欧拉公式（Euler's formula）

杨弘毅

创建: 2021 年 4 月 15 日
修改: 2021 年 4 月 15 日

1 证明

通过使用泰勒级数（Taylor series），将sine与cosine展开：

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}
$$

同时又自然常数或欧拉数（Euler's number），在$k=0$展开有：

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

此时则有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[e^{ix}\right] &= \cos x \\
\mathrm{Im}\left[e^{ix}\right] &= \sin x
\end{aligned}
$$

将$x=-x$代入：

$$
e^{-ix} = \cos x - i \sin x
$$

联立e^{ix}，可得：

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}
\end{aligned}
$$

将$x=\pi$代入，则可得欧拉恒等式（Euler's identity）：

$$
e^{i\pi} + 1 = 0
$$

Reference

`https://www.bilibili.com/video/BV1yJ411C7wG`