BSM 公式

杨弘毅

创建: 2020 年 4 月 19 日
修改: 2021 年 9 月 15 日

目录

1 布朗运动、维纳过程

标准布朗运动简易表达式（连续形式）有，其中 $\varepsilon \sim N(0,1)$：

$$dZ_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

离散形式有：

$$Z_T - Z_t = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

1.1 特征

标准布朗运动（Brownian motion）或维纳过程（Wiener process）的特征有：

- 初值为零
- 连续
- 独立增量：对于任意两个不同时间点 Δt_i 与 Δt_j，其增量 ΔZ_i 与 ΔZ_j 相互独立
- 独立同分布（方差可加）：增量 ΔZ 服从均值为零、方差等于时间长度的正态分布，即 $\Delta Z_i \sim N(0, \Delta t_i)$

1.2 为何使用标准布朗运动

- 股价不能为负，所以不能遵循正态分布，但股票连续复利收益率（$d\ln S$）近似服从正态分布
- 维纳过程是一个马尔可夫随机过程，增量 ΔZ 独立，与弱式 EMH 相同，即技术分析无效，无法使用历史信息预测未来，过去信息跟未来信息相互独立
- 维纳过程对时间处处不可导，且二次变分（Quadratic Variation）不为零，与股票价格变化存在转折尖点的性质相符

1.3 部分证明

增量均值为零，方差为时间长度，当 X 与 Y 独立时，则有：

$$\mathrm{Var}(XY) = \mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y) + [\mathrm{E}(X)]^2\,\mathrm{Var}(Y) + [E(Y)]^2\,\mathrm{Var}(X)$$

此时，由于 ε_t 与 dt 独立，套用上式，同时由于 $\varepsilon_t \sim N(0,1)$，则有：

$$\mathrm{E}(dZ_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t\sqrt{dt}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(dZ_t) &= \mathrm{Var}(\varepsilon_t\sqrt{dt}) \\
&= \mathrm{Var}(\varepsilon_t)\,\mathrm{Var}(\sqrt{dt}) + [\mathrm{E}(\varepsilon_t)]^2\,\mathrm{Var}(\sqrt{dt}) + [E(\sqrt{dt})]^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon_t) \\
&= \mathrm{Var}(\varepsilon_t)\left[\mathrm{Var}[(\sqrt{dt})^2] - [\mathrm{E}(\sqrt{dt})]^2\right] \\
&= \mathrm{Var}(\varepsilon_t)\left[\mathrm{E}[(\sqrt{dt})^2] - [\mathrm{E}(\sqrt{dt})]^2 + [\mathrm{E}(\sqrt{dt})]^2\right] \\
&= 1 \cdot \mathrm{E}(dt) = dt
\end{aligned}$$

方差可加性，由下式可见，由于独立增量，导致协方差项为零，使得方差可加。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3) \\
&= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) \\
&+ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_2, X_3) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3)
\end{aligned}$$

由上可知，增量在连续形式 dZ_t 以及离散形式 $Z_T - Z_t$ 下，均服从均值为零，方差为时间长度的正态分布，即有：

$$dZ_t \sim N(0, dt)$$
$$Z_T - Z_t \sim N(0, T - t)$$

1.4 几种随机过程

广义维纳过程（generalized Wiener process），a 与 b 为常数。此时，易知其均值为 $\mathrm{E}(dX_t) = adt$，由于 b 为常数，且 $\mathrm{Var}(dZ_t) = dt$，则有方差为 $\mathrm{Var}(dX_t) = b^2dt$。

$$dX_t = adt + bdZ_t$$

普通布朗运动，a(t) 与 b(t) 都是 t 的确定性函数。由于都为确定函数，所以如上可知，其均值方差为 $\mathrm{E}(dX_t) = a(t)dt$，由于 b 为常数，且 $\mathrm{Var}(dZ_t) = dt$，则有方差为 $\mathrm{Var}(dX_t) = b(t)^2dt$。

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dZ_t$$

扩散过程（Diffusion Process），此时 $a(X(t), t)$ 与 $b(X(t), t)$ 都为 X_t 和 t 的确定性函数。由于漂移项与方差项都包含 $X(t)$，使得扩散之后过程的条件分布无法保证仍是正态分布。但更能刻画一般动态变化，未加入新的风险源，仍具有独立增量，马尔可夫性，和方差可加性等性质。

$$dX_t = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dZ_t$$

伊藤过程（Itô Process），最一般化的随机过程，a_t 和 b_t 为任意函数或随机过程。

$$dX_t = a_tdt + b_tdZ_t$$

2 伊藤引理（Itô lemma）

若变量 X_t 遵循伊藤过程：

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t$$

在导数 $\dfrac{\partial f}{\partial t}$、$\dfrac{\partial f}{\partial X}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ 存在的前提下，则有变量 X_t 和 t 的函数 $f(X(t),t)$ 将遵循如下过程：

$$df_t = \left(\frac{\partial f}{\partial X}a_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b_t^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}b_t dW_t$$

为方便记忆，可记为（金融随机分析第二卷 P118）：

$$\boxed{df(X(t),t) = f_t(X(t),t)dt + f_x(X(t),t)dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X(t),t)dX(t)dX(t)}$$

或可写为更简洁的形式：

$$\boxed{df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2}f_{xx}dXdX}$$

证明

$f(X,t)$ 的泰勒展开式为：

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\Delta X^2 + \frac{\partial f}{\partial X \partial t}\Delta X \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + \dots$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$(\Delta t)^2$，认为是高阶无穷小，可忽略。而对于 $\Delta X \Delta t$ 项有：

$$\Delta X = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta X \Delta t = a(\Delta t)^2 + b\varepsilon(\Delta t)^{3/2}$$

其中的 $(\Delta t)^{3/2}$ 项，也被认为时高阶无穷小项，可忽略。同时由于 $(\Delta X)^2$ 项中包含 Δt 项，因此需要保留。因此仅考虑前三项（**注意**：此与常微分不同，而在常微分中，$(\Delta X)^2$ 项是也是高阶无穷小项），展开得到：

$$\begin{aligned}
\Delta f_t &= \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\Delta X^2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}[a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2\varepsilon^2\Delta t
\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon^2\Delta t$ 项，由于 $\varepsilon \sim N(0,1)$，因此有 $\mathrm{E}(\varepsilon)=0$。又因 $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \mathrm{E}(\varepsilon^2) - [\mathrm{E}(\varepsilon)]^2 = 1$，得到 $\mathrm{E}(\varepsilon^2)=1$，同时有 $\mathrm{E}(\varepsilon^2\Delta t) = \Delta t$。计算 $\varepsilon^2\Delta t$ 的方差可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\varepsilon^2\Delta t) &= \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\,\mathrm{Var}(\Delta t) + [\mathrm{E}(\varepsilon^2)]^2\,\mathrm{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon^2) \\
&= \mathrm{Var}(\varepsilon^2)\,\mathrm{Var}(\Delta t) + 1\cdot\mathrm{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon_t^2) \\
&= \mathcal{O}(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

可以认为 $\varepsilon^2\Delta t$ 方差为高阶无穷小，其期望为 1。因此，可认为 $\varepsilon^2\Delta t \approx \Delta t$，可将原式化简为：

$$\Delta f_t = \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2\Delta t$$

而连续形式为：

$$\begin{aligned}
df_t &= \frac{\partial f}{\partial X}dX_t + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2 dt \\
&= \frac{\partial f}{\partial X}(a_t dt + b_t dZ_t) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b^2 dt \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial X}a_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}b_t^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}b_t dZ_t
\end{aligned}$$

3 几何布朗运动

3.1 推导

由于衍生品价格是标的资产价格与时间的函数，即只需要假定标的资产遵循过程，即可用伊藤引理求得其衍生品遵循过程。假设股票价格服从几何布朗运动（Geometric Brownian Motion，GBM）：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

令 $f_t = \ln S_t$，此时：

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

代入伊藤引理之中, 此时 $a_t = \mu S_t$，$b_t = \sigma S_t$，则有：

$$\begin{aligned} df_t = d\ln S_t &= \left(\frac{1}{S_t}\mu S_t + 0 - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt + \frac{1}{S_t}\sigma S_t dZ_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ_t \end{aligned}$$

连续形式下有：

$$d\ln S = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ_t \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt, \sigma^2 dt\right)$$

离散形式下为：

$$\Delta \ln S = \ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(Z_T - Z_t)$$

$$\Delta \ln S \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

可以看到**连续复利收益率**或**对数收益率**服从期望值为 $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt$，方差为 $\sigma^2 dt$ 的**正态分布**，与现实较为吻合。且 $d\ln S_t$ 的定义，使得股票价格非负。对于日频收益率的计算，此时得到的正态分布均值以及方差均为日频（$T - t = \frac{1}{252}$），需乘以 252 进行年化，得到年化的收益率均值与波动率。在 T 时刻，**股票价格的对数**（$\ln S$），也服从**正态分布**（**股票价格**（S）服从**对数正态分布**）。

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

3.2 注意

- 在计算时，期限、漂移率（无风险利率）、波动率的时间单位应匹配（一般以年为单位，使用交易日计算）
- 由于只有交易日才有历史数据与收益率数据，波动率使用交易天数进行年化，中国 240 天左右，美国 252 天
- 无风险利率选择即期利率（Spot rate）而非到期收益率（YTM，真实收益率，票息 5%，但非平价发行）
- 波动率为一个时间窗口内（一般为年，252 天交易日），日频连续复利收益率（对数收益率）（$\ln S_t/S_{t-1}$）标准差进行年化得到。即日波动率乘以 $\sqrt{252}$（一天的方差为 s^2，由于方差可加，252 个交易日的方差即为 $s^2 \times 252$，标准差或波动率为 $s\sqrt{252}$）。同理，月频收益率得到的波动率应乘以 $\sqrt{252/21}$ 进行年化。

4 比例收益率与对数收益率

4.1 分类

对于计算**单期**的收益率，可分为**百分比收益**或（Arithmetic return）或称为简单收益（Simple return），与 **连续复利收益**（Continuously compounded return），或称为对数收益（Logarithmic return，或 Log return）。记符

号 r 为收益率（rate of return）为将一段时间的收益（return）R，转化为在标准化期限内的收益。对于标准化期限为一年的收益率，称为年化收益率（annulized return）。

	百分比收益	对数收益
单期	$R_{pct} = \frac{V_T}{V_t} - 1$	$R_{log} = \ln \frac{V_T}{V_t}$

而计算**多期**的平均收益率，有**算术平均收益率**（Arithmetic mean rate of return），和**几何平均收益率**（Geometric mean rate of return）两种方式。其中算术平均收益率为：

$$\bar{r}_{arithmetic} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{n}(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$$

几何平均收益率为：

$$\bar{r}_{geometric} = \left(\prod_{i=1}^{n}(1 + r_i)\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

百分比收益率

对于没有再投资（reinvestment）的百分比年化收益率为（t 单位为年）：

$$r_{pct} = \frac{R_{pct}}{t}$$

对进行了再投资的百分比收益率为：

$$\begin{aligned} 1 + R_{pct} &= (1 + r_{pct})^t \\ r_{pct} &= (1 + R_{pct})^{\frac{1}{t}} - 1 \end{aligned}$$

对于单期或多期的百分比收益，都使用上式**几何平均**进行计算，得到其平均年化收益率。

对数收益率

对数年化收益率为（t 单位为年）：

$$r_{log} = \frac{R_{log}}{t}$$

假设一支股票在一个交易日内对数收益率 $R_{log} = 0.14\%$，平均一年有 252 个交易日（每个月 21 个交易日），则应有年化收益率为 $r_{log} = \frac{R_{log}}{1/252} = 252R_{log} = 35.28\%$。因为根据对数收益率的性质，只需要将分段内收益率相加，即可得到整体收益率：

$$\begin{aligned} R_{log} = \sum_{i=1}^{n} R_{log,i} &= R_{log,1} + R_{log,2} + \cdots + R_{log,n} \\ &= \ln\frac{V_2}{V_1} + \ln\frac{V_1}{V_0} + \cdots + \ln\frac{V_n}{V_{n-1}} \\ &= \cancel{\ln V_1} - \ln V_0 + \cdots + \ln V_n - \cancel{\ln V_{n-1}} \\ &= \ln\frac{V_n}{V_0} \end{aligned}$$

同理，对于多期的对数收益，如多年的对数收益，只需要计算其**算术平均**，即为其平均年化收益率。

4.2 期望

如上式所述，μ 为 Δt 时间内**百分比年化预期收益率**：

$$\mathrm{E}(\frac{\Delta S_t}{S_t}) = \mu \Delta t$$

而年化连续复利收益率或年化对数收益率的期望则为：

$$\mathrm{E}(d \ln S_t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt$$

比例收益率在实际应用过程中意义较小，假设 4 年盈亏为 +50%，−50%，+50%，−50%，其比例收益率期望值 μ 为 0，但实际上相比期起初有-43.75% 的亏损。使用几何平均计算，年化亏损 $\sqrt[4]{1.5 * 0.5 * 1.5 * 0.5} - 1 = -13.40\%$。可以发现，在盈亏的计算上，应使用几何平均的方式计算，使用算术平均比例收益率没有意义。

若使用对数收益率（模型），其期望为 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$，即算术平均 μ 需要减去 $\frac{\sigma^2}{2}$。因此如果收益率越稳定，两者将越为接近。在此例子中百分比收益率均值为 0，样本方差为 $\frac{1}{3}$，此时对数收益率的期望为 $-\frac{1}{6} \approx -16.67\%$。即波动越大，降低实际收益率，更符合现实情况，贴近几何平均收益率，具有经济学意义。计算实际对数收益率的算术平均为 $2(\ln 1.5 + \ln 0.5)/4 = -14.38\%$。

4.3 性质

由上文可知，**对数收益率**或**连续复利收益率**的连续以及离散形式如下：

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ_t \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt, \sigma^2 dt\right)$$

$$\Delta \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma(Z_T - Z_t) \sim N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

已知正态分布有如下性质：X_1 与 X_2 为两个独立的正态分布的随机变量（均值为 μ_1 与 μ_2，标准差为 σ_1 与 σ_2），则有随机变量 $Y = X_1 + X_2$ 服从均值为 $\mu_1 + \mu_2$，方差为 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 的正态分布。**注意**: 为随机变量相加（Sum of normally distributed random variables），而非正态分布相叠加（Sum of normal distribution）。如图 1所示，正态分布相叠加将产生混合分布（Mixture distribution）。

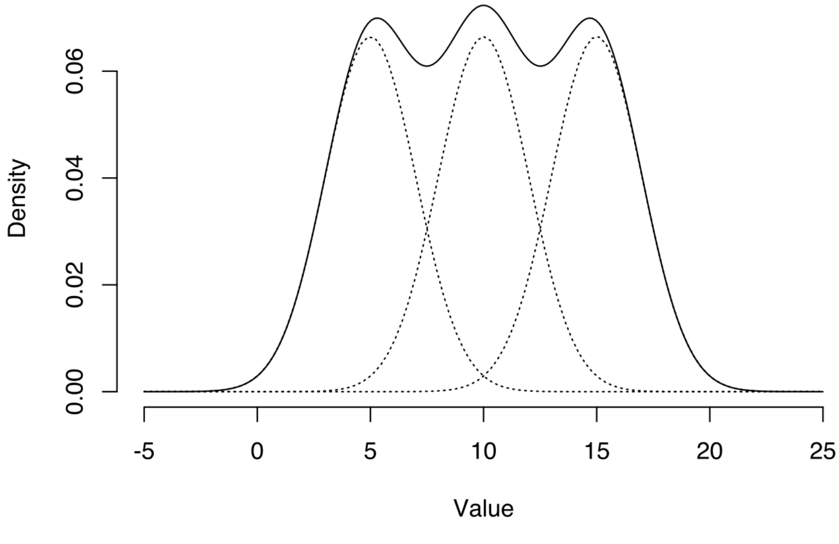

图 1: 混合分布

由于对数收益率的的可叠加性（较长时间内的对数收益率可分解为较短时间间隔对数收益率相叠加），并且利用上述正态分布性质，可知正态分布随机变量 $d \ln S$（极短时间内）与叠加之后的 $\Delta \ln S$（较长时间内）都应服从**正态分布**。

对比**比例收益率**在极短时间内（连续形式）与较长时间内（离散形式）：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t$$
$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma(Z_T - Z_t)$$

百分比收益率虽然在极短时间（连续形式）服从正态分布。由于分母 S_t 不断改变，并不能通过叠加的形式得到较长时间的分布，即：

$$\frac{S_n - S_0}{S_0} \neq \frac{S_1 - S_0}{S_0} + \frac{S_2 - S_1}{S_1} + \cdots + \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$$

存疑：比例收益率在较短时间与较长时间应该也服从正态分布，通过累加两者服从的分布相同，变量不同，仅都服从同一正态分布。与对数收益率相比漂移项不同。且现实中比例收益率取值范围为 $[-100\%, +\inf)$，并不符合正态分布，这点与模型不符。ΔS 则不服从正态分布，随着 S_t 的变化，其均值与方差也在不断改变。

5 对数正态分布

由**股票价格的对数**服从**正态分布**可知，股票价格应服从**对数正态分布**（Log-normal distribution）。由正态分布与对数正态分布的性质可知，对一个服从正态分布的随机变量 X 取指数，则 e^X 服从对数正态分布。相反，对一个服从对数正态分布的随机变量 X 取对数，则 $\ln X$ 服从正态分布（因而得名，取对数得到正态分布的分布）。因此有如下关系：

$$\ln S_T \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \leftrightarrow \quad S_T \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$$

已知对数正态分布 $X \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$，其期望与标准差为：

$$\mathrm{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$
$$\mathrm{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

已知股票价格的对数 $\ln S_T$ 服从如下正态分布：

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

可知股票价格 S_T 服从对数正态分布，代入上式可知其期望及方差为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T) &= \exp\left(\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right) \\
&= \exp\left(\ln S_t + \mu(T-t)\right) \\
&= S_t e^{\mu(T-t)} \\
\mathrm{Var}(S_T) &= \left[\exp(\sigma^2(T-t)) - 1\right] \exp\left\{2\left[\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right] + \sigma^2(T-t)\right\} \\
&= \left[\exp(\sigma^2(T-t)) - 1\right] \exp\left[2\ln S_t + 2\mu(T-t)\right] \\
&= S_t^2 e^{2\mu(T-t)}\left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right]
\end{aligned}$$

注意

对于正态分布 μ 与 σ^2，为其均值与标准差。而对于对数正态分布，仅为确定其分布的两个参数。对于相同的 μ 与 σ 参数确定的正态分布与对数正态分布，两者之间的期望与方差通过如下表格关系转化：

	正态分布	对数正态分布
期望	$\mathrm{E}_N(X) \equiv \mu = \ln[\mathrm{E}_L(X)] - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \frac{\mathrm{Var}_L(X)}{[\mathrm{E}_L(X)]^2}\right]$	$\mathrm{E}_L(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$
方差	$\mathrm{Var}_N(X) \equiv \sigma^2 = \ln\left[1 + \frac{\mathrm{Var}_L(X)}{[\mathrm{E}_L(X)]^2}\right]$	$\mathrm{Var}_L(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

5.1 PDF 与 CDF

如下图所示，通过对服从**正态分布**的随机变量**取指数**，可以将其转换为对数正态分布。同理，通过对服从**对数正态分布**的随机变量**取对数**，使其转换为正态分布。假设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 服从正态分布，随机变量 $X \sim \mathrm{Log}N(\mu, \sigma^2)$，对正态分布随机变量 Y 取指数 $x = e^y$，此时有 $y = \ln x$，带入 CDF 中，可得到对数正态函数 CDF。对两者求导，可得 PDF 函数。

	正态分布	对数正态分布
PDF	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma}}$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x-\mu)^2}{\sigma}}$
CDF	$\frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$	$\frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$

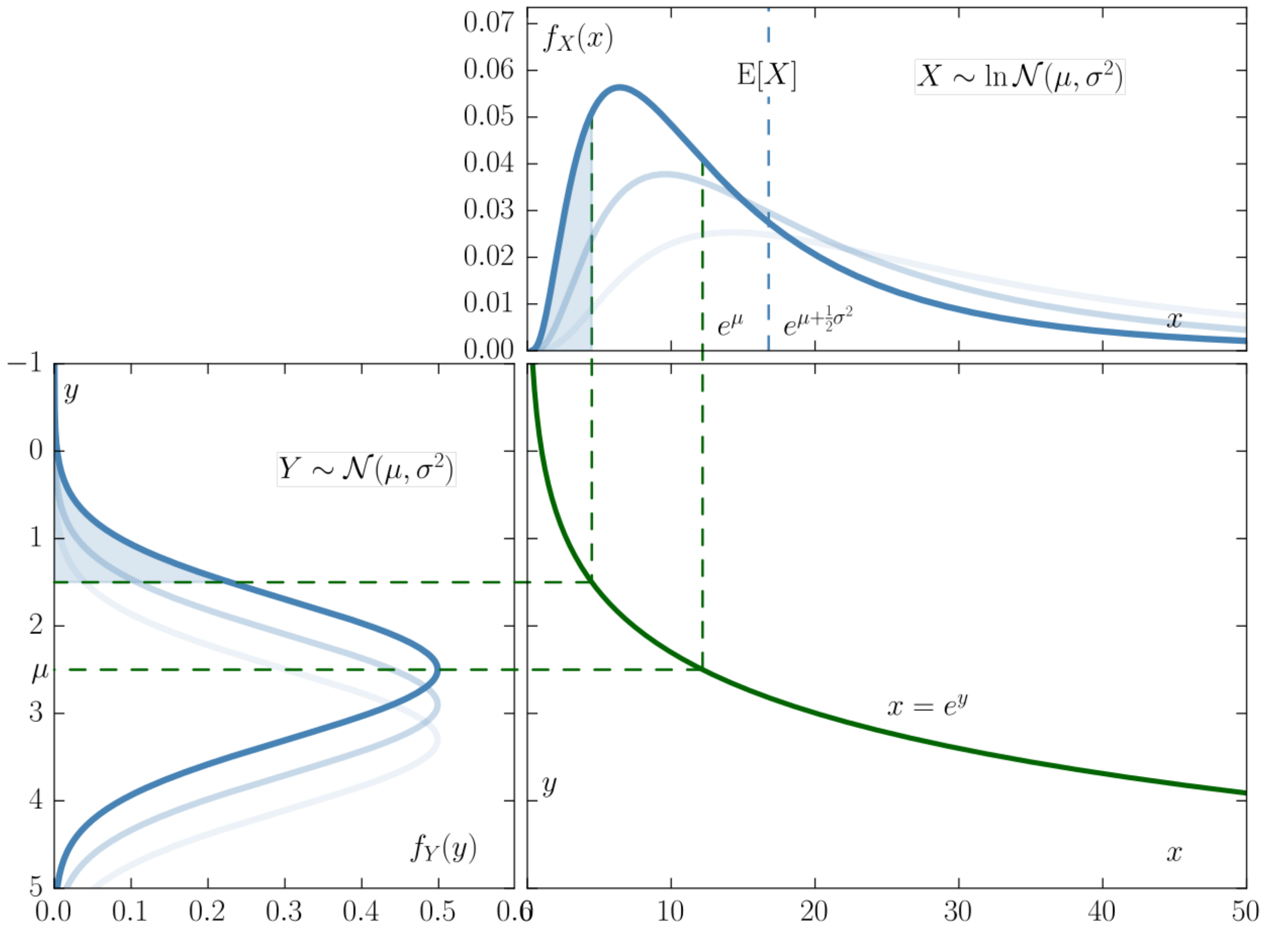

图 2: 两者相互转换

5.2 具体推导

如上文所述，对于相同参数 μ 与 σ^2 的正态分布与对数正态分布可以相互转化。两者互相经过转化后，其累积分布函数（Cumulative distribution fuction，CDF）相同。如图2所示，假设随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 服从正态分布，

随机变量 $X \sim \mathrm{Log}N(\mu,\sigma^2)$，则应有如下关系，对服从对数正态分布的随机变量 X 取对数，使其转化为正态分布：

$$\mathrm{CDF}_{logN}(x)=\mathrm{CDF}_N(\ln x)=\mathrm{CDF}_N(y)$$

对公式两边取导数，则可得到其概率密度函数（Probability density function，PDF）：

$$\mathrm{PDF}_{logN}(x)=\frac{1}{y}\mathrm{PDF}_N(\ln x)$$

此时，带入已知正态分布 PDF，即可得到对数正态分布 PDF：

$$\mathrm{PDF}_{logN}=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

5.2.1 期望推导

根据对数正态分布的 PDF，可计算其期望：

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

使用换元法，令 $t=\frac{\ln x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$，则有 $x=e^{\sqrt{2}\sigma t+\mu}$，则原积分转化为：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}de^{\sqrt{2}\sigma t+\mu}\\&=\frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t-\frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2}dt\\&=\frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}de^{-(t-\frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2}d(t-\frac{\sqrt{2}\sigma}{2})\end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{x^2}=\sqrt{\pi}$，可得到：

$$\mathrm{E}(X)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

5.2.2 方差推导

已知：

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}[(X-\mu)^2]=\mathrm{E}(X^2-2\mu X+\mu^2)=\mathrm{E}(X^2)-2\mu\,\mathrm{E}(X)+\mu^2=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2$$

同上，已知对数正态分布 PDF：

$$\mathrm{E}(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

使用换元法，令 $t=\frac{\ln x-\mu}{\sigma}$，则有 $x=e^{\sigma t+\mu}$：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}+2\sigma t}dt\\&=\frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(t-2\sigma)^2+2\sigma^2}dt\qquad\left(\text{对}-\frac{t^2}{2}+2\sigma t\text{配方}\right)\\&=\frac{e^{2\mu+2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(-\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}})^2}d\left(\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}}\right)\\&=e^{2\mu+2\sigma^2}\end{aligned}$$

此时则有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \\
&= e^{2\mu+2\sigma^2} - (e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}})^2 \\
&= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\
&= e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)
\end{aligned}
$$

6 BSM 偏微分方程（PDE）

6.1 假设

- 人性假设
  - 不存在无风险套利机会（无套利）
- 完美世界
  - 允许卖空标的证券
  - 没有交易费用和税收
  - 证券交易时连续的，价格变动也是连续的
  - 所有证券都完全可分
- 可交易资产
  - 证券价格遵循几何布朗运动，即 μ 和 σ 为常数
  - 衍生品有效期内，无风险利率 r 为常数
  - 衍生证券有效期内，标的证券没有现金收益支付

6.2 推导

假设股票价格 S_t 遵循几何布朗运动，以及其离散形式有：

$$
\begin{aligned}
dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \\
\Delta S_t &= \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t
\end{aligned}
$$

假设衍生品价格 $f(S_t,t)$ 为 S_t 以及 t 的函数，根据伊藤引理可得其连续和离散形式有：

$$
\begin{aligned}
df(S_t,t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S_t dZ_t \\
\Delta f(S_t,t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S_t \Delta Z_t
\end{aligned}
$$

由此可见，股票价格与衍生品价格的风险源均来自 ΔZ_t，因此可以构建投资组合，由一单位衍生品空头，以及 $\partial f/\partial S$ 单位证券多头构成，进行对冲消除该风险源：

$$
\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f}{\partial S}S_t
$$

在 Δt 时间内，该投资组合价值的变化 $\Delta\Pi_t$ 来源其标的资产以及衍生品的价格变动，代入 ΔS_t 与 Δf_t 可得：

$$
\begin{aligned}
\Delta\Pi_t &= -\Delta f_t + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S_t \\
&= -\left[\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S_t \Delta Z_t\right] + \frac{\partial f}{\partial S}\left(\mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t\right) \\
&= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)\Delta t
\end{aligned}
$$

由于此时组合消除了风险，因此组合只应获得无风险收益率：

$$
\begin{gathered}
\Delta\Pi_t = r\Pi_t\Delta t \\
-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)\Delta t = r\left(-f_t + \frac{\partial f}{\partial S}S_t\right)\Delta t
\end{gathered}
$$

整理等式，消去 Δt，即可得到 **BSM 偏微分方程**：

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + rS_t\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf_t
$$

7 BSM 公式（鞅方法）

在风险中性世界中，无收益资产在 t 时刻，其看涨期权价值的期望为：

$$
\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T - K, 0)\right]
$$

欧式看涨期权的现值应为其期望值以无风险利率进行贴现：

$$
c = e^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T - K, 0)\right]
$$

同时在风险中性世界下，漂移率 μ 应等于无风险收益率 r，因此有：

$$
\ln S_T - \ln S_t \sim N\left((r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t)\right)
$$

已知：

$$
S_T = S_t \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(Z_T - Z_t\right)\right]
$$

已知 $Y = \frac{Z_T - Z_t}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$，其概率密度函数（PDF）为：

$$
\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}
$$

在风险中性下的期望，可以改写为如下积分的形式：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T - K, 0)\right] &= \tilde{\mathrm{E}}_t\left[S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y} - K\right]^+ \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} - K\right)^+ \varphi(y)dy
\end{aligned}
$$

当 $S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y} - K \geq 0$ 时，有 $y \geq \frac{\ln(K/S_t)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$，设其为 $-d_2$，同时假设 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$。

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T-K,0)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y}-K\right)^{+}\varphi(y)dy \\
&= S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y}\varphi(y)dy - K\int_{-d_2}^{\infty}\varphi(y)dy \\
&= S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy - KN\left(d_2\right) \\
&= S_t e^{r(T-t)}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}+\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{y^2}{2}\right)}dy - KN(d_2) \\
&= S_t e^{r(T-t)}\int_{y=-d_2}^{y=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(y-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}dy - KN(d_2) \quad \text{（换元法：}u=y-\sigma\sqrt{T-t}\text{）} \\
&= S_t e^{r(T-t)}\int_{u=-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{u=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du - KN(d_2) \quad (dy=du) \\
&= S_t e^{r(T-t)}\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du - KN(d_2) \\
&= S_t e^{r(T-t)}N(d_1) - KN(d_2)
\end{aligned}
$$

得到 **BSM 公式**，即欧式看涨期权的解析解（注：$N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数（CDF），而 $N'(\cdot)$ 为标准正态分布的概率分布函数（PDF））：

$$
\begin{aligned}
c &= e^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_t\left[\max(S_T-K,0)\right] \\
&= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)
\end{aligned}
$$

已知期权平价公式：

$$
c + Ke^{r(T-t)} = p + S_t
$$

代入 BSM 看涨期权解析解中，可得：

$$
\begin{aligned}
p &= c + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\
&= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\
&= S_t(N(d_1)-1) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_2)-1) \\
&= S_t(-N(-d_1)) - Ke^{-r(T-t)}(-N(-d_2)) \\
&= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1)
\end{aligned}
$$

此时 d_1 和 d_2 分别为：

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

8 波动率

8.1 分类与计算

波动率为一种风险的度量，所有的计算方法都是一种近似估计，并不代表准确的波动率。波动率可以大致分为两类，一类为回望波动率（backward looking），一类为前瞻波动率（forward looking）。两者的区别在于回望波动率

使用的是一段时间内的历史数据所计算出来的，是已经发生的波动率，如：历史波动率、已实现波动率、GARCH 波动率。而后者为根据 BSM 模型等，根据期权市场现有的价格信息，倒求出其中所包含的波动率信息（隐含），为人们对未来给定期限的波动率的预期值，如：隐含波动率（包含无模型波动率）。

波动率的数学定义为：假设 r_t 为一个资产的收益率时间序列，有 $t = 1, 2, 3, \ldots, T$，则有样本方差为：

$$\sigma^2(r_t) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2$$

其中样本均值应有：

$$\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

8.1.1 历史波动率（Historical volatility）

样本对数收益率标准差（日频数据）

历史波动率，指资产收益率在过去一段时间内表现出的波动水平，可以由资产收益率在过去一段时间内的标准差计算得到。

8.1.2 已实现波动率（Readlized volatility）

已实现波动率（Realized volatility，日内高频，5 分钟，假设均值为零）

8.1.3 随机波动率（Sochastic volatility）

8.1.4 GARCH 波动率

GARCH 为广义自回归条件异方差模型（Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity）。Robert Engle 于 1982 年在《计量经济学》上提出了 ARCH 模型用于估计和预测波动率。在此基础上，Bollerslev(1986) 建立了广义自回归条件异方差 (GARCH) 模型。

8.1.5 隐含波动率（Implied volatility）

假定市场上的期权或者权证的交易价格满足 Black-Scholes-Merton（BSM）期权定价公式，将市场上可以观测到的标的资产价格（S）、执行价格（K）、利率（r）、期限（τ）作为已知变量代入定价公式中，则可以得到期权当前的市场价格所隐含的波动率，此时提取的为期限内的波动率（Option-implied volatility expectations until expiration）。

$$\begin{aligned}
c &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\
p &= K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

8.1.6 无模型波动率（Model-free volatility）

8.2 典型实证现象

有些现象能够在几乎所有收益率的时间序列中观察到。一个好的条件异方差模型要能够捕捉大部分实证现象。在这个部分，我们列出在波动性分析中最知名典型实证现象。

8.2.1 波动率聚类

如果 t−1 时的波动率很高，t 时的波动率也很可能会很高。即，在 t−1 时的冲击不仅会增加 t−1 时的波动率，也会影响到 t 时的波动率。换句话说，市场在某些时期较为波动，在其他时间更为平静。波动率特征按照时间集中分类。GARCH 类模型能够很好地捕捉这一现象。事实上，这些模型更准确地来说，是衡量 t 时的波动率是如何依赖历史波动率 (和其他可能的条件变量)。

8.2.2 肥尾现象

收益率的时间序列通常呈现肥尾分布，又叫做超额峰度，或者尖峰。也就是说，它们的峰度（用方差的平方根标准化的第四中心矩）通常都大于 3（高斯随机变量的峰度为 3）。事实上，一种流行的检验高斯分布假设的方法，Jarque-Bera 测试，能够同时测试此分布是否是对称的以及其峰度是否等于 3。

如果收益率是肥尾分布的，则极端事件（非常高或非常低的回报率）的发生概率会高于收益率分布满足正态（高斯）分布时其发生的概率。

大部分波动率模型，例如 GARCH 模型会造成收益率呈现肥尾分布，不管真正的潜在冲击是高斯分布还是肥尾分布。在估计时，我们通常假设潜在冲击服从高斯分布。在样本量很大时，即使真实分布不是高斯，模型通常也能给出合适的估计值。这些估计值为最大似然估计值，并且能够在相对宽松的限制条件下给出一致的估计。

8.2.3 不对称性

有一个普通 GARCH 模型不能捕捉的实证现象是 t−1 时刻的负面冲击比正面冲击对 t 时刻的方差有更强烈的影响。尽管如此，GARCH 模型能够很容易地调整扩充从而捕捉到这种不对称性。类似的例子有门限 GARCH（TGARCH）模型，, 不对称 GARCH （AGARCH）模型和指数 GARCH （EGARCH)）模型。

这一不对称性过去被成为杠杆效应，因为增加的风险被认为是来自于负面冲击所引起杠杆的增加，但是限制人们认识到这个效应不能解释所有现象，并且风险规避是一个重要的机制。

9 Delta 对冲

Delta 为衍生品价格变动与其标的资产价格变动的比率。如果假定股票价格（X）与期权价格（Y）为折线，则其斜率应为 Delta，即对股票价格变动一单位，期权价格变动 Δ 单位。而现实中并非折线，Delta 则为两者切线斜率。

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

而从持有标的资产和衍生品数量分别为 N_S 和 N_V 而言，为了维持对冲结果为 0，易知对于每一单位标的资产，应使用 Δ 单位衍生品进行对冲。

$$\Delta V \times N_V = \Delta S \times N_S \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{N_S}{N_V}$$

如上所述，假定股票价格遵循几何布朗运动，则有在显示测度（Physical probability measure）下：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

根据伊藤引理：

$$f(T, W_T) = f(t, W_t) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial S} dW_t \frac{1}{2} + \int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

在 Bakshi and Kapadia 2003 中，

在一段时间内的使用看涨看跌期权进行 Delta 对冲（**注意**：由几何布朗运动与伊藤过程推到而来，因此看涨看跌期权形式相同，买入看涨看跌期权，并卖出股票，净投资金额获得无风险收益）。

$$\text{Call Gain} = C_{t+\tau} - C_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(C_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

$$\text{Put Gain} = P_{t+\tau} - P_t - \Delta_t(S_{t+\tau} - S_t) - \frac{r\tau}{365}(P_{t+\tau} - \Delta_t S_t)$$

Long call, short delta stock/ short call, long delta stock

Long put, long delta stock/ short put, short delta stock

10 平价期权

当平值点为 $S = Ke^{-r(T-t)}$ 时，将其带入看涨 BSM 公式当中，则有：

$$\frac{c}{S} = N(d_1) - N(d_2) \tag{1}$$

对于看跌期权则有：

$$\begin{aligned}\frac{p}{S} &= N(-d_2) - N(-d_1) \\ &= 1 - N(d_2) - [1 - N(d_1)] \\ &= N(d_1) - N(d_2) = \frac{c}{S}\end{aligned}$$

对于 d_1 和 d_2，此时有：

$$d_1 = \frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \tag{2}$$

$$d_2 = \frac{ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \tag{3}$$

则对于欧式平价期权：

$$\begin{aligned}\frac{c}{S} = \frac{p}{S} &= N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) \\ &= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} - \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^3}{6} + \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^5}{40} - \cdots + \ldots\right)\right] - 1 \qquad \text{(使用泰勒展开)} \\ &\approx \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2\pi} \approx 0.4\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

11 中国市场

11.1 内在价值

由于：

期权价值（Option value）＝内在价值（Intrinsic value）＋时间价值（Time value）

内在价值为即**不考虑资产价格波动**的情况下，期权条款赋予期权多头的最高价值。而时间价值为**标的资产价格波动**为期权多头（权利方）所带来的隐含价值，由于期权权利方只有权力而无义务，因此期权的时间价值应该大于 0。内在价值不受时间价值的影响，因而可以使用二分法。

若定义内在价值为，期权若在当下时点到期，期权所含的的价值（Hull，CME）。这样考虑的缺点为没有考虑货币的时间价值，且在中国市场由于现货的卖空限制，其价格高于其真实价格。

$$\text{看涨期权内在价值} = \max(S_t - K)$$
$$\text{看跌期权内在价值} = \max(K - S_t)$$

在考虑货币时间价值的情形内在价值如下，缺点为依然没有考虑中国市场的卖空限制。

$$\text{看涨期权内在价值} = \max(S_t - Ke^{-r(T-t)})$$
$$\text{看跌期权内在价值} = \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t)$$

因此考虑使用期货价格代替现货价格，以为期货市场多空双方均能自由表达其看法，因此有：

$$\text{看涨期权内在价值} = \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)})$$
$$\text{看跌期权内在价值} = \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)})$$

由于在中国市场 ETF 期权有红利保护机制，即会下调行权价格，放大每手期权数量，相当于变相抬高了股票价格，或复权（加挂 A 标记的期权）。且在 ETF 中的成分股分红，其分红留在 ETF 当中。而 ETF 没有期货，只有股指期货，而股指期货不对分红进行调整，即没有红利保护，即其成分股分红后股指自然下跌。因而在使用股指期货或期权以及 ETF 现货或期权时，需要做红利调整。即在 ETF 现货中将红利剔除，此时有：

$$F_{t,T} = (S_t - I)e^{r(T-t)}$$

此时则有，将上式代入，在中国市场中：

$$\text{看涨期权内在价值} = \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)} + I)$$
$$\text{看跌期权内在价值} = \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)} - I)$$

因为平值点为使内在价值为零，则平值点定义为为 $F_{t,T} = K$，这样定义使得实值虚值部分左右较为对称，有利于比较。此时有当 $F < K$ 为 OTM，此时值域为正，当 $F > K$ 为 ITM，则有值域为负。此时有对数在值状态（log-moneyness）：

$$\ln\frac{K}{K_{atm}} = \ln\frac{K}{F}$$

同时可以发现，在 PCP 下：

$$c = p + (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$$

对于平直期权 ATM，则有 $F_{t,T} = K$，易得此时 $c = p$。而当看涨期权为 ITM，其内在价值部分不为零。而对于此时得看跌期权为 OTM，其内在价值为零，而仅有时间价值，因此可以得到，在新平值点定义下的，相同行权价，相同期限的看涨看跌期权：

$$c_{\text{时间价值}} = p_{\text{时间价值}}$$

11.2 做空限制

且在中国市场中现货存在较大的做空限制，即在现货市场的价格由看多者和少量看空者决定，并不能反应所有投资者的真实情绪，以至于难以复制期权，违法 BSM 公式假设条件。解决方法有：

1. 使用期货进行贴现，得到其隐含现货价格，使用 BSM 进行计算，其中有：

   - 期货隐含现货价格

$$S^* = Fe^{-q(T-t)}$$

- 期权隐含现货价格

$$S^* = (c - p) + Ke^{-r(T-t)}$$

2. 直接使用 Black 公式，使用期货价格进行计算，即：

$$c = e^{-r(T-t)}\left[F_t N(d_1) - K N(d_2)\right]$$