%。

$$\text{转股溢价率} = \frac{\text{可转债价格} - \text{转股价值}}{\text{转股价值}} \times 100\%$$

一般而言转股溢价率为正，若为负则说明转股价值大于可转债价格，因此可以直接买入转债，将其转换为股票，而后卖出进行套利。转股溢价率越低，意味着可转债受正股波动影响更大，股性越强。反之，转债溢价率越高，股性越弱。

例子 18.5. 假设有 A、B 两支可转债，其市场价格目前均为 100 元，两者的正股价格均为 10 元，两者差别为 A 转债的转股溢价率为 0%，而 B 转债的溢价率为 10%。

假设 A 的转股比率为 N_A ，那么此时：

$$A \text{ 转股溢价率} = \frac{\text{可转债价格}}{\text{转股价值}} - 1 = \frac{\text{可转债价格}}{\text{转股比率} \times \text{正股现价}} = \frac{100}{10N_A} - 1 = 0\%$$

那么计算可得 A 转股比率为 $N_A = 10$ ，同理假设 B 的转股比率为 N_B ：

$$B \text{ 转股溢价率} = \frac{\text{可转债价格}}{\text{转股比率} \times \text{正股现价}} = \frac{100}{10N_B} - 1 = 10\%$$

计算可得 B 转股比率为 $N_B \approx 9.09$ 。当 A 与 B 正股同时上涨 10% 至 11 元时，可以发现此时 A 转债转股价值为 10×11 元，提高了 10%。而 B 转债的转股价值为 $9.09 \times 11 = 99.99$ 元，保持不变。因此转股溢价率越低，对股价变动更敏感。

平价底价溢价率：

$$\text{平价底价溢价率} = \frac{\text{转股价值} - \text{纯债价值}}{\text{纯债价值}} \times 100\%$$

期权价格（权证价格）：

$$\text{期权价格} = \text{可转债价格} - \text{纯债价值}$$

纯债溢价率，显然可转债价格与纯债价值之差为期权价格。因此纯债溢价率越低说明期权价格越低，因此可转债价格越接近纯债价值，其债性越强。反之，纯债溢价率高则显示可转债债性较低。

$$\text{纯债溢价率} = \frac{\text{可转债价格} - \text{纯债价值}}{\text{纯债价值}} \times 100\%$$

同时可以看到三个溢价率之间有如下近似关系：

$$\text{转债溢价率} + \text{平价底价溢价率} \approx \text{纯债溢价率}$$

例子 18.6. 兴业转债 (113052.SH) 在 2022 年 8 月 5 日收盘价 (可转债价格) 为 109.026, 其转股价格为 24.48, 当天正股收盘价为 17.60, 那么其转股价值为 $100/24.48 \times 17.60 = 71.895$, 因此其转股溢价率为 $(109.026 - 71.895)/71.895 = 51.646\%$ 。根据当天万得提供的纯债价值为 97.377, 可得期权价格为 $109.026 - 97.377 = 11.649$, 平价底价溢价率为 $(71.895 - 97.377)/97.377 = 26.168\%$ 。

18.2 可转债的分解

可转债价值 = 可转债转股权价值 - 赎回权价值 + 回售权价值 (考虑转股价格调低权)

可转债价值 = 纯债价值 + 转股看涨期权价值 + 回售看跌期权价值 - 赎回看涨期权价值 + 向下修正选择期权价值

更为复杂的地方有两个：1. 转股期权是一个半欧式半美式的期权，即转股期之前是欧式，进入转股期就变成了美式，这就使得定价更为复杂。2. 转股看涨期权价值、回售看跌期权价值、赎回看涨期权价值这三个期权属于只能同时行使一个，无法同时行权，因此单纯的加减其实是不正确的，需要三个一起看待，所以就变得更为复杂了。

18.3 可转债的定价

zheng lin BS 模拟

19 数值方法

19.1 二叉树等

19.2 蒙特卡罗模拟

19.3 有限差分

附录 A 牛顿迭代法

牛顿迭代法 (Newton's method) 又称为牛顿-拉弗森方法 (Newton-Raphson method), 是一种迭代估计方程根的算法。

A.1 $f(x)$ 的根

对于函数 $y = f(x)$, 使用泰勒公式进行展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

保留前两项, 并令 $f(x) = 0$, 即有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

整理上式, 当 $f'(x_0) \neq 0$ 时应有:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

迭代可得令 $f(x) = 0$ 的根:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

备注 A.1. 原理为, 先取任意一点 x_0 , 根据 $f(x_0)$ 与其切线 $f'(x_0)$, 可计算出切线与 x 轴相交与点 x_1 。同样根据 $f(x_1)$ 与 $f'(x_1)$, 可以计算出切线与 x 轴相交于 x_2 , 不断迭代, 即可求得函数

$f(x) = 0$ 的根。

A.2 $f'(x)$ 的根

同理，对于 $f'(x)$ 的根，使用泰勒公式，并保留前三项：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

对等式两边求导可得：

$$f'(x) = 0 + f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0) * 2(x - x_0)$$

同理，令 $f'(x) = 0$ 可得：

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) = 0$$

当 $f''(x_0) \neq 0$ 应有：

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

迭代可得令 $f'(x) = 0$ 的根：

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f'(x_t)}{f''(x_t)}$$

附录 B 股利与除权除息

股利

股利 (Dividend)，又称为股息或红利，是上市公司对股东的投资回报。在上市公司的税后利润中，其分配顺序如下：

1. 弥补以前年度亏损
2. 提取法定公积金（从营业利润或其他收入提取的储备金，根据公司法规定，扣除不少于 10% 作为公积金）

3. 提取公益金（用于职工福利等公益设施的资金）
4. 提取任意公积金（与之策资本的比率没有限制，由公司权利机构根据发展需要扣除）
5. 支付优先股股息
6. 支付普通股股息
7. 分配红利

一般而言，股息是股东定期按一定的比率（特别对于优先股而言）从上市公司分取的盈利，股息的比率相对固定。优先股股东有股息收入作为保障，一般不参与公司分红。而红利则是在上市公司分派股息之后按持股比例向股东分配的剩余利润，因此只有在公司获取利润时才能分配红利，数额通常不固定，随着公司每年可分配盈余多少上下浮动。也有人将优先股的收益称之为股息，而普通股的收益称之为红利。一般将股息与红利统称为股利：

$$\text{股利} = \text{股息} + \text{红利}$$

由于要在获得利润后才能向股东分派股息和红利，因此上市公司一般是在公司营业年度（或半年度）结算以后才从事这项工作。A 股上市公司一般选择会在半年度或年度进行分红，选择年度进行分红的企业较多。半年报截止与 8 月底，因此 9 月为半年报分红的高峰，而年报截止到 4 月底，因此 5 月是年报分红的高峰。

公司可以三种形式实施分红派息：

1. 现金股利（Cash dividend）：以现金的形式发放股利，称为分红或派息（派现），分红的现金是净利润的分配，因此需要缴纳个人所得税。
2. 股票股利（Stock dividend）：获得股票而非现金，又称为送红股、送股或派股，属于净利润分配，因此也需要缴税。
3. 转增股：上市公司资本公积金转增为股本，或称为转股，由于资本公积本身就是股本的一种形式，因此不需要缴税。
4. 财产股利：如公司其他债券、产品等形式分派股利，一般比较少见。

上市公司发行股票所募集资金后会分为两个部分，股本（实收资本，A 股股票面值大多为每股一元）与资本公积。股本即股票面值乘以股份数的部分，超过股本的部分为资本公积。假如上市发行价为 5 元，面值 1 元为股本，而超过面值的 4 元称为资本公积。而盈余公积就是而当公司获得收益之后，从税后利润提取，留存在公司内部。同时税后利润在提取盈余公积金以及向投资者分配

利润后，继续留存在企业内的利润就称之为未分配利润。从盈余公积以及未分配利润，转化为股本为送股，而转股则为将资本公积转化为股本。

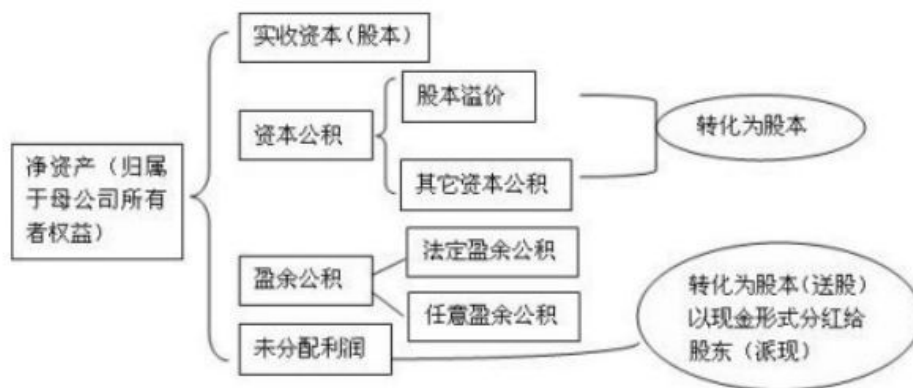


图 23: 净资产（归属母公司股东权益）

分红流程：

- 股息宣布日：即股东大会决议后，公司将分红派息的消息公布的日期
- 股权登记日（T 日）：统计和认定参加分红派息的股东的日期，在此期间持有公司股票的股东才能享受股利发放
- 除权除息日（T+1 日）：一般为股权登记日之后的一个工作日，本日之后（含本人）买入股票不再享受本期股利。对于现金股利称为除息（XD，Exclude dividend），对于股票红利称为除权（XR，Exclude right）。并将前一日收盘价除权除息，股价自然变动。
- 发放日：股利正式发放

除权除息

现金股利是上市公司将可分配利润以现金的形式支付给股东，但总股本大小不变，因此股东权益减少。对应每股所对应的价值（每股净资产 = 归属母公司股东权益/总股本）减少，因此价格应相应下调，这一过程叫除息。股票股利或送股是上市公司将可分配利润留在公司里，发放股票作为股利，实质为将未分配利润或盈余公积转股本，两者本都属于股东权益。因此送股后公司的资产、负债、股东权益的总额结构并没有发生改变，但总股本增大了，导致每股净资产降低了，股价也相应降低。从股票价格中剔除这部分因素，称之为除权。

送股和转增是比较常见的总股本发生变化导致除权的情况，其他还有如增发、配股回购注销等。增发即增发新股，即上市公司再一次发行新股，进行再融资。发行对象可以是指定投资者（大股东或机构），或全部投资者额外发行股份募集，发行价格应不低于公告招股意向书前 20 个交易日公司股票均价或前一个交易日的均价。而定向发行则为上市公司采用非公开方式，向特定对象发行股票的行为（发行对象不超过 10 名）。配股为上公司按一定比例向现有股东发行新股，属于再融资，股东需要按配售价与配售数量缴纳配股款，不同于分红派息。

除权除息日的开盘价不一定等于除权除息价，除权除息价仅是除权日开盘价的一个参考价格。当实际开盘价高于这一理论价格时，就称为填权，在册股东即可获利；反之实际开盘价低于这一理论价格时，就称为贴权，填权和贴权是股票除权后的两种可能，它与整个市场的状况、上市公司的经营情况、送配的比例等多种因素有关。

除权除息计算方式

除权除息参考价计算方式沪市与深市不同（结果都四舍五入至 0.01 元），沪市计算方式为：

$$\text{参考价} = \frac{\text{股权登记日收盘价} + \text{配股价} \times \text{配股率} - \text{派息率}}{1 + \text{送股率} + \text{配股率}}$$

例子 B.1. 假设沪市某上市公司分配方案为每 10 股送 3 股，派 2 元现金，同时每 10 股配 2 股，配股价为 5 元，该股股权登记日收盘价为 12 元，则其除权除息参考价为：

$$\text{参考价} = \frac{12 + 0.2 \times 5 - 0.2}{1 + 0.3 + 0.2} = 8.53$$

深市计算方式为：

$$\text{参考价} = \frac{\text{股权登记日总市值} + \text{配股总数} \times \text{配股价} - \text{派现金总额}}{\text{除权后总股本}}$$

其中：

$$\text{股权统计日总市值} = \text{股权登记日收盘价} \times \text{除权前总股本}$$

$$\text{除权后总股本} = \text{除权前总股本} + \text{送股总数} + \text{配股总数}$$

例子 B.2. 假设深市某上市公司总股本 10000 万股，流通股 5000 万股，股权登记日收盘价为 10 元，其分红配股方案为 10 送 3 股派 2 元配 2 股，共送出红股 3000 万股，派现金 2000 万元，由于国家股和法人股股东放弃配股，实际配股总数为 1000 万股，配股价为 5 元，则其除权参考价为：

$$\text{参考价} = \frac{10 \times 10000 + 1000 \times 5 - 2000}{10000 + 3000 + 1000} = 7.36$$

例子 B.3. 以平安银行 (000001.SZ) 为例，2022 年 7 月 22 日，10 股派 2.28 元（即每股派 0.228 元现金红利）。

CSMAR “日市场回报率文件” 中显示，22 日当日不复权收盘价为 12.81，昨收为 12.78，那么此时计算日收益率为 0.002347。若使用前一日 21 日收盘价 13.01，此时计算的收益率为 -0.015373。而 21 日收盘价 13.01 与 22 日的昨收 12.78 之差，正为现金红利 0.23 元。CSMAR 数据库中，“考虑现金红利再投资” 与 “不考虑现金红利再投资” 收益率分别为 0.002152 与 -0.1537。

CSMAR “股票历史日行情信息表 (后复权)” 中，22 日收盘价为 1975.95，而 21 日收盘价为 1971.32，收益率为 0.00235。万得中，7 月 22 日不复权收盘价 12.81，前一日收盘价 13.01，万得显示当日涨跌幅为 -1.54%。而对于后复权而言，当日收盘价为 1459.52，前一日收盘价为 1456.10，万得显示后复权涨跌幅为 0.23%。

原始行情上 CSMAR 与 WIND 计算结果相同，虽然两者在后复权的价格上存在差异，但由后复权计算的涨跌幅相同。

注释 B.4. 关于收益率的计算：

- 收益率需要使用后复权价格进行计算，与真实收益率不相等但近似
- 使用不复权价格，使用当天的 “PreClose” 或 “昨收” 字段（为经过除权）与当天收盘价格计算的收益率，即 CSMAR 数据库中 “ChangeRatio” 字段，计算方式为：今收/昨收-1
- 如上两种计算方式，结果与 CSMAR 数据库中 “考虑现金红利再投资的日个股回报率” 近似
- 若直接使用 $t-1$ 日的收盘价，与当天收盘价所计算的收益率，与 CSMAR 数据库中 “不考虑现金红利再投资的日个股回报率” 近似或相等

Reference

- [MBA 智库百科：除权除息](#)
- [百度百科：除权除息](#)

附录 C 股指计算方法

C.1 道琼斯

道琼斯工业平均指数 (Dow Jones Industrial Average, DJIA)，计算方法为成分股的平均值，除以一个 Dow Divisor。

$$\text{DJIA} = \frac{\sum P_i}{\text{Divisor}}$$

其中 Divisor 用于调节，当股票拆分、分拆之等，又如旧公司退出，新公司进入，使得指数保持不变。可以看到这样编制的缺点就是每支成分股都等权重的编入股指，假设 A 公司或 B 公司上涨 10 元，那么都将导致股指将上涨 10。但若 A 公司的流通股数量是 B 的 10 倍，显然影响远超 B 公司。

C.2 标准普尔 500

标准普尔 500 指数 (Standard & Poor's 500, S&P 500)，标普 500 是使用市值作为权重计算指数，称为 Capitalization-weighted indices，简称 market cap weighted，或称为 Value-weighted。

$$\text{SP500} = \frac{\sum P_{i,1} Q_{i,0}}{\sum P_{i,0}, Q_{i,0}}$$

大致编制方法为，标普 500 对于每个公司都计算 Investable Weight Factor 或 IWF，用于计算可供投资者交易的 Q ，即 $Q = \text{IWF}_i * \text{Total shares}_i$ ，用于去除掉不流通股票，这样也称为 float-adjusted，分母为该成分股编入股指时的价格。

附录 D 外汇

D.1 汇率表示方法

以美元兑人民币为例，通常表示为 $\text{USD/CNY} = 6.7$ ，或也经常表示为 USDCNY 或 USD: CNY，称为 USD to CNY 或 USD against CNY。即 1 美金（每美金），兑换 6.7 人民币，即 CNY per USD, (¥6.7/\$)，用英文表述为 quoted as quote currency units per base currency。在 USDCNY 中，在前的货币称为 Base currency（每），在后的称为 Quote currency（计价货币）或称为 Local currency（本币）。

$$\text{USD} : \text{CNY} = 6.7 : 1 \Rightarrow 1\text{USD} = 6.7\text{CNY}$$

或理解为：

$$\text{\$1} : \text{¥1} = 6.7 : 1 \Rightarrow \text{\$1} = \text{¥6.7}$$

为了更好地理解，若将苹果作为一种货币，假设苹果价格为 2 元/个（苹果），即有苹果：人民币为 2。此时人民币为本币（Local currency）或计价货币，而苹果为外币。在外汇交易中，显然做多苹果，需要卖出的人民币，买入苹果，则希望苹果涨价。以做多 USD/CNY 为例，假设当前为 6.7，若做多 USDCNY，即希望 USD 上涨。卖出本币 CNY，并买入外币 USD，一个月后上涨至 6.8，即每单位 USD 可兑换的 CNY 变多，即 Base currency USD 对 CNY 上涨，从而获利。若做空 USD/CNY，那么希望 USD 跌。

D.2 利率平价

利率平价（Interest rate parity）可分为以下两种：

- Covered Interest Rate Parity (CIP): 利用远期合约锁定远期汇率，对冲风险
- Uncovered Interest Rate Parity (UIP): 不适用远期合约单对冲风险，所以是 uncovered，根据有效市场假说，应该不能获得超额收益

对于 CIP，使用远期汇率对冲风险。假设即期汇率 S ，远期汇率 F （形式均为 FOR/LOC，即每单位 FOR 外币，兑换多少 LOC 本币）：

$$(1 + i_L) = \frac{F_{F/L}}{S_{F/L}}(1 + i_F)$$

对上述公式，若取对数则有，并使用 $x = \log(1 + x)$ 进行近似：

$$\log(1 + i_L) = \log(F_{F/L}) - \log(S_{F/L}) + \log(1 + i_F)$$

$$i_L \approx \log(F_{F/L}) - \log(S_{F/L}) + i_F$$

$$\log(F_{F/L}) \approx \log(S_{F/L}) + i_L - i_F$$

两国利差，如中国名义（Nominal）利率为 3%，而美国利率为 1%，那么应该卖出美金，买入人民币，投资中国债券，从而赚取利差。那么未来应该人民币贬值 2%（USDCNY 上涨 2%），否则就存在套利机会。即投资高利率国所获得的额外收益，将由该国汇率贬值抵消。

从上式变形，等式两边都减去 1：

$$\frac{(1 + i_L)}{(1 + i_F)} - 1 = \frac{i_L - i_F}{1 + i_F} = \frac{F_{F/L}}{S_{F/L}} - 1$$

因此对于 CIP 而言，应有如下近似关系，即利差应与汇率变化相等：

$$(i_L - i_F) \approx \frac{F_{F/L} - S_{F/L}}{S_{F/L}}$$

对于 UIP 而言，不用远期锁定未来汇率，假设 UIP 成立，未来汇率的期望应由以下关系得到：

$$(1 + i_L) = \frac{\mathbb{E}(S_{t+1})}{S_t}(1 + i_F)$$

若 CIP 与 UIP 都同时成立（不考虑风险溢价），那么：

$$\mathbb{E}(S_{t+1}) = F_{F/L}$$

例子 D.1. 假设当前 GBP/USD 汇率为 1.35，并且美国的利率为 1.1%，英国的利率为 3.25%，那么根据 CIP 远期汇率应有持有 1 单位本国货币（USD），投资本国债券所获得的收益，即 $1 + 1.1\%$ 。应与 1 美金兑换成英镑并持有， $\frac{1}{S_{F/L}} \times (1 + 3.25\%)$ ，最终将其通过远期汇率兑换成美金，由于使

用远期合约进行锁定，那么两者应有 CIP 平价关系：

$$(1 + 1.1\%) = \frac{1}{S_{F/L}} \times (1 + 3.25\%) \times F_{F/L}$$

此时可以看到，远期汇率约为 1.32，即英镑应贬值约 $(1.32 - 1.35)/1.35 = 2.22\%$ ，近似于两国利差：

$$F_{F/L} = 1.35 \times \frac{(1 + 1.1\%)}{(1 + 3.25\%)} \approx 1.32$$

例子 D.2. 假设当前 $AUD/USD = 0.75$ ，澳洲与美国两年期的利率收益分别为 3% 与 2%。汇率表示为 AUD/USD ，可以看到此时美元为本币，并将澳元理解为需要购买的商品（外币）。那么此时持有成本为占用资金所需要支付的利息成本 $e^{1\% \times 2}$ ，而持有收益为投资外币所获得的澳洲利率收益 $e^{3\% \times 2}$ 。因此两年后的远期汇率应有：

$$\begin{aligned} F_{0,2} &= S_0 + \text{持有成本} - \text{持有收益} \\ &= 0.7500 \times e^{1\% \times 2} \times e^{-3\% \times 2} \\ &= 0.7206 \end{aligned}$$

若真实交易的远期价格大于 0.7206，如 0.7600。那么在未来澳元更贵，那么应该持有澳元，并在两年后卖澳元。具体应该卖出 AUD/USD 两年后的远期合约（届时卖出 AUD，买入 USD），借入 1% 两年的 1000 美元，即换得澳元 $1000/0.75 = 1333.33$ ，投资 3% 澳币并持有两年，两年后得到澳元 1415.78，按照远期 0.76 的价格换算为美元，得到 1075.99 美元，扣除美元资金成本 $1000 \times e^{0.02} = 1020.20$ ，最终得到收益为 55.79 美元或 73.41 澳元。

相反，若真实交易的远期价格小于 0.7206，如 0.7000，此时在两年后未来（远期）澳元更便宜，美元更贵。应该持有美元，并在两年后卖出美元。具体操作与上述相反，买入 AUD/USD 两年后的远期合约（届时买入 AUD，卖出 USD），借入 3% 1000 澳元两年，转换为美金，并投资两年， $1000 \times 0.75 \times e^{0.02} = 765.15$ ，在到期后根据远期合约，兑换回澳元为 $765.15/0.7 = 1093.07$ ，支付澳元资金成本 $1000 \times e^{0.06} = 1061.84$ ，得到利润为 31.23 澳元或 21.86 美元。

可以从两个角度理解：从利率角度，若投资者投资美国债券，美国债券价格上涨，收益率下跌，最终使得套利机会消失；若从汇率角度，在未来应该有 AUD/USD 下跌，幅度相当于两国利差，使得套利机会消失。

CIP 只需要无套利就能成立，由于交易成本等远远可能违反 CIP。

Carry trade: 为卖出低利率国家货币，买入高利率国家货币并投资该国

Diversified carry trade: 买入一篮子货币

Wikipedia reference:

- [Interest rate parity](#)
- [Carry](#)