Moment

杨弘毅

创建: 2021 年 4 月 8 日
修改: 2021 年 4 月 9 日

1 矩的含义

数学中矩的概念来自物理学，在物理学中，矩表示距离和物理量的乘积。如力与力臂（参考点的距离）的乘积，得到的是力矩（或扭矩）。可以理解为一杆“秤”，“秤”的平衡的两边重量与距离的乘积相同，则能保持平衡。

而在概率论上，可以理解秤为一杆秤的两端的概率为1，中心点概率为0。如一端秤砣重量，为中奖金额500元，但中奖概率为千分之一，即离中心点距离为0.1%，那么期望为0.5元。可以理解为了使得秤保持平衡，则另一端，在概率为1，其秤砣重量，中奖金额应为0.5元。

而这样既可以把期望看成是矩，即距离（概率）乘以力的大小（随机变量)：

$$E[x] = \sum_i p_i x_i$$

n阶矩可以表示为，其中$f(x)$为概率密度函数（probability density function)：

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^n f(x) dx$$

Reference

https://www.zhihu.com/question/19915565/answer/233262673

https://en.wikipedia.org/wiki/Moment_(mathematics)

2 原点矩（Raw/crude moment）

当$c = 0$时，称为原点矩。此时则有**平均数（mean）**或**期望（expected value）**的连续形式为：

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

其离散形式为：

$$\mu = E(x) = \sum_i x_i p_i$$

3 中心矩（Central moment）

期望值可以成为随机变量的中心，即当$c = E(x)$时

$$\mu_n = E[(x - E(x))^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^n f(x) dx$$

同时可知任何变量的一阶中心矩为0：

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^1 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} E(x)f(x)dx \\ &= E(x) - E(x)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= E(x) - E(x) \times 1 = 0\end{aligned}$$

而二阶中心矩（second central moment）为**方差（Variance）**

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2E(x)\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + [E(x)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2E(x)E(x) + [E(x)]^2 \times 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [E(x)]^2 \\ &= E(x^2) - [E(x)]^2 = \sigma^2\end{aligned}$$

其离散形式则有：

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2$$

Reference

`https://en.wikipedia.org/wiki/Central_moment`

4 标准矩（Standardized moment）

标准矩为标准化（除以标准差）后的中心矩，第n阶中心矩（standardized moment of degree n）有：

$$\mu_n = E[(x - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x)dx$$

已知标准差的n次方有：

$$\sigma^n = \left(\sqrt{E[(x - \mu)^2]}\right)^n = (E[(x - \mu^2)])^{n/2}$$

此时，第n阶标准矩有：

$$\tilde{\mu}_n = \frac{\mu_n}{\sigma^n} = E\left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^n\right]$$

由一阶中心矩为0，可知一阶标准矩（first standardized moment）也为0。而二阶标准矩（second standardized moment）则有：

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{E[(x - \mu)^2]}{(E[(x - \mu)^2])^{2/2}} = 1$$

偏度（skewness）

三阶标准矩（third standardized moment）为**偏度**：

$$\tilde{\mu}_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E[(x-\mu)^3]}{(E[(x-\mu)^2])^{3/2}}$$

偏度分为两种：

- 负偏态或左偏态：左侧的尾部更长，分布的主体集中在右侧
- 正偏态或右偏态：右侧的尾部更长，分布的主体集中在左侧

峰度（kurtosis）

四阶标准矩（third standardized moment）为**峰度**：

$$\tilde{\mu}_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E[(x-\mu)^4]}{(E[(x-\mu)^2])^{4/2}}$$

定义**超值峰度（excess kurtosis）**为峰度-3，使得正态分布的峰度为0：

$$\text{excess kurtosis} = \tilde{\mu}_4 - 3$$

- 如果超值峰度为正，即峰度值大于3，称为高狭峰（leptokurtic）
- 如果超值峰度为负，即峰度值小于3，称为低阔峰（platykurtic）

Reference

`https://en.wikipedia.org/wiki/Standardized_moment`