远期（期货）

杨弘毅

创建: 2020 年 3 月 4 日
修改: 2021 年 9 月 9 日

1 定价

定价思路为远期（期货）合约价值 f_t（合约本身价值），在签订时的有双方公平的原则（zero net market value at entry），应有 $f_0 = 0$，即远期合约签订之时为价值 0，进而得到远期（期货）价格 $F_{t,T}$（远期价值为零的合理交割价格）。

- S_t：远期（期货）标的资产在 t 时刻的价格
- K：远期合约中的交割价格
- f_t：远期合约多头在 t 时刻的价值（合约价格）
- $F_{t,T}$：在 t 时刻时，到期时间为 T 的理论远期（期货）价格（标的物价格）

1.1 风险中性定价

在风险中性条件下，一份多头远期（期货）合约的价值 f_t 为:

$$\begin{aligned} f_t &= M^Q \, \mathrm{E}^Q[S_T - K] \\ &= e^{-r(T-t)}(\mathrm{E}^Q[S_T] - K) \\ &= e^{-r(T-t)}(S_t e^{r(T-t)} - K) \\ &= S_t - Ke^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

已知在 t=0 时，远期合约价值 $f_0 = 0$，可确定在 T 时刻**合理交割价格 K，即为合理远期价格** $F_{0,T}$。（在 t=0 时刻签订的到期日为 T 的远期合约，锁定远期价格）

$$\begin{aligned} & f_0 = S_0 - Ke^{-rT} = 0 \\ & \Rightarrow K = F_{0,T} = S_0 e^{rT} \\ & \Rightarrow F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)} \end{aligned}$$

1.2 复制定价

由于在到期日 T 时刻，有 $F_{T,T} = S_T$，交割价格为 K。即在 T 时刻，使用 K 单位现金，换取 1 单位现货 S_T。构建组合 A：由一单位远期合约多头 f_t 以及 $Ke^{-r(T-t)}$ 构成。构建组合 B：由一单位标的资产 S_t 构成，则有：

$$f_t + Ke^{-r(T-t)} = S_t$$

由于在 t=0 时，合约价值 $f_0=0$。$K=F_{0,T}=S_0e^{rT}$ 或有 $F_{t,T}=S_te^{r(T-t)}$。由此可见此时期货价格 $F_{t,T}$ 与现货价格 S_t 之间仅相差货币时间价值，这部分货币的时间价值可理解为持有成本。因购买期货不占用资金（假设保证金也会获得相应占用资金无风险利息），可获得相应资金的无风险利息。相反现货则需要占用资金，无法获得这部分的资金的无风险利息，应加上无风险利息作为其持有成本，使无论购买现货或期货成本相同（无套利）。可理解为如果购买期货或现货价格相同，那么所有人会直接购买期货，节约购买现货的持有成本。

2 红利资产调整

由于远期合约并不实际持有现货，所以如果资产在到期前有可预测的现金流（红利）无法获得，需要进行调整，使调整后资产变为无红利资产。

2.1 已知红利

远期合约到期之前，标的资产产生红利数额为 D，其红利现值为 I_0，则有 S_0-I_0 为剔除红利后，使其变为无红利资产。使用同上复制定价方法：

$$\begin{aligned}
&f_0+Ke^{-rT}=S_0-I_0\\
&f_0=S_0-I_0-Ke^{-rT}=0\\
&\Rightarrow K=F_{0,T}=(S_0-I_0)e^{rT}\\
&\Rightarrow F_{t,T}=(S_t-I_t)e^{r(T-t)}
\end{aligned}$$

- **正红利**：附息债券（Coupon Bond）、支付已知现金红利的股票。价格中包含红利，购买期货无法获得这部分收益，应从中扣除。
- **负红利**：黄金、白银，持有期间需要支付储藏成本。价格中不包含需要额外支付成本，可理解为如果黄金现货和期货价格相同，而黄金期货不需要储藏成本，那么所有人会直接购买黄金期货。即购买期货应加上这部分储藏成本。

2.2 已知红利率

在远期合约到期期间，标的资产会产生与现货价格成一定比率的红利。

$$\begin{aligned}
f_t&=e^{-r(T-t)}(S_0e^{(r-q)(T-t)}-K)\\
f_0&=S_0e^{-qT}-Ke^{-rT}=0\\
\Rightarrow\quad F_{0,T}&=e^{(r-q)T}\quad 或\quad F_{t,T}=e^{(r-q)T}
\end{aligned}$$

- 外汇远期和期货：外汇发行国的无风险利率
- 股指期货：市场平均红利率或零，取决于股指计算方式
- 远期利率协议：本国的无风险利率

3 期货与远期的关系

当无风险利率恒定，且到期日交割价格等都相同时，远期价格与期货价格相同。当利率不断变化时，两者关系略有不同。其差异源于期货市场的保证金盯市制度（MTM：Mark-to-Market）。标的资

产价格与利率有正相关关系时候，期货价格高于远期价格。即当期货价格上涨时，由于保证金盯市制度，可将多余的保证金取出，用同样上涨的无风险利率投资，此时期货价格应该高于远期价格。相反，当标的资产与利率呈现负相关关系时候，远期价格高于期货价格。

4 F_t 与 S_t 的关系

在 t 时刻，期货价格 F_t 与现货价格 S_t 有如下关系，易知持仓成本即将现货持有到期货到期日的成本。由于期货为合约，并且只在规定到期日交割标的资产。在合约到期之前并不持有实际现货，因此无法获得持有现货的收益，并且持有现货到合约到期日的成本需计算在期货价格内，两者关系应有：

$$\begin{aligned}F_{t,T} &= S_t + \textbf{净持仓成本（Net Cost of Carry）}\\ &= S_t + \text{合约期限内成本（Carry Cost）} - \text{合约期限内收益（Carry Return）}\\ &= S_t + \text{利息成本} + \text{储藏成本} - \text{红利收益} - \text{便利收益（商品期货）}\end{aligned}$$

由于在 t 时刻，如现货价格和持仓成本都为已知，则可确定期货价格。或已知期货的价格与持仓成本，则可确定现货价格（期货的价格发现功能）。两者关系为相对价格，而由无套利条件得到。在中国往往有现货价格 S_t 大于期货价格 F_t（期货贴水，此时有正基差），由于现货做空机制不完善，很难融券，即使能融券成本也较高。使得套利投资者无法在现货被高估的情况下，卖出现货（卖出开仓）买进期货（因为只有持有现货才能卖出），造成两个市场的分割，无法达到一体化的预期。另外现货买卖需要交纳印花税，而期货不需要，且期货佣金往往低于现货。

5 期货升水与贴水

基差（Basis）指现货与期货价格之差（现货价格 Spot price 有时又被称为 Cash price），即：

$$\text{基差} = \text{现货价格} - \text{期货价格}$$

对于期货（或远期）而言，**升水**（contango）或“Negative basis”，指当期货（或远期）的价格高于现货在到期日价格的期望。相反而言，如期货（或远期）价格低于现货在到期日价格的期望则成为**贴水**（backwardation）或称为“Postive basis”。

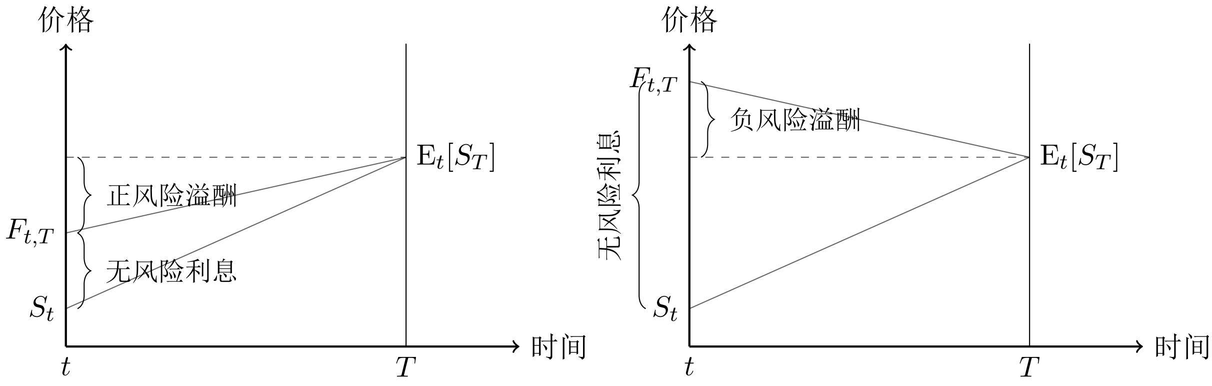
6 $F_{t,T}$ 与 $\mathrm{E}_t[S_T]$ 的关系

两者相差风险溢价，即应有 $F_{t,T} = \mathrm{E}[S_t] -$ 风险溢价。但由于风险溢价不确定，与期货与现货价格确定的关系相比不同，两者关系并不确定。在现实测度下，从现货角度出发，有 $\mathrm{E}_t[S_T] = S_t e^{\mu(T-t)}$，其中 μ 为到期收益率，为无风险收益率与风险溢酬之和。虽然现货价格可以从市场交易中得到，但期货市场交易成本较低，反应较为灵敏迅速，价格变化一般都由期货市场传递至现货市场。如果标的资产 S **系统性风险为正，则要求有正的风险溢酬**（如未来期货价格 $\mathrm{E}[S_T] = \mathrm{E}[F_T]$ 为 2000，风险对持有者不利, 要求 500 元的正的风险溢价，则买进价为 1500 元）使其到期收益率大于无风险收益率 $\mu > r$。相反，如果标的资产 S **系统性风险为负**（如 VIX，系统性风险为负）。即标的资产能对冲风险，减少风险敞口，风险溢酬为负，减少收益，到期收益率小于无风险收益率 $\mu < r$。

同样在现实测度下，从期货角度出发，因为购买期货无需占用资金（假设保证金可获得无风险收益），所以不要求无风险收益。仅要求对其承担的未来不确定性风险，有对应的风险补偿（仅赚取风险溢酬），即超额收益 $\mu - r$，可以得到 $\mathrm{E}_t[F_{T,T}] = F_{t,T} e^{(\mu-r)(T-t)}$。又因在期货到期日 T 时刻，有

期货价格等于现货价格 $F_{T,T}=S_T$，即在 t 时刻下也应有两者期望 $\mathrm{E}_t[F_{T,T}]=\mathrm{E}_t[S_T]$。同样可得出 $F_{t,T}=S_te^{r(T-t)}$ 的结论，即：

$$S_te^{\mu(T-t)}=\mathrm{E}_t[S_T]=\mathrm{E}_t[F_{T,T}]=F_{t,T}e^{(\mu-r)(T-t)}$$



(a) 正系统性风险　　(b) 负系统性风险

7 套期保值

7.1 多头空头套期保值

基差为被套期保值的现货价格 H 与用于套期保值的期货价格 G 之差 $b=H-G$，未来到期时基差 b_1 的不确定性导致了**基差风险**。由于标的资产规模与期货合约标准数量之间的差异，导致了**数量风险**。基差风险、数量风险都可能使得套期保值策略无法对冲所有风险，即不完美的套期保值。

多头套期保值策略持有现货空头，担心未来价格上涨，买入期货锁定未来价格（期货多头）。相反，空头套期保值策略持有现货多头，担心未来价格下跌，卖出期货锁定未来卖出价格（期货空头）。当现货价格小于期货价格时，基差为负。假设 $b_0=-10$，多头套保策略要有正收益要求基差变小，即 $b_0>b_1$，$b_0=-10$，则有 $b_1<-10$。**注意：此时虽然基差变小，但基差的绝对值在增大。**

	多头套期保值 1 单位现货 H 空头，1 单位期货 G 多头	**空头套期保值** 1 单位现货 H 多头，1 单位期货 G 空头
收益	$(H_0-H_1)+(G_1-G_0)$ $=(H_0-G_0)-(H_1-G_1)$ $=b_0-b_1$	$(H_1-H_0)+(G_0-G_1)$ $=(H_1-G_1)-(H_0-G_0)$ $=b_1-b_0$
收益来源	基差变小 $b_0>b_1$	基差变大 $b_0<b_1$
收益条件	1. 现货涨幅小于期货涨幅 2. 现货跌幅大于期货跌幅 3. 现货价格下跌而期货价格上涨	1. 现货涨幅大于期货涨幅 2. 现货跌幅小于期货跌幅 3. 现货价格上涨而期货价格下跌

7.2 套保（金额）比率

套期保值比率（Hedge Ratio），指现有头寸（金额）中，已有多少被套期保值（对冲）。假设当前有 1000 元的现货头寸，其中 600 元已使用期货进行套期保值，表示当前套期保值比率为 0.6 或 60%，同时表示还留有风险敞口 40%。**（每单位价格现货中有多少已被期货套期保值）**

$$\text{套期保值（金额）比率}=\frac{\text{套期保值资产头寸}}{\text{被套期保值资产头寸}}$$

7.3 套保（数量）比率

在已知了目前风险暴露情况，即套保（金额）比率之后，还希望了解在现有的现货头寸之下，需要多少数量的期货进行对冲。希望在期货到期时，最大化消除被套保资产价格变动所带来风险。此时要求被套保资产价格的变动对整个组合价值影响最小，进而转化为求解最小值问题。即对 ΔH 求偏导，并使一阶条件 $\partial\Delta\Pi/\partial\Delta H=0$，求得**最优套期保值（数量）比率 n**。因只关注最终期货到期时刻的套保比率，而不关注过程中的套保比率，所以此处使用的是 ΔH 而非 ∂H。

对于多头套期保值组合，有：

$$\begin{aligned}
&\Delta\Pi = n\Delta G - \Delta H \\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial(\Delta H)} = n\times\frac{\partial(\Delta G)}{\partial(\Delta H)} - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad n = \frac{\partial(\Delta H)}{\partial(\Delta G)} = \frac{\partial r_H\times H_0}{\partial r_G\times G_0}
\end{aligned}$$

对于空头套期保值组合，同样有：

$$\begin{aligned}
&\Delta\Pi = \Delta H - n\Delta G \\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial(\Delta H)} = 1 - n\times\frac{\partial(\Delta G)}{\partial(\Delta H)} = 0 \\
&\Rightarrow \quad n = \frac{\partial(\Delta H)}{\partial(\Delta G)} = \frac{\partial r_H\times H_0}{\partial r_G\times G_0}
\end{aligned}$$

对多头套期保值或空头套期保值均有最优套保比率 $n=\partial(\Delta H)/\partial(\Delta G)$，$r_H$ 和 r_G 为 H 与 G 在套期保值期间的收益率。n 代表期货价格变动一个单位，现货价格变化多少，同时代表**每单位数量现货需要 n 单位数量期货进行对冲**。因现货与期货为线性关系，即套期保值后不需要随时间调整两者之间比率 n，此为**静态套保（Static Hedge）**。与之相反的为**动态套保（Dynamic Hedge）**，需要不断随时间调整两者之间比率。

得知每单位数量现货需要 n 单位期货进行对冲之后，根据持有现货 H 头寸数量 Q_H，可计算出需要多少份（手）的期货 G 合约进行对冲。即可求得最优套期保值（期货）合约份数 N，使得期货总价值变动等于持有现货总价值变动。

$$N = n\times\frac{Q_H}{Q_G} = \frac{\partial(\Delta H)\times Q_H}{\partial(\Delta G)\times Q_G} = \frac{\partial(r_H\times H_0\times Q_H)}{\partial(r_G\times G_0\times Q_G)} = \frac{\partial r_H\times V_H}{\partial r_G\times V_G}$$

由 $n\times Q_H$ 计算得到，对于现有头寸 Q_H 单位数量的现货，需要多少单位数量的期货进行对冲。再除以 Q_G 期货合约规模（乘数），计算得到需要 N 份（手）期货合约进行对冲。此时 V_H 为被套期保值的所持有现货资产总价值，而 V_G 则为每份期货合约价值（单位价格 $\times$ 合约乘数）。**注意：n 代表的是单位数量，而 N 为份数（手），为最小买卖单位。如螺纹钢期货报价单位为元/每吨，一份合约（手）包含 10 单位数量（吨）期货，即合约规模（乘数）为 10。**

7.4 最小方差套保（数量）比率

当将风险定义为方差时，最优的套保比率可定义为，使套期保值组合收益 $\Delta\Pi$ 方差最小的套期保值（数量）比例 n，即为**最小方差套保比率**。σ^2_Π 为套期保值组合收益的方差，对 n 求导，使一阶条件为零，二阶条件 $d^2(\sigma^2_H)/dn^2=2\sigma^2_G>0$，有最小值。对于多头套保组合或空头套保组合，其最小方差

套期保值比一般公式为：

$$
\begin{aligned}
\sigma_\Pi^2 &= \sigma_H^2 + n^2\sigma_G^2 - 2n\sigma_{HG} \\
\Rightarrow \quad & \frac{d\sigma_\Pi^2}{dn} = 2n\sigma_G^2 - 2\sigma_{HG} = 0 \\
\Rightarrow \quad & n = \frac{\sigma_{HG}}{\sigma_G^2} = \rho_{HG}\frac{\sigma_H}{\sigma_G}
\end{aligned}
$$

其中 $\sigma_H = \sigma_{\Delta H}$，$\sigma_G = \sigma_{\Delta G}$，$\sigma_{HG}$ 为 ΔH 与 ΔG 的协方差，ρ_{HG} 为 ΔH 与 ΔG 的相关系数（$\rho_{XY} = Cov(X,Y)/\sigma_X\sigma_Y$）。我们可以进而推导出基于收益率的最小方差套期保值比率，首先：

$$
\begin{aligned}
\rho_{HG} &= \frac{Cov(\Delta H, \Delta G)}{\sqrt{Var(\Delta H)}\sqrt{Var(\Delta G)}} \\
&= \frac{Cov(r_H \times H_0, r_G \times G_0)}{\sqrt{Var(r_H \times H_0)}\sqrt{Var(r_G \times G_0)}} \\
&= \frac{H_0G_0Cov(r_H, r_G))}{H_0\sqrt{Var(r_H)} \times G_0\sqrt{Var(r_G)}} \\
&= \frac{Cov(r_H, r_G)}{\sqrt{Var(r_H)}\sqrt{Var(r_G)}} = \rho_{r_Hr_G}
\end{aligned}
$$

其次：

$$
\frac{\sigma_H}{\sigma_G} = \frac{\sqrt{Var(r_H \times H_0)}}{\sqrt{Var(r_G \times G_0)}} = \frac{H_0\sqrt{r_H}}{G_0\sqrt{r_G}} = \frac{\sigma_{r_H}H_0}{\sigma_{r_G}G_0}
$$

因此有：

$$
n = \rho_{r_Hr_G}\frac{\sigma_{r_H}H_0}{\sigma_{r_G}G_0}
$$

7.5 OLS 估计

可以观察 $n = Cov(\Delta H, \Delta G)/Var(\Delta G)$ 即为 OLS 回归中的系数 b。则可用 OLS 回归，估计 b：

$$
\Delta H = a + b\Delta G + \varepsilon
$$

需注意套保期限与回归中使用的 ΔH 和 ΔG 的期限应相同，即如果要锁定未来一个月的现货价格，需使用现货和期货的月价格变化进行回归。且调整后得到实际需要套期保值（期货）合约份数 N 为：

$$
N = b\frac{Q_H}{Q_G}
$$

也可使用收益率进行 OLS 回归估计，且在时间极短时，百分比收益率 $\Delta P/P$ 与对数收益率可视为相等。且对数收益率更符合平稳序列和正态分布的假设，在平稳假设的下对每日现货和期货的对数收益率进行回归：

$$
r_H = a + b'r_G + \varepsilon
$$

此时：

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{Cov(\Delta H, \Delta G)}{Var(\Delta G)} \\
&= \frac{Cov(r_H \times H_0, r_G \times G_0)}{Var(r_g \times G_0)} \\
&= \frac{H_0G_0Cov(r_H, r_G)}{G_0^2Var(r_G)} \\
&= b'\frac{H_0}{G_0}
\end{aligned}
$$

对应需套期保值合约份数 N（手）：

$$
N = b\frac{Q_H}{Q_G} = b'\frac{H_0 \times Q_H}{G_0 \times Q_G} = b'\frac{V_H}{V_G}
$$

7.6 风险降低百分比

通过检验风险降低百分比，可以检验使用最小方差套期保值比率的套期保值效果。将最小方差套期保值比率 $n=\rho_{HG}\frac{\sigma_H}{\sigma_G}$，带回套期保值组合方差 $\sigma_\Pi^2=\sigma_H^2+n^2\sigma_G^2-2n\sigma_{HG}$ 中。可以得到：

$$e^*=\frac{\sigma_H^2-\sigma_{\Delta\Pi}^2}{\sigma_{\Delta H}^2}=\rho_{HG}^2=\frac{Cov^2(\Delta H,\Delta G)}{Var(\Delta H)Var(\Delta G)}=\frac{Cov^2(r_HH_0,r_GG_0)}{Var(r_HH_0)Var(r_GG_0)}=\rho_{r_Hr_G}^2$$

而在一元线性回归中判别系数 $R^2=\rho$，即回归效果越好，R^2 越接近 1，套期保值的效果也越好。