

远期（期货）

杨弘毅

创建: 2020 年 3 月 4 日

修改: 2020 年 12 月 20 日

1 定价

定价思路为远期合约价值 f_t ，在签订时的有双方公平的原则（zero net market value at entry），应有 $f_0 = 0$ ，即远期合约签订之时为价值0，进而得到远期（期货）价格 $F_{t,T}$ 。

- S_t : 远期（期货）标的资产在t时刻的价格
- K : 远期合约中的交割价格
- f_t : 远期合约多头在t时刻的价值（合约价格）
- $F_{t,T}$: 在t时刻时，到期时间为T的理论远期（期货）价格（标的物价格）

1.1 风险中性定价

在风险中性条件下，一份多头远期合约的价值 f_t 为:

$$\begin{aligned}f_t &= M^Q E^Q[S_T - K] \\&= e^{-r(T-t)}(E^Q[S_T] - K) \\&= e^{-r(T-t)}(S_t e^{r(T-t)} - K) \\&= S_t - K e^{-r(T-t)}\end{aligned}$$

已知在 $t=0$ 时，远期合约价值 $f_0 = 0$ ，可确定在T时刻合理交割价格 K ，即为合理远期价格 $F_{0,T}$ 。（在 $t=0$ 时刻签订的到期日为T的远期合约，锁定远期价格）

$$\begin{aligned}f_0 &= S_0 - K e^{-rT} = 0 \\&\Rightarrow K = F_{0,T} = S_0 e^{rT} \\&\Rightarrow F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}\end{aligned}$$

1.2 复制定价

由于在到期日T时刻，有 $F_{T,T} = S_T$ ，交割价格为 K 。即在T时刻，使用 K 单位现金，换取1单位现货 S_T 。构建组合A：由一单位远期合约多头 f_t 以及 $K e^{-r(T-t)}$ 构成。构建组合B：由一单位标的资产 S_t 构成，则有：

$$f_t + K e^{-r(T-t)} = S_t$$

由于在 $t=0$ 时，合约价值 $f_0 = 0$ 。 $K = F_{0,T} = S_0 e^{rT}$ 或有 $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ 。由此可见此时期货价格 $F_{t,T}$ 与现货价格 S_t 之间仅相差货币时间价值，这部分货币的时间价值可理解为持有成本。因购买期货不占用资金（假设保证金也会获得相应占用资金无风险利息），可获得相应资金的无风险利息。相反现货则需要占用资金，无法获得这部分资金的无风险利息，应加上无风险利息作为其持有成本，使无论购买现货或期货成本相同（无套利）。可理解为如果购买期货或现货价格相同，那么所有人会直接购买期货，节约购买现货的持有成本。

2 红利资产调整

由于远期合约并不实际持有现货，所以如果资产在到期前有可预测的现金流（红利）无法获得，需要进行调整，使调整后资产变为无红利资产。

2.1 已知红利

远期合约到期之前，标的资产产生红利数额为 D ，其红利现值为 I_0 ，则有 $S_0 - I_0$ 为剔除红利后，使其变为无红利资产。使用同上复制定价方法：

$$\begin{aligned} f_0 + K e^{-rT} &= S_0 - I_0 \\ f_0 &= S_0 - I_0 - K e^{-rT} = 0 \\ \Rightarrow K &= F_{0,T} = (S_0 - I_0) e^{rT} \\ \Rightarrow F_{t,T} &= (S_t - I_t) e^{r(T-t)} \end{aligned}$$

- **正红利：**附息债券（Coupon Bond）、支付已知现金红利的股票。价格中包含红利，购买期货无法获得这部分收益，应从中扣除。
- **负红利：**黄金、白银，持有期间需要支付储藏成本。价格中不包含需要额外支付成本，可理解为如果黄金现货和期货价格相同，而黄金期货不需要储藏成本，那么所有人会直接购买黄金期货。即购买期货应加上这部分储藏成本。

2.2 已知红利率

在远期合约到期期间，标的资产会产生与现货价格成一定比率的红利。

$$\begin{aligned} f_t &= e^{-r(T-t)} (S_t e^{(r-q)(T-t)} - K) \\ f_0 &= S_0 e^{-qT} - K e^{-rT} = 0 \\ \Rightarrow F_{0,T} &= e^{(r-q)T} \quad \text{或} \quad F_{t,T} = e^{(r-q)T} \end{aligned}$$

- 外汇远期和期货：外汇发行国的无风险利率
- 股指期货：市场平均红利率或零，取决于股指计算方式
- 远期利率协议：本国的无风险利率

3 期货与远期的关系

当无风险利率恒定，且到期日交割价格等都相同时，远期价格与期货价格相同。当利率不断变化时，两者关系略有不同。其差异源于期货市场的保证金盯市制度（MTM：Mark-to-Market）。标的资

产价格与利率有正相关关系时候，期货价格高于远期价格。即当期货价格上涨时，由于保证金盯市制度，可将多余的保证金取出，用同样上涨的无风险利率投资，此时期货价格应该高于远期价格。相反，当标的资产与利率呈现负相关关系时候，远期价格高于期货价格。

4 F_t 与 S_t 的关系

在 t 时刻，期货价格 F_t 与现货价格 S_t 有如下关系：

$$\begin{aligned} F_{t,T} &= S_t + \text{净持有成本 (Net Cost of Carry)} \\ &= S_t + \text{合约期限内成本 (Carry Cost)} - \text{合约期限内收益 (Carry Return)} \\ &= S_t + \text{利息成本} + \text{储藏成本} - \text{红利收益} - \text{便利收益 (商品期货)} \end{aligned}$$

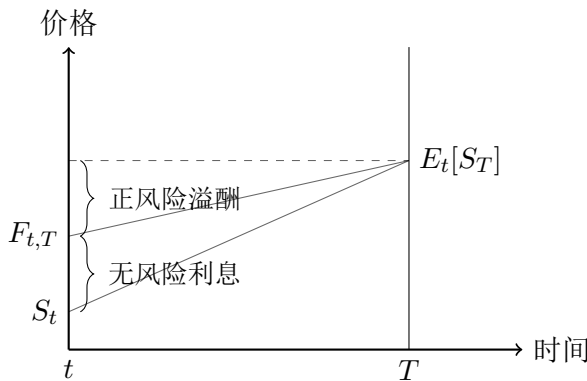
在中国往往有现货价格 S_t 大于期货价格 F_t ，由于现货做空机制不完善，很难融券，即使能融券成本也较高。即无法在现货被高估的情况下，卖出现货买进期货，因为只有持有现货才能卖出，造成两个市场的分割，无法达到一体化的预期。现货买卖需要交纳印花税，而期货不需要，且期货佣金往往低于现货。

5 $F_{t,T}$ 与 $E_t[S_T]$ 的关系

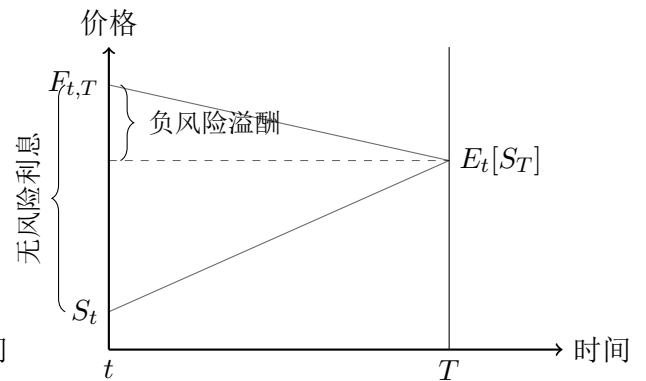
在现实测度下，从现货角度出发，有 $E_t[S_T] = S_t e^{\mu(T-t)}$ ，其中 μ 为到期收益率，为无风险收益率与风险溢价之和。如果标的资产 S 系统性风险为正，则要求有正的风险溢价，增加其收益，使其到期收益率大于无风险收益率 $\mu > r$ 。相反，如果标的资产 S 系统性风险为负（如VIX，系统性风险为负）。即标的资产能对冲风险，减少风险敞口，风险溢价为负，减少收益，到期收益率小于无风险收益率 $\mu < r$ 。

同样在现实测度下，从期货角度出发，因为购买期货无需占用资金（假设保证金可获得无风险收益），所以不要求无风险收益。仅要求对其承担的未来不确定性风险，有对应的风险补偿（仅赚取风险溢价），即超额收益 $\mu - r$ ，可以得到 $E_t[F_{T,T}] = F_{t,T} e^{(\mu-r)(T-t)}$ 。又因在期货到期日 T 时刻，有期货价格等于现货价格 $F_{T,T} = S_T$ ，即在 t 时刻下也应有两者期望 $E_t[F_{T,T}] = E_t[S_T]$ 。同样可得出 $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ 的结论，即：

$$S_t e^{\mu(T-t)} = E_t[S_T] = E_t[F_{T,T}] = F_{t,T} e^{(\mu-r)(T-t)}$$



(a) 正系统性风险



(b) 负系统性风险

6 套期保值

6.1 多头空头套期保值

基差为被套期保值的现货价格 H 与用于套期保值的期货价格 G 之差 $b = H - G$ ，未来到期时基差 b_1 的不确定性导致了**基差风险**。由于标的资产规模与期货合约标准数量之间的差异，导致了**数量风险**。基差风险、数量风险都可能使得套期保值策略无法对冲所有风险，即不完美的套期保值。

多头套期保值策略持有现货空头，担心未来价格上涨，买入期货锁定未来价格（期货多头）。相反，空头套期保值策略持有现货多头，担心未来价格下跌，卖出期货锁定未来卖出价格（期货空头）。当现货价格小于期货价格时，基差为负。假设 $b_0 = -10$ ，多头套保策略要有正收益要求基差变小，即 $b_0 > b_1$ ， $b_0 = -10$ ，则有 $b_1 < -10$ 。注意：此时虽然基差变小，但基差的绝对值在增大。

	多头套期保值	空头套期保值
	1单位现货 H 空头，1单位期货 G 多头	1单位现货 H 多头，1单位期货 G 空头
收益	$(H_0 - H_1) + (G_1 - G_0)$ $= (H_0 - G_0) - (H_1 - G_1)$ $= b_0 - b_1$	$(H_1 - H_0) + (G_0 - G_1)$ $= (H_1 - G_1) - (H_0 - G_0)$ $= b_1 - b_0$
收益来源	基差变小 $b_0 > b_1$	基差变大 $b_0 < b_1$
收益条件	1. 现货涨幅小于期货涨幅 2. 现货跌幅大于期货跌幅 3. 现货价格下跌而期货价格上涨	1. 现货涨幅大于期货涨幅 2. 现货跌幅小于期货跌幅 3. 现货价格上涨而期货价格下跌

6.2 套保（金额）比率

套期保值比率（Hedge Ratio），指现有头寸（金额）中，已有多少被套期保值（对冲）。假设当前有1000元的现货头寸，其中600元已使用期货进行套期保值，表示当前套期保值比率为0.6或60%，同时表示还留有风险敞口40%。（每单位价格现货中有多少已被期货套期保值）

$$\text{套期保值（金额）比率} = \frac{\text{套期保值资产头寸}}{\text{被套期保值资产头寸}}$$

6.3 套保（数量）比率

在已知了目前风险暴露情况，即套保（金额）比率之后，还希望了解在现有的现货头寸之下，需要多少数量的期货进行对冲。希望在期货到期时，最大化消除被套保资产价格变动所带来风险。此时要求被套保资产价格的变动对整个组合价值影响最小，进而转化为求解最小值问题。即对 ΔH 求偏导，并使一阶条件 $\partial \Delta \Pi / \partial \Delta H = 0$ ，求得**最优套期保值（数量）比率 n** 。因只关注最终期货到期时刻的套保比率，而不关注过程中的套保比率，所以此处使用的是 ΔH 而非 ∂H 。

对于多头套期保值组合，有：

$$\begin{aligned}
 \Delta \Pi &= n \Delta G - \Delta H \\
 \Rightarrow \frac{\partial(\Delta \Pi)}{\partial(\Delta H)} &= n \times \frac{\partial(\Delta G)}{\partial(\Delta H)} - 1 = 0 \\
 \Rightarrow n &= \frac{\partial(\Delta H)}{\partial(\Delta G)} = \frac{\partial r_H \times H_0}{\partial r_G \times G_0}
 \end{aligned}$$

对于空头套期保值组合，同样有：

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= \Delta H - n\Delta G \\ \Rightarrow \frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial(\Delta H)} &= 1 - n \times \frac{\partial(\Delta G)}{\partial(\Delta H)} = 0 \\ \Rightarrow n &= \frac{\partial(\Delta H)}{\partial(\Delta G)} = \frac{\partial r_H \times H_0}{\partial r_G \times G_0}\end{aligned}$$

对多头套期保值或空头套期保值均有最优套保比率 $n = \partial(\Delta H)/\partial(\Delta G)$ ， r_H 和 r_G 为H与G在套期保值期间的收益率。 n 代表期货价格变动一个单位，现货价格变化多少，同时代表每单位数量现货需要 n 单位数量期货进行对冲。因现货与期货为线性关系，即套期保值后不需要随时调整两者之间比率 n ，此为静态套保（Static Hedge）。与之相反的为动态套保（Dynamic Hedge），需要不断随时调整两者之间比率。

得知每单位数量现货需要 n 单位期货进行对冲之后，根据持有现货H头寸数量 Q_H ，可计算出需要多少份（手）的期货G合约进行对冲。即可求得最优套期保值（期货）合约份数 N ，使得期货总价值变动等于持有现货总价值变动。

$$N = n \times \frac{Q_H}{Q_G} = \frac{\partial(\Delta H) \times Q_H}{\partial(\Delta G) \times Q_G} = \frac{\partial(r_H \times H_0 \times Q_H)}{\partial(r_G \times G_0 \times Q_G)} = \frac{\partial r_H \times V_H}{\partial r_G \times V_G}$$

由 $n \times Q_H$ 计算得到，对于现有头寸 Q_H 单位数量的现货，需要多少单位数量的期货进行对冲。再除以 Q_G 期货合约规模（乘数），计算得到需要 N 份（手）期货合约进行对冲。此时 V_H 为被套期保值的所持有现货资产总价值，而 V_G 则为每份期货合约价值（单位价格 \times 合约乘数）。注意： n 代表的是单位数量，而 N 为份数（手），为最小买卖单位。如螺纹钢期货报价单位为元/每吨，一份合约（手）包含10单位数量（吨）期货，即合约规模（乘数）为10。

6.4 最小方差套保（数量）比率

当将风险定义为方差时，最优的套保比率可定义为，使套期保值组合收益 $\Delta\Pi$ 方差最小的套期保值（数量）比例 n ，即为最小方差套保比率。 σ_{Π}^2 为套期保值组合收益的方差，对 n 求导，使一阶条件为零，二阶条件 $d^2(\sigma_{\Pi}^2)/dn^2 = 2\sigma_G^2 > 0$ ，有最小值。对于多头套保组合或空头套保组合，其最小方差套期保值比一般公式为：

$$\begin{aligned}\sigma_{\Pi}^2 &= \sigma_H^2 + n^2\sigma_G^2 - 2n\sigma_{HG} \\ \Rightarrow \frac{d\sigma_{\Pi}^2}{dn} &= 2n\sigma_G^2 - 2\sigma_{HG} = 0 \\ \Rightarrow n &= \frac{\sigma_{HG}}{\sigma_G^2} = \rho_{HG} \frac{\sigma_H}{\sigma_G}\end{aligned}$$

其中 $\sigma_H = \sigma_{\Delta H}$ ， $\sigma_G = \sigma_{\Delta G}$ ， σ_{HG} 为 ΔH 与 ΔG 的协方差， ρ_{HG} 为 ΔH 与 ΔG 的相关系数（ $\rho_{XY} = Cov(X,Y)/\sigma_X\sigma_Y$ ）。我们可以进而推导出基于收益率的最小方差套期保值比率，首先：

$$\begin{aligned}\rho_{HG} &= \frac{Cov(\Delta H, \Delta G)}{\sqrt{Var(\Delta H)}\sqrt{Var(\Delta G)}} \\ &= \frac{Cov(r_H \times H_0, r_G \times G_0)}{\sqrt{Var(r_H \times H_0)}\sqrt{Var(r_G \times G_0)}} \\ &= \frac{H_0 G_0 Cov(r_H, r_G)}{H_0 \sqrt{Var(r_H)} \times G_0 \sqrt{Var(r_G)}} \\ &= \frac{Cov(r_H, r_G)}{\sqrt{Var(r_H)}\sqrt{Var(r_G)}} = \rho_{r_H r_G}\end{aligned}$$

其次：

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_G} = \frac{\sqrt{\text{Var}(r_H \times H_0)}}{\sqrt{\text{Var}(r_G \times G_0)}} = \frac{H_0 \sqrt{r_H}}{G_0 \sqrt{r_G}} = \frac{\sigma_{r_H} H_0}{\sigma_{r_G} G_0}$$

因此有：

$$n = \rho_{r_H r_G} \frac{\sigma_{r_H} H_0}{\sigma_{r_G} G_0}$$

6.5 OLS估计

可以观察 $n = \text{Cov}(\Delta H, \Delta G) / \text{Var}(\Delta G)$ 即为OLS回归中的系数 b 。则可用OLS回归，估计 b ：

$$\Delta H = a + b\Delta G + \varepsilon$$

需注意套保期限与回归中使用的 ΔH 和 ΔG 的期限应相同，即如果要锁定未来一个月的现货价格，需使用现货和期货的月价格变化进行回归。且调整后得到实际需要套期保值（期货）合约份数 N 为：

$$N = b \frac{Q_H}{Q_G}$$

也可使用收益率进行OLS回归估计，且在时间极短时，百分比收益率 $\Delta P/P$ 与对数收益率可视为相等。且对数收益率更符合平稳序列和正态分布的假设，在平稳假设的下对每日现货和期货的对数收益率进行回归：

$$r_H = a + b'r_G + \varepsilon$$

此时：

$$\begin{aligned} b &= \frac{\text{Cov}(\Delta H, \Delta G)}{\text{Var}(\Delta G)} \\ &= \frac{\text{Cov}(r_H \times H_0, r_G \times G_0)}{\text{Var}(r_G \times G_0)} \\ &= \frac{H_0 G_0 \text{Cov}(r_H, r_G)}{G_0^2 \text{Var}(r_G)} \\ &= b' \frac{H_0}{G_0} \end{aligned}$$

对应需套期保值合约份数 N （手）：

$$N = b \frac{Q_H}{Q_G} = b' \frac{H_0 \times Q_H}{G_0 \times Q_G} = b' \frac{V_H}{V_G}$$

6.6 风险降低百分比

通过检验风险降低百分比，可以检验使用最小方差套期保值比率的套期保值效果。将最小方差套期保值比率 $n = \rho_{HG} \frac{\sigma_H}{\sigma_G}$ ，带回套期保值组合方差 $\sigma_\Pi^2 = \sigma_H^2 + n^2 \sigma_G^2 - 2n \sigma_{HG}$ 中。可以得到：

$$e^* = \frac{\sigma_H^2 - \sigma_{\Delta\Pi}^2}{\sigma_{\Delta H}^2} = \rho_{HG}^2 = \frac{\text{Cov}^2(\Delta H, \Delta G)}{\text{Var}(\Delta H) \text{Var}(\Delta G)} = \frac{\text{Cov}^2(r_H H_0, r_G G_0)}{\text{Var}(r_H H_0) \text{Var}(r_G G_0)} = \rho_{r_H r_G}^2$$

而在一元线性回归中判别系数 $R^2 = \rho$ ，即回归效果越好， R^2 越接近1，套期保值的效果也越好。