

# BSM公式

杨弘毅

创建: 2020 年 4 月 19 日

修改: 2021 年 8 月 1 日

## 1 布朗运动、维纳过程

标准布朗运动简易表达式有：

$$dZ_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

其离散形式的表达式有：

$$Z_T - Z_t = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

### 1.1 特征

标准布朗运动（Brownian motion）或维纳过程（Wiener process）的特征有：

- 初值为零
- 连续
- 独立增量：对于任意两个不同时间点 $\Delta t_i$ 与 $\Delta t_j$ ，其增量 $\Delta Z_i$ 与 $\Delta Z_j$ 相互独立
- 独立同分布（方差可加）：增量 $\Delta Z$ 服从均值为零、方差等于时间长度的正态分布，即 $\Delta Z_i \sim N(0, \Delta t_i)$

### 1.2 为何使用标准布朗运动

- 股价不能为负，所以不能遵循正态分布，但股票连续复利收益率（ $d\ln S_t$ ）近似服从正态分布
- 维纳过程是一个马尔可夫随机过程，增量 $\Delta Z$ 独立，与弱式EMH相同，即技术分析无效，无法使用历史信息预测未来，过去信息跟未来信息相互独立
- 维纳过程对时间处处不可导，且二次变分（Quadratic Variation）不为零，与股票价格变化存在转折尖点的性质相符

### 1.3 部分证明

增量均值为零，方差为时间长度，当 $X$ 与 $Y$ 独立时，则有：

$$\text{Var}(XY) = \text{Var}(X) \text{Var}(Y) + [E(X)]^2 \text{Var}(Y) + [E(Y)]^2 \text{Var}(X)$$

此时，由于 $\varepsilon_t$ 与 $dt$ 独立，套用上式，同时由于 $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ ，则有：

$$E(dZ_t) = E(\varepsilon_t \sqrt{dt}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(dZ_t) &= \text{Var}(\varepsilon_t \sqrt{dt}) \\
&= \text{Var}(\varepsilon_t) \text{Var}(\sqrt{dt}) + [\text{E}(\varepsilon_t)]^2 \text{Var}(\sqrt{dt}) + [E(\sqrt{dt})]^2 \text{Var}(\varepsilon_t) \\
&= \text{Var}(\varepsilon_t) \left[ \text{Var}[(\sqrt{dt})^2] - [\text{E}(\sqrt{dt})]^2 \right] \\
&= \text{Var}(\varepsilon_t) \left[ \text{E}[(\sqrt{dt})^2] - [\text{E}(\sqrt{dt})]^2 + [\text{E}(\sqrt{dt})]^2 \right] \\
&= 1 \cdot \text{E}(dt) = dt
\end{aligned}$$

方差可加性，由下式可见，由于独立增量，导致协方差项为零，使得方差可加。

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(X_1 + X_2 + X_3) \\
&= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) \\
&\quad + \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(X_2, X_3) + \text{Cov}(X_1, X_3)
\end{aligned}$$

由上可知，增量在连续形式 $dZ_t$ 以及离散形式 $Z_T - Z_t$ 下，均服从均值为零，方差为时间长度的正态分布，即有：

$$\begin{aligned}
dZ_t &\sim N(0, dt) \\
Z_T - Z_t &\sim N(0, T - t)
\end{aligned}$$

## 1.4 几种随机过程

广义维纳过程（generalized Wiener process）， $a$ 与 $b$ 为常数。此时，易知其均值为 $\text{E}(dX_t) = a dt$ ，由于 $b$ 为常数，且 $\text{Var}(dZ_t) = dt$ ，则有方差为 $\text{Var}(dX_t) = b^2 dt$ 。

$$dX_t = a dt + b dZ_t$$

普通布朗运动， $a(t)$ 与 $b(t)$ 都是 $t$ 的确定性函数。由于都为确定函数，所以如上可知，其均值方差为 $\text{E}(dX_t) = a(t)dt$ ，由于 $b$ 为常数，且 $\text{Var}(dZ_t) = dt$ ，则有方差为 $\text{Var}(dX_t) = b(t)^2 dt$ 。

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dZ_t$$

扩散过程（Diffusion Process），此时 $a(X(t), t)$ 与 $b(X(t), t)$ 都为 $X_t$ 和 $t$ 的确定性函数。由于漂移项与方差项都包含 $X(t)$ ，使得扩散之后过程的条件分布无法保证仍是正态分布。但更能刻画一般动态变化，未加入新的风险源，仍具有独立增量，马尔可夫性，和方差可加性等性质。

$$dX_t = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dZ_t$$

伊藤过程（Itô Process），最一般化的随机过程， $a_t$ 和 $b_t$ 为任意函数或随机过程。

$$dX_t = a_t dt + b_t dZ_t$$

## 2 伊藤引理（Itô lemma）

若变量 $X_t$ 遵循伊藤过程：

$$dX_t = a_t dt + b_t dZ_t$$

在导数 $\partial G/\partial t$ 、 $\partial G/\partial X$ 与 $\partial^2 G/\partial X^2$ 存在的前提下，则有变量 $X_t$ 和 $t$ 的函数 $G(X_t, t)$ 将遵循如下过程：

$$dG_t = \left( \frac{\partial G}{\partial X} a_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial X} b_t dZ_t$$

## 2.1 证明

$G(X, t)$ 的泰勒展开式为:

$$\Delta G_t = \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} \Delta X^2 + \frac{\partial G}{\partial X \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,  $(\Delta t)^2$ , 认为是高阶无穷小, 可忽略。而对于 $\Delta X \Delta t$ 项有:

$$\begin{aligned}\Delta X &= a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \\ \Delta X \Delta t &= a(\Delta t)^2 + b\varepsilon(\Delta t)^{3/2}\end{aligned}$$

其中的 $(\Delta t)^{3/2}$ 项, 也被认为是高阶无穷小项, 可忽略。同时由于 $(\Delta X)^2$ 项中包含 $\Delta t$ 项, 因此需要保留。因此仅考虑前三项 (注意: 此与常微分不同, 而在常微分中,  $(\Delta X)^2$ 项也是高阶无穷小项), 展开得到:

$$\begin{aligned}\Delta G_t &= \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} \Delta X^2 \\ &= \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} [a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}]^2 \\ &= \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 \varepsilon^2 \Delta t\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon^2 \Delta t$ 项, 由于 $\varepsilon \sim N(0, 1)$ , 因此有 $E(\varepsilon) = 0$ 。又因 $\text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$ , 得到 $E(\varepsilon^2) = 1$ , 同时有 $E(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t$ 。计算 $\varepsilon^2 \Delta t$ 的方差可得:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\varepsilon^2 \Delta t) &= \text{Var}(\varepsilon^2) \text{Var}(\Delta t) + [E(\varepsilon^2)]^2 \text{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2 \text{Var}(\varepsilon^2) \\ &= \text{Var}(\varepsilon^2) \text{Var}(\Delta t) + 1 \cdot \text{Var}(\Delta t) + [E(\Delta t)]^2 \text{Var}(\varepsilon_t^2) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t^2)\end{aligned}$$

可以认为 $\varepsilon^2 \Delta t$ 方差为高阶无穷小, 其期望为1。因此, 可认为 $\varepsilon^2 \Delta t \approx \Delta t$ , 可将原式化简为:

$$\Delta G_t = \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 \Delta t$$

而连续形式为:

$$\begin{aligned}dG_t &= \frac{\partial G}{\partial X} dX_t + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 dt \\ &= \frac{\partial G}{\partial X} (a_t dt + b_t dZ_t) + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 dt \\ &= \left( \frac{\partial G}{\partial X} a_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial X} b_t dZ_t\end{aligned}$$

## 3 几何布朗运动

由于衍生品价格是标的资产价格与时间的函数, 即只需要假定标的资产遵循过程, 即可用伊藤引理求得其衍生品遵循过程。假设股票价格服从几何布朗运动 (Geometric Brownian Motion, GBM):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

令 $G_t = \ln S_t$ , 此时:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

代入伊藤引理之中,此时 $a_t = \mu S_t$ ,  $b_t = \sigma S_t$ , 则有:

$$\begin{aligned} dG_t &= d \ln S_t = \left( \frac{1}{S_t} \mu S_t + 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dZ_t \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dZ_t \end{aligned}$$

即有:

$$d \ln S_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dZ_t \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right)$$

同时又离散形式下:

$$\ln S_T - \ln S_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (Z_T - Z_t) \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right)$$

此时股票价格连续复利收益率 (Continuously compounded return), 或称为对数收益率 (Logarithmic return), 为未年化收益率:

$$R = d \ln S_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \ln(1 + r) \quad (1)$$

服从期望值为 $(\mu - \sigma^2/2)dt$ , 方差为 $\sigma^2 dt$ 的正态分布, 与现实较为吻合。且 $d \ln S_t$ 的定义, 使得股票价格非负。

**注意:**  $d \ln S$  (极短时间内) 和  $\ln S_T - \ln S_t$  (较长时间内) 都服从正态分布, 而 $dS$ 在极短时间内服从正态分布, 而在较长时间内因 $S_t$ 的大小改变, 使得 $S_T - S_t$ 的均值和方差的变化而不服从正态分布。

$$\begin{aligned} \ln S_T - \ln S_t &\sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right) \\ \ln S_T &\sim N \left( \ln S_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right) \end{aligned}$$

可以看到此时股票价格的对数服从正态分布 (Log-normal distribution), 因此可知, 股票价格服从对数正态分布。由正态分布与对数正态分布的性质可知, 对一个服从正态分布的随机变量 $X$ 取指数, 则 $e^X$ 服从对数正态分布。相反, 对一个服从对数正态分布的随机变量 $X$ 取对数, 则 $\ln X$ 服从正态分布。因此有如下关系:

$$\ln S_T \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \leftrightarrow \quad S_T \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$$

并且已知对数正态分布 $X \sim \text{Log-normal}(\mu, \sigma^2)$ , 其期望与标准差为:

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \text{Var}(X) &= e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

因股票价格 $S_T$ 服从对数正态分布, 代入上式可知其期望及方差为:

$$\begin{aligned} E(S_T) &= \exp \left( \ln S_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \frac{\sigma^2}{2} (T - t) \right) \\ &= \exp (\ln S_t + \mu (T - t)) \\ &= S_t e^{\mu (T - t)} \\ \text{Var}(S_T) &= \left[ \exp(\sigma^2 (T - t)) - 1 \right] \exp \left\{ 2 \left[ \ln S_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \right] + \sigma^2 (T - t) \right\} \\ &= \left[ \exp(\sigma^2 (T - t)) - 1 \right] \exp [2 \ln S_t + 2\mu (T - t)] \\ &= S_t^2 e^{2\mu (T - t)} \left[ e^{\sigma^2 (T - t)} - 1 \right] \end{aligned}$$

### 3.1 对数正态分布

如果一组数值做对数变换后服从正态分布，我们就称其服从对数正态分布。假设随机变量 $X$ 服从正态分布，则有 $\ln x$ 服从对数正态分布，两者累积分布函数（Cumulative distribution function, CDF）相同：

$$F_L(x) = F_N(\ln x)$$

对公式两边取倒数，则可得到其概率密度函数（probability density function, PDF）：

$$f_L(x) = \frac{1}{x} f_N(\ln x)$$

此时，带入已知正态分布PDF，即可得到对数正态分布PDF：

$$f_L = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**注意：**对于对数正态分布， $\mu$ 与 $\sigma$ 并非其均值与标准差，仅为确定其对数正态分布的两个参数。只是使用其确定正态分布时，就正好为其期望和标准差。对于相同的 $\mu$ 与 $\sigma$ 参数确定的正态分布与对数正态分布，可以通过对服从对数正态分布的随机变量取对数转换为正态分布。相反，通过对服从正态分布的随机变量取指数转换为对数正态分布。两者之间的期望与标准差（方差）通过如下关系转化：

	正态分布	对数正态分布
期望	$E_N(X) = \mu = \ln[E_L(X)] - \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}_L(X)}{[E_L(X)]^2} \right]$	$E_L(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
方差	$\text{Var}_N(X) = \sigma^2 = \ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}_L(X)}{[E_L(X)]^2} \right]$	$\text{Var}_L(X) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

#### 3.1.1 期望推导

根据对数正态分布的PDF，可计算其期望：

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法，令 $t = \frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$ ，则有 $x = e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu}$ ，则原积分转化为：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} d e^{\sqrt{2}\sigma t + \mu} \\ &= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2})^2} dt \\ &= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d(t - \frac{\sqrt{2}\sigma}{2}) \end{aligned}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ ，可得到：

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

#### 3.1.2 方差推导

已知：

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

同上，已知对数正态分布PDF：

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

使用换元法，令  $t = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ ，则有  $x = e^{\sigma t + \mu}$ ：

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + 2\sigma t} dt \\ &= \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-2\sigma)^2 + 2\sigma^2} dt \quad \left( \text{对 } -\frac{t^2}{2} + 2\sigma t \text{ 配方} \right) \\ &= \frac{e^{2\mu+2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}} d\left(\frac{t-2\sigma}{\sqrt{2}}\right) \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} \end{aligned}$$

此时则有：

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} - (e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}})^2 \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= e^{2\mu+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

### 3.1.3 求正态分布 $\mu$ 与 $\sigma$

已知  $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 、 $E(X)$  与  $\text{Var}(x)$ ，即随机变量  $X$  服从对数正态分布，其对数服从正态分布，则有：

$$\begin{aligned} \mu &= \ln[E(X)] - \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}(X)}{[E(X)]^2} \right] \\ \sigma &= \sqrt{\ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}(x)}{[E(X)]^2} \right]} \end{aligned}$$

## 4 BSM 偏微分方程（PDE）

### 4.1 假设

- 人性假设
  - 不存在无风险套利机会（无套利）
- 完美世界
  - 允许卖空标的证券
  - 没有交易费用和税收
  - 证券交易时连续的，价格变动也是连续的
  - 所有证券都完全可分
- 可交易资产
  - 证券价格遵循几何布朗运动，即  $\mu$  和  $\sigma$  为常数
  - 衍生品有效期内，无风险利率  $r$  为常数
  - 衍生证券有效期内，标的证券没有现金收益支付

## 4.2 推导

假设股票价格 $S_t$ 遵循几何布朗运动，以及其离散形式有：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t$$

假设衍生品价格 $f(S_t, t)$ 为 $S_t$ 以及 $t$ 的函数，根据伊藤引理可得其连续和离散形式有：

$$df(S_t, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t dZ_t$$

$$\Delta f(S_t, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t$$

由此可见，股票价格与衍生品价格的风险源均来自 $\Delta Z_t$ ，因此可以构建投资组合，由一单位衍生品空头，以及 $\partial f / \partial S$ 单位证券多头构成，进行对冲消除该风险源：

$$\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t$$

在 $\Delta t$ 时间内，该投资组合价值变化 $\Delta \Pi_t$ 为，并代入 $\Delta S_t$ 与 $\Delta f_t$ ：

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_t &= -\Delta f_t + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S_t \\ &= - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t \Delta Z_t \right] + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta Z_t) \\ &= - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t \end{aligned}$$

由于此时组合消除了风险，因此组合只应获得无风险收益率：

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_t &= r \Pi_t \Delta t \\ &= r \left( -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t \right) \Delta t \end{aligned}$$

整理等式，消去 $\Delta t$ ，即可得到BSM偏微分方差：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f_t$$

## 5 BSM公式（鞅方法）

在风险中性世界中，无收益资产看涨期权到期时价值的期望值为：

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$$

欧式看涨期权的现值应为其期望值以无风险利率进行贴现：

$$c = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)]$$

同时在风险中性世界下，漂移率 $\mu$ 应等于无风险收益率 $r$ ，因此有：

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right)$$

已知：

$$S_T = S_t \exp \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (Z_T - Z_t) \right]$$

已知  $Y = \frac{Z_T - Z_t}{\sqrt{T-t}} \sim N(0, 1)$ ，其密度函数为：

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

在风险中性下的期望，可以改写为如下积分的形式：

$$\begin{aligned} E_t^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)] &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[ S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y} - K \right]^+ \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} - K \right)^+ \varphi(y) dy \end{aligned}$$

当  $S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y} - K \geq 0$  时，有  $y \geq \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ，设其为  $-d_2$ ，同时假设  $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ 。

$$\begin{aligned} E_t^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y} - K \right)^+ \varphi(y) dy \\ &= S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y} \varphi(y) dy - K \int_{-d_2}^{\infty} \varphi(y) dy \\ &= S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K N(d_2) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left( -\frac{\sigma^2(T-t)}{2} + \sigma\sqrt{T-t}y - \frac{y^2}{2} \right)} dy - K N(d_2) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{y=-d_2}^{y=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} dy - K N(d_2) \quad (\text{换元法: } u = y - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{u=-d_2 - \sigma\sqrt{T-t}}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - K N(d_2) \quad (dy = du) \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - K N(d_2) \\ &= S_t e^{r(T-t)} N(d_1) - K N(d_2) \end{aligned}$$

得到BSM公式，即欧式看涨期权的解析解：

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} E_t^{\mathbb{Q}} [\max(S_T - K, 0)] \\ &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned}$$

已知期权平价公式：

$$c + K e^{r(T-t)} = p + S_t$$

代入BSM看涨期权解析解中，可得：

$$\begin{aligned} p &= c + K e^{-r(T-t)} - S_t \\ &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) + K e^{-r(T-t)} - S_t \\ &= S_t (N(d_1) - 1) - K e^{-r(T-t)} (N(d_2) - 1) \\ &= S_t (-N(-d_1)) - K e^{-r(T-t)} (-N(-d_2)) \\ &= K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \end{aligned}$$



此时 $d_1$ 和 $d_2$ 分别为：

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

## 6 内在价值（考虑中国市场的新定义）

由于：

$$\text{期权价值 (Option value)} = \text{内在价值 (Intrinsic value)} + \text{时间价值 (Time value)}$$

内在价值为即不考虑资产价格波动的情况下，期权条款赋予期权多头的最高价值。而时间价值为标的资产价格波动为期权多头（权利方）所带来的隐含价值，由于期权权利方只有权力而无义务，因此期权的时间价值应该大于0。内在价值不受时间价值的影响，因而可以使用二分法。

若定义内在价值为，期权若在当下时点到期，期权所含的价值（Hull，CME）。这样考虑的缺点为没有考虑货币的时间价值，且在中国市场由于现货的卖空限制，其价格高于其真实价格。

$$\text{看涨期权内在价值} = \max(S_t - K)$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max(K - S_t)$$

在考虑货币时间价值的情形内在价值如下，缺点为依然没有考虑中国市场的卖空限制。

$$\text{看涨期权内在价值} = \max(S_t - Ke^{-r(T-t)})$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max(Ke^{-r(T-t)} - S_t)$$

因此考虑使用期货价格代替现货价格，以为期货市场多空双方均能自由表达其看法，因此有：

$$\text{看涨期权内在价值} = \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)})$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)})$$

由于在中国市场ETF期权有红利保护机制，即会下调行权价格，放大每手期权数量，相当于变相抬高了股票价格，或复权（加挂A标记的期权）。且在ETF中的成分股分红，其分红留在ETF当中。而ETF没有期货，只有股指期货，而股指期货不对分红进行调整，即没有红利保护，即其成分股分红后股指自然下跌。因而在使用股指期货或期权以及ETF现货或期权时，需要做红利调整。即在ETF现货中将红利剔除，此时有：

$$F_{t,T} = (S_t - I)e^{r(T-t)}$$

此时则有，将上式代入，在中国市场中：

$$\text{看涨期权内在价值} = \max((F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)} + I)$$

$$\text{看跌期权内在价值} = \max((K - F_{t,T})e^{-r(T-t)} - I)$$

因为平值点为使内在价值为零，则平值点定义为 $F_{t,T} = K$ ，这样定义使得实值虚值部分左右较为对称，有利于比较。此时有当 $F < K$ 为OTM，此时值域为正，当 $F > K$ 为ITM，则有值域为负。此时有对数在值状态（log-moneyness）：

$$\ln \frac{K}{K_{atm}} = \ln \frac{K}{F}$$

同时可以发现，在PCP下：

$$c = p + (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$$

对于平直期权ATM，则有 $F_{t,T} = K$ ，易得此时 $c = p$ 。而当看涨期权为ITM，其内在价值部分不为零。而对于此时得看跌期权为OTM，其内在价值为零，而仅有时间价值，因此可以得到，在新平值点定义下的，相同行权价，相同期限的看涨看跌期权：

$$c_{\text{时间价值}} = p_{\text{时间价值}}$$

## 7 平价期权

当平值点为 $S = Ke^{-r(T-t)}$ 时，将其带入看涨BSM公式当中，则有：

$$\frac{c}{S} = N(d_1) - N(d_2) \quad (2)$$

对于看跌期权则有：

$$\begin{aligned} \frac{p}{S} &= N(-d_2) - N(-d_1) \\ &= 1 - N(d_2) - [1 - N(d_1)] \\ &= N(d_1) - N(d_2) = \frac{c}{S} \end{aligned}$$

对于 $d_1$ 和 $d_2$ ，此时有：

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \quad (3)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -\frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t} \quad (4)$$

则对于欧式平价期权：

$$\begin{aligned} \frac{c}{S} = \frac{p}{S} &= N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) \\ &= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} - \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^3}{6} + \frac{(\sigma\sqrt{T-t}/2)^5}{40} - \dots + \dots\right)\right] - 1 \quad (\text{使用泰勒展开}) \\ &\approx \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2\pi} \approx 0.4\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

## 8 波动率

为人们对未来给定期限的波动率的预期值

- 历史波动率 (Historical volatility)：使用过去代替未来
  - 样本对数收益率标准差 (日频数据)
  - 已实现波动率 (Realized volatility, 日内高频, 5分钟, 假设均值为零)
  - 极差波动率
- 历史波动率 (Historical volatility)：利用历史数据进行建模，并且预测
  - 广义自回归条件异方差 (GARCH, 计量方法)
  - 随机波动率 (Stochastic volatility, 随机过程)
- 隐含波动率 (Implied volatility)：直接从期权价格中提取未来预期

## 9 注意与备注

- 期限、无风险利率、波动率应匹配（以年为单位，一般使用交易日计算，美国交易日252天）
- 无风险利率选择即期利率（Spot rate）而非到期收益率（YTM，真实收益率，票息5%，但非平价发行）
- 由于只有交易日才有历史数据与收益率数据，波动率使用交易天数进行年化，中国240天左右，美国252天
- 波动率为一个时间窗口（一般为年，252天交易日，较以月每21天为窗口更为平滑）内连续复利收益率或对数收益率（ $\ln S_t/S_{t-1}$ ）标准差进行年化。即日频波动率乘以 $\sqrt{252}$ （一天的方差为 $s^2$ ，由于方差可加，252个交易日的方差即为 $s^2 \times 252$ ，标准差或波动率为 $s\sqrt{252}$ ），月频波动率应乘以 $\sqrt{252/21}$

### 9.1 比例收益率与对数收益率

股票价格服从几何布朗运动：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

其离散形式可写作：

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

其期望有，可以看到 $\Delta S_t/S_t$ 为 $\Delta t$ 时间内百分比年化收益率或**比例收益率**（percentage returns）为 $\mu$ ：

$$E\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right) = \mu \Delta t$$

而连续复利收益率或**对数收益率**（log returns）的期望则为：

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dZ_t$$
$$E(d \ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt$$

比例收益率在实际应用过程中意义较小，假设4年盈亏为+50%，-50%，+50%，-50%，其比例收益率期望与均值 $\mu$ 均为0，但实际上相比期初有-43.75%的亏损。而使用几何平均（复利）计算，年化亏损-13.40%即盈亏应使用几何平均的方式计算，简单的算术平均比例收益率没有意义。而使用对数收益率，其期望为 $\mu - \sigma^2/2$ ，即算术平均 $\mu$ 需要减去 $\sigma^2/2$ ，才是几何平均期望。在此例子中均值为0，方差为0.25，此时对数收益率的期望为-12.5%。即波动越大，降低实际收益率，符合现实情况，具有经济学意义。

### 9.2 做空限制

且在中国市场中现货存在较大的做空限制，即在现货市场的价格由看多者和少量看空者决定，并不能反应所有投资者的真实情绪，以至于难以复制期权，违法BSM公式假设条件。解决方法有：

1. 使用期货进行贴现，得到其隐含现货价格，使用BSM进行计算，其中有：

- 期货隐含现货价格

$$S^* = F e^{-q(T-t)}$$

- 期权隐含现货价格

$$S^* = (c - p) + K e^{-r(T-t)}$$

2. 直接使用Black公式，使用期货价格进行计算，即：

$$c = e^{-r(T-t)} [F_t N(d_1) - K N(d_2)]$$