数据分析与参数估计

陈蓉 教授、博导
厦门大学管理学院财务系
厦门大学金融工程研究中心

http:// aronge.net
aronge@xmu.edu.cn

目录

* 金融数据分析的预前准备
* 波动率估计、校准与分析

1. 金融数据分析的预前准备

常见市场金融数据

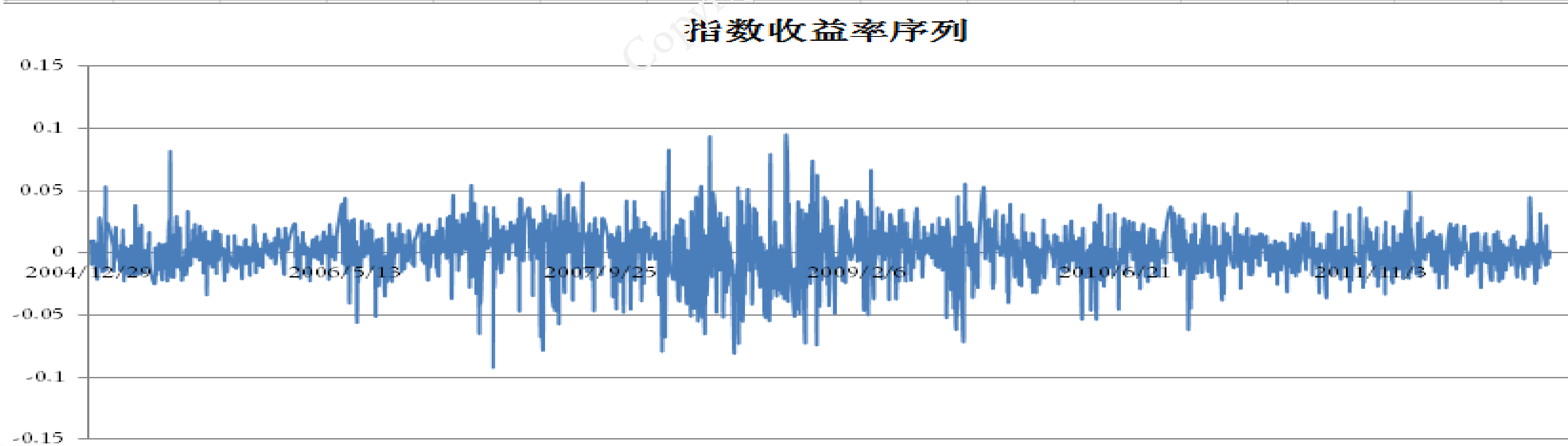
* 价格数据
* 交易量数据：成交数量、成交金额、换手率等

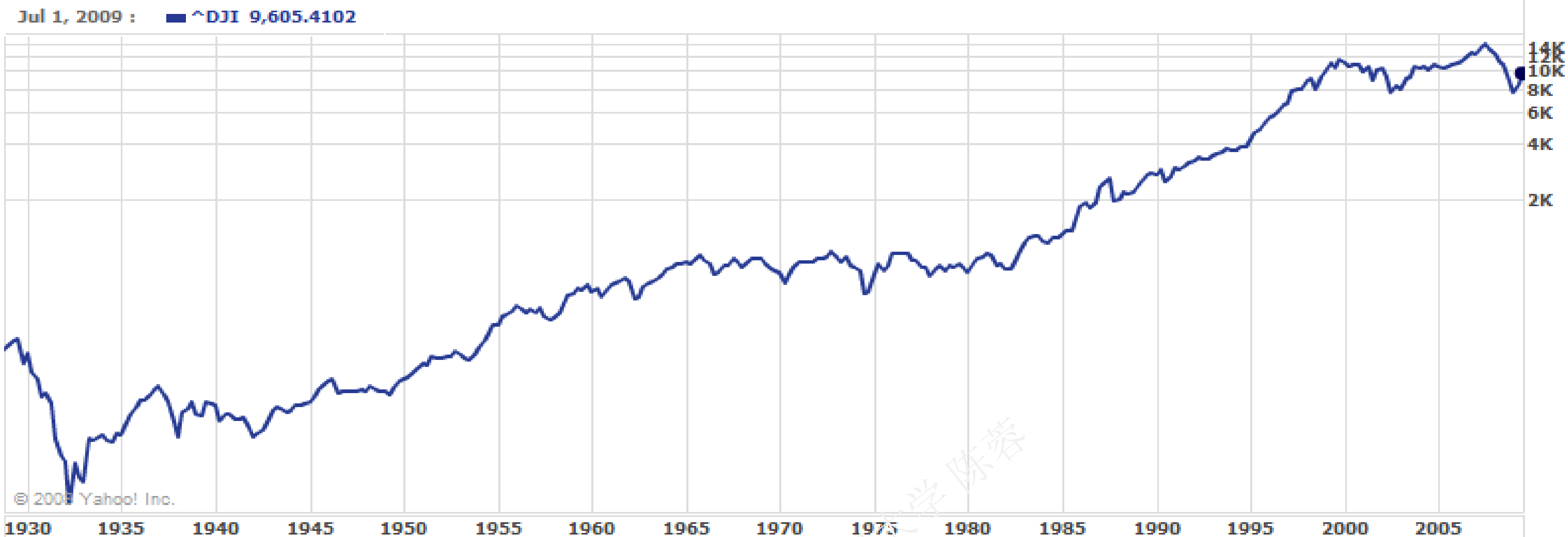
数据预处理

- 数据清理：去异常值和不合理值
- 绘图+描述统计
  - 均值、中位数、最大值、最小值、标准差、偏度与峰度
  - 正态性检验：Jarque-Bera检验是否显著
  - 时间序列：平稳性检验+自相关检验+ARCH检验
- 分析目标：时间序列分析/横截面分析/参数校准
  - 横截面分析和参数校准：可用数据本身
  - 时间序列分析：需考虑平稳性

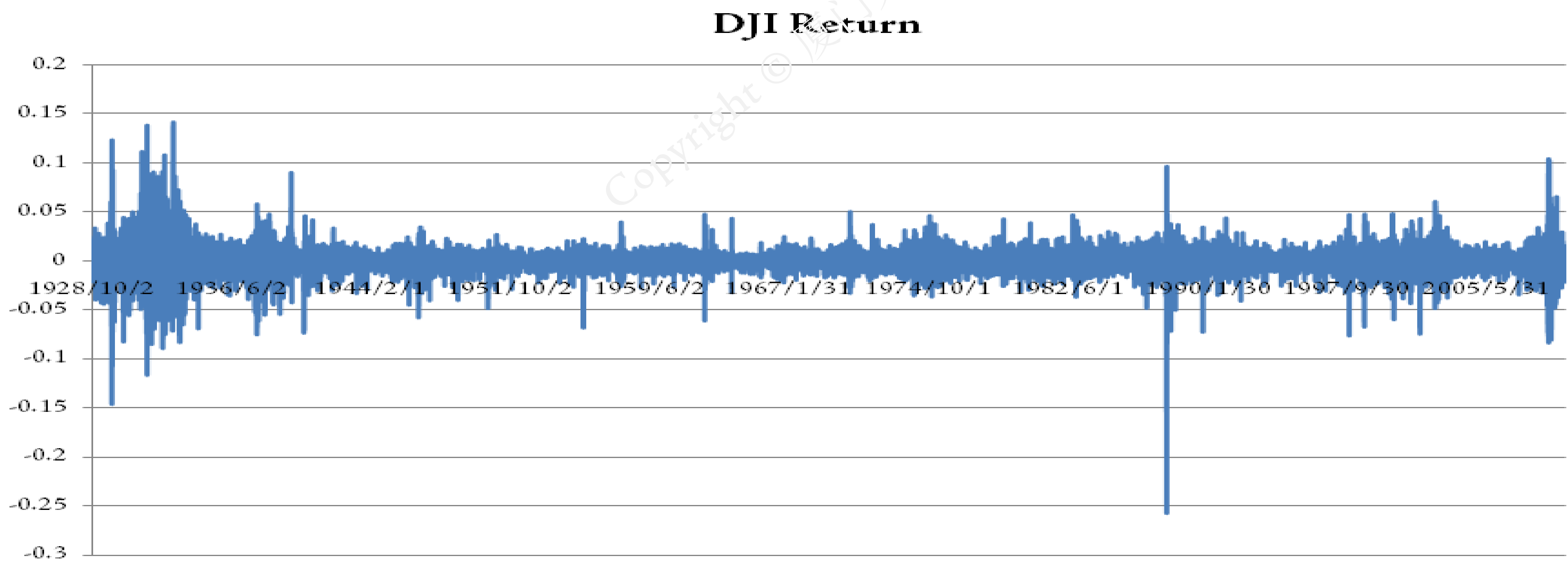
平稳性

* 平稳性：时间序列的分布特征是稳定的（非时变）





Jul 1, 2009 : ^DJI 9,605.4102
14K
12K
10K
8K
6K
4K
2K
© 2009 Yahoo! Inc.
1930
1935
1940
1945
1950
1955
1960
1965
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
2005

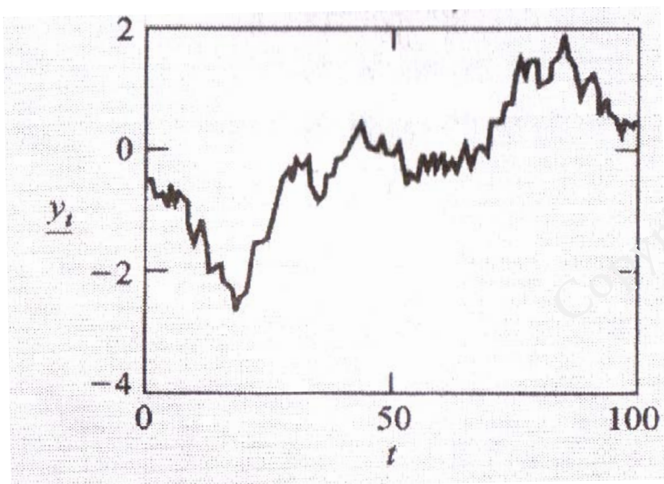


DJI Return
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
1928/10/2
1936/6/2
1944/2/1
1951/10/2
1959/6/2
1967/1/31
1974/10/1
1982/6/1
1990/1/30
1997/9/30
2005/5/31

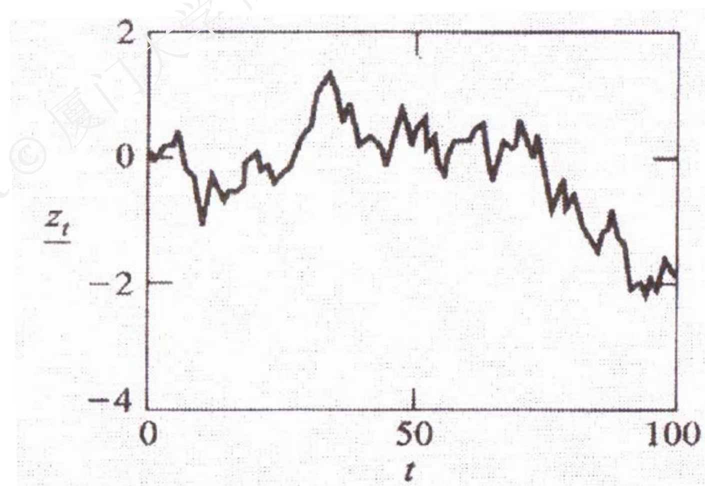
为何要求平稳性？

- 分布不平稳，何以寻找规律？
- 伪回归：系数估计、t检验、F检验和R^2都不可信

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$



$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$



由于序列$\{\varepsilon_{yt}\}$和$\{\varepsilon_{zt}\}$独立，所以y_t对z_t的回归实际上是伪回归。但给定随机分布的观测值，两个序列似乎表现出一定的相关性：计算相关系数为-0.372，拟合的回归方程为y_t =-0.31-0.46z_t+ε_t

平稳性检验

* ADF检验：原假设不平稳（存在单位根）

Null Hypothesis: P has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.545791	0.5102
Test critical values:	1% level	-3.433613	
	5% level	-2.862868	
	10% level	-2.567524	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

非平稳序列平稳化的常见处理

* 常见做法：差分

Null Hypothesis: R has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-42.59054	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.433613	
	5% level	-2.862868	
	10% level	-2.567524	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

自相关

* ARMA(1,1)

$$r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t + \gamma \varepsilon_{t-1}$$

* 自相关检验
  * Ljung-Box Q统计量：多阶自相关系数之和；原假设独立
  * PACF：AR阶数
  * ACF：MA阶数
* 残差自相关检验

ARCH效应

* 二阶自相关

线性回归经典假设

Best Linear Unbiased Estimator

BLUE、一致	OLS估计量	系数标准误	改进方法	改进估计量
线性关系 (只刻画一阶)			线性化	
列满秩		变大		
$\mathrm{Cov}\left(x_t, \varepsilon_t\right) = 0$	有偏、不一致	有偏、不一致	IV	一致但有偏
x无测量误差	有偏、不一致	有偏、不一致	IV	一致但有偏
同方差	无效	有偏	GLS （WLS） Newey-West	（方差已知时） BLUE （方差未知时） 一致非有效
无自相关	无效	有偏	GLS （广义差分） Newey-West	BLUE
$\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$	无效			

线性回归基本结论

- 样本残差：$\hat{\varepsilon} = \mathrm{Y} - \mathrm{X}\hat{\beta}$
- 残差平方和 ESS：

$$\mathrm{ESS} = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = (\mathrm{Y} - \mathrm{X}\hat{\beta})'(\mathrm{Y} - \mathrm{X}\hat{\beta}) = \mathrm{Y}'\mathrm{Y} - 2\hat{\beta}'\mathrm{X}'\mathrm{Y} + \hat{\beta}'\mathrm{X}'\mathrm{X}\hat{\beta}$$

- 所以对 ESS 求 $\hat{\varepsilon}$ 的导数并令其为零，可得

$$\frac{\partial \mathrm{ESS}}{\partial \hat{\beta}} = -2\mathrm{X}'\mathrm{Y} + 2\mathrm{X}'\mathrm{X}\hat{\beta} = 0$$

- 显然只有当 $|\mathrm{X}'\mathrm{X}| \neq 0$，矩阵 $\mathrm{X}'\mathrm{X}$ 为非奇异矩阵和正定矩阵，$(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}$ 和最小值才存在（充要条件），这时有

$$\hat{\beta} = (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'\mathrm{Y}$$

一元线性回归

- 系数估计

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(xy)}{Var(x)}$$

- R²

$$R^2 = \frac{Cov^2(xy)}{Var(x)Var(y)} = \rho_{xy}^2$$

数据分析流程

- 确定分析目标、合适模型、限制条件、参数集
- 收集整理数据
- 估计参数
  - 映射（最小二乘）/极大似然/矩估计
- 估计检验
  - 经济意义的检验
  - 统计检验：t检验/F检验/拟合优度检验
  - 计量检验：多重共线性/残差自相关/异方差
  - 预测检验：样本外检验/稳健性检验

2.

波动率的估计、校准与分析

Volatility

- 经济意义
  - 波动指标和风险指标
  - 期权定价
  - 风险管理重要参数
  - 可交易资产

- 统计意义
  - 一阶模型不能刻画收益率的超额峰度以及收益率二阶矩之间的关联。为更有效地刻画收益率的变化规律，必须对高阶矩进行建模

参数估计与校准

$$dS_t = (r - q) S_t dt + \sigma_{loc}(S_t, t) S_t d\tilde{z}_t$$

$$c_t = S_t e^{-r^f (T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - r^f + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma_{St} d\tilde{z}_{St}$$

$$dV_t = \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - V_t) dt + \sigma_V \sqrt{V_t} d\tilde{z}_{Vt}$$

$$corr(dz_{St}, dz_{Vt}) = \rho dt$$

- 波动率曲面

波动率与标准差

- 在统计中的对应概念：价格（对数）收益率的年化标准差
- 简单（不精确）示例：三天收益率分别为1%，-1.2%和0.8%，平均收益率为0.2%，则每天标准差等于

$$\sqrt{\frac{(1\%-0.2\%)^2+(-1.2\%-0.2\%)^2+(0.8\%-0.2\%)^2}{3}}\approx 1\%$$

- 年化为

$$1\%\times\sqrt{242}\approx 15.6\%$$

市场波动率的主要特征

- 波动率聚类
- 波动率连续变动，很少跳跃
- 波动率通常在固定范围内变化：平稳序列（均值回复）
- 波动率的非对称变动：下跌/熊市
- 不同资产、金融市场间波动率存在协同性：波动率之间的相关性往往高于收益率之间的相关性

波动率的分类

预期波动率

历史波动率法

基于标的资产已发生的历史价格数据估计波动率：

- 标准差
- 极差波动率
- 已实现波动率

根据历史波动率预测未来的波动率：

- 预测值＝历史值
- GARCH，EWMA
- HAR-RV

隐含波动率法

从期权价格倒推市场预测的未来波动率：

- Black-Scholes隐含波动率
- 无模型隐含波动率（如VIX）

样本标准差：以日数据为例

- S_i 为i日收盘价，共有N日数据
- $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$

$$\ln S_T \sim \mathbb{N}\left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2 (T-t)\right]$$

- 标准估计方法：

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \overline{u})^2, \quad \overline{u} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

- 简化估计方法（常用）

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2$$

- 再进行年化得到年化波动率σ

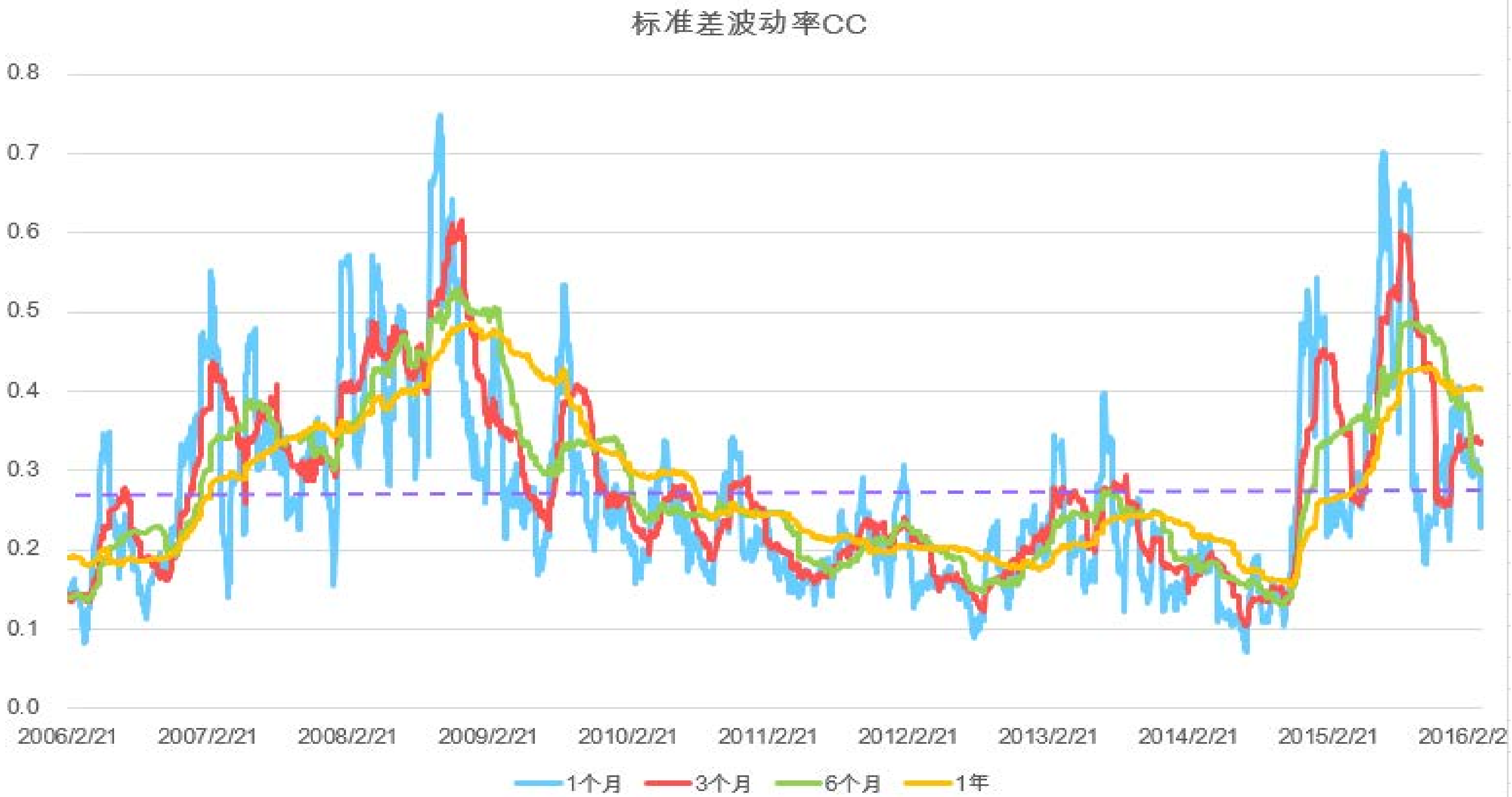
样本间隔/计算方式比较

样本间隔	连续复利年收益率均值	比例年收益率均值	$\mu+\frac{1}{2}\sigma^2$	波动率	年化收益率标准差	比例年收益率标准差
日	17.43%	26.17%	25.70%	40.67%	636.62%	44.82%
月	16.14%	30.34%	28.34%	49.40%	171.11%	64.16%
季度	16.02%	29.16%	26.93%	46.71%	93.44%	63.06%
年度	15.66%	30.40%	27.65%	48.96%	48.96%	62.10%

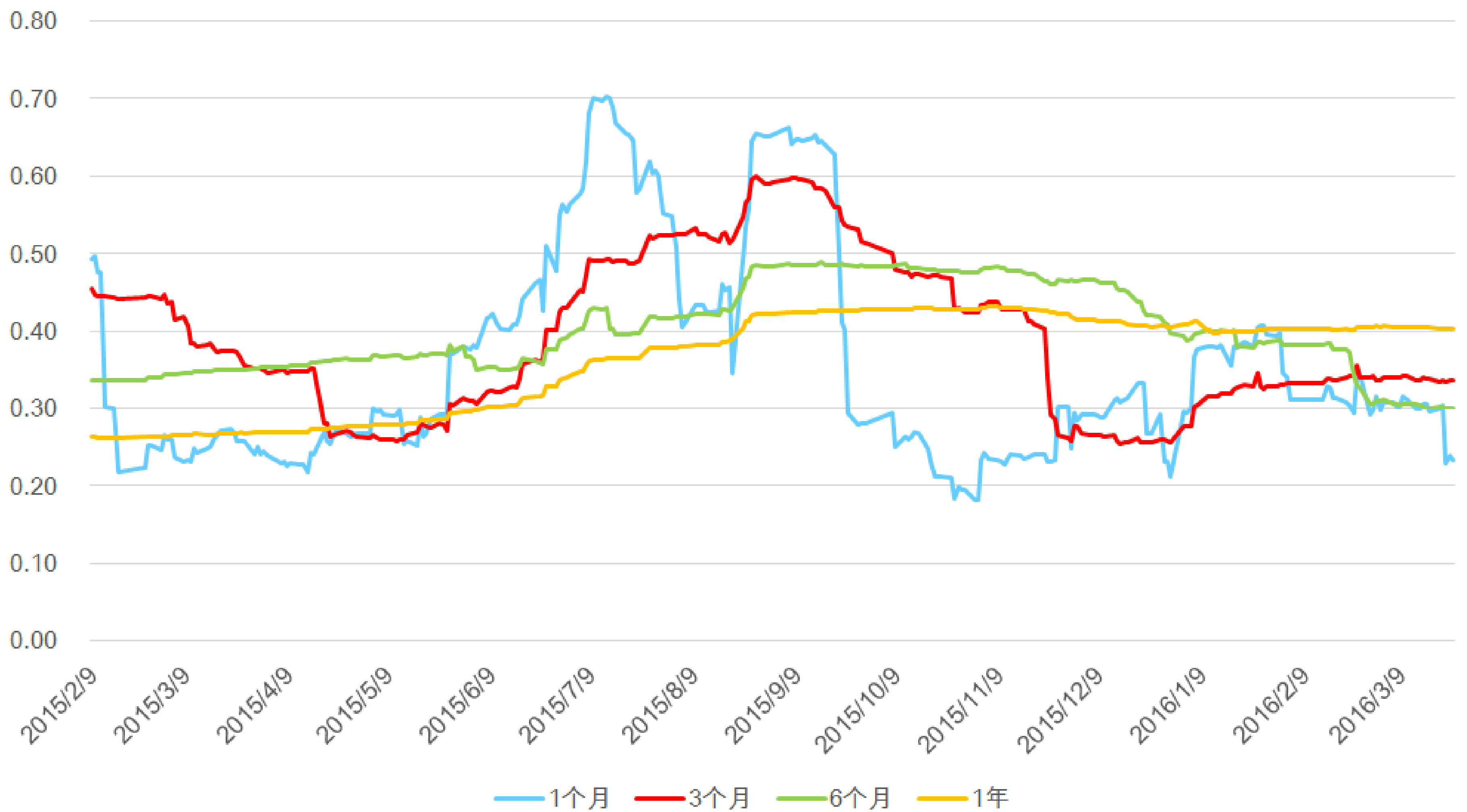
注：1.样本为1990年12月19日—2010年4月27日上证指数
2.从表中可以看出，年化收益率的标准差没有经济含义

50ETF标准差波动率：2006.2.21—2016.3.25

* 波动率水平与波动率的波动率/向上的大幅变动更多/均值回复



50ETF标准差波动率：2015.2.9—2016.3.25



极差波动率

- Parkinson (1980):HL, 连续、未考虑隔夜、零漂移

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4N\ln 2}\sum_{i=1}^{N}\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right)^2}$$

- Garman and Klass (1980): OHLC, 连续、未考虑隔夜、零漂移

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right)^2 - (2\ln 2 - 1)\left(\ln\frac{c_i}{o_i}\right)^2\right]}$$

- Rogers and Satchell (1991): OHLC, 考虑漂移率

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right)\left(\ln\frac{h_i}{o_i}\right) + \left(\ln\frac{l_i}{c_i}\right)\left(\ln\frac{l_i}{o_i}\right)\right]}$$

- Garman-Klass Yang-Zhang : OHLC, 考虑隔夜

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right)^2 - (2\ln 2 - 1)\left(\ln\frac{c_i}{o_i}\right)^2 + \ln\left(\frac{o_i}{c_{i-1}}\right)\right]}$$

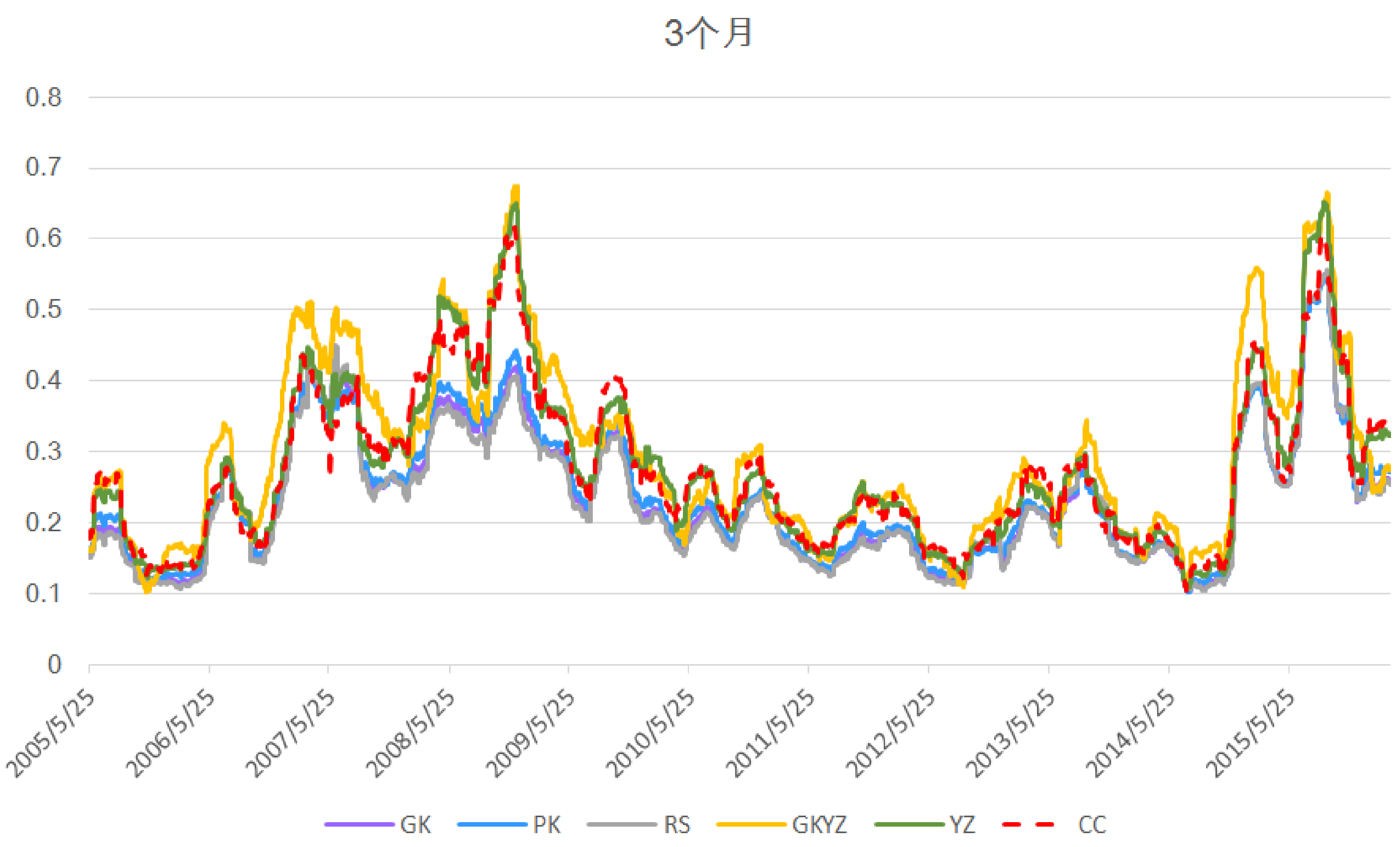
* Yang and Zhang (2000)：综合

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2_{\text{隔夜}} + k\sigma^2_{\text{当天}} + (1-k)\sigma^2_{RS}}$$

$$\sigma^2_{\text{隔夜}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(\frac{o_i}{c_{i-1}}\right) - \overline{\ln\left(\frac{o_i}{c_{i-1}}\right)}\right]^2, \qquad \sigma^2_{\text{当天}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\ln\left(\frac{c_i}{o_i}\right) - \overline{\ln\left(\frac{c_i}{o_i}\right)}\right]^2$$

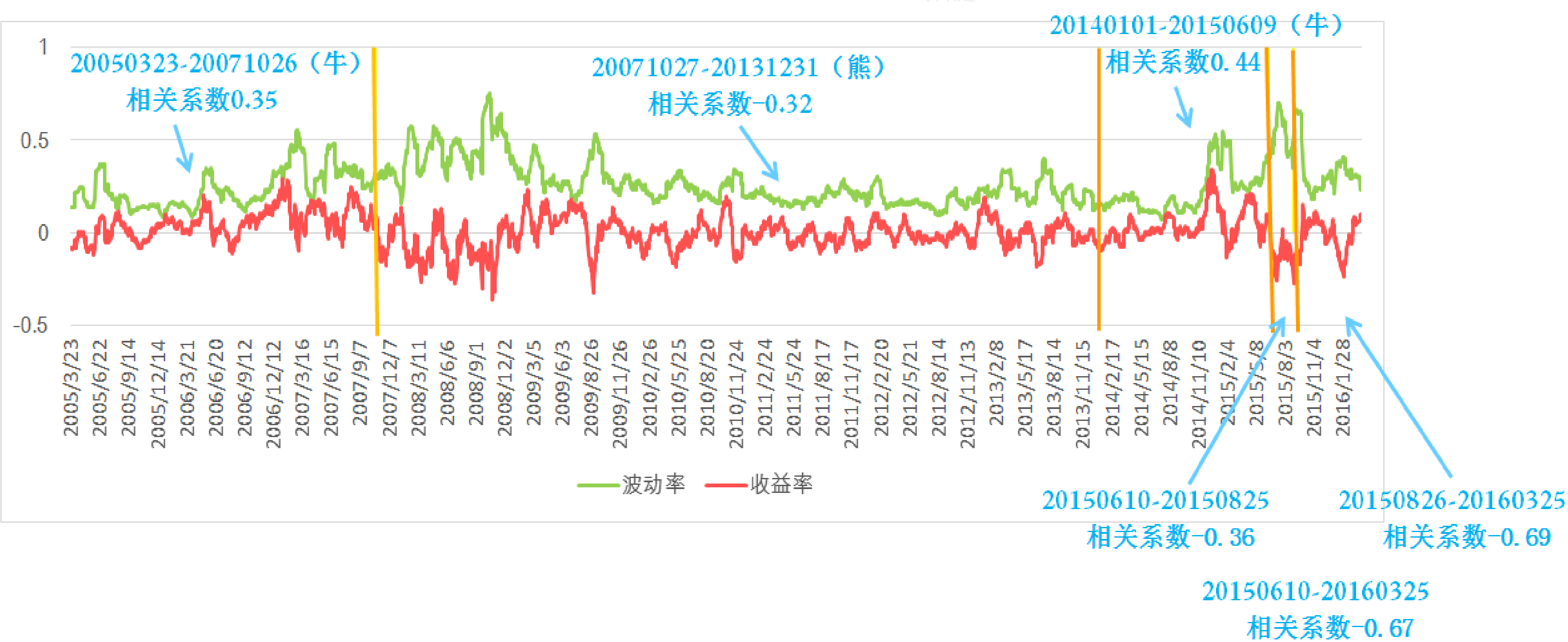
$$\sigma^2_{RS} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\ln\frac{h_i}{l_i}\right)\left(\ln\frac{h_i}{o_i}\right) + \left(\ln\frac{l_i}{c_i}\right)\left(\ln\frac{l_i}{o_i}\right)\right], \qquad k = \frac{0.34}{1 + \frac{N+1}{N-1}}$$

标准差VS极差波动率：2005.5.25-2016.3.25



1个月标准差波动率与ETF收益率

- 2005.3.23-2016.3.25
- 全样本相关系数-0.20



已实现波动率（Realized Volatility）

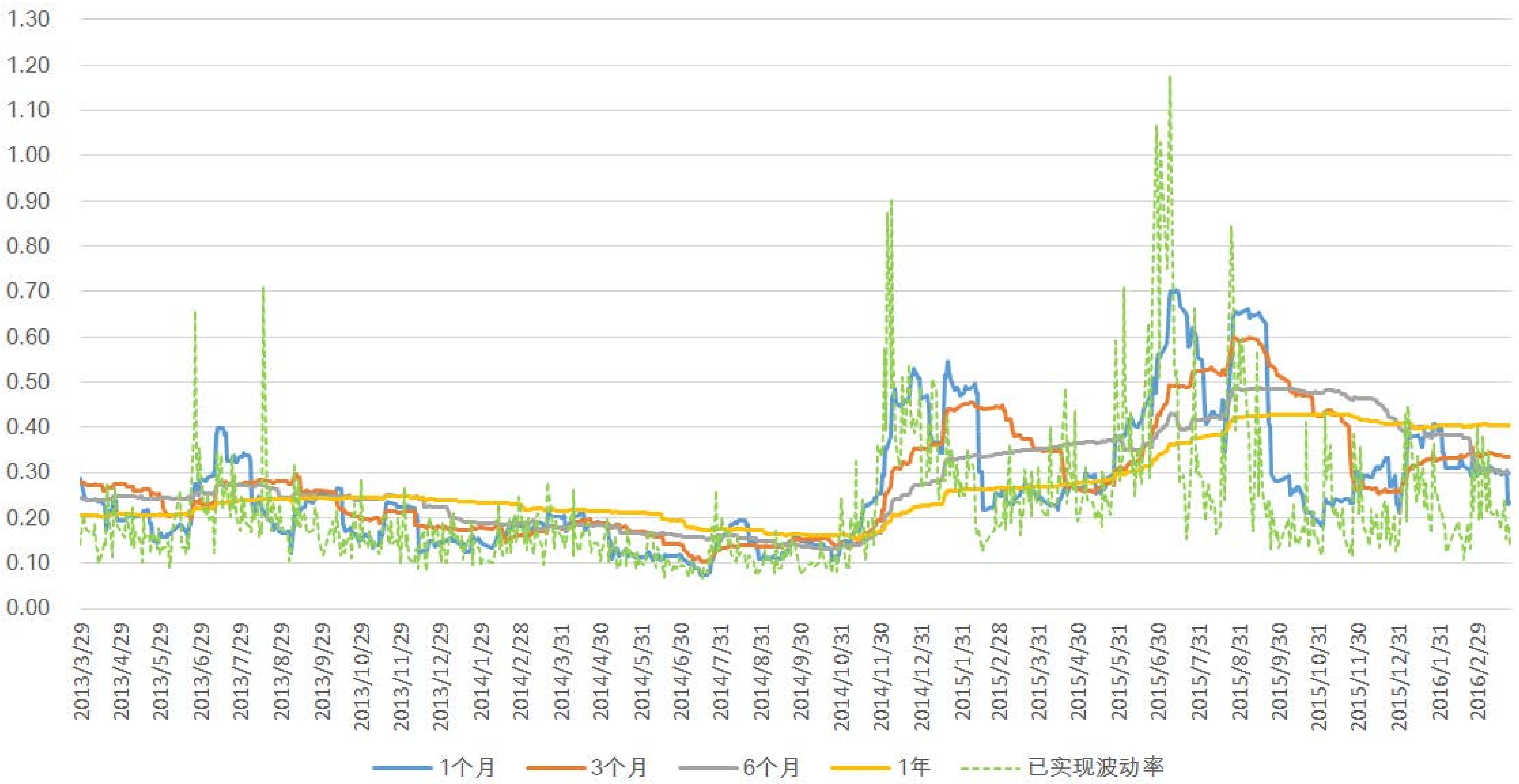
- 已实现波动率 $$\sum_{j=1}^{m} u_{\tau_j}^2$$
- 根据二次变分原理可得

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\int_t^{t+\Delta} \sigma_{t+\tau}^2 d\tau - \sum_{j=1}^{m} u_{\tau_j}^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

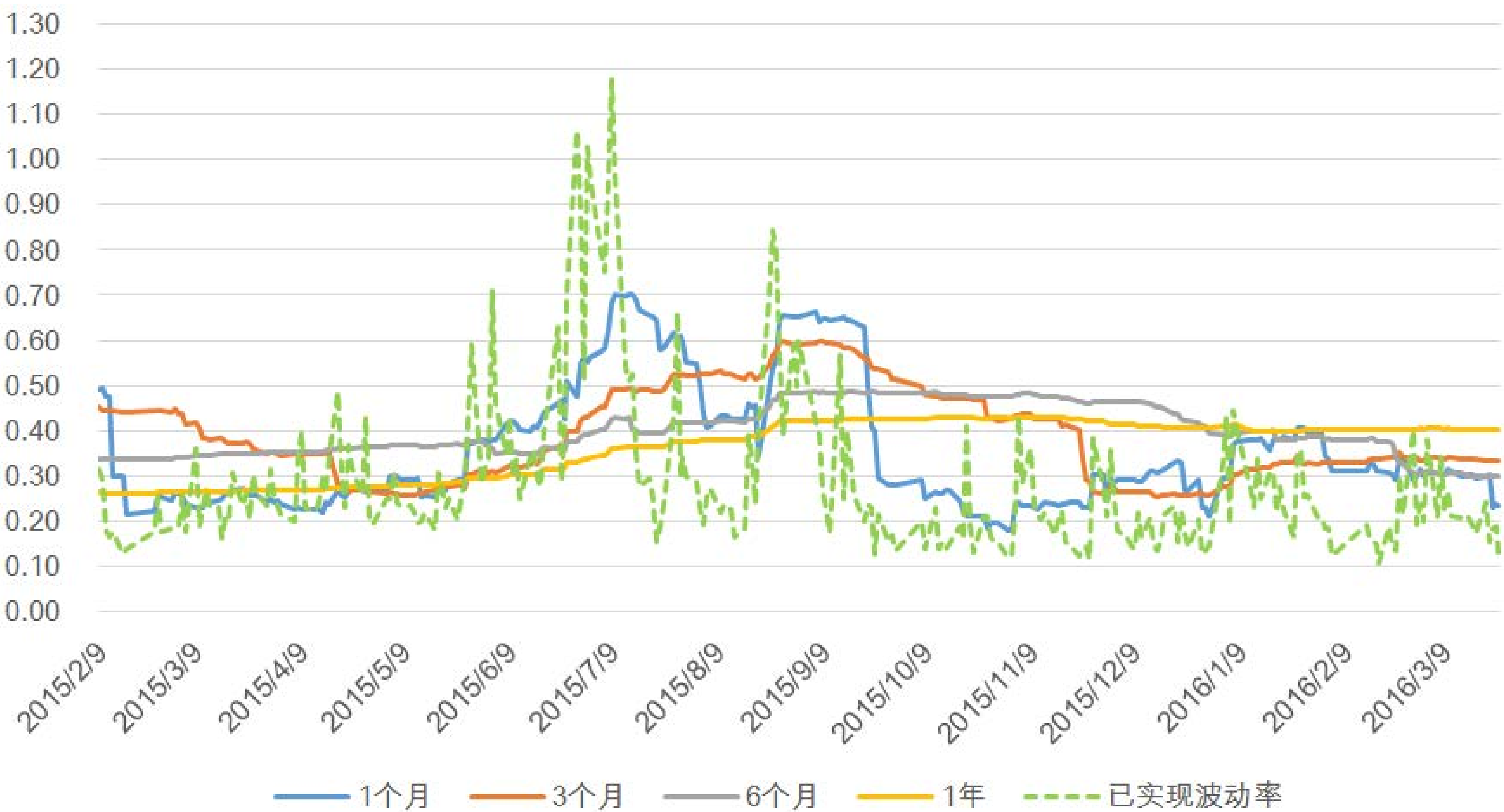
$$\lim_{M\to\infty} RV_{t,M} = \int_0^t \sigma^2(s)ds + \sum_{k=1}^{N_t} \kappa^2{}_{t,k}$$

- 被认为提高了度量波动率的准确性；但可能受到市场微观结构的噪音干扰，对时间间隔选择的依赖性较高；忽略了每天之间的价格变化的影响

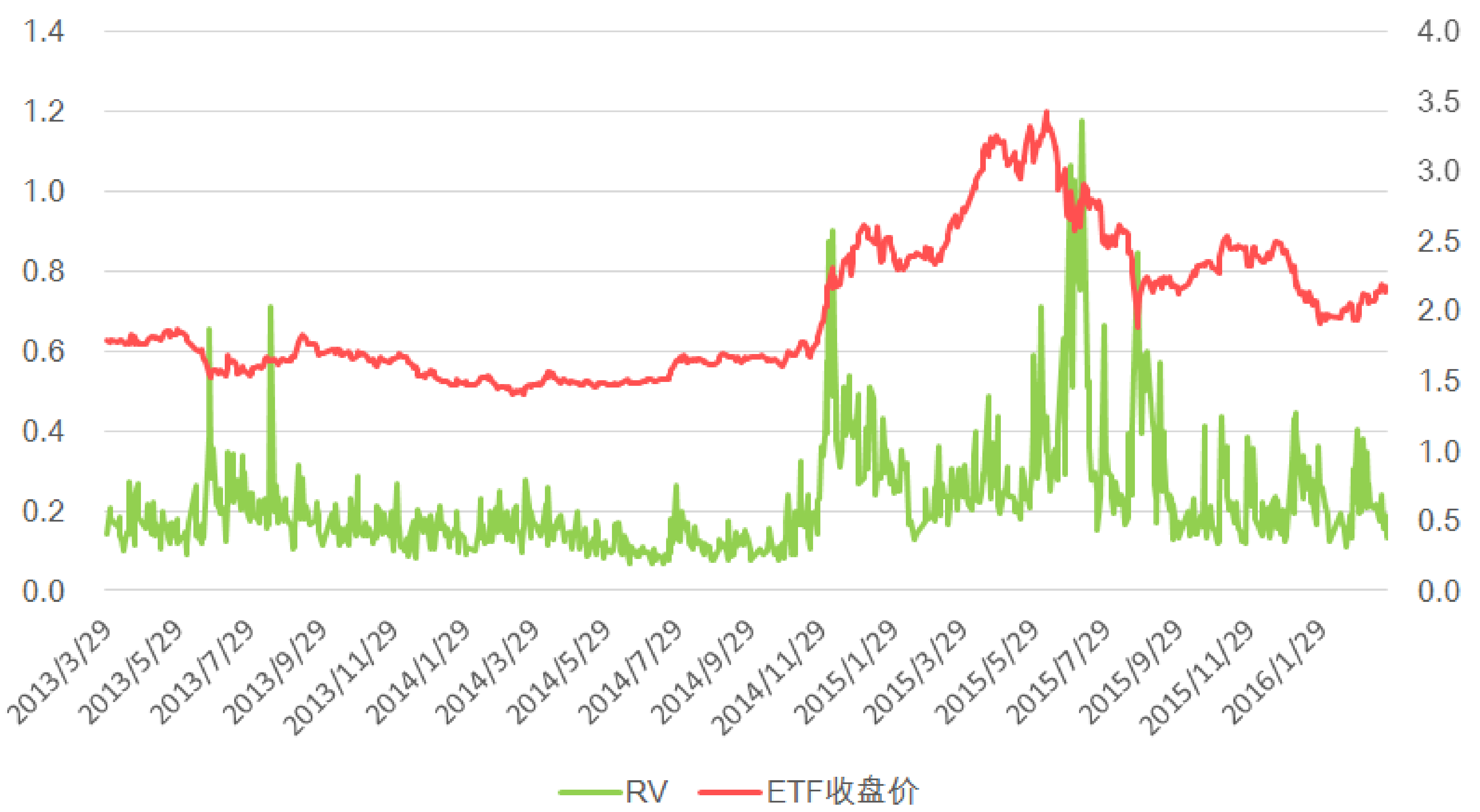
标准差波动率与5分钟RV：2013.3.29-2016.3.25



标准差波动率与5分钟RV： 2015.2.9-2016.3.25

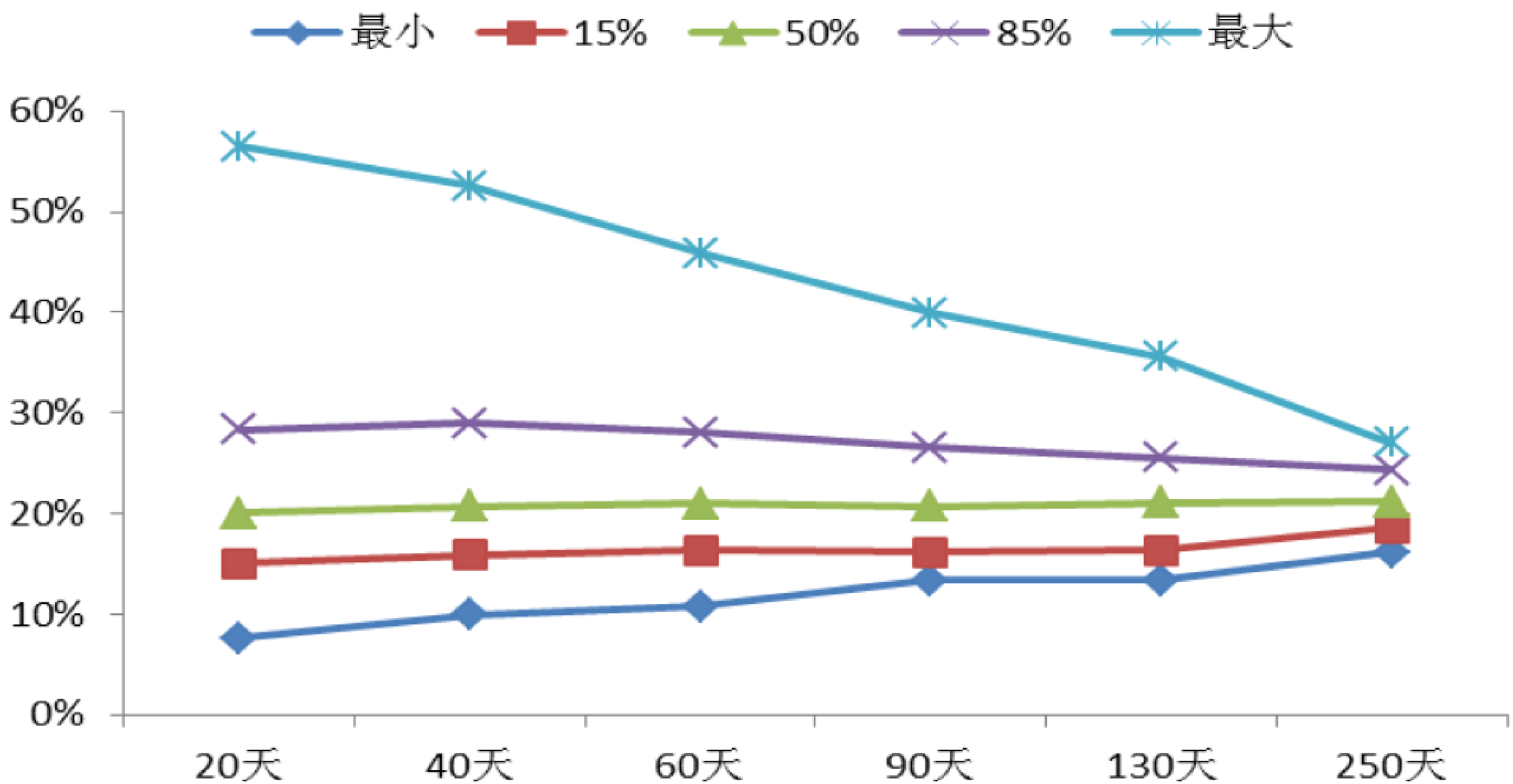


RV与ETF走势：相关系数0.49



波动率锥

图 4、50ETF 不同期限波动率锥



资料来源：兴业证券研究所

EWMA

- 加权历史平均

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_{t-i}^2, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

- Exponentially Weighted Moving Average

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) u_{t-1}^2 \\ &= (1-\lambda) \sum_{i=1}^{N} \lambda^{i-1} u_{t-i}^2 + \lambda^N \sigma_{t-N}^2\end{aligned}$$

- 优点：所需要数据很少；权重以指数下降较符合现实
- λ的选择是关键：RiskMetrics用0.94
- 未来方差的预期值等于当前的方差，没有考虑均值回复特征

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)u_{t-1}^2 \\
&= \lambda[\lambda\sigma_{t-2}^2 + (1-\lambda)u_{t-2}^2] + (1-\lambda)u_{t-1}^2 \\
&= (1-\lambda)u_{t-1}^2 + \lambda(1-\lambda)u_{t-2}^2 + \lambda^2\sigma_{t-2}^2 \\
&= (1-\lambda)u_{t-1}^2 + \lambda(1-\lambda)u_{t-2}^2 + \lambda^2(1-\lambda)u_{t-3}^2 + \\
&\ldots + \lambda^{N-1}(1-\lambda)u_{t-N}^2 + \lambda^N\sigma_{t-N}^2
\end{aligned}
$$

Weights start at 1-λ and decline at rate λ

GARCH

- 广义自回归条件异方差模型（Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model）

- 一部分权重分配给长期波动率均值V_L，GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = V_L + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$
$$0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$$
$$\gamma V_L > 0,\ \alpha + \beta < 1$$

- 只能得到以指数形式收敛于长期均值的期限结构，与期权隐含波动率期限结构特征不同

GARCH的估计与运用

1. 判断是否存在GARCH效应：ARCH-LM检验，即平方的自相关检验
2. 估计GARCH参数：极大似然估计

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi v_i}}\exp\left(-\frac{u_i^2}{2v_i}\right) \text{ or } \sum_{i=1}^{m}\left[-\ln(v_i)-\frac{u_i^2}{v_i}\right]$$

   Variance Targeting：给定长期方差均值，只需估计两个参数，更稳定

3. 对残差进行ARCH-LM检验，检验是否已消除GARCH效应
4. 运用估计得到的参数进行波动率估计

HAR-RV

* HAR-RV（Heterogeneous AutoRegressive Realized Volatility）

$$\log \sigma_{t+1d}^{(d)} = c + \beta^{(d)} \log \mathrm{RV}_t^{(d)} + \beta^{(w)} \log \mathrm{RV}_t^{(w)} + \beta^{(m)} \log \mathrm{RV}_t^{(m)} + \epsilon_{t+1d}^{(d)}$$

B-S公式与隐含波动率

- 无红利欧式看涨期权定价公式：

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

- BS公式：期权价格与BS隐含波动率的转换器
- implied hard-to-borrow rate

预计波动率还是隐含波动率？

* 在BS框架下，Peter Carr（2005）和Henrard（2001）指出，如果用基于波动率σ_h的delta进行对冲，总利润的现值等于

$$V(S,t;\sigma_h) - V(S,t;\tilde{\sigma}) + \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - \sigma_h^2\right)\int_{t_0}^{T} e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^h \, dt$$

隐含波动率曲面：因子模型

* 泰勒展开

$$\ln\sigma(M,\tau)=\beta_1+\beta_2 M+\beta_3 M^2+\beta_4\tau+\beta_5 M\tau$$

$$M=K;M=\ln\left(\frac{K}{F}\right);M=\frac{\ln\left(\frac{K}{F}\right)}{\sqrt{\tau}};....$$

波动率曲面：三次样条插值

* 方程 $s_i(K)=a_i+b_i(K-K_i)+c_i(K-K_i)^2+c_i(K-K_i)^3$
* n＋1个节点，4n个待估参数
* (n+1)+3(n-1)+2个=4n个条件
* 插值条件 $s(K_i)=\sigma_i, i=0,1,\ldots,n$
* 连接条件 $s(K_i-0)=s(K_i+0)$

  $s^{'}(K_i-0)=s^{'}(K_i+0)$

  $s^{''}(K_i-0)=s^{''}(K_i+0)$
* 边界条件

  $s^{'}(0,K_0)=\sigma_0^{'}, s^{'}(0,K_n)=\sigma_n^{'}$ 或 $s^{''}(0,K_0)=\sigma_0^{''}, s^{''}(0,K_n)=\sigma_n^{''}$

  或 $s^{''}(0,K_0)=0, s^{''}(0,K_n)=0$
* 要求输入数据无套利
* 期限结构插值

波动率曲面：Arbitrage free smoothing

- **Fengler（2009）**

$$\min_{X} \ -c^{\mathrm{T}}\mathbf{X}+\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X}$$，最小二乘拟合与光滑性惩罚

subject to : $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 保证f和f''可转化为自然三次样条函数

$$e^{-\int_t^T \delta_s ds}S_t - e^{-\int_t^T r_s ds}K_1 \le f_1 \le e^{-\int_t^T \delta_s ds}S_t \quad and \quad f_n \ge 0$$ 期权上下限

$$\frac{f_2-f_1}{h_1}-\frac{h_1}{6}f_2'' \ge -e^{-\int_t^T r_s ds},\quad \frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}}-\frac{h_{n-1}}{6}f_{n-1}'' \le 0$$ 无价差套利

$$f_i^{(j)} \le e^{-\int_{t_j}^{t_{j+1}} \delta_s ds} f_i^{(j+1)} \quad for\ t_j,\ j=m-1,\dots,1$$（期限）无差期套利

$$f_i''(K) \ge 0,\ for\ i=2,\dots,n-1.\ \left(f_1''(K)=f_n''(K)=0\right)$$ 无蝶式套利

$$\underset{(2n-2)\times 1}{c^{\mathrm{T}}}=\left(\omega_1 c_1,\dots,\omega_n c_n,0,\dots,0\right)^{\mathrm{T}},\ \underset{(2n-2)\times 1}{\mathbf{X}}=\left(\mathbf{f}^{\mathrm{T}},\left(\mathbf{f}''\right)^{\mathrm{T}}\right)^{T}$$

$$\mathbf{A}=\left(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}},-\mathbf{R}\right),\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{n}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda\mathbf{R}\end{pmatrix},\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{n}}=diag\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right)$$

波动率曲面：其他插值

- Extrapolation
- 期限结构插值
  - 线性
  - 三次样条

波动率曲面：SVI（Gatheral, 2004）

- SVI模型

$$\sigma^2(k) = a + b\left[\rho(k-m) + \sqrt{(k-m)^2 + s^2}\right],\quad k = \ln\left(\frac{K}{F_T}\right)$$

- 用给定期限的虚值期权进行非线性最小二乘估计，约束条件

$$a \geq 0, b \geq 0, -1 \leq \rho \leq 1, s \geq 0$$

$$b(1+|\rho|) \leq \frac{4}{T-t} \quad \text{无价差套利}$$

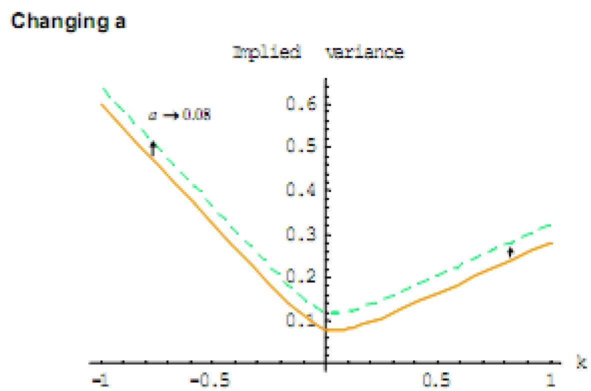
$$\frac{\partial \sigma^2(k)}{\partial (T-t)} \geq 0 \quad \text{无差期套利}$$

- Zeliade Systems(2009)：两维最优化问题，有近似解析解

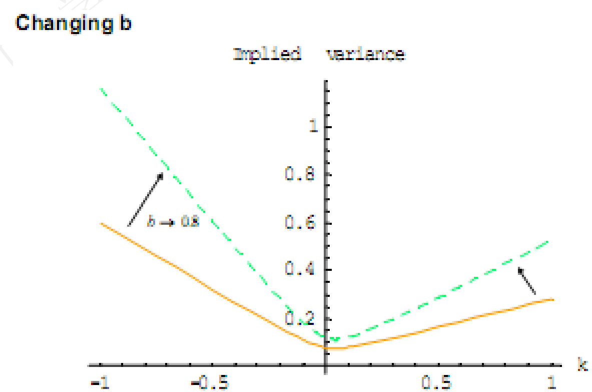
参数内涵

$$\sigma^2(k) = a + b\left[\rho(k-m) + \sqrt{(k-m)^2 + s^2}\right]$$

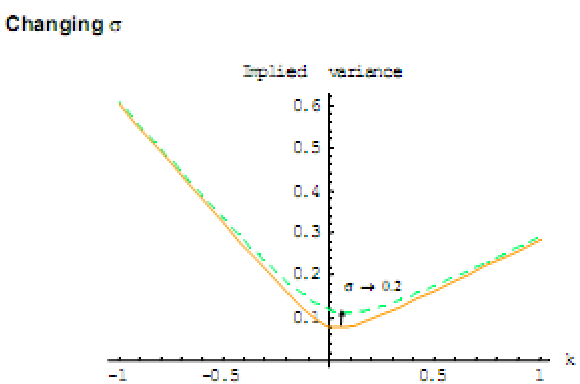
假设初始 $a = 0.04,\ b = 0.4,\ \sigma = 0.1,\ \rho = -0.4,\ m = 0$



a gives the overall lever of variance

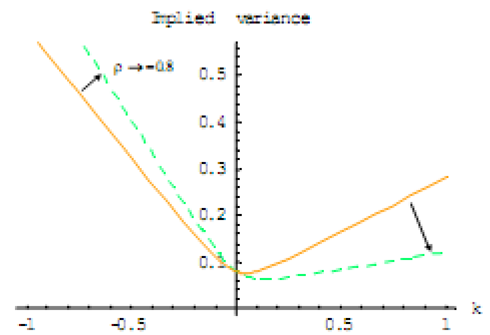


b gives the angle between the left and right asymptotes



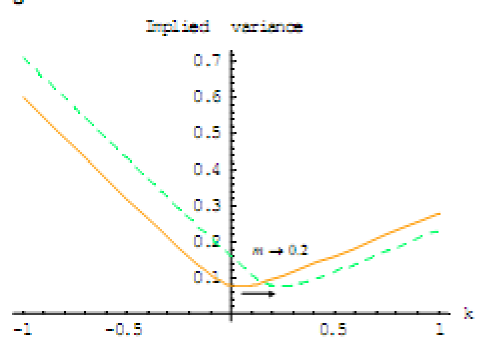
s determines how smooth the vertex is

Changing ρ



ρ determines the orientation of the graph

Changing m



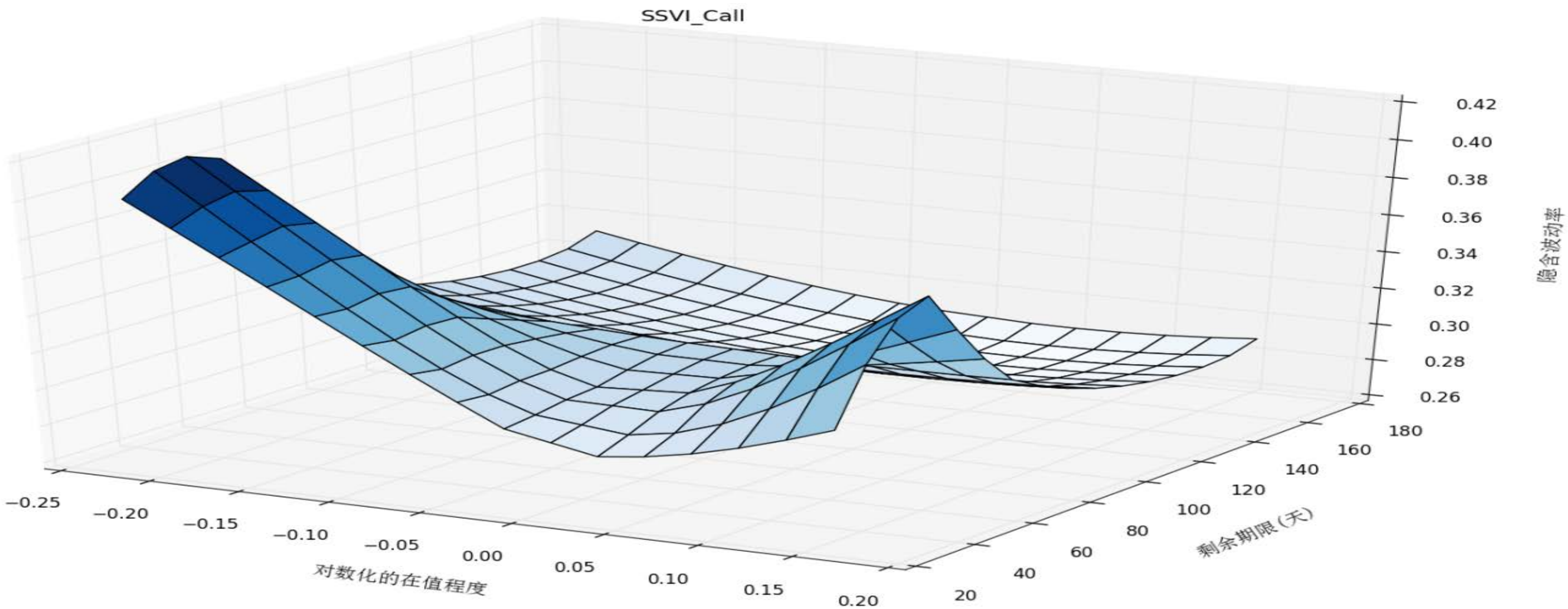
changing m translates the graph

SVI的优点

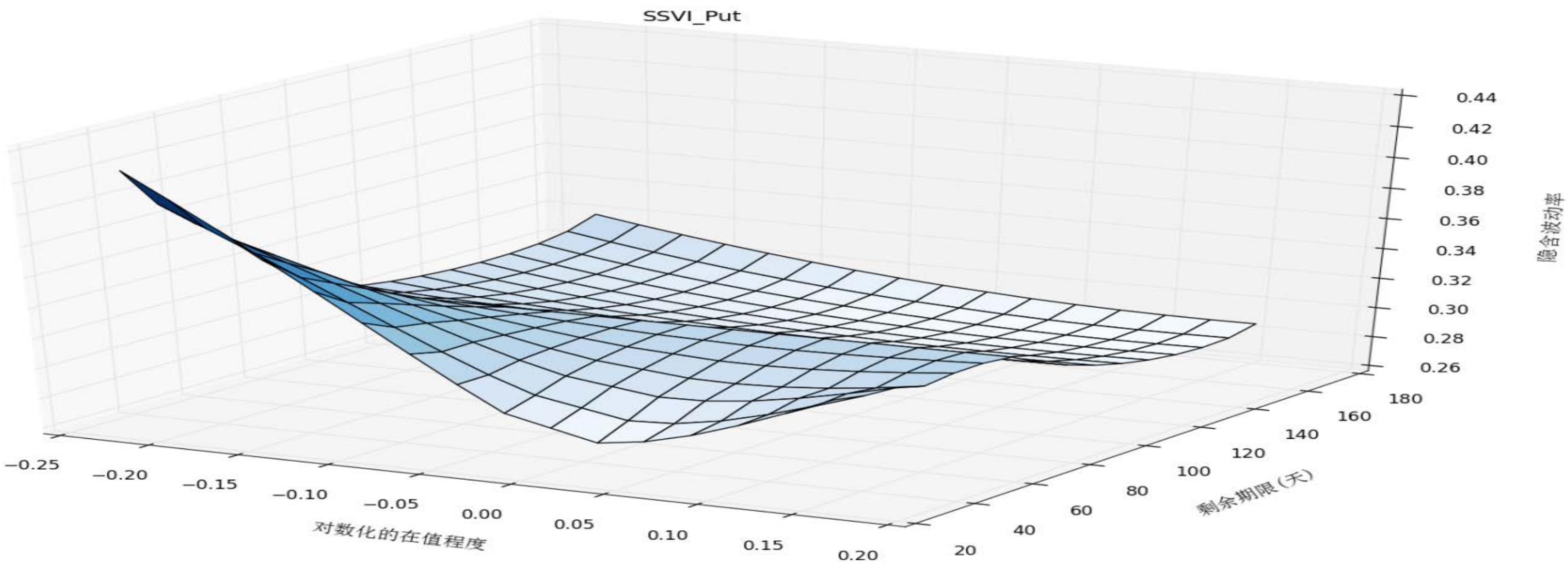
- 对于给定期限，当K趋于无穷时，隐含方差是lnK的线性函数，与Roger Lee (2004)结论一致

$$\sigma_t^2\left(\ln\frac{K}{F},T\right)(T-t)\le\beta\left|\ln\frac{K}{F}\right|,\text{as }\ln\frac{K}{F}\to 0\text{ and }\ln\frac{K}{F}\to\infty$$

- 理论基础：当剩余期限趋于无穷时，Heston模型的隐含波动率微笑极限正是SVI（Gatheral and Jacquier, 2011 QF）
- 较易施加无差期套利条件
- 在极端行权价下的一致性使其可直接用作外部插值公式



SSVI_Call
0.42
0.40
0.38
0.36
0.34
0.32
0.30
0.28
0.26
隐含波动率
−0.25
−0.20
−0.15
−0.10
−0.05
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
对数化的在值程度
20
40
60
80
100
120
140
160
180
剩余期限(天)



SSVI_Put
0.44
0.42
0.40
0.38
0.36
0.34
0.32
0.30
0.28
0.26
隐含波动率
−0.25
−0.20
−0.15
−0.10
−0.05
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
对数化的在值程度
20
40
60
80
100
120
140
160
180
剩余期限(天)

SABR 模型（Hagan et al., 2002）

- 调整β可使远期价格的变化介于正态分布（β=0）和对数正态分布（β=1）之间。外汇市场通常使用β=1

$$dF_t = \sigma_t F_t^{\beta} dz_{Ft}, d\sigma_t = \nu\sigma_t dz_{\sigma t}$$

$$dz_{1t} dz_{2t} = \rho dt, \sigma_0 = \alpha$$

- 隐含波动率

$$\sigma_X(K) = \frac{\alpha}{(F_T K)^{(1-\beta)/2}\left\{1+[(1-\beta)^2/24]\log^2(F_T/K)+[(1-\beta)^4/1920]\log^4(F_T/K)\right\}}\left(\frac{z}{\chi(z)}\right)$$
$$\times\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(F_T K)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(F_T K)^{(1-\beta)/2}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]T\right\}$$

$$z = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{(1-\beta)/2}\log f/K \qquad x(z) = \log\left\{\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\rho}{1-\rho}\right\}$$

- 用给定期限的虚值期权进行非线性最小二乘估计

Heston模型（1993）参数校准

* 非线性最小二乘拟合

期权市场无模型隐含波动率

- 无模型隐含波动率：
  - Demeterfi, Derman, Kamal and Zou（1999）

$$E^F\left(Var\right)=\frac{2}{T}\left\{rT-[\frac{S_0}{S_*}e^{rT}-1]-\ln\frac{S_*}{S_0}+e^{rT}\int_0^{S_*}\frac{1}{K^2}P(K)dK+e^{rT}\int_{S_*}^{\infty}\frac{1}{K^2}C(K)dK\right\}$$

  - Britten-Jones and Neuberger（2000）

$$E^F\left(Var\right)=\frac{2e^{rT}}{T}\left[\int_0^{F_0}\frac{P\left(T,K\right)}{K^2}dK+\int_{F_0}^{\infty}\frac{C\left(T,K\right)}{K^2}dK\right]$$

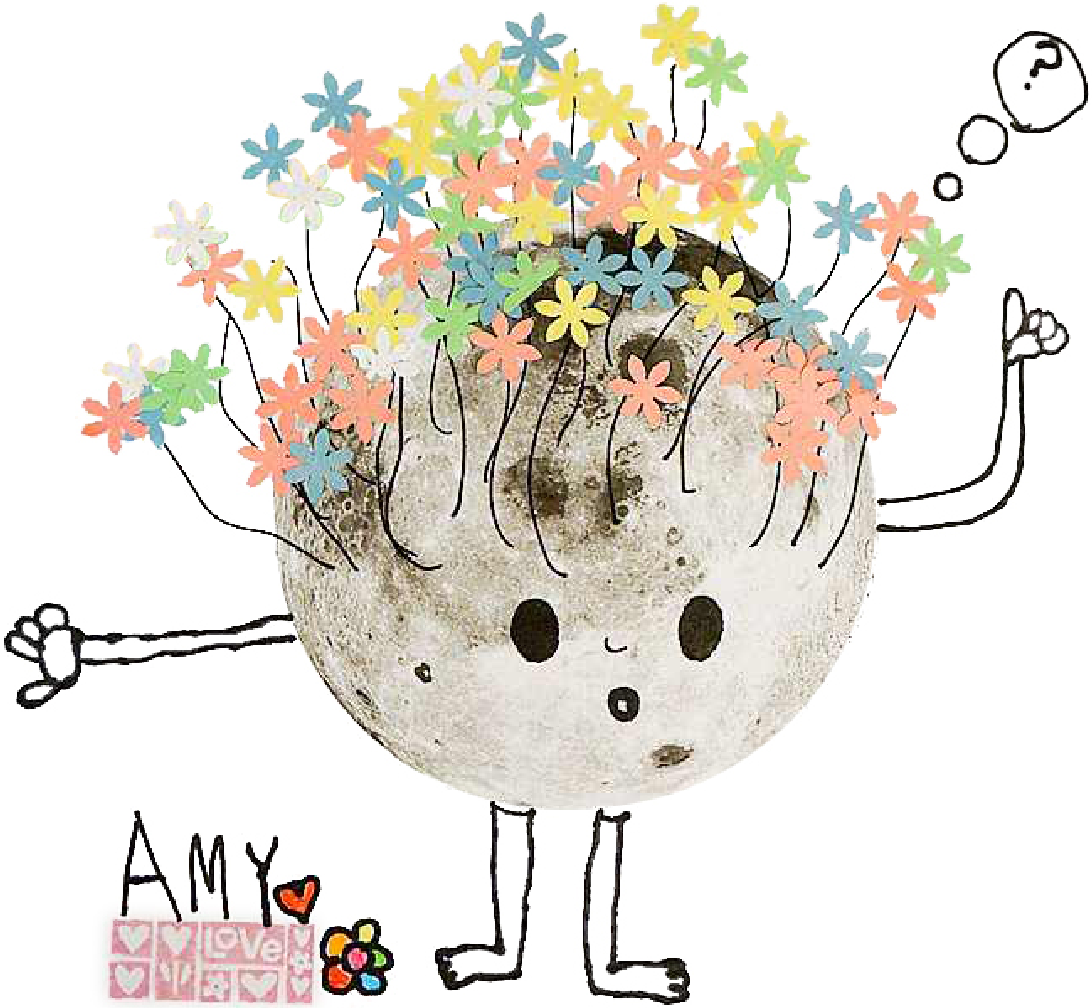
  - VIX(2003)

$$VIX=\frac{2}{T}\sum_i\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{rT}Q\left(T,K_i\right)-\frac{1}{T}\left(\frac{F_0}{K_0}-1\right)^2$$

  - Jiang and Tian(2007)：上述的等价性

* VIX
  * 市场的恐慌(贪婪)指数
  * 对未来波动率的更好预期（风险中性测度下）
  * 基于VIX的衍生产品

Any Questions ?



The End.