Moment

杨弘毅

创建: 2021 年 4 月 8 日
修改: 2021 年 9 月 29 日

目录

1 定义

1.1 含义

数学中矩的概念来自物理学，在物理学中，矩表示距离和物理量的乘积。如力与力臂（参考点的距离）的乘积，得到的是力矩（或扭矩）。可以理解为一杆“秤”，“秤”的平衡的两边重量与距离的乘积相同，则能保持平衡。

而在概率论上，可以理解秤为一杆秤的两端的概率为 1，中心点概率为 0。如一端秤砣重量，为中奖金额 500 元，但中奖概率为千分之一，即离中心点距离为 0.1%，那么期望为 0.5 元。可以理解为了使得秤保持平衡，则另一端，在概率为 1，其秤砣重量，中奖金额应为 0.5 元。

1.2 期望

这样既可以把期望看成是矩，即距离（概率）乘以力（随机变量）的大小。对于 n 阶矩即对 x^nq 求期望，在离散形式下有：

$$E[x] = \sum_i p_i x_i$$

在连续形式下，n 阶矩可以表示为 $(x-c)^n$ 的期望，其中 $f(x)$ 为概率密度函数（probability density function）：

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^n f(x) dx$$

常用的有一至四阶矩：

阶（Order）	非中心矩（Non-central）	中心矩（Central）
1st	$\mathrm{E}(x)=\mu$	
2nd	$\mathrm{E}(x^2)$	$\mathrm{E}[(x-\mu)^2]$
3rd	$\mathrm{E}(x^3)$	$\mathrm{E}[(x-\mu)^3]$
4th	$\mathrm{E}(x^4)$	$\mathrm{E}[(x-\mu)^4]$

- 均值 $\mathrm{Mean}(x)$ 为一阶中心矩
- 方差 $\mathrm{Variance}(x)=\mathrm{E}(x-\mu)^2$ 为二阶非中心矩
- 偏度 $\mathrm{Skewness}(x)=\frac{\mathrm{E}[(x-\mu)^4]}{\sigma^3}$ 为三阶标准矩
- 峰度 $\mathrm{Kurtosis}(x)=\frac{\mathrm{E}[(x-\mu)^4]}{\sigma^4}$ 为四阶标准矩

1.3 原点矩（Raw/crude moment）

当 $c=0$ 时，称为原点矩。此时则有**平均数（mean）**或**期望（expected value）**的连续形式为：

$$\mu=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-0)^1f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

其离散形式为：

$$\mu=E(x)=\sum_i x_ip_i$$

1.4 中心矩（Central moment）

期望值可以成为随机变量的中心，即当 $c=E(x)$ 时

$$\mu_n=E[(x-E(x))^n]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^nf(x)dx$$

同时可知任何变量的一阶中心矩为 0：

$$\begin{aligned}\mu_1&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^1f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}E(x)f(x)dx\\&=E(x)-E(x)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\\&=E(x)-E(x)\times 1=0\end{aligned}$$

而二阶中心矩（second central moment）为**方差（Variance）**

$$\begin{aligned}\mu_2&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-2E(x)\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx+[E(x)]^2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-2E(x)E(x)+[E(x)]^2\times 1\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-[E(x)]^2\\&=E(x^2)-[E(x)]^2=\sigma^2\end{aligned}$$

其离散形式则有：

$$\mathrm{Var}(x)=\sigma^2=\sum p_i(x_i-\mu)^2$$

1.5 标准矩（Standardized moment）

标准矩为标准化（除以标准差）后的中心矩，第 n 阶中心矩（standardized moment of degree n）有：

$$\mu_n = E[(x-\mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f(x) dx$$

已知标准差的 n 次方有：

$$\sigma^n = \left(\sqrt{E[(x-\mu)^2]}\right)^n = (E[(x-\mu^2)])^{n/2}$$

此时，第 n 阶标准矩有：

$$\tilde{\mu}_n = \frac{\mu_n}{\sigma^n} = E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^n\right]$$

由一阶中心矩为 0，可知一阶标准矩（first standardized moment）也为 0。而二阶标准矩（second standardized moment）则有：

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{E[(x-\mu)^2]}{(E[(x-\mu)^2])^{2/2}} = 1$$

偏度（skewness）

三阶标准矩（third standardized moment）为**偏度**：

$$\tilde{\mu}_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E[(x-\mu)^3]}{(E[(x-\mu)^2])^{3/2}}$$

偏度分为两种：

- 负偏态或左偏态：左侧的尾部更长，分布的主体集中在右侧
- 正偏态或右偏态：右侧的尾部更长，分布的主体集中在左侧

峰度（kurtosis）

四阶标准矩（third standardized moment）为**峰度**：

$$\tilde{\mu}_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E[(x-\mu)^4]}{(E[(x-\mu)^2])^{4/2}}$$

定义**超值峰度（excess kurtosis）**为峰度 -3，使得正态分布的峰度为 0：

$$\text{excess kurtosis} = \tilde{\mu}_4 - 3$$

- 如果超值峰度为正，即峰度值大于 3，称为高狭峰（leptokurtic）
- 如果超值峰度为负，即峰度值小于 3，称为低阔峰（platykurtic）

2 矩母函数

2.1 定义

矩母函数或称为矩生成函数（Moment generating fuction，MGF）或动差生成函数，顾名思义就是产生矩的函数。对于随机变量 X，其矩生成函数定义为：

$$\boxed{M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})}$$

离散形式下有：

$$\mathrm{E}[e^{tx}] = \sum e^{tx} P(x)$$

而在连续形势下有：

$$\mathrm{E}[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

定理 2.1.1. 将矩母函数进行 n 次求导，并令 $t=0$ 则可得到 $\mathrm{E}(X^n)$

$$\mathrm{E}(X^n) = \left.\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\right|_{t=0}$$

证明. 对于 e^x 使用泰勒展开有：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

那么 e^{tx} 的期望为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^{tx}] &= \mathrm{E}\left[1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!}\right] \\
&= \mathrm{E}(1) + t\,\mathrm{E}(x) + \frac{t^2}{2!}\,\mathrm{E}(x^2) + \frac{t^3}{3!}\,\mathrm{E}(x^3) + \cdots + \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{E}(x^n)
\end{aligned}$$

对其求一阶导：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathrm{E}[e^{tx}] &= \frac{d}{dt}\left[\mathrm{E}(1) + t\,\mathrm{E}(x) + \frac{t^2}{2!}\,\mathrm{E}(x^2) + \frac{t^3}{3!}\,\mathrm{E}(x^3) + \cdots + \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{E}(x^n)\right] \\
&= 0 + \mathrm{E}(x) + t\,\mathrm{E}(x^2) + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{E}(x^3) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{E}(x^n) \\
&\quad \text{（代入 } t=0\text{）} \\
&= 0 + \mathrm{E}(x) + 0 + 0 + \cdots + 0 \\
&= \mathrm{E}(x)
\end{aligned}$$

□

2.2 性质

对于标准正态分布 $N \sim (0,1)$ 的矩母函数，则有：

$$\begin{aligned}
M_X(t) = \mathrm{E}(e^{xt}) &= \int e^{xt} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{xt-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xt+t^2-t^2)} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{2}t^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} \int \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2}
\end{aligned}$$

对于正态分布 $N \sim (\mu, \sigma)$ 的矩母函数，则有：

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{xt}) = \int e^{xt} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} dx$$

此时代换 $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$，即 $x=\sigma z+\mu$，并有 $dx=\sigma dz$：

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int e^{(\sigma z+\mu)t}\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dx \\
&= e^{\mu t}\int e^{\sigma z t}\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dx \\
&= e^{\mu t}\int \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z^2-2\sigma t z+(\sigma t)^2-(\sigma t)^2)}dx \\
&= e^{\mu t}e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\int \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2}dx \\
&= e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}
\end{aligned}
$$