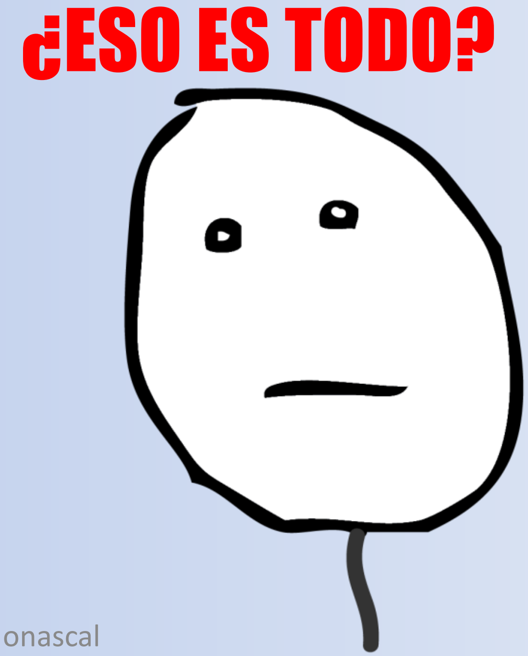
TRADUCTORES E INTERPRETADORES

Clase 6: Propiedades de Clausura y Lema de Bombeo

Profs. Carlos Pérez y Ricardo Monascal

Agenda

- Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares.
- Lema de Bombeo.



Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Recordemos como se definen los Lenguajes Regulares.
  - Ø es un lenguaje regular.
  - Para todo $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$:
    $\{a\}$ es un lenguaje regular.
  - Si L y S son lenguajes regulares, entonces los siguientes son lenguajes regulares:

$$L \bigcup S$$

$$L \cdot S$$

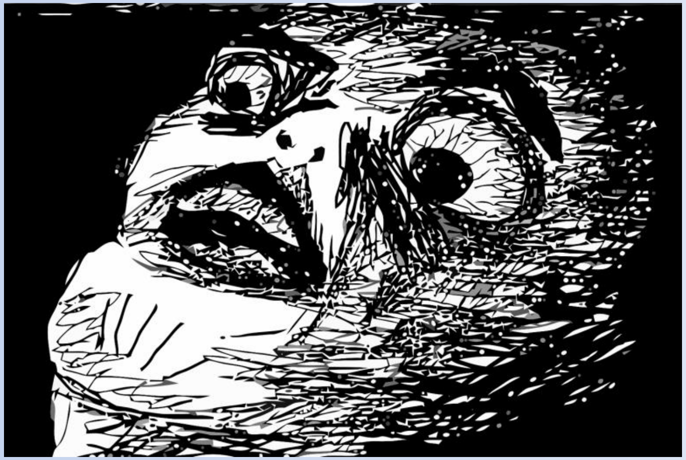
$$L^*$$

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- ¿Estos serán los únicos operadores bajo los cuales la clase de los Lenguajes Regulares es cerrada?

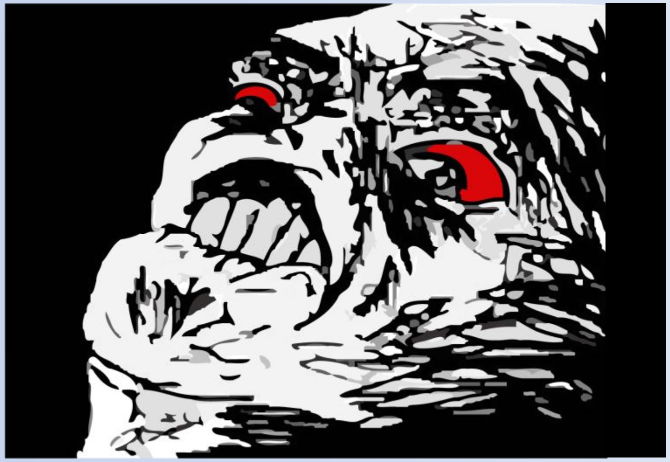
Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- ¿Estos serán los únicos operadores bajo los cuales la clase de los Lenguajes Regulares es cerrada?
  - ¿Qué tal el complemento?



Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- ¿Estos serán los únicos operadores bajo los cuales la clase de los Lenguajes Regulares es cerrada?
  - ¿Qué tal el complemento?
  - ¿Qué tal la intersección?



Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- ¿Estos serán los únicos operadores bajo los cuales la clase de los Lenguajes Regulares es cerrada?
  - ¿Qué tal el complemento?
  - ¿Qué tal la intersección?
  - ¿Y qué otros se les ocurren?

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Demostremos que el complemento L^c, de un Lenguaje Regular L, es Regular.
  - Sea L un lenguaje regular…

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Demostremos que el complemento L^c, de un Lenguaje Regular L, es Regular.
  - Sea L un lenguaje regular…
  - … y $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, tal que $\mathcal{L}(M) = L$.

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Demostremos que el complemento L^c, de un Lenguaje Regular L, es Regular.
  - Sea L un lenguaje regular…
  - … y $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, tal que $\mathcal{L}(M) = L$.
- Construimos $M_c = (\Sigma, Q, \delta, q_0, Q - F)$

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Demostremos que el complemento L^c, de un Lenguaje Regular L, es Regular.
  - Sea L un lenguaje regular…
  - … y $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, tal que $\mathcal{L}(M) = L$.
- Construimos $M_c = (\Sigma, Q, \delta, q_0, Q - F)$
- Ahora, queda demostrar que $\mathcal{L}(M_c) = L^c$

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Demostremos que la intersección $A \cap B$, de dos Lenguajes Regulares A y B, es Regular..

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Demostremos que la intersección $A \cap B$, de dos Lenguajes Regulares A y B, es Regular.
- Podríamos construir un autómata que lo reconozca, dados los autómatas de los Lenguajes Regulares involucrados. ¿Cómo?

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

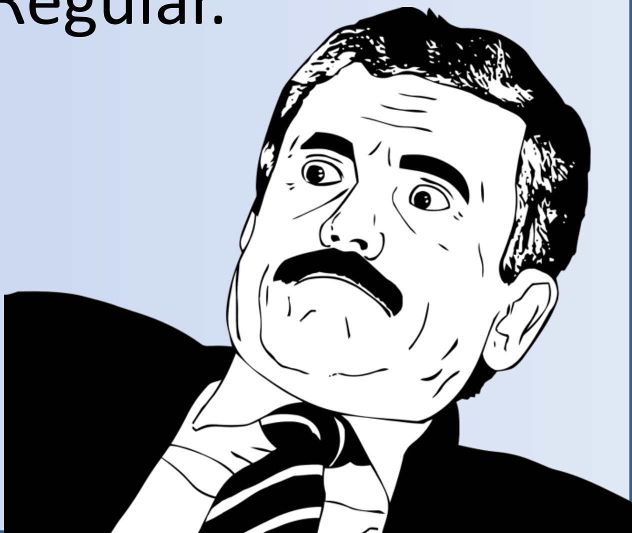
- Demostremos que la intersección $A \cap B$, de dos Lenguajes Regulares A y B, es Regular.
- Podríamos construir un autómata que lo reconozca, dados los autómatas de los Lenguajes Regulares involucrados. ¿Cómo?
- Pero hay una manera mas directa.

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Demostremos que la intersección $A \cap B$, de dos Lenguajes Regulares A y B, es Regular.
- Podríamos construir un autómata que lo reconozca, dados los autómatas de los Lenguajes Regulares involucrados. ¿Cómo?
- Pero hay una manera mas directa.
  - $A \bigcap B = (A^c \bigcup B^c)^c$
  - Tanto la unión como el complemento son cerrados.

Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Ejercicio:
  - Sea $Pre(L)$ el conjunto de todos los prefijos de las frases en L.
  - $Pre(L) = \{w \mid (\exists x : x \in \Sigma^* : wx \in L)\}$
  - Demuestre que $Pre(L)$ es cerrado, es decir, que si L es Regular, entonces $Pre(L)$ es Regular.



Propiedades de Clausura sobre Lenguajes Regulares

- Ejercicio:
  - Sea $Pre(L)$ el conjunto de todos los prefijos de las frases en L.
  - $Pre(L) = \{w \mid (\exists x : x \in \Sigma^* : wx \in L)\}$
  - Demuestre que $Pre(L)$ es cerrado, es decir, que si L es Regular, entonces $Pre(L)$ es Regular.
  - ¿Habrá alguna Expresión Regular genérica que represente a $Pre(L)$.

Lema de Bombeo.

- Podemos saber si un Lenguaje es Regular, si podemos construirlo a partir de operaciones cerradas sobre los mismos.

Lema de Bombeo.

- Podemos saber si un Lenguaje es Regular, si podemos construirlo a partir de operaciones cerradas sobre los mismos.
- Mas nuevamente, eso no me permite demostrar que un Lenguaje <u>NO</u> sea Regular.

Lema de Bombeo.

- Podemos saber si un Lenguaje es Regular, si podemos construirlo a partir de operaciones cerradas sobre los mismos.
- Mas nuevamente, eso no me permite demostrar que un Lenguaje <u>NO</u> sea Regular.
- A estos efectos, introduciremos una poderosa herramienta conocida como:

¡EL LEMA DE BOMBEO!

Lema de Bombeo.

- Si L es un Lenguaje Regular, entonces:

$$
\begin{array}{l}
(\exists p : p > 1 : \\
\quad (\forall w : w \in L \wedge |w| \geq p : \\
\quad\quad (\exists x, y, z : x, y, z \in \Sigma^{*} : \\
\quad\quad\quad w = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge \\
\quad\quad\quad\quad (\forall i : i \geq 0 : xy^{i}z \in L))))
\end{array}
$$

Lema de Bombeo.

- ¿Qué quiere decir esto?

$$\boxed{(\exists p : p > 1 :}$$
$$(\forall w : w \in L \wedge |w| \geq p :$$
$$(\exists x, y, z : x, y, z \in \Sigma^* :$$
$$w = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge$$
$$(\forall i : i \geq 0 : xy^i z \in L))))$$

  - Debe existir alguna longitud *p*, mayor que 1.

Lema de Bombeo.

- ¿Qué quiere decir esto?

$$\boxed{(\exists p : p > 1 :}$$
$$\boxed{(\forall w : w \in L \wedge |w| \geq p :}$$
$$(\exists x, y, z : x, y, z \in \Sigma^* :$$
$$w = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge$$
$$(\forall i : i \geq 0 : xy^i z \in L))))$$

  - Debe existir alguna longitud *p*, mayor que 1.
  - Tal que toda frase de longitud mayor en *L*.

Lema de Bombeo.

- ¿Qué quiere decir esto?

$$
\begin{aligned}
&\boxed{(\exists p : p > 1 :}\\
&\quad \boxed{(\forall w : w \in L \wedge |w| \geq p :}\\
&\qquad \boxed{(\exists x, y, z : x, y, z \in \Sigma^{*} :}\\
&\qquad\quad \boxed{w = xyz} \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p \wedge\\
&\qquad\qquad (\forall i : i \geq 0 : xy^{i}z \in L))))
\end{aligned}
$$

  - Debe existir alguna longitud *p*, mayor que 1.
  - Tal que toda frase de longitud mayor en *L*.
  - Se puede separar en tres subfrases.

Lema de Bombeo.

- ¿Qué quiere decir esto?

$$
\begin{aligned}
&\boxed{(\exists p : p > 1 :}\\
&\quad\boxed{(\forall w : w \in L \wedge |w| \geq p :}\\
&\qquad\boxed{(\exists x, y, z : x, y, z \in \Sigma^{*} :}\\
&\qquad\quad\boxed{w = xyz} \wedge \boxed{|y| \geq 1} \wedge |xy| \leq p \wedge\\
&\qquad\qquad (\forall i : i \geq 0 : xy^{i}z \in L))))
\end{aligned}
$$

  - Tal que toda frase de longitud mayor en L.
  - Se puede separar en tres subfrases.
  - La frase del medio no debe ser vacía.

Lema de Bombeo.

- ¿Qué quiere decir esto?

$$\boxed{(\exists p : p > 1 :}$$
$$\boxed{(\forall w : w \in L \wedge |w| \geq p :}$$
$$\boxed{(\exists x, y, z : x, y, z \in \Sigma^* :}$$
$$\boxed{w = xyz} \wedge \boxed{|y| \geq 1} \wedge \boxed{|xy| \leq p} \wedge$$
$$(\forall i : i \geq 0 : xy^i z \in L))))$$

  - Se puede separar en tres subfrases.
  - La frase del medio no debe ser vacía.
  - Las frases inicial y del medio, concatenadas, no deben ser de longitud mayor que p.

Lema de Bombeo.

- ¿Qué quiere decir esto?

$$\boxed{(\exists p : p > 1 :}$$
$$\boxed{(\forall w : w \in L \wedge |w| \geq p :}$$
$$\boxed{(\exists x, y, z : x, y, z \in \Sigma^* :}$$
$$\boxed{w = xyz} \wedge \boxed{|y| \geq 1} \wedge \boxed{|xy| \leq p} \wedge$$
$$\boxed{(\forall i : i \geq 0 : xy^i z \in L)}))$$

– La frase del medio puede repetirse indefinidamente y la frase resultante sigue perteneciendo a L.

Lema de Bombeo.

- En total:
  - Debe existir alguna longitud p, mayor que 1.
  - Tal que toda frase de longitud mayor en L.
  - Se puede separar en tres subfrases.
  - La frase del medio no debe ser vacía.
  - Las frases inicial y del medio, concatenadas, no deben ser de longitud mayor que p.
  - La frase del medio puede repetirse indefinidamente y la frase resultante sigue perteneciendo a L.

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$?

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$?
    - Intuitivamente, sabemos que no.
    - ¿Pero como lo demostramos?

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$?
    - Intuitivamente, sabemos que no.
    - ¿Pero como lo demostramos?

Sea una frase de la forma: $a^p b^p$, divido de la siguiente forma:

$$\underbrace{a^k}_{xy}\underbrace{a^{p-k} b^p}_{z} \quad con \;\; 1 \leq k \leq p$$

Lema de Bombeo.

Sea una frase de la forma: $a^p b^p$, divido de la siguiente forma:

$$\underbrace{a^k}_{xy}\underbrace{a^{p-k}b^p}_{z} \quad con \;\; 1 \le k \le p$$

– Notemos lo siguiente:

$$\left|xy^i\right| = k + (i-1)\left|y\right|$$

Lema de Bombeo.

Sea una frase de la forma: $a^p b^p$, divido de la siguiente forma:

$$\underbrace{a^k}_{xy}\underbrace{a^{p-k}b^p}_{z} \quad con\ 1 \leq k \leq p$$

– Notemos lo siguiente:

$$\left|xy^i\right| = k + (i-1)\left|y\right| \qquad \left|x\right| = k - \left|y\right|$$

Lema de Bombeo.

Sea una frase de la forma: $a^p b^p$, divido de la siguiente forma:

$$\underbrace{a^k}_{xy}\underbrace{a^{p-k}b^p}_{z} \quad con \;\; 1 \leq k \leq p$$

– Notemos lo siguiente:

$$\left|xy^i\right| = k + (i-1)\left|y\right| \qquad\qquad \left|x\right| = k - \left|y\right|$$

$$xy^0z = xz = a^{k-|y|}a^{p-k}b^p$$

Lema de Bombeo.

$$xy^0z = xz = a^{k-|y|}a^{p-k}b^p$$

$$\equiv$$

$$xy^0z = xz = a^{p-|y|}b^p$$

– Como $|y| \geq 1$, entonces $p - |y| \leq p$

Lema de Bombeo.

$$xy^0z = xz = a^{k-|y|}a^{p-k}b^p$$

$$\equiv$$

$$xy^0z = xz = a^{p-|y|}b^p$$

– Como $|y| \geq 1$, entonces $p - |y| \leq p$

– Por lo tanto, la cantidad de *a*'s no es igual a la de *b*'s y la nueva frase no pertenece a L.

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$?

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$?

$$|xyz| = p^2$$

$$|xy^2z| = |xyz| + |y|$$

$$|xy^2z| = p^2 + |y|$$

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$?

$$p^2 + |y| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$?

$$p^2 + |y| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

$$p^2 + |y| > p^2$$

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$?

$$p^2 + |y| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

$$p^2 + |y| > p^2$$

$$p^2 < p^2 + |y| < (p+1)^2$$

Lema de Bombeo.

- Ejemplo:
  - ¿Es Regular el Lenguaje $L = \{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$?

$$p^2 + |y| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

$$p^2 + |y| > p^2$$

$$p^2 < p^2 + |y| < (p+1)^2$$

¡No puede ser un cuadrado perfecto!

… ¿el fin?

- Ya con esto culminamos nuestro tratamiento de los Lenguajes Regulares…

… ¿el fin?

- Ya con esto culminamos nuestro tratamiento de los Lenguajes Regulares…
- ¡Y eso es lo que va a ir para el examen!

… ¿el fin?

- Ya con esto culminamos nuestro tratamiento de los Lenguajes Regulares…
- Pero recuerden que hay lenguajes más poderosos que los Lenguajes Regulares.

… ¿el fin?

- Ya con esto culminamos nuestro tratamiento de los Lenguajes Regulares…
- Pero recuerden que hay lenguajes más poderosos que los Lenguajes Regulares.
- Comenzaremos con éstos la próxima clase.