修匀學(Graduation) – Whittaker-Henderson Graduation

授課教師：余清祥教授

課程日期：2018年10月9日

資料下載：

http://csyue.nccu.edu.tw

Whittaker修匀

- Whittaker修匀最初由Whittaker(1923)首創，Henderson(1924, 1925)改良，因此也稱為Whittaker-Henderson修匀法。

→與MWA不同，Whittaker修匀兼顧適度性(Fit)及平滑性(Smoothness)，不單單要求各年齡死亡率間的平滑，也考慮各年齡死亡率的獨特性（例如：15-20歲間的死亡率多半有隆起的現象）。

- 適度性代表修勻值與觀察值間的差異，也是修勻的程度；平滑性代表修勻值是否平滑，也是修勻後的死亡率是否符合過去經驗。

$$M = F + hS$$

$$= \sum_{1}^{n} w_x (v_x - u_x)^2 + h \sum_{1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2$$

→這兩者本質上通常互相衝突，尤其當樣本數較少時，因為提高適度性（即 F 較小）通常會犧牲平滑性；反之，愈平滑也會加大修勻值和原始值的距離，得到較大的 F。

- 換言之，Whittaker修勻以加權的方式，結合兩個限制式成為一個目標函數，需先設定參數 h 及 z 兩個數值。

→兩種極端現象：當參數值 $h \to 0$ 時，幾乎不考慮修勻；而 $h \to \infty$ 時，修勻幾乎只考慮平滑性，也就是修勻值是否為不大於 $z-1$次的多項式。

→平滑性函數 z 的選擇多為2, 3, 4；h 的選擇並不統一，建議可參考樣本數，使得目標函數可兼顧平滑性及適度性。

決定Whittaker的修勻公式

- 目標函數M的極小化可透過Lagrange乘值法，或是矩陣微分運算，後者較為容易，將透過矩陣運算介紹修勻公式。

→若A為矩陣，$\underset{\sim}{x}$ 及 $\underset{\sim}{y}$ 為向量：

$$\frac{\partial \underset{\sim}{x}' A \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{x}} = 2A\underset{\sim}{x} \text{；} \quad \frac{\partial \underset{\sim}{x}' A \underset{\sim}{x}}{\partial A} = \underset{\sim}{x}\underset{\sim}{x}'$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{y}' \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{y} \text{；} \quad \frac{\partial \underset{\sim}{x}' \underset{\sim}{y}}{\partial \underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{y}$$

以矩陣表示目標函數

- 適度性函數可表為 $F=(\underset{\sim}{v}-\underset{\sim}{u})'W(\underset{\sim}{v}-\underset{\sim}{u})$ ，其中$\underset{\sim}{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ 及 $\underset{\sim}{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ 分別為修勻前死亡值及修勻後死亡率，矩陣W為加權矩陣，通常令其為對角矩陣，

$$W=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & w_n \end{bmatrix}=diag(w_1,w_2,\ldots,w_n)$$

- 平滑性函數也可由矩陣表示，差分可表為

$$\Delta \underset{\sim}{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_{n-1})' = (v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_n - v_{n-1})'$$

令 D_n 為$(n-1)\times n$的矩陣，滿足

$$D_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)\times n}$$

因此

$$\Delta^z \underset{\sim}{v} = (\Delta^z v_1, \ldots, \Delta^z v_{n-z})' = D_{n-z+1} \cdots D_{n-1} D_n \underset{\sim}{v} \equiv k_z \underset{\sim}{v}$$

- 因此平滑性函數可表為

$$S = (\Delta^{z}\underset{\sim}{v})'(\Delta^{z}\underset{\sim}{v}) = (k_z\underset{\sim}{v})'(k_z\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}'(k_z{}'k_z)\underset{\sim}{v}$$

其中 $k_z = D_{n-z+1}\cdots D_{n-1}D_n$ 為$(n-z)\times n$的矩陣

→結合前兩頁的結果，目標函數可記為

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \mathrm{F} + hS \\ &= (\underset{\sim}{v}-\underset{\sim}{u})'W(\underset{\sim}{v}-\underset{\sim}{u}) + h\,\underset{\sim}{v}'(k_z{}'k_z)\underset{\sim}{v} \end{aligned}$$

- 對目標函數微分可得

$$\frac{\partial M}{\partial \underset{\sim}{v}} = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}}[(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v})'W(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}) + h\underset{\sim}{v}'(k_z^{'} k_z)\underset{\sim}{v}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{v}}[\underset{\sim}{u}'W\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}'W\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u}'W\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v}'W\underset{\sim}{u} + h\underset{\sim}{v}'(k_z^{'} k_z)\underset{\sim}{v}]$$

$$= 2W\underset{\sim}{v} - 2W\underset{\sim}{u} + 2h(k_z^{'} k_z)\underset{\sim}{v} \equiv 0$$

可進一步簡化為 $\mathrm{W}\underset{\sim}{v} + hk_z{}'k_z\underset{\sim}{v} = W\underset{\sim}{u}$

即修勻值滿足

$$\underset{\sim}{v} = (W + hk_z^{'} k_z)^{-1} W\underset{\sim}{u} \qquad (1)$$

- 將(1)式展開，修勻值同樣可表為原始觀察值的線性組合

$$v_x = \sum_r a_{r,x} u_{x+r}$$

此與MWA類似，但係數隨 r 及 x 改變。

範例一、以 $z = 2$ 及 $n = 10$ 為例，加權數 $w_i = 1$ 的假設下，列出在 $h = 0.1, 1, 10, 100$ 時，反矩陣 $(W + hk_z^{'}k_z)^{-1}$ 的數值：

(i) h =0.1

$$(W + hk_z^{'}k_z)^{-1} = \begin{pmatrix} 93 & 12 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 73 & 17 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 17 & 71 & 17 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 17 & 71 & 17 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 17 & 71 & 17 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 17 & 71 & 17 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 17 & 71 & 17 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 17 & 71 & 17 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 17 & 73 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 12 & 93 \end{pmatrix}$$

(ii) $h = 1$

$$(W + hk_z^{'}k_z)^{-1} = \begin{pmatrix} 77 & 29 & 4 & -4 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 41 & 24 & 9 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 24 & 40 & 25 & 9 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 9 & 25 & 40 & 24 & 9 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 9 & 24 & 39 & 24 & 9 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 9 & 24 & 39 & 24 & 9 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 9 & 24 & 40 & 25 & 9 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 9 & 25 & 40 & 24 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 9 & 24 & 41 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -4 & 4 & 29 & 77 \end{pmatrix}$$

(iii) $h = 10$

$$(W + hk_z^{'}k_z)^{-1} = \begin{pmatrix} 55 & 34 & 17 & 6 & 0 & -3 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 34 & 29 & 21 & 13 & 6 & 2 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 17 & 21 & 23 & 19 & 13 & 8 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 13 & 19 & 22 & 19 & 14 & 8 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 13 & 19 & 22 & 19 & 14 & 8 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 8 & 14 & 19 & 22 & 19 & 13 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 8 & 14 & 19 & 22 & 19 & 13 & 6 \\ -3 & -1 & 1 & 4 & 8 & 13 & 19 & 23 & 21 & 17 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 6 & 13 & 21 & 29 & 34 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -3 & 0 & 6 & 17 & 34 & 55 \end{pmatrix}$$

(iv) $h = 100$

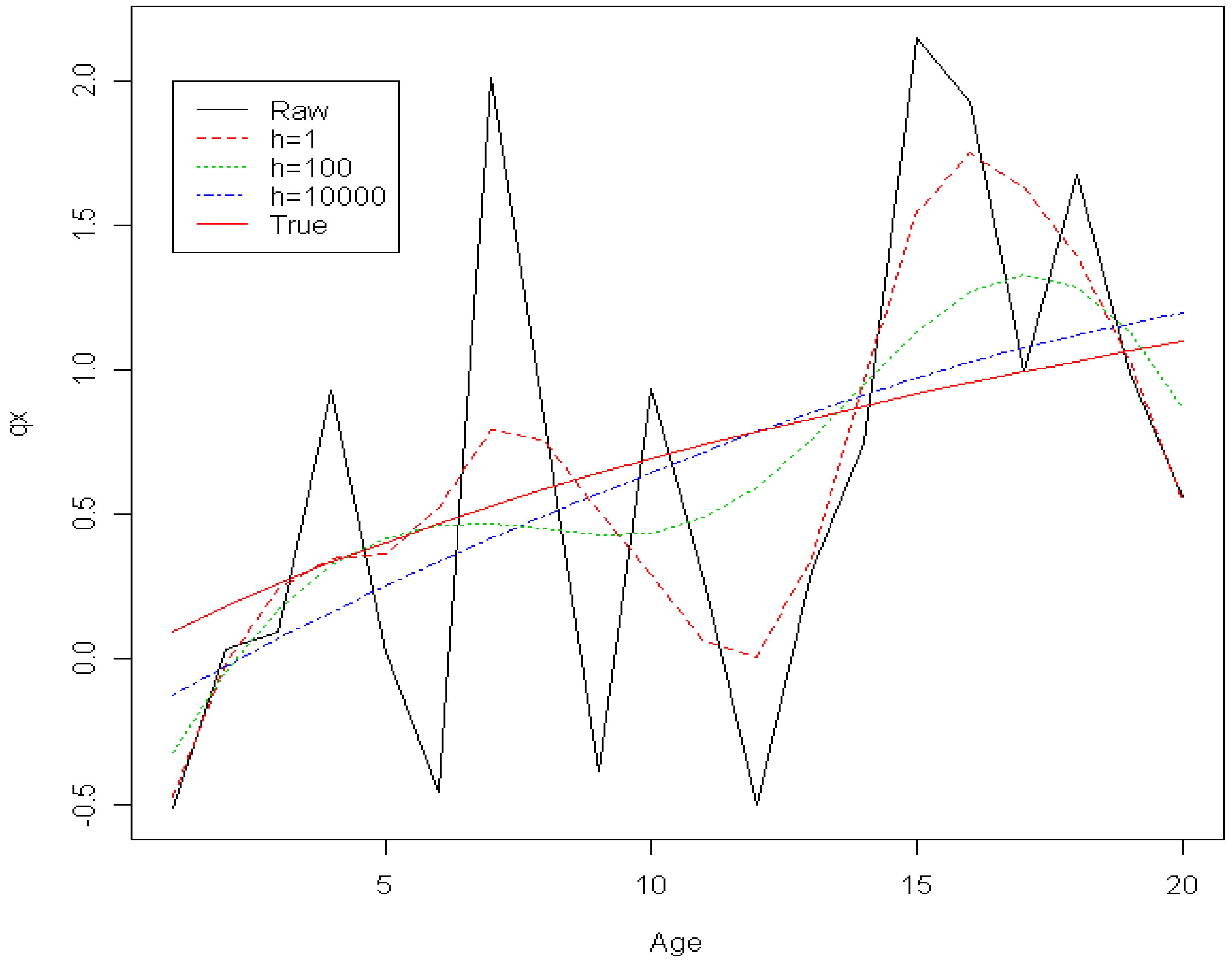
$$(W + hk_z^{'}k_z)^{-1} = \begin{pmatrix} 39 & 31 & 23 & 16 & 10 & 4 & 0 & -4 & -7 & -11 \\ 31 & 26 & 21 & 15 & 11 & 7 & 3 & -1 & -4 & -7 \\ 23 & 21 & 18 & 15 & 12 & 9 & 5 & 2 & -1 & -4 \\ 16 & 15 & 15 & 14 & 13 & 10 & 8 & 5 & 3 & 0 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 13 & 12 & 10 & 9 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 & 13 & 12 & 11 & 10 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 10 & 13 & 14 & 15 & 15 & 16 \\ -4 & -1 & 2 & 5 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 23 \\ -7 & -4 & -1 & 3 & 7 & 11 & 15 & 21 & 26 & 31 \\ -11 & -7 & -4 & 0 & 4 & 10 & 16 & 23 & 31 & 39 \end{pmatrix}$$

範例二、假設死亡率滿足 $t_x = ln(1+0.1x)$，誤差 e_x 服從標準常態分配 (e_x ~N(0,1))，年齡 $x = 1, 2, \ldots, 20$。假設 $z = 3$，考慮不同 h 值的結果。

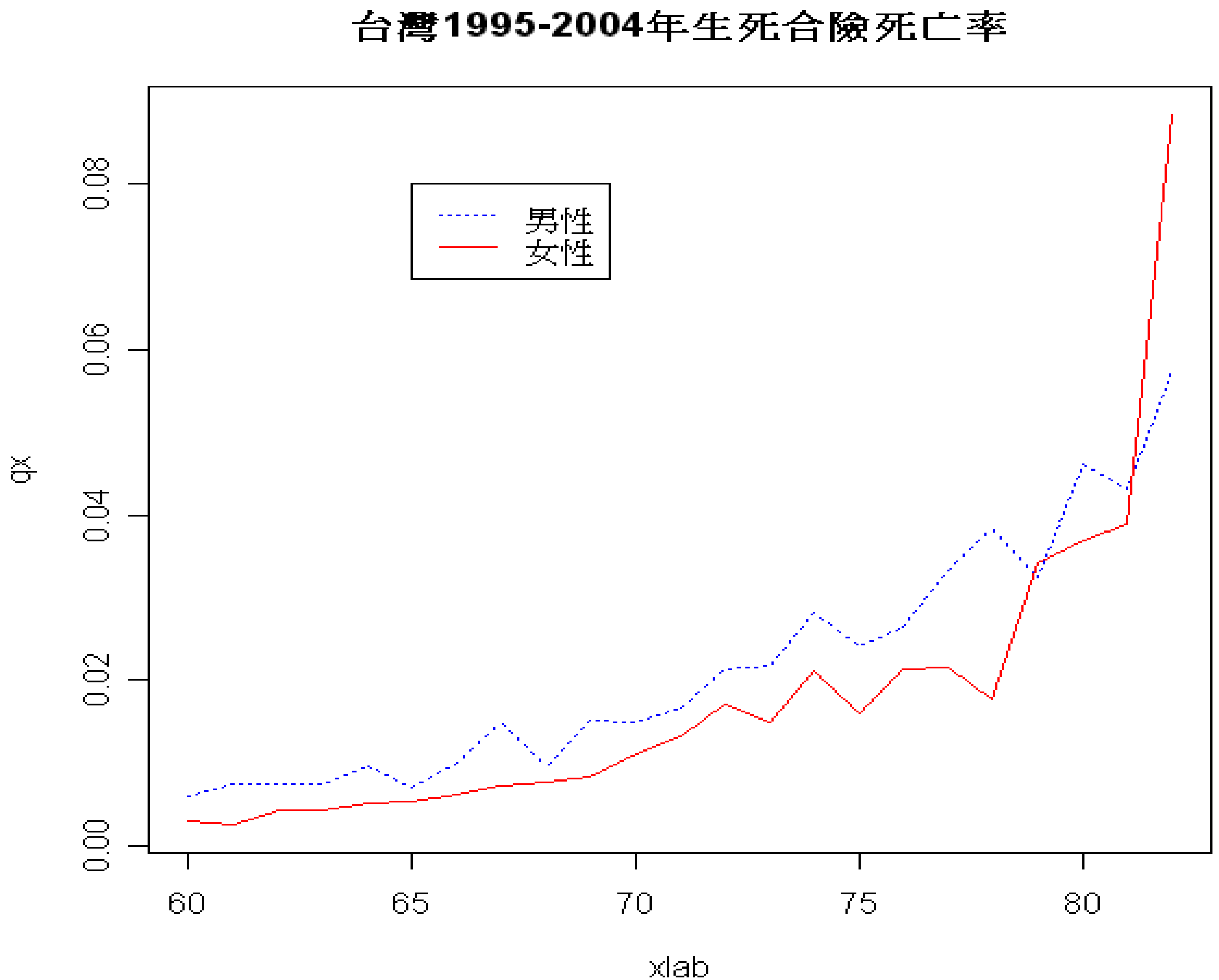
→當 h 值比較小時，修勻值與觀察值較為接近；當隨著 h 值增加，修勻值愈趨於平滑，各年齡間的死亡率差異也漸次縮小。

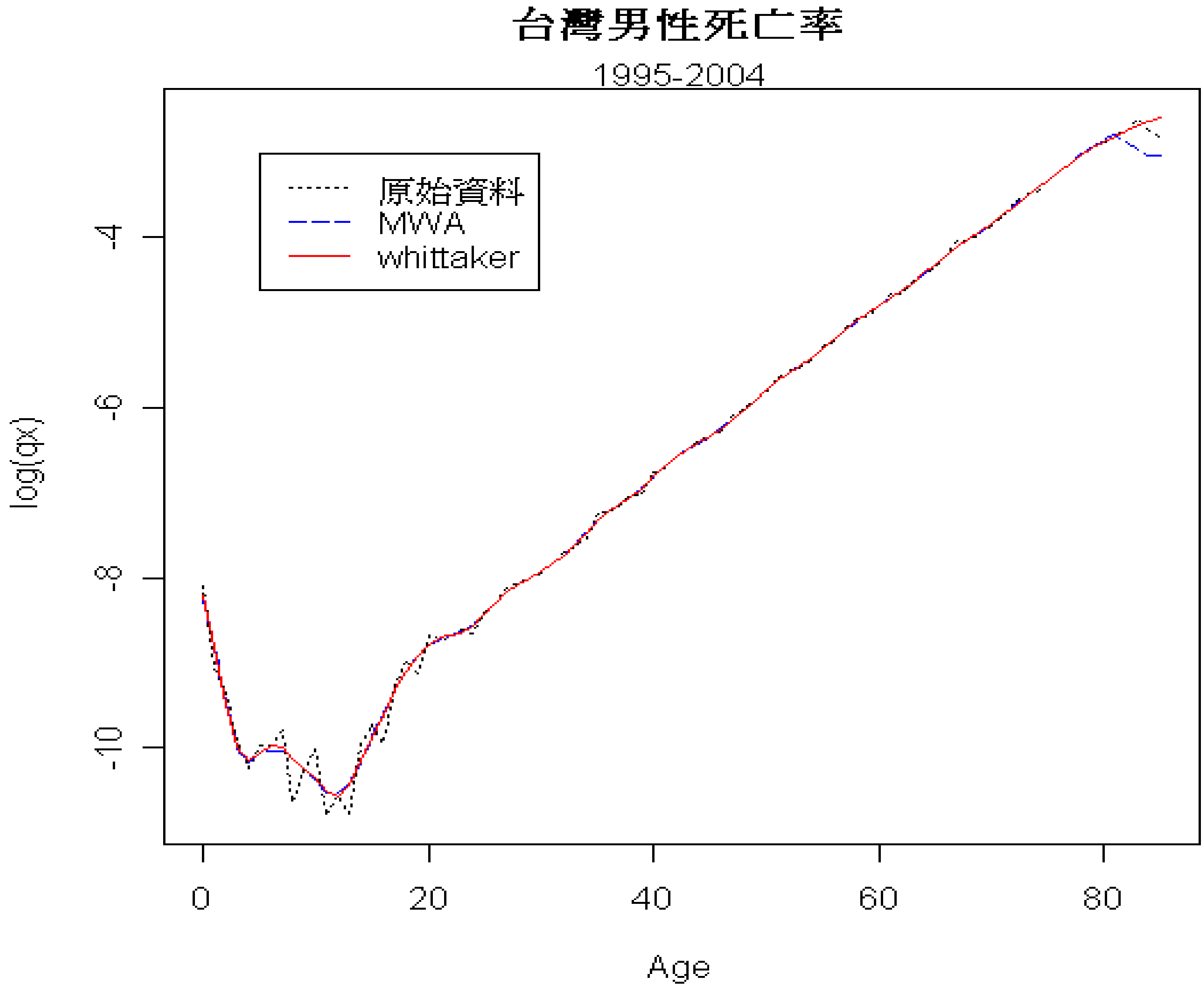
→雖然較大的 h 值產生較平滑的修勻值，但同時卻也喪失原始觀察值所蘊含的資訊，除非確定 t_x 為不大於 $z-1$ 次的多項式，否則 $h \to \infty$ 徒然浪費既有的原始值。

Example of Whittaker Graduation, qx=ln(1+0.1x), z=3

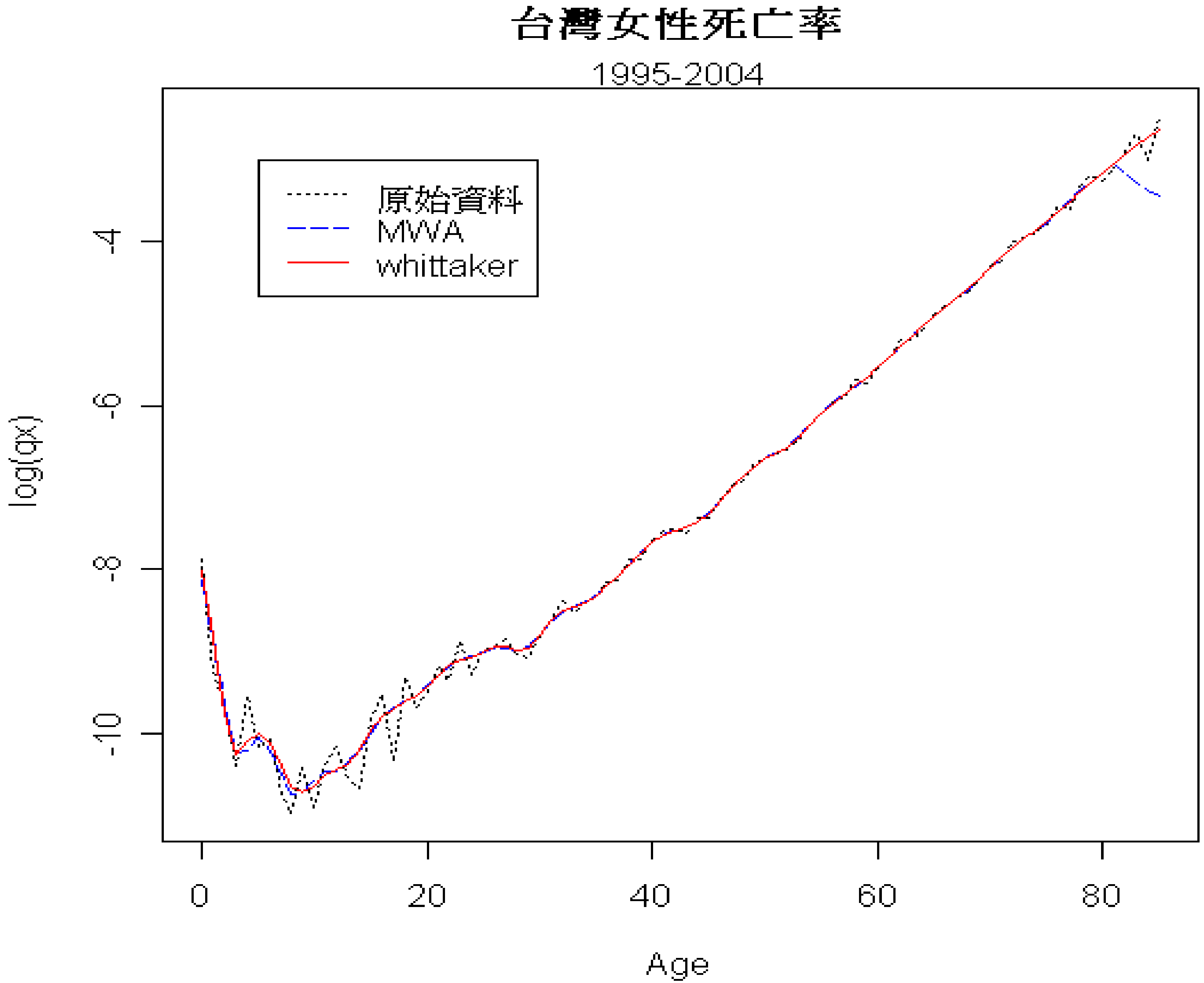


範例三：台灣1995-2004年生死合險

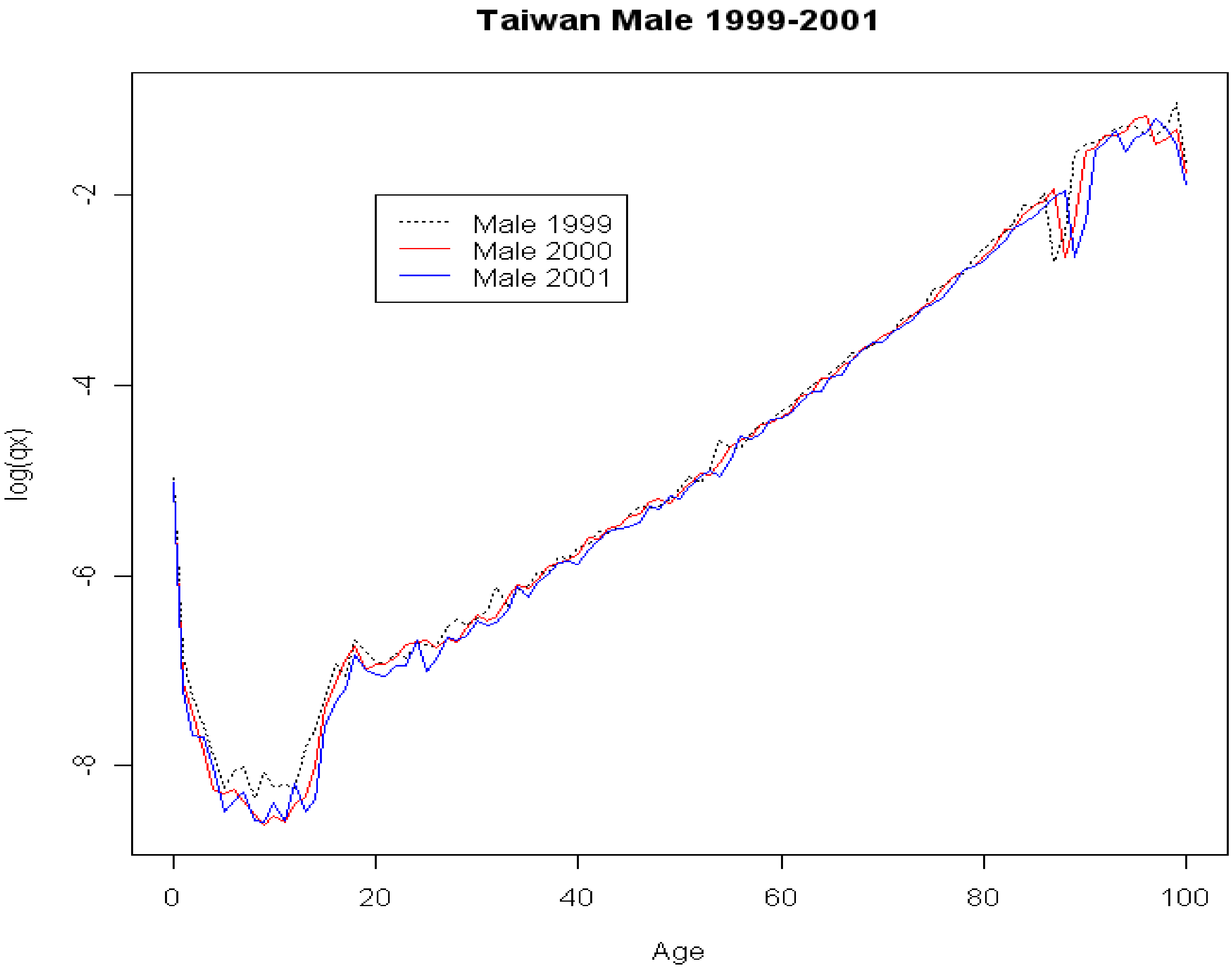


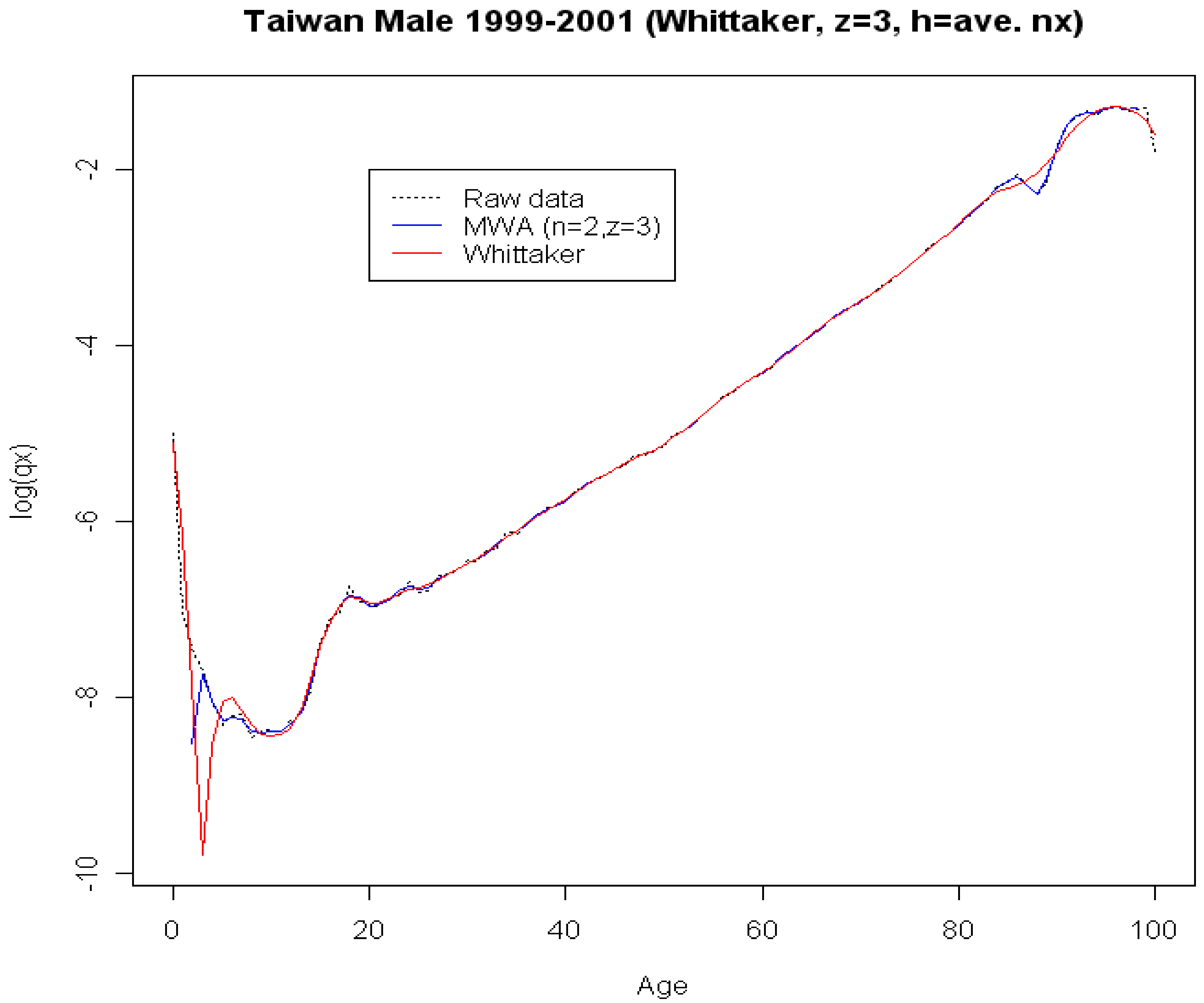


台灣男性死亡率
1995-2004
原始資料
MWA
whittaker
log(qx)
-4
-6
-8
-10
0
20
40
60
80
Age


台灣女性死亡率
1995-2004
原始資料
MWA
whittaker
log(qx)
-4
-6
-8
-10
0
20
40
60
80
Age

範例四：台灣1999-2001年男性生命表





Taiwan Male 1999-2001 (Whittaker, z=3, h=ave. nx)
Raw data
MWA (n=2,z=3)
Whittaker
log(qx)
Age
-2
-4
-6
-8
-10
0
20
40
60
80
100

- Whittaker修勻因為考量了樣本數，高齡死亡率比較不受離群值影響，在適當的 h 值下，也能得出平滑的死亡率曲線，比MWA的修勻值更平滑。

→Whittaker與MWA類似，也會有邊緣值的問題，雖然兩邊的死亡率的修勻係數考量的範圍較廣，但也有類似單邊修勻的問題，通常在幼齡的死亡率會不夠平滑，尤其在1至10歲間。

Whittaker修勻的變型

- 可將平滑性函數視為Whittaker修勻中的限制式，適當地調整 h 值可以使修勻值具有要求的特性。這種以平滑性函數作為過去經驗或是一般認知，與下一單元貝氏(Bayesian)頗為類似，相關想法以後再詳細介紹。

→以下介紹「數個平滑函數的合成」、「S的指數型」、「Lowrie變型」、「Schuette變型」

數個平滑函數的合成

- 可以在目標函數M中加入數個平滑函數，以達到不同「平滑性」的要求，例如：真實值不是整數次方的多項式，

$$M = \sum_{1}^{n} w_x (v_x - u_x)^2 + h_1 \sum_{1}^{n-1} (\Delta v_x)^2 + \cdots + h_z \sum_{1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2$$

可依舊保有矩陣求解的優點。

$$(W + h_1 k_1' k_1 + \cdots + h_z k_z' k_z) \underset{\sim}{v} = W \underset{\sim}{u}$$

S的指數型

- 平滑函數也可以多項式函數的型態表示，常見的高齡死亡率模型 Makeham假設即是其中一種，要求死力滿足 $t_x = A + BC^x$, 其中 $A, B > 0, C > 1$，考慮 t_x 的差分可得

$$\Delta t_x = BC^{x+1} - BC^x = BC^x(C-1)$$

再取自然對數，

$$\ln(\Delta t_x) = \ln[B(C-1)] + x \ln C$$

$$\Rightarrow \Delta^2 \ln(\Delta t_x) = 0 \quad \text{或是定義} \quad S = \sum_{x=1}^{n-2} (\Delta^2 \ln \Delta v_x)^2$$

- 上述推導需要所有$v_x > 0$，而且無法以矩陣運算求解。另一種推導藉由

$$\Delta^2 t_x = BC^x (C-1)^2 = (C-1)\Delta t_x$$

令 $r = C - 1$，則 $\Delta^2 t_x - r\Delta t_x = 0$，因此可令

$$S = \sum_{x=1}^{n-2} (\Delta^2 v_x - r\Delta v_x)^2$$

上式$\Delta^2 v_x - r\Delta v_x$是$v_x$的線性函數，矩陣表示法仍舊適用，但可能需要遞迴(Iteration)求取最合適的 r 值。

Lowrie變型

- Lowrie(1982)提出幾個適度性函數的合成：

$$M=(1-h_1)\sum_{1}^{n} w_x(v_x-u_x)^2+h_1\sum_{1}^{n} w_x^s(v_x-s_x)^2+h_2\sum_{1}^{n-z}(\Delta^z v_x-r\Delta^{z-1}v_x)^2$$

第二項可視為以標準生命表(Standard Table)為參考值的適度性函數，s_x為對應於 x 歲的標準表數值，第三項為Makeham分配的平滑函數，可考慮其他類型的函數。

Schuette變型

- 目標函數的適度性、平滑性函數採平方和，其原因是計算上的方便，在求最小化時較為方便。採用絕對值的計算亦可行，求解時較為繁瑣，但具有統計上優良的性質(如：穩健Robust、不變性Invariant)，在某些方面更佔優勢。可定義：

$$M = \sum_{1}^{n} w_x \,|\, v_x - u_x \,| + h \sum_{1}^{n-z} |\, \Delta^z v_x \,|$$

- 與迴歸分析類似，以平方和定義的目標函數容易受到離群值(Outlier)的影響，Schuette變型則較為穩健。然而因為計算不易，實用上並不常見。
- Schuette變型的修勻結果較為不同：

→至少有 z 個 v_x等於 u_x，若剛好有z 個 v_x等於 u_x，則v_x為z–1次多項式。

→若$h \le h_L$則所有年齡皆滿足$v_x = u_x$，若$h \ge h_L$則v_x為z–1次多項式。

→對任一v_x皆可找到使v_x維持不變的區間。

Whittaker的使用建議

- Whittaker同時考量適度性與平滑性，慎選權數 h 可獲得不錯的修勻效果，因為矩陣計算相對容易，實證上是不錯的選擇。

→加權矩陣W可採用各年齡樣本數。

→嘗試幾種不同的權數 h ，比較判斷較佳的選擇，或可定為平均樣本數。

→視情況需要，可改變適度性及平滑性的函數型態。