

第二十八章 存贮论

存贮论（或称为库存论）是定量方法和技术最早研究的领域之一，是研究存贮系统的性质、运行规律以及如何寻找最优存贮策略的一门学科，是运筹学的重要分支。存贮论的数学模型一般分成两类：一类是确定性模型，它不包含任何随机因素，另一类是带有随机因素的随机存贮模型。

§1 存贮模型中的基本概念

所谓存贮实质上是将供应与需求两个环节以存贮中心联结起来，起到协调与缓和供需之间矛盾的作用。存贮模型的基本形式如图 1 所示。

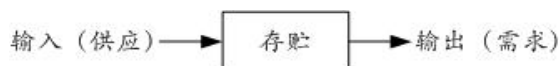


图 1 存贮问题基本模型

1. 存贮问题的基本要素

- (1) **需求率**：单位时间内对某种物品的需求量，用 D 表示。
- (2) **订货批量**：一次订货中，包含某种货物的数量，用 Q 表示。
- (3) **订货间隔期**：两次订货之间的时间间隔，用 T 表示。

2. 存贮模型的基本费用

(1) **订货费**：每组织一次生产、订货或采购的费用，通常认为与定购数量无关，记为 C_D 。

(2) **存贮费**：所有用于存贮的全部费用，通常与存贮物品的多少和时间长短有关。单位存贮费记为 C_p 。

(3) **短缺损失费**：由于物品短缺所产生的一切损失费用，通常与损失物品的多少和短缺时间的长短有关，记为 C_s 。

3. 存贮策略

所谓一个存贮策略，是指决定什么情况下对存贮进行补充，以及补充数量的多少。下面是一些比较常见的存贮策略。

(1) **t 循环策略**：不论实际的存贮状态如何，总是每隔一个固定的时间 t ，补充一个固定的存贮量 Q 。

(2) **(t, S) 策略**：每隔一个固定的时间 t 补充一次，补充数量以补足一个固定的最大存贮量 S 为准。因此，每次补充的数量是不固定的，要视实际存贮量而定。当存贮（余额）为 I 时，补充数量为 $Q = S - I$ 。

(3) **(s, S) 策略**：当存贮（余额）为 I ，若 $I > s$ ，则不对存贮进行补充；若 $I \leq s$ ，则对存贮进行补充，补充数量 $Q = S - I$ 。补充后达到最大存贮量 S 。 s 称为**订货点**（或保险存贮量、安全存贮量、警戒点等）。在很多情况下，实际存贮量需要通过盘点才能得知。若每隔一个固定的时间 t 盘点一次，得知当时存贮 I ，然后根据 I 是否超过订货点 s ，决定是否订货、订货多少，这样的策略称为 (t, s, S) 策略。

§2 无约束的确定型存贮模型

我们首先考察经济订购批量存贮模型。

所谓经济订购批量存贮模型（economic ordering quantity, EOQ）是指不允许缺货、

货物生产（或补充）的时间很短（通常近似为 0）的模型。

2.1 模型一：不允许缺货，补充时间极短—基本的经济订购批量存贮模型
基本的经济订购批量存贮模型有以下假设：

- (1) 短缺费为无穷，即 $C_s = \infty$ ；
- (2) 当存贮降到零后，可以立即得到补充；
- (3) 需求是连续的、均匀的，即需求速度（单位时间的需求量） D 为常数；
- (4) 每次的订货量不变，订购费不变；
- (5) 单位存贮费为 C_p 。

由上述假设，存贮量的变化情况如图 2 所示。

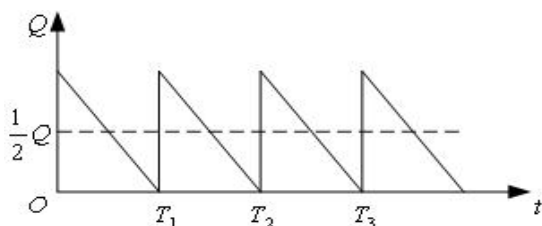


图 2 EOQ 模型的存贮量曲线

在每一个周期（ T ）内，最大的存贮量为 Q ，最小的存贮量为 0，且需求是连续均匀的，因此在一个周期内，其平均存贮量为 $\frac{1}{2}Q$ ，存贮费用为 $\frac{1}{2}C_p Q$ 。

一次订货费为 C_D ，那么在一个周期（ T ）内的平均订货费为 C_D/T 。由于在最初时刻，订货量为 Q ，在 T 时刻，存贮量为 0，而且单位时间的需求量为 D 且连续均匀变化，因此，得到订货量 Q 、需求量 D 和订货周期 T 之间的关系 $T = \frac{Q}{D}$ 。

由此计算出一个单位时间内的平均总费用

$$C = \frac{1}{2}C_p Q + \frac{C_D D}{Q} \quad (1)$$

对式（1）求导数，并令其为 0，即

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{1}{2}C_p - \frac{C_D D}{Q^2} = 0 \quad (2)$$

得到费用最小的订货量

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_D D}{C_p}} \quad (3)$$

最佳订货周期

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2C_D}{C_p D}} \quad (4)$$

最小费用

$$C^* = \frac{1}{2}C_p Q^* + \frac{C_D D}{Q^*} = \sqrt{2C_D C_p D} \quad (5)$$

公式(3)称为经济订购批量(economic ordering quantity, 简写EOQ)公式, 也称为经济批量(economic lot size)公式。

例1 某商品单位成本为5元, 每天保管费为成本的0.1%, 每次订购费为10元。已知对该商品的需求是100件/天, 不允许缺货。假设该商品的进货可以随时实现。问应怎样组织进货, 才能最经济。

解 根据题意, $C_p = 5 \times 0.1\% = 0.005$ (元/件·天), $C_D = 10$ 元, $D = 100$ 件/天。

由式(3)~(5), 有

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_D D}{C_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 100}{0.005}} = 632 \text{ (件)}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{632}{100} = 6.32 \text{ (天)}$$

$$C^* = \sqrt{2C_D C_p D} = 3.16 \text{ (元/天)}$$

所以, 应该每隔6.32天进货一次, 每次进货该商品632件, 能使总费用(存贮费和订购费之和)为最少, 平均约3.16元/天。

进一步研究, 全年的订货次数为

$$n = \frac{365}{6.32} = 57.75 \text{ (天)}$$

但 n 必须为正整数, 故还需要比较 $n=57$ 与 $n=58$ 时全年的费用。

编写如下LINGO程序:

```
model:
sets:
times/1 2/:n,Q,C;
endsets
data:
n=57 58;
enddata
C_D=10;
D=100*365;
C_P=0.005*365;
@for(times:n=D/Q;C=0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
end
```

求得全年组织58次订货费用少一点。

利用LINGO软件, 我们可以直接求出问题的整数解。

LINGO程序如下:

```
model:
sets:
times/1..100/:C,Q; !100不是必须的, 通常取一个适当大的数就可以了;
endsets
C_D=10;
D=100*365;
C_P=0.005*365;
@for(times(i):Q(i)=D/i;C(i)=0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
```

```

C_min=@min(times:C);
Q_best=@sum(times(i):Q(i)*(C(i) #eq# C_min));
!(C(i) #eq# C_min)返回的值为0或1;
N_best=D/Q_best;
end

```

求得一年组织 58 次订货，每次的订货量为 629.3 件，最优费用为 1154.25 元。

2.2 模型二：允许缺货，补充时间较长—经济生产批量存贮模型

模型假设条件：

- (1) 需求是连续的，即需求速度 D 为常数；
- (2) 补充需要一定时间。即一旦需要，生产可立刻开始，但生产需要一定周期。设生产是连续均匀的，即生产速度 P 为常数。同时，设 $P > D$ ；
- (3) 单位存贮费为 C_p ，单位缺货费为 C_s ，订购费为 C_D 。不考虑货物价值。

存贮状态图见图 3。

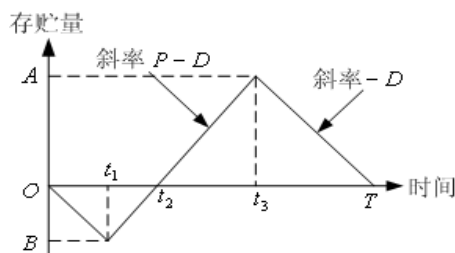


图 3 允许缺货且补充时间较长的存贮模型

$[0, T]$ 为一个存贮周期， t_1 时刻开始生产， t_3 时刻结束生产。

$[0, t_2]$ 时间内存贮为 0， t_1 时达到最大缺货量 B ， $[t_1, t_2]$ 时间内产量一方面以速度 D 满足需求，另一方面以速度 $P - D$ 补充 $[0, t_1]$ 时间内的缺货，至 t_2 时刻缺货补足。

$[t_2, t_3]$ 时间内产量一方面以速度 D 满足需求，另一方面以速度 $P - D$ 增加存贮。至 t_3 时刻达到最大存贮量 A ，并停止生产。

$[t_3, T]$ 时间内以存贮满足需求，存贮以速度 D 减少。至 T 时刻存贮降为零，进入下一个存贮周期。

下面，根据模型假设条件和存贮状态图，首先导出 $[0, T]$ 时间内的平均总费用（即费用函数），然后确定最优存贮策略。

从 $[0, t_1]$ 看，最大缺货量 $B = Dt_1$ ；从 $[t_1, t_2]$ 看，最大缺货量 $B = (P - D)(t_2 - t_1)$ 。故有 $Dt_1 = (P - D)(t_2 - t_1)$ ，从中解出：

$$t_1 = \frac{P - D}{P} t_2 \quad (6)$$

从 $[t_2, t_3]$ 看，最大存贮量 $A = (P - D)(t_3 - t_2)$ ；从 $[t_3, T]$ 看，最大存贮量 $A = D(T - t_3)$ 。故有 $(P - D)(t_3 - t_2) = D(T - t_3)$ ，从中解得

$$t_3 - t_2 = \frac{D}{P} (T - t_2) \quad (7)$$

易知，在 $[0, T]$ 时间内：存贮费为 $\frac{1}{2}C_p(P-D)(t_3-t_2)(T-t_2)$ ；缺货费为 $\frac{1}{2}C_sDt_1t_2$ ；订购费为 C_D 。

故 $[0, T]$ 时间内平均总费用为

$$C(T, t_2) = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2}C_p(P-D)(t_3-t_2)(T-t_2) + \frac{1}{2}C_sDt_1t_2 + C_D \right]$$

故将 (6) 和 (7) 代入，整理后得

$$C(T, t_2) = \frac{(P-D)D}{2P} \left[C_pT - 2C_pt_2 + (C_p + C_s)\frac{t_2^2}{T} \right] + \frac{C_D}{T} \quad (8)$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial C(T, t_2)}{\partial T} = 0 \\ \frac{\partial C(T, t_2)}{\partial t_2} = 0 \end{cases}$$

可得

$$T^* = \sqrt{\frac{2C_D(C_p + C_s)}{DC_pC_s(1-\frac{D}{P})}}$$

$$t_2^* = \frac{C_p}{C_p + C_s}T^*$$

容易证明，此时的费用 $C(T^*, t_2^*)$ 是费用函数 $C(T, t_2)$ 的最小值。

因此，模型的最优存贮策略各参数值为：

$$\text{最优存贮周期 } T^* = \sqrt{\frac{2C_D(C_p + C_s)}{DC_pC_s(1-\frac{D}{P})}} \quad (9)$$

$$\text{经济生产批量 } Q^* = DT^* = \sqrt{\frac{2C_DD(C_p + C_s)}{C_pC_s(1-\frac{D}{P})}} \quad (10)$$

$$\text{缺货补足时间 } t_2^* = \frac{C_p}{C_p + C_s}T^* = \sqrt{\frac{2C_DC_p}{DC_s(C_p + C_s)(1-\frac{D}{P})}} \quad (11)$$

$$\text{开始生产时间 } t_1^* = \frac{P-D}{P}t_2^* = \sqrt{\frac{2C_DC_p(1-\frac{D}{P})}{DC_s(C_p + C_s)}} \quad (12)$$

$$\text{结束生产时间 } t_3^* = \frac{D}{P}T^* + (1-\frac{D}{P})t_2^* \quad (13)$$

$$\text{最大存贮量 } A^* = D(T^* - t_3^*) \quad (14)$$

$$\text{最大缺货量 } B^* = Dt_1^* \quad (15)$$

$$\text{平均总费用 } C^* = \frac{2C_D}{T^*} \quad (16)$$

例 2 有一个生产和销售图书设备的公司，经营一种图书专用设备，基于以往的销售记录和今后市场预测。估计今后一年的需求量为 4900 个，由于占用资金的利息以及存贮库房和其它人力物力的费用，存贮一个书架一年要花费 1000 元。这种书架是该公司自己生产的，每年的生产量 9800 个，而组织一次生产要花费设备调试等生产准备费 500 元。如果允许缺货，缺货费为每年每件 2000 元。该公司为了把成本降到最低，应如何组织生产？要求出其生产、存贮周期，每个周期的最优生产量，以及最少的年总费用。

解 根据题意知， $D = 4900$ ， $C_P = 1000$ ， $P = 9800$ ， $C_D = 500$ ， $C_S = 2000$ ，利用式 (9) ~ (13)，(16) 求相关的指标。

编写的 LINGO 程序如下：

```
model:
D=4900;
C_P=1000;
P=9800;
C_D=500;
C_S=2000;
T=(2*C_D*(C_P+C_S)/(D*C_P*C_S*(1-D/P)))^0.5; !单位为年;
TT=T*365; !单位为天;
Q=D*T;
T_S=C_P*TT/(C_P+C_S); !求缺货时间;
T_P=D*TT/P; !求生产周期;
C=2*C_D/T; !求年总费用;
end
```

求得每个周期为 9 天，其中 9 天中有 4.5 天在生产，每次的生产量为 121 件，而且缺货的时间有 3 天。总的费用（包括存贮费、订货费和缺货费）为 40414.52 元。

可以把模型一看作模型二的特殊情况。在模型二中，取消允许缺货和补充需要一定时间的条件，即 $C_S \rightarrow \infty$ ， $P \rightarrow \infty$ ，则模型二就是模型一。事实上，如将 $C_S \rightarrow \infty$ 和 $P \rightarrow \infty$ 代入模型二的最优存贮策略各参数公式，就可得到模型一的最优存贮策略。只是必须注意，按照模型一的假设条件，应有

$$t_1^* = t_2^* = t_3^* = 0, \quad A^* = Q^*, \quad B^* = 0$$

2.3 模型三：不允许缺货，补充时间较长—基本的经济生产批量存贮模型

在模型二的假设条件中，取消允许缺货条件（即设 $C_S \rightarrow \infty$ ， $t_2 = 0$ ），就成为模型三。因此，模型三的存贮状态图和最优存贮策略可以从模型二直接导出。

模型三的存贮状态见图 4。下面我们用另外的方法导出模型三的最优存贮策略。

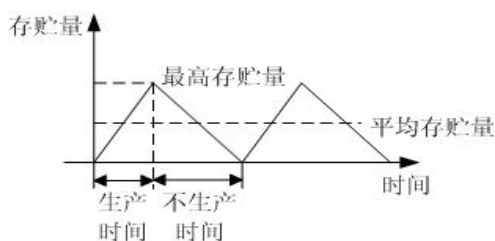


图4 经济生产批量模型存贮量的变化情况

经济生产批量存贮模型除满足基本假设外，其最主要的假设是：当存贮降到零后，开始进行生产，生产率为 P ，且 $P > D$ ，即生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存贮。

设生产批量为 Q ，生产时间为 t ，则生产时间与生产率之间的关系为

$$t = \frac{Q}{P}$$

对于经济生产批量模型，有

$$\text{最高存贮量} = (P - D)t = (P - D)\frac{Q}{P} = \left(1 - \frac{D}{P}\right)Q \quad (17)$$

而平均存贮量是最高存贮量的一半，关于平均固定订货费与经济订购模型中的平均订货费相同，同样是 $\frac{C_D D}{Q}$ 。这样，平均总费用为

$$C = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right)QC_P + \frac{C_D D}{Q} \quad (18)$$

类似于前面的推导，得到最优生产量、最优存贮周期、最大存贮量和最优存贮费用

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_D D}{C_P \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} \quad (19)$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2C_D P}{C_P D(P - D)}} \quad (20)$$

$$A^* = \left(1 - \frac{D}{P}\right)Q^* = \sqrt{\frac{2\left(1 - \frac{D}{P}\right)C_D D}{C_P}} \quad (21)$$

$$C^* = \frac{2C_D}{T^*} = \sqrt{2\left(1 - \frac{D}{P}\right)C_P C_D D} \quad (22)$$

例3 商店经销某商品，月需求量为30件，需求速度为常数。该商品每件进价300元，月存贮费为进价的2%。向工厂订购该商品时订购费每次20元，定购后需5天才开始到货，到货速度为常数，即2件/天。求最优存贮策略。

解 本例特点是补充除需要入库时间（相当于生产时间）外，还需要考虑拖后时间。因此，订购时间应在存贮降为零之前的第5天。除此之外，本例和模型三的假设条件完全一致。本例的存贮状态见图5。

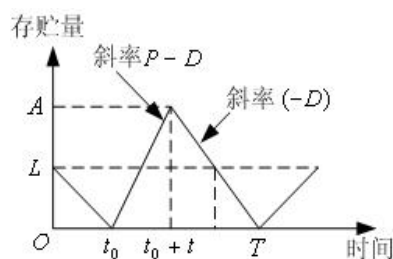


图5 拖后时间的存贮模型

从图5可见,拖后时间为 $[0, t_0]$,存贮量 L 应恰好满足这段时间的需求,故 $L = Dt_0$ 。

根据题意,有 $P = 2$ 件/天, $D = 1$ 件/天, $C_p = 300 \times 2\% \times \frac{1}{30} = 0.2$ 元/天·件,

$C_D = 20$ 元/次, $t_0 = 5$ 天, $L = 1 \times 5 = 5$ 件。代入(19)~(22),求得

$$Q^* = 20 \text{ 件}, T^* = 20 \text{ 天}, A^* = 10 \text{ 件}, C^* = 2 \text{ 元}$$

在本例中, L 称为订货点,其意义是每当发现存贮量降到 L 或更低时就订购。在存贮管理中,称这样的存贮策略为“定点订货”。类似地,称每隔一个固定时间就订货的存贮策略为“定时订货”,称每次订购量不变的存贮策略为“定量订货”。

2.4 模型四:允许缺货,补充时间极短的经济订购批量存贮模型

在模型二的假设条件中,取消补充需要一定时间的条件(即设 $P \rightarrow \infty$),就成为模型四。因此,和模型三一样,模型四的存贮状态图 and 最优存贮策略也可以从模型二直接导出。

模型四的存贮状态图见图6。下面我们用另外的方法导出模型四的最优存贮策略。

设 T 仍为时间周期,其中 T_1 表示 T 中不缺货时间, T_2 表示 T 中缺货时间,即 $T_1 + T_2 = T$ 。 S 为最大缺货量, C_s 为缺货损失的单价, Q 仍为每次的最高订货量,则 $Q - S$ 为最高存贮量,因为每次得到订货量 Q 后,立即支付给顾客最大缺货 S 。

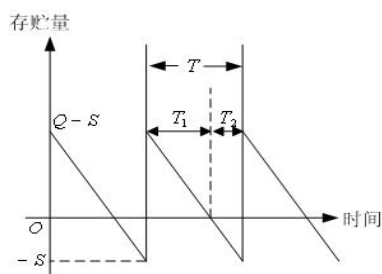


图6 允许缺货的经济订购批量存贮模型的存贮情况

以一个周期为例,计算出平均存贮量、平均缺货量和平均总费用。

$$\text{平均存贮量} = \frac{\frac{1}{2}(Q-S)T_1 + 0T_2}{T} = \frac{(Q-S)T_1}{2T} \quad (23)$$

其中

$$T_1 = \frac{Q-S}{D}, T_2 = \frac{S}{D}, T = \frac{Q}{D} \quad (24)$$

由此计算出

$$\text{平均存贮量} = \frac{(Q-S)T_1}{2T} = \frac{(Q-S)^2}{2Q}, \quad (25)$$

$$\text{平均缺货量} = \frac{ST_2}{2T} = \frac{S^2}{2Q} \quad (26)$$

因此, 允许缺货的经济订购批量存贮模型的平均总费用

$$C = \frac{C_P(Q-S)^2}{2Q} + \frac{C_D D}{Q} + \frac{C_S S^2}{2Q} \quad (27)$$

求式 (27) 关于 Q 和 S 的偏导数, 并求出其极小点

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_D D(C_P + C_S)}{C_P C_S}} \quad (28)$$

$$S^* = \frac{C_P}{C_P + C_S} Q^* \quad (29)$$

最佳订货周期

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2C_D(C_P + C_S)}{C_P C_S D}} \quad (30)$$

最大存贮量

$$A^* = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2C_D C_S D}{C_P(C_P + C_S)}} \quad (31)$$

最小费用

$$C^* = \frac{2C_D}{T^*} = \frac{C_P(Q^* - S^*)^2}{2Q^*} + \frac{C_D D}{Q^*} + \frac{C_S (S^*)^2}{2Q^*} \quad (32)$$

例 4 某电器公司的生产流水线需要某种零件, 该零件需要靠订货得到。已知批量订货的订货费 12000 元/次, 每个零件的存贮机费用为 0.3 元/(件·月), 每个零件的缺货损失为 1.1 元/(件·月), 设该零件的每月需求量为 8000 件。求全年的订货次数、订货量以及最优存贮费用。

解 根据题意, 取一年为单位时间, 由已知条件, 订货费 $C_D = 12000$ 元/次, 存贮费 $C_P = 3.6$ 元/(件·年), 缺货损失费 $C_S = 13.2$ 元/(件·年), 需求率 $D = 96000$ 件/年。该存贮问题可由一个整数规划来表示

$$\min \frac{C_P(Q-S)^2}{2Q} + \frac{C_D D}{Q} + \frac{C_S S^2}{2Q}$$

$$\text{s.t. } n = \frac{D}{Q},$$

$$Q, S \geq 0, n \geq 0 \text{ 且取整数}$$

编写 LINGO 程序如下:

```

model:
min=0.5*C_P*(Q-S)^2/Q+C_D*D/Q+0.5*C_S*S^2/Q;
n=D/Q;@gin(n);
data:
C_D=12000;
D=96000;
C_P=3.6;
C_S=13.2;
enddata
end

```

求得全年组织 3 次订货，每次的订货量为 32000 件，最大缺货量为 6857.141 件，最优费用为 81257.14 元。

对于确定型存贮问题，上述四个模型是最基本的模型。其中，模型一、三、四又可看作模型二的特殊情况。在每个模型的最优存贮策略的各个参数中，最优存贮周期 T 是最基本的参数，其它各个参数和它的关系在各个模型中都是相同的。根据模型假设条件的不同，各个模型的最优存贮周期 T^* 之间也有明显的规律性。因子 $\frac{C_P + C_S}{C_S}$ 对应了

是否允许缺货的假设条件，因子 $\frac{P}{P-D}$ 对应了补充是否需要时间的假设条件。

一个存贮问题是否允许缺货或补充是否需要时间，完全取决于对实际问题的处理角度，不存在绝对意义上的不允许缺货或绝对意义上的补充不需要时间。如果缺货引起的后果或损失十分严重，则从管理的角度应当提出不允许缺货的建模要求；否则，可视为允许缺货的情况。至于缺货损失的估计，应当力求全面和精确。如果补充需要的时间相对于存贮周期是微不足道的，则可考虑补充不需要时间的假设条件；否则，需要考虑补充时间。在考虑补充时间时，必须分清拖后时间和生产时间，两者在概念上是不同的。

2.5 模型五：经济订购批量折扣模型

所谓经济订购批量折扣模型是经济订购批量存贮模型的一种发展，即商品的价格是不固定的，是随着订货量的多少而改变的。就一般情况而论，物品订购的越多，物品的单价也就越低，因此折扣模型就是讨论这种情况下物品的订购数量。

一年花费的总费用由三个方面组成：年平均存贮费、年平均订货费和商品的购买费用，即

$$C = \frac{1}{2}QC_P(Q) + \frac{C_D D}{Q} + DK(Q) \quad (33)$$

在式 (33) 中， $K(Q)$ 是物品的价格，它与物品的订购数量有关，一般是一个分段表示的函数，即

$$K(Q) = \begin{cases} K_1, & 0 \leq Q \leq Q_1 \\ K_2, & Q_1 < Q \leq Q_2 \\ \vdots & \\ K_m, & Q_{m-1} < Q \leq Q_m \end{cases} \quad (34)$$

其中 $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq m}$ 是单调递增的，而 $\{K_i\}_{1 \leq i \leq m}$ 是单调递减的。

物品的存贮费 $C_P(Q)$ 与物品的价格有关，通常是价格 $K(Q)$ 的 r ($0 < r < 1$) 倍，

即

$$C_p(Q) = rK(Q) \quad (35)$$

在经济订购批量存贮模型中，也应包含式(33)中的第三项，但当时 $K(Q) = c$ 是常数，因此，第三项也为常数，与目标函数求极值无关，因此，在分析时，没有讨论此项。

对于折扣模型，经济订购批量折扣存贮模型中求最优订购量的公式(3)仍然成立，只不过此时的 C_p 不是常数罢了。假设 C_p 是由式(34)和式(35)确定的，则最优订购量为

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2C_D D}{rK_j}}, \quad j=1,2,\dots,m, \quad (36)$$

$$C_j^* = \frac{1}{2}rK_j Q_j^* + \frac{C_D D}{Q_j^*} + K_j D, \quad j=1,2,\dots,m$$

然后再根据 Q_j^* 所在的区间和 C_j^* 的值，选择合适的 Q_j^* 。实际上，若存在某个 $i \in \{1,2,\dots,m\}$ ，使得 $Q_i^* \in (Q_{i-1}, Q_i]$ ，则该 Q_i^* 就为最优订货量。

例5 某公司计划订购一种商品用于销售。该商品的年销售量为40000件，每次订货费为9000元，商品的价格与订货量的大小有关，为

$$K(Q) = \begin{cases} 35.225, & 0 \leq Q \leq 10000 \\ 34.525, & 10000 < Q \leq 20000 \\ 34.175, & 20000 < Q \leq 30000 \\ 33.825, & 30000 < Q \end{cases}$$

存贮费是商品价格的20%。问如何安排订购量与订货时间。

解 按上述方法，编写如下的LINGO程序：

```
model:
sets:
range/1..4/:B,K,C_P,Q,EOQ,C; !B是订货量的分界点，Q表示由式(36)计算出的
订货量，EOQ是调整后的订货量;
endsets
data:
D=40000; C_D=9000; R=0.2;
B=10000,20000,30000,40000;
K=35.225,34.525,34.175,33.825;
enddata
@for(range:C_P=R*K; Q=(2*C_D*D/C_P)^0.5);
EOQ(1)=Q(1)-(Q(1)-B(1))*(Q(1)#gt# B(1));
@for(range(i)|i #gt# 1:EOQ(i)=Q(i)+(B(i-1)-Q(i)+1)*(Q(i) #lt#
B(i-1))-(Q(i)-B(i))*(Q(i) #gt# B(i)));
@for(range:C=0.5*C_P*EOQ+C_D*D/EOQ+K*D);
C_min=@min(range:C);
Q_best=@sum(range:EOQ*(C #eq# C_min));
T_best=Q_best/D;
end
```

求得最优订货量为10211件，最优存贮费用为145151510元，最优订货周期是平均

0.255 年一次。

比较计算结果中的 Q 值与 EOQ 值，会对程序的理解有很大的帮助。

我们也可以使用如下的LINGO程序求得最优订货量和最优订货周期。

```
model:
sets:
range/1..4/:B,K,C_P,Q; !B是订货量的分界点, Q表示由式(36)计算出的订货量,
EOQ是调整后的订货量;
endsets
data:
D=40000; C_D=9000; R=0.2;
B=10000,20000,30000,40000;
K=35.225,34.525,34.175,33.825;
enddata
n=@size(range);
@for(range:C_P=R*K; Q=(2*C_D*D/C_P)^0.5);
Q_best=Q(1)*(Q(1) #le# B(1))+@sum(range(i)| i #ne# 1 :Q(i)*(Q(i) #gt#
B(i-1) #and# Q(i) #le# B(i)));
T_best=Q_best/D;
end
```

§3 有约束的确定型存贮模型

3.1 带有约束的经济订购批量存贮模型

现在考虑多物品、带有约束的情况。设有 m 种物品，采用下列记号：

(1) D_i, Q_i, K_i ($i=1,2,\dots,m$) 分别表示第 i 种物品的单位需求量、每次订货的批量和物品的单价；

(2) C_D 表示实施一次订货的订货费，即无论物品是否相同，订货费总是相同的；

(3) C_{P_i} ($i=1,2,\dots,m$) 表示第 i 种产品的单位存贮费；

(4) J, W_T 分别表示每次订货可占用资金和库存总容量；

(5) w_i ($i=1,2,\dots,m$) 表示单位第 i 种物品占用的库存容量。

类似于前面的推导，可以得到带有约束的多物品的 EOQ 模型。

3.1.1 具有资金约束的 EOQ 模型

类似前面的分析，对于第 i ($i=1,2,\dots,m$) 种物品，当每次订货的订货量为 Q_i 时，单位时间总平均费用为

$$C_i = \frac{1}{2} C_{P_i} Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i}$$

每种物品的单价为 K_i ，每次的订货量为 Q_i ，则 $K_i Q_i$ 是该种物品占用的资金。因此，资金约束为

$$\sum_{i=1}^m K_i Q_i \leq J$$

综上所述，得到具有资金约束的 EOQ 模型

$$\min \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} C_{P_i} Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i} \right) \quad (37)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m K_i Q_i \leq J \quad (38)$$

$$Q_i \geq 0, i=1,2,\cdots,m \quad (39)$$

3.1.2 具有库容约束的 EOQ 模型

单位第 i 种物品占用的库容量是 w_i ，因此， $w_i Q_i$ 是该种物品占用的总的库容量，结合上面的分析，具有库容约束的 EOQ 模型是

$$\min \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} C_{P_i} Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i} \right) \quad (40)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m w_i Q_i \leq W_T \quad (41)$$

$$Q_i \geq 0, i=1,2,\cdots,m \quad (42)$$

3.1.3 兼有资金与库容约束的最佳批量模型

结合上述两种模型，得到兼有资金与库容约束的最佳批量模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} C_{P_i} Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i} \right) \quad (43)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m K_i Q_i \leq J \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i Q_i \leq W_T \quad (45)$$

$$Q_i \geq 0, i=1,2,\cdots,m \quad (46)$$

对于这三种模型，可以容易地用 LINGO 软件进行求解。

例 6 某公司需要 5 种物资，其供应与存贮模式为确定性、周期补充、均匀消耗和不允许缺货模型。设该公司的最大库容量 (W_T) 为 1500m^3 ，一次订货占用流动资金的上限 (J) 为 40 万元，订货费 (C_D) 为 1000 元。5 种物资的年需求量 D_i ，物资单价 K_i ，物资的存贮费 C_{P_i} ，单位占用库容量 w_i 如表 1 所示。试求各种物品的订货次数、订货量和总的存贮费用。

表 1 物资需求、单价、存贮费和单位占用库容情况表

物资 i	年需求量 D_i	单价 K_i (元/件)	存贮费 C_{P_i} (元/(件·年))	单位占用库容 w_i (m^3 /件)
1	600	300	60	1.0
2	900	1000	200	1.5
3	2400	500	100	0.5
4	12000	500	100	2.0
5	18000	100	20	1.0

解 设 n_i 是第 i ($i=1,2,3,4,5$) 中物资的年订货次数，按照带有资金与库容约束的最佳批量模型 (43) ~ (46)，写出相应的整数规划模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{2} C_{P_i} Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^5 K_i Q_i \leq J \\
& \quad \sum_{i=1}^5 w_i Q_i \leq W_T \\
& \quad Q_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,5 \\
& \quad n_i = \frac{D_i}{Q_i}, \text{ 且 } n_i \text{ 为整数, } i=1,2,\dots,5
\end{aligned}$$

编写 LINGO 程序如下:

```

model:
sets:
kinds/1..5/:C_P,D,K,W,Q,N;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
@sum(kinds:K*Q)<J;
@sum(kinds:W*Q)<W_T;
@for(kinds:N=D/Q:@gin(n));
data:
C_D=1000;
D=600 900 2400 12000 18000;
K=300 1000 500 500 100;
C_P=60 200 100 100 20;
W=1.0 1.5 0.5 2.0 1.0;
J=400000;
W_T=1500;
enddata
end

```

求得总费用为 142272.8 元, 订货资金还余 7271.694 元, 库存余 4.035621 m³, 其余计算结果整理在表 2 中。

表 2 物资的订货次数与订货量

物资 i	订货次数	订货量 Q_i^* (件)
1	7	85.71429
2	13	69.23077
3	14	171.4286
4	40	300.0000
5	29	620.6897

上述计算采用整数规划, 如果不计算年订货次数, 而只有年订货周期, 则不需要整数约束。由于整数规划的计算较慢, 因此, 在有可能的情况下, 应尽量避免求解整数规划问题。

3.2 带有约束允许缺货模型

类似于不允许缺货情况的讨论, 对于允许缺货模型, 也可以考虑多种类、带有资金和库容约束的数学模型。设 S_i, C_{S_i} 分别为第 i 种物品的最大缺货量、缺货损失单价, 其它符号的意义不变。由于 Q_i 是第 i 种物品的最大订货量, 则 $K_i Q_i$ 是第 i 种物品占用

资金数, $Q_i - S_i$ 是第 i 种物品的最大存贮量 (占用库存数), 因为 S_i 部分偿还缺货, 已不用存贮了。因此, 带有资金和库容约束允许缺货的数学模型如下:

$$\min \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_{P_i}(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + \frac{C_D D_i}{Q_i} + \frac{C_{S_i} S_i^2}{2Q_i} \right) \quad (47)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n K_i Q_i \leq J \quad (48)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i (Q_i - S_i) \leq W_T \quad (49)$$

$$Q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (50)$$

例 7 (续例 6) 假设缺货损失费 (C_{S_i}) 是物品的存贮费 (C_{P_i}) 的 2 倍, 其它参数不变, 试求出各种物品的订货次数、订货量和总的存贮费用。

解 设 n_i 是第 i 种物品的年订货次数, 按照模型 (47) ~ (50), 写出相应的整数规划模型

$$\min \sum_{i=1}^5 \left(\frac{C_{P_i}(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + \frac{C_D D_i}{Q_i} + \frac{C_{S_i} S_i^2}{2Q_i} \right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^5 K_i Q_i \leq J$$

$$\sum_{i=1}^5 w_i (Q_i - S_i) \leq W_T$$

$$n_i = \frac{D_i}{Q_i}, \quad \text{且 } n_i \text{ 为整数, } i = 1, 2, \dots, 5$$

$$Q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

编写 LINGO 程序如下:

```
model:
sets:
kinds/1..5/:C_P,D,K,W,C_S,Q,S,N;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*C_P*(Q-S)^2/Q+C_D*D/Q+0.5*C_S*S^2/Q);
@sum(kinds:K*Q)<J;
@sum(kinds:W*(Q-S))<W_T;
@for(kinds:N=D/Q;@gin(n));
data:
C_D=1000;
D=600 900 2400 12000 18000;
K=300 1000 500 500 100;
C_P=60 200 100 100 20;
W=1.0 1.5 0.5 2.0 1.0;
J=400000;
W_T=1500;
enddata
```

```
@for(kinds:C_S=2*C_P);
end
```

求得总费用为 124660.8 元，订货资金还余 88.46 元，库存余 343.317m³，其余计算结果整理在表 3 中。

表 3 允许缺货的物资的订货次数与订货量

物资 i	订货次数	订货量 Q_i^* (件)	最大缺货量 S_i (件)
1	7	85.71429	28.57142
2	15	60.00000	20.00000
3	17	141.1765	47.05881
4	38	315.7895	105.2631
5	21	857.1429	285.7142

3.3 带有约束的经济生产批量存贮模型

与经济订购模型类似，对于经济生产批量存贮模型，也可以考虑带有不同情况的约束条件和各种不同物品的综合情况。下面用一个例子来说明问题。

例 8 某公司生产并销售 A, B, C 三种商品，根据市场预测，三种商品每天需求量分别是 400, 300, 300 (件)，三种商品每天的生产量分别是 1300, 1100, 900 (件)，每安排一次生产，其固定费用 (与生产量无关) 分别为 10000, 12000, 13000 (元)，生产费用每件分别为 1.0, 1.1, 1.4 (元)。商品的生产速率、需求率和最大生产量满足如下约束：

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{D_i}{P_i} + \frac{1.5D_i}{Q_i} \right) \leq 1$$

求每种商品的最优生产时间与存贮时间，以及总的最优存贮费用。

解 建立最优生产批量存贮模型：

$$\min \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_i}{P_i} \right) Q_i C_{P_i} + \frac{C_{D_i} D_i}{Q_i} \right]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^3 \left(\frac{D_i}{P_i} + \frac{1.5D_i}{Q_i} \right) \leq 1$$

$$T_i = \frac{Q_i}{D_i}, \quad i=1,2,3$$

$$T_i \geq 0, \quad Q_i \geq 0, \quad i=1,2,3$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
kinds/1..3/:C_P,P,C_D,D,Q,T,T_P; !T_P表示生产时间;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*(1-D/P)*Q*C_P+C_D*D/Q);
@sum(kinds:D/P+1.5*D/Q)<1;
@for(kinds:T=Q/D;T_P=Q/P);
data:
C_D=1000,1200,1300;
D=400,300,300;
C_P=1.0,1.1,1.4;
```



```
P=1300,1100,900;
enddata
end
```

求得 A, B, C 三种商品的生产、存贮周期分别为 51.05936, 54.86175, 50.79914 天, 其中生产天数分别为 15.71057, 14.96229, 16.93305 天。总的最优生产、存贮费用为 20832.10 元。

§4 单周期随机库存模型

在许多情形中需求是随机的。随机需求模型可以分为周期观测与连续观测两类。周期观测模型又可分为单周期、多周期及无穷周期等模型。

本节仅讨论单周期随机库存模型。

单周期库存模型又称为单订货模型。模型假定周期末库存对下一个周期没有任何价值。这个问题也称为报童问题, 因为报童手中的报纸若卖不完, 明天就没有用了。该模型研究的是仅有一次机会的存贮与供需关系的产品。

4.1 模型的基本假设

本模型的基本假设如下:

(1) 在整个需求期内只订购一次货物, 订货量为 Q , 订购费和初始库存均为 0, 每单位产品的购价(成本)为 K ;

(2) 需求量 D 为一个连续的随机变量, 且 D 的概率密度为 $f(x)$, 当货物出售时, 每单位产品的价格为 U ;

(3) 需求期结束时, 没有卖出的货物不存贮而是折价卖出, 单位价格为 V 。

4.2 模型的推导

单周期随机库存模型的问题是求订购量 Q 为多少时, 使得总利润最大。

当需求量 $D = x$ 时, 物品的出售量取决于物品的订购量 Q 和需求量 x , 即

$$\text{出售量} = \begin{cases} x, & x \leq Q \\ Q, & x > Q \end{cases} \quad (51)$$

因此, 产生的利润

$$G(Q) = \begin{cases} Ux + V(Q - x) - KQ, & x \leq Q \\ UQ - KQ, & x > Q \end{cases} \quad (52)$$

这样一个周期的总利润应该是 $G(Q)$ 的期望值, 即

$$\begin{aligned} E(G(Q)) &= \int_0^Q (Ux + V(Q - x) - KQ) f(x) dx + \int_Q^\infty (UQ - KQ) f(x) dx \\ &= (U - K)Q - (U - V) \int_0^Q (Q - x) f(x) dx \end{aligned} \quad (53)$$

注意, 在上式推导中用到概率密度的性质 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$ 。

为求极大值, 对式 (53) 两端关于 Q 求导数, 得到

$$\frac{dE[G(Q)]}{dQ} = (U - K) - (U - V) \int_0^Q f(x) dx \quad (54)$$

$$\frac{d^2 E[G(Q)]}{dQ^2} = -(U - V) f(Q) < 0, \quad (55)$$

注意到二阶导数小于 0, 因此, 满足方程

$$\int_0^Q f(x)dx = \frac{U-K}{U-V} \quad (56)$$

的 Q 一定是 $E[G(Q)]$ 的极大值点。

对于销售价 U 、成本价 K 和折扣价 V ，应满足 $U > K > V$ 。令 $g = U - K$ 是物品出售后利润，同时表示物品不足时，由于缺货造成的损失。令 $h = K - V$ 是物品折扣出售的损失，因此方程 (56) 也可写成

$$\int_0^Q f(x)dx = \frac{U-K}{U-V} = \frac{g}{g+h} \quad (57)$$

为进一步理解公式 (53) 的含义，将公式 (53) 改写为

$$\begin{aligned} E[G(Q)] &= (U-K)Q - (U-V)(Q-\mu) - (U-V)\int_Q^{+\infty} (x-Q)f(x)dx \\ &= U\mu - KQ + V(Q-\mu) - (U-V)\int_Q^{+\infty} (x-Q)f(x)dx \end{aligned} \quad (58)$$

其中 $\mu = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$ 为需求量 D 的数学期望。或者写成

$$E[G(Q)] = g\mu - h(Q-\mu) - (g+h)\int_Q^{+\infty} (x-Q)f(x)dx \quad (59)$$

在式 (58) 中，积分 $\int_Q^{+\infty} (x-Q)f(x)dx$ 相当于当 $x > Q$ 时的损失函数，即式 (58) 可以理解为

$$\frac{\text{总利润}}{\text{期望值}} = \frac{\text{总收入}}{\text{期望值}} - \frac{\text{成本}}{\text{期望值}} + \frac{\text{折扣收入}}{\text{期望值}} - \frac{\text{缺货收入}}{\text{期望值}}$$

4.3 模型的求解

例 9 (报童问题) 在街中有一报亭，平均每天出售报纸 500 份，出售报纸的数量，与来往的人流有关，假设服从 Poisson 分布，每卖出一份报纸能盈利 0.15 元。如果卖不出去，只能作为废纸处理，每份报纸亏损 0.40 元，问：报亭应如何安排报纸的订购量，使得报亭的利润最大？

解 由题意知，均值 $\mu = 500$ ；每份报纸的利润 $g = 0.15$ 元；作为废纸处理时，每份报纸亏损 $h = 0.4$ 元。利用式 (57) 计算出 Q 来，再利用式 (59) 计算出期望总利润。

对于 Poisson 分布，式 (57) 中的积分 $\int_0^Q f(x)dx$ 可由 LINGO 中的函数 @pps 计算，@pps(μ, Q) 是均值为 μ 的 Poisson 分布函数，即

$$@pps(\mu, Q) = \sum_{x=0}^Q \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

若 Q 不是整数，该函数采用线性插值计算。

式 (59) 中的积分 $\int_Q^{+\infty} (x-Q)f(x)dx$ 可由函数 @ppl 计算，@ppl(μ, Q) 表示 Poisson 分布的线性损失函数，即

$$@ppl(\mu, Q) = \sum_{x=Q+1}^{+\infty} \frac{(x-Q)\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
data:
mu=500;g=0.15;h=0.40;
enddata
@pps(mu,Q)=g/(g+h);
E_G=g*mu-h*(Q-mu)-(g+h)*@ppl(mu,Q);
end
```

求得报亭每天订购报纸 486 份，每天盈利 70.93 元。

下面我们使用 MATLAB 求例 9 的解。实际上式 (57) 中的 Q 是 Poisson 分布的上

$\frac{h}{g+h}$ 分位点。对于式 (59) 中的积分计算，首先利用 Matlab 的匿名函数定义被积函数，然后使用 MATLAB 中的积分命令 QUADL 进行积分，注意在积分时必须把积分区间化成有限区间。

计算的 Matlab 程序如下：

```
clc, clear
mu=500;g=0.15;h=0.40;
Q=poissinv(g/(g+h),mu)
fun1=@(x) (x-Q).*poisspdf(mu,x); %用 Matlab 匿名函数定义被积函数
E_G=g*mu-h*(Q-mu)-(g+h)*(mu-Q-quadl(fun1,0,Q))
```

求得报亭每天订购报纸 486 份，每天赢利 71.09 元。

例 10 设在某食品店内，每天对面包的需求服从 $\mu = 300$ ， $\sigma = 50$ 的正态分布。已知每个面包的售价为 1.50 元，成本 0.90 元，对当天未售出的其处理价为每个 0.60 元，问该商店每天应生产多少面包，使预期的利润为最大？

解 根据题意 $\mu = 300$ ， $\sigma = 50$ ， $U = 1.50$ ， $K = 0.9$ ， $V = 0.60$ 。利用式 (57) 计算出 Q 来，再利用式 (59) 计算出期望总利润。但对于正态分布分布，LINGO 只提供了标准正态分布函数 @psn(Z)，即

$$@psn(Z) = \Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z e^{-\tau^2/2} d\tau$$

和标准正态分布的线性损失函数 @psl(Z)，即

$$@psl(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_Z^{+\infty} (\tau - Z) e^{-\tau^2/2} d\tau$$

因此，若用函数 @psn 和 @psl 计算式 (57) 和式 (59) 的积分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^Q e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \text{和} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_Q^{+\infty} (x-Q) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

需要做变换 $\tau = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ，即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^Q e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{Q-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = @psn(Z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_Q^{+\infty} (x-Q) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_Z^{+\infty} (\tau - Z) e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \sigma @psl(Z)$$

其中 $Z = \frac{Q - \mu}{\sigma}$ 。

编写 LINGO 程序如下

```
data:
mu = 300; sigma = 50; U = 1.50; K = 0.90; V = 0.60;
enddata
@psn(Z)=(U-K)/(U-V);
Z=(Q-mu)/sigma;
@free(Z);
E_G = U*mu-K*Q+V*(Q-mu)-(U-V)*sigma*@psl(Z);
```

求得商店每天生产 322 个面包, 可以使总利润达到最大, 预期的最大利润为 163.638 元。

同样地, 我们使用 MATLAB 求例 10 的解。计算的 Matlab 程序如下:

```
clc, clear
mu = 300; sigma = 50; U = 1.50; K = 0.90; V = 0.60;
Q=norminv((U-K)/(U-V),mu,sigma)
fun2=@(x) (x-Q).*normpdf(x,mu,sigma); %用 Matlab 匿名函数定义被积函数
E_G=U*mu-K*Q+V*(Q-mu)-(U-V)*(mu-Q-quadr(fun2,0,Q))
```

求得的结果和 LINGO 的计算结果完全一样。

例 11 (航空机票超订票问题) 某航空公司执行两地的飞行任务, 已知飞机的有效载客量为 150 人。按民用航空管理有关规定: 旅客因有事或误机, 机票可免费改签一次, 此外也可在飞机起飞前退票。航空公司为了避免由此发生的损失, 采用超量订票的方法, 即每班售出票数大于飞机载客数。但由此会发生持票登机旅客多于座位数的情况, 在这种情况下, 航空公司让超员旅客改乘其它航班, 并给旅客机票价的 20% 作为补偿。现假设两地的机票价为 1500 元, 每位旅客有 0.04 的概率发生有事、误机或退票的情况, 问航空公司多售出多少张票? 使该公司的预期损失达到最小。

解 先对该问题进行分析。

设飞机的有效载客数为 N , 超订票数为 S (即售出票数为 $N + S$), k 为每个座位的赢利值, h 为改乘其它航班旅客的补偿值。设 x 是购票未登机的人数, 是一个随机变量, 其概率密度为 $f(x)$ 。当 $x \leq S$ 时, 有 $S - x$ 个人购票后, 不能登机, 航空公司要为此部分旅客进行补偿。当 $x > S$ 时, 有 $x - S$ 个座位没有人坐, 航空公司损失的是座位应得的利润, 因此, 航空公司的损失函数为

$$L(S) = \begin{cases} h(S - x), & x \leq S \\ k(x - S), & x > S \end{cases} \quad (60)$$

其期望值为

$$\begin{aligned} E[L(S)] &= \int_0^S h(S - x)f(x)dx + \int_S^{+\infty} k(x - S)f(x)dx \\ &= k\mu - kS + (k + h)S \int_0^S f(x)dx - (k + h) \int_0^S xf(x)dx \end{aligned} \quad (61)$$

其中 $\mu = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$ 为购票未登机的期望人数。(61) 式也可以改写为

$$E[L(S)] = k(\mu - S) - (k + h) \int_0^S F(x)dx$$

其中 $F(x)$ 为随机变量 x 的分布函数。

对式 (61) 两端关于 S 求导数, 得到

$$\frac{dE[L(S)]}{dS} = -k + (k+h) \int_0^S f(x) dx \quad (62)$$

$$\frac{d^2 E[L(S)]}{dS^2} = (k+h) f(S) > 0 \quad (63)$$

因此, 满足方程

$$\int_0^S f(x) dx = \frac{k}{k+h} \quad (64)$$

的 S 是函数 $E[L(S)]$ 的极小值点, 即满足方程 (64) 的 S 使航空公司的损失达到最小。

下面给出具体的求解过程。

设每位顾客购票未登机的概率为 p , 共有 $N+S$ 位旅客, 则恰有 y 位旅客未登机的概率是 $C_{N+S}^y p^y (1-p)^{N+S-y}$, 即未登机人数 x 服从二项分布。因此, 式 (64) 中的积分应用二项分布计算。

在 LINGO 中提供了二项分布函数 $@pbn(p, N+S, S)$, 即

$$@pbn(p, N+S, S) = \sum_{y=0}^S C_{N+S}^y p^y (1-p)^{N+S-y} \quad (65)$$

当 $N+S$ 和 S 不是整数时, 采用线性插值计算。

在这里, $@pbn(p, N+S, S)$ 的直观意义是: 在 $N+S$ 位旅客中至多有 S 位旅客购票未登机的概率。

根据题意, $N=150$, $p=0.04$, $k=1500$ (假设机票价就是航空公司的赢利), $h=1500 \times 0.2 = 300$ 。写出相应的 LINGO 程序如下:

data:

N = 150; p = 0.04; k = 1500; h = 300;

enddata

@pbn(p, N+S, S) = k/(k+h);

求得超订的票数 $S=8.222487$, 因而, 超订的票数在 8~9 张之间, 即每班售出的票数在 158~159 张之间。

下面我们使用 MATLAB 求例 11 的解。首先定义函数 $g(S) = \int_0^S f(x) dx - \frac{k}{k+h}$, 然

后求 $g(S)$ 的零点即可。MATLAB 中求函数 $g(S)$ 的零点时溢出 (使用命令 FZERO), 我们只能编写 MATLAB 的搜索算法如下:

```
clc, clear
```

```
N = 150; p = 0.04; k = 1500; h = 300;
```

```
g=@(s) binocdf(s,s+N,p)-k/(k+h); %定义匿名函数
```

```
m=30;
```

```
val=g(1:m); %计算 s=1,2,...,m 时匿名函数的值
```

```
for i=1:m
```

```
    if val(i)*val(i+1)<0
```

```
        fprintf('超预定的数量 S 为%d 或%d\n',i,i+1);
```

```
        break
```

```
    end
```

```

end
%下面具体比较哪一种订票策略损失小
for s=i:i+1
E_L(s+1-i)=k*(N+s)*p-k*s+(k+h)*quadl(@(x) binocdf(x,N+s,p),0,s);
end
E_L

```

求得超订票 9 张时，航空公司的损失最小。

例 12（续例 11） 所有参数不变，问航空公司多售出多少张票，使该公司的预期利润达到最大，并计算出相应的利润。

解 下面的计算希望达到以下目的：第一，得到超订票的整数解；第二，计算出预期的利润值。

设飞机的有效载客数为 N ，超订票数为 S （即售出票数为 $N+S$ ）， k 为每个座位的赢利值， h 为改乘其它航班旅客的补偿值， p 为每位旅客购票未登机的概率。设 x 是购票未登机的人数，是一个随机变量，其概率密度为 $f(x)$ 。当 $x \leq S$ 时，飞机满座，有 $S-x$ 个人购票后，不能登机，航空公司要为这部分旅客进行补偿。当 $x > S$ 时，飞机没有满座，有 $N+S-x$ 名旅客乘机，因此，航空公司的利润函数为

$$I(S) = \begin{cases} kN - h(S-x), & x \leq S \\ k(N+S-x), & x > S \end{cases} \quad (66)$$

其期望值为

$$\begin{aligned} E[I(S)] &= \int_0^S (kN - hS + hx) f(x) dx + \int_S^{+\infty} k(N+S-x) f(x) dx \\ &= k(N+S-\mu) - (h+k)S \int_0^S f(x) dx + (h+k) \int_0^S xf(x) dx \end{aligned} \quad (67)$$

其中 $\mu = \int_0^{+\infty} xf(x) dx$ 为购票未登机的期望人数。

对式（67）两端关于 S 求导数，得到

$$\frac{dE[I(S)]}{dS} = k - (h+k) \int_0^S f(x) dx \quad (68)$$

$$\frac{d^2 E[I(S)]}{dS^2} = -(h+k)f(S) < 0 \quad (69)$$

因此，满足方程

$$\int_0^S f(x) dx = \frac{k}{k+h} \quad (70)$$

的 S 是函数 $E[I(S)]$ 的极大值点，即满足方程（70）的 S 使航空公司的利润达到最大。

具体的求解过程同例 11。下面我们比较一下 $S=8$ 和 $S=9$ 哪种情形下的利润最大，首先把式（67）改写成

$$E[I(S)] = k(N+S-\mu) - (h+k) \int_0^S F(x) dx$$

其中 $F(x)$ 为随机变量 x 的分布函数。

编写的 MATLAB 程序如下：

```

clear,clc
N = 150;p = 0.04;k = 1500;h = 300;

```

```

for S=1:15
E_I(S)=k*(N+S-(N+S)*p)-(h+k)*quadl(@(x)binocdf(x,N+S,p),0,S);
end
[E_I,ind]=sort(E_I,'descend')

```

求得超订票数为9张时，航空公司获利利润最大，预期的期望值达到223832.6。

上面的算法，我们实际上把二项分布看成是连续型的分布。下面从离散分布的角度建立赢利期望值的递推公式。

记 E_j ($j=0,1,\dots,S$) 为超订票数为 j 时，航空公司赢利的期望值。 E_j^L 为超订票数为 j 时，最后一个旅客的订票使航空公司获得赢利的期望值。则有

$$E_j = E_{j-1} + E_j^L$$

E_j^L = 最后 1 名旅客乘到飞机时航空公司赢利值 - 最后 1 名乘客无座位时的补偿值
因而有

$$E_0 = kN(1-p),$$

$$E_1 = E_0 + E_1^L = E_0 + P\{\text{该旅客乘机}\} \cdot P\{\text{该旅客有座位}\} \cdot k \\ - P\{\text{该旅客乘机}\} \cdot P\{\text{该旅客无座位}\} \cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)P\{N\text{名旅客中至少有1人不乘机}\} \cdot k \\ - (1-p)P\{N\text{名旅客中至多有0人不乘机}\} \cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[1 - @pbn(p, N, 0)] \cdot k - (1-p) \cdot @pbn(p, N, 0) \cdot h \\ = E_0 + (1-p)[k - (k+h) \cdot @pbn(p, N, 0)]$$

\vdots

$$E_j = E_{j-1} + E_j^L = E_{j-1} + (1-p)P\{N+i-1\text{个旅客至少有 } i \text{ 人不乘机}\} \cdot k \\ - (1-p)P\{N+i-1\text{个旅客至多有 } i-1 \text{ 人不乘机}\} \cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[1 - @pbn(p, N+i-1, i-1)] \cdot k \\ - (1-p) \cdot @pbn(p, N+i-1, i-1) \cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[k - (k+h) \cdot @pbn(p, N+i-1, i-1)]$$

在上式中， $@pbn(p, m, x)$ 是 LINGO 中的二项分布函数，即

$$@pbn(p, m, x) = \sum_{k=0}^x C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

因此，我们只要计算出超订票数 $S=0,1,2,\dots$ 的期望值，并比较它们的大小，就可以计算出最优的超订票数和最大赢利的期望值。编写 LINGO 程序如下：

```

sets:
    seats/1..150/;
    extra/1..15/: E_T;
endsets
data:
    k = 1500; h = 300; p = 0.04;
enddata
N = @size(seats);
E_T0 = k*N*(1-p);
E_T(1) = E_T0 + (1-p)*(k-(k+h)*@pbn(p, N, 0));

```

```
@for(extra(i)|i #gt# 1:E_T(i) =  
E_T(i-1)+(1-p)*(k-(k+h)*@pbn(p,N+i-1, i-1)));
```

从计算结果可以看出，超订票数为9张时，航空公司获利利润最大，预期的期望值达到223832.6。

下面我们写出递推运算的 MATLAB 程序如下：

```
clear,clc  
k = 1500; h = 300; p = 0.04; n=150;  
E_T0=k*n*(1-p)  
E_T(1)=E_T0+(1-p)*(k-(k+h)*binocdf(0,n,p));  
for i=2:15  
    E_T(i)=E_T(i-1)+(1-p)*(k-(k+h)*binocdf(i-1,n+i-1,p));  
end  
[E_T,ind]=sort(E_T,'descend')
```

计算结果和 LINGO 的计算结果完全一致。

习题二十八

1. 企业生产某种产品，正常生产条件下可生产 10 件/天。根据供货合同，需按 7 件/天供货。存贮费每件 0.13 元/天，缺货费每件 0.5 元/天，每次生产准备费用（装配费）为 80 元，求最优存贮策略。

2. 某大型机械需要外购 3 种零件，其有关数据见表 4。若存贮费占单件价格的 25%，不允许缺货。又限定外购零件的总费用不超过 240000 元，仓库总面积为 250m²，试确定每种外购零件的最优订货量、订货周期和最小费用。

表 4 三种外购零件的相关数据

零件	年需求量（件）	订货费（元）	单价（元）	占用仓库面积（m ² ）
1	1000	1000	3000	0.5
2	3000	1000	1000	1
3	2000	1000	2500	0.8

3.（航空公司超订票问题） 已知飞机的有效载客量为 150 人，机票价为 1500 元。根据公司的长期统计，每个航班旅客的退票和改签发生的人数如表 5 所示。在登机旅客多于座位数的情况下，航空公司规定：超员旅客改乘本公司下一班机，机票免费（即退回原机票款）；若改乘其它航空公司的航班，按机票的 105%退款。据统计前一类旅客占超员旅客的 80%，后一类旅客占 20%。问航空公司多售出多少张票，使该公司的预期损失达到最小。

表 5 航班旅客退票和改签人数概率表

人数 i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.18	0.25	0.25	0.16	0.06	0.04	0.03	0.02	0.01

4. 某工厂生产某种产品必须经过两道工序，第一道工序在甲车间进行，第二道工序在乙车间进行，甲车间生产的产品作为乙车间生产的原料，工厂计划年生产 1200 件产品，因而乙车间的生产速度为每月 100 件，而甲车间的生产速度为每月 500 件。由于受到乙车间生产能力的限制，甲车间要进行等周期分批的有间断的生产，同时还必须保证乙车间不停工待料。甲车间的产品运到乙车间时要包装，平均每批的包装费为 5 元。若运到乙车间后暂时来不及加工，则要花费存贮费，每件存贮费为 0.4 元。试研究甲车间的最优生产周期，生产时间和生产批量。