Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

7. Vorlesung - 2017

Zufallsvektoren

Definition 15

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsgrößen, dann heißt $Z = (X_1, \ldots, X_n)$ **Zufallsvektor** (ZV) oder n-dimensionale Zufallsgröße.

Zufallsgrößen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, i=1,. . . ,n
Zufallsvektor $Z = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Beispiel: **Werfen zweier Würfel**:
$X=$ Zahl die der erste Würfel anzeigt
$Y=$ Summe der Zahlen die jeder Würfel anzeigt
(X, Y) Zufallsvektor

Ein Zufallsvektor (X, Y) heißt **diskret**, wenn X und Y diskrete ZG sind: sie besitzen eine gemeinsame **Wahrscheinlichkeitsverteilung**

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} (x_i, y_j) \\ p_{i,j} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J}, P\Big((X, Y) = (x_i, y_j)\Big) = p_{i,j}$$

Es gilt

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

Beispiel:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$X = 2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

$\Rightarrow P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{12}\ldots$

Aus der gemeinsamen Verteilung von (X, Y) ergeben sich die **Randverteilungen** der Komponenten X und Y:

$$
\begin{aligned}
P(X = x_i) &= \sum_{j \in J} P(Y = y_j), \forall\ i \in I \\
P(Y = y_j) &= \sum_{i \in I} P(X = x_i), \forall\ j \in J
\end{aligned}
$$

Verteilungsfunktion eines Zufallvektors

Definition 16

Die Funktion $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= P(X \leq x, \quad Y \leq y) \\ &= P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

heißt **Verteilungsfunktion** des Zufallvektors (X, Y), bzw. **gemeinsame Verteilungsfunktion** von X und Y.

Aus der gemeinsamen VF $F_{(X,Y)}$ von (X, Y) ergeben sich die **Randverteilungsfunktionen** VF der Komponenten X und Y aus

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = F_{(X,Y)}(x, \infty) = \lim_{y \to \infty} F_{(X,Y)}(x,y) \\ F_Y(y) &= P(Y \leq y) = F_{(X,Y)}(\infty, y) = \lim_{x \to \infty} F_{(X,Y)}(x,y) \end{aligned}$$

Für die Verteilungsfunktion eines diskreten Zufallsvektors (X, Y) mit den Werten $(x_i, y_j)_{i\in I, j\in J}$ gilt

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{\substack{i\in I\\ x_i\leq x}} \sum_{\substack{j\in J\\ y_j\leq y}} P(X = x_i, Y = y_j) \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ein Zufallsvektor (X, Y) heißt **stetig**, wenn X und Y stetige ZG sind:

Definition 17

Wenn (X, Y) stetiger ZV ist, dann heißt $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ **gemeinsame Dichtefunktion** wenn gilt

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v)\, du dv \quad x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $F_{(X,Y)}$ die gemeinsame Verteilungsfunktion ist.

Satz 14

Es gelten die Eigenschaften:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv = 1.$
2. $F_{(X,Y)}$ ist stetige Funktion.
3. Falls $F_{(X,Y)}$ partiell ableitbar ist in x und y gilt:

$$\frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{(X,Y)}(x,y).$$

4. $P(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f_{(X,Y)}(u,v) dudv.$

Aus der gemeinsamen Dichtefunktion von (X, Y) ergeben sich die **Randdichten** der Komponenten X und Y:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, v) dv, x \in \mathbb{R} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u, y) du, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definition 18

Zwei **stetige** Zufallsgrößen X, Y sind unabhängig genau dann, wenn für ihre Dichtefunktionen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Satz 15

Zwei Zufallsgrößen X, Y sind **unabhängig**, genau dann, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Gegeben

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} (x_i, y_j) \\ p_{i,j} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J} \Rightarrow X+Y \sim ?, X\cdot Y \sim ?$$

Gegeben 2 unabhängige ZG

$$X \sim \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}, Y \sim \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J} \Rightarrow X+Y \sim ?, X\cdot Y \sim ?$$

Satz 16

$(X,Y) \mapsto f_{(X,Y)} \Rightarrow f_{X+Y} = ?, f_{X\cdot Y} = ?$

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(u, x-u)du \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_{X\cdot Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u|} f_{(X,Y)}\left(u, \frac{x}{u}\right)du \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wenn X und Y unabhängig sind, gilt

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y(x-u)du \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_{X\cdot Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u|} f_X(u) f_Y\left(\frac{x}{u}\right)du \quad x \in \mathbb{R}.$$