07.04.2017 S.D.C4

$y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = 0$; $P(x), Q(x)$ stetige Fkt.

$y = k_1 y_1 + k_2 y_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$\{y_1, y_2\}$ - bilden ein Lösungsfundamentalsystem

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $y'' + 3y' + 2y = 0$ s.d. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$ ein Lfs bilden.

$y_1 = e^{-x} \Rightarrow y_1' = -e^{-x} \Rightarrow y_1'' = e^{-x}$

Einsetzen $\Rightarrow e^{-x} + 3(-e^{-x}) + 2e^{-x} = 0$ w

$y_2 = e^{-2x} \Rightarrow y_2' = -2e^{-2x} \Rightarrow y_2'' = 4e^{-2x}$

$4\cdot e^{-2x} + 3(-2e^{-2x}) + 2e^{-2x} = 0$ w

$\Rightarrow y_1, y_2$ Lösungen der DGL (1)

$$W(x, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x} \neq 0, \forall x$$

$\Rightarrow y_1, y_2$ linear unabhängig (2)

Aus (1), (2) $\Rightarrow \{y_1, y_2\}$ ein Lfs. bilden.

$y = k_1 y_1 + k_2 \cdot y_2 = k e^{-x} + k_2 e^{-2x}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Sei $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, $P(x), Q(x)$ stetige Fkt. Löse die DGL wenn eine Lösung y_1 gegeben ist $y = y_1 \cdot z(x) \;|'$

$y' = y_1' z(x) + y_1 \cdot z'(x)$

$y'' = y_1'' z(x) + y_1' z'(x) + y_1' z'(x) + y_1 z''(x)$

$\quad = y_1'' z(x) + 2y_1' z'(x) + y_1 z''(x)$

Einsetzen:

$y_1'' \cdot z(x) + 2y_1' \cdot z'(x) + y_1 z''(x) + P(x)(y_1' z(x) + y_1 \cdot z'(x)) + Q(x) y_1 z(x)$
$= 0$

$y_1'' z(x) + \cancel{z'' \cdot z}\; 2y' z'(x) + y_1 z''(x) + P(x) \cdot y' z(x) + P(x) y_1 z'(x) + Q(x) \cdot$
$y_1 z(x) = 0$

$z(x)(\underbrace{y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1}_{=0}) + 2y_1' z'(x) + y_1 \cdot z''(x) + P(x) \cdot y z'(x) = 0$ 1.

$2y_1' \cdot z'(x) + y_1 z''(x) + P(x) \cdot y_1' \cdot z(x) = 0$

$y_1 \cdot z''(x) + z'(x)(2 \cdot y_1' + P(x) \cdot y_1) = 0$

<u>Subst.</u>:

$z' = t \Rightarrow z'' = t'$

$y_1 t' + t(2y_1' + P(x)y_1) = 0$

$t = \varphi(x, k_1) \mid \int$

$z = \int \varphi(x, k_1)\,dx + k_2 \quad , k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$y = y_1\left(\int \varphi(\cancel{x,k_1})\,dx + k_2\right)$

- <u>Beispiel</u>

$x \cdot y'' - (x+1) \cdot y' - 2(x-1)y = 0 \quad , y_1 = e^{2x}$ Lösung

$y = y_1 \cdot z(x)$

$y = e^{2x} \cdot z(x) \Rightarrow y' = 2e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x)$

$y'' = 4e^{2x} z(x) + 2e^{2x} z'(x) + e^{2x} z'(x) + e^{2x} \cdot z''(x)$

Einsetzen:

$x\left(e^{2x} + z''(x) + 4e^{2x} z(x) + 4e^{2x} \cdot z'(x)\right) - (x+1)\left(2e^{2x} \cdot z(x) + e^{2x} \cdot z_1(x) + e^{2x} \cdot z'(x)\right) - 2(x-1)e^{2x} z(x) =$

$x e^{2x} z''(x) + 4x - e^{2x} = \cancel{z(x) + 4(x) + 4(x) e^{2x} t(x) + 4x\, e^{2x} (z) - 2xz(x) - 5x^2}$

$= (x) + 4xe^{2x} z'(x) - \cancel{x \cdot 2e^{2x}} - xe^{2x} z'(x) - 2xe^{2x} z(x) - e^{2x} z'(x)$

$- 2xe^{2x}(z) + 2e^{2x} \cdot z(x)$

$x \cdot e^{2x} \cdot z''(x) + 4xe^{2x} z(x) - xe^{2x} z'(x) - e^{2x} \cdot z'(x) = 0$

$e^{2x}(x \cdot z''(x) + 3x\, z'(x) - z'(x)) = 0 \quad \mid e^{2x} \neq 0$

$\boxed{x \cdot z''(x) + z'(x)(3x - 1) = 0}$

$z' = t \Rightarrow z'' = t'$

$x \cdot t' + t(3x - 1) = 0$

$x t' = -t(3 - 1) \mid x \neq 0$

$t' = \frac{1 - 3x}{x} t$

$\frac{dt}{dx} = \frac{(1 - 3x)t}{x} \quad \Big| \cdot dx \; : t \neq 0$

$\frac{dt}{t} = \frac{1 - 3x}{x}\,dx \quad \Big| \int$

$\int \frac{1}{z}\, dz = \left(\frac{1}{x} - \frac{3x}{x}\right) dx$

$\ln|t| = \ln|x| - 3x + k_1$

$\ln|x| - 3x + k_1 = |x| \cdot e^{-3x} \cdot e^{k_1} =$

$= |x| \cdot e^{-3x} \cdot k_2 = \pm x \cdot e^{-3x} \cdot k_2 =$

$= x k_3 \cdot e^{-3x}, \quad k_3 = \pm k_2$

$z' = t \Rightarrow z' = \int k_3 \cdot x \cdot e^{-3x}\, dx = k_3 - k_3 \int \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (e^{-3x})' \cdot x\, dx$

$= \frac{k_3}{3} \cdot e^{-3x} x + \int \frac{k_3}{3} \cdot e^{-3x}\, dx$

$= -\frac{k_3}{3} \cdot e^{-3x} x - \frac{1}{9} k_3 \cdot e^{-3x} + k_4$

$y = y_1 \cdot z = e^{2x}\left(-\frac{k_3}{3} \cdot e^{-3x} x - \frac{1}{9} k_3 \, e^{-3x} + k_4\right), \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$

Inhomogene lineare DGL

$y'' + P(x) \cdot y' + Q(x)\, y = f(x)$

1. Schritt $\quad y_0 = k_1 \cdot y_1 + k_2\, y_2$

2. Schritt $\quad y_p$ = eine part. Lösung der inhom. DGL

Methode: Variation der Konstanten (Lagrange)

$y_p = k_1(x)\, y_1 + k_2(x)\, y_2$

$y_p' = k_1'(x) \cdot y_1 + k_1(x) \cdot y_1' + k_2'(x) \cdot y_2 + k_2(x)\, y_2'$

Bedingung: $k_1'(x) \cdot y_1 + k_2'(x)\, y_2 = 0$

$y_p' = k_1(x)\, y_1' + k_2(x) \cdot y_2'$

$y_p'' = k_1'(x) \cdot y_1' + k_1(x)\, y_1'' + k_2'(x) \cdot y_2' + k_2(x) \cdot y_2''$

Einsetzen

$k_1'(x) \cdot y_1' + k_1(x) y_1'' + k_2'(x) \cdot y_2' + k_2(x)\, y_2'' + P(x) \cdot (k_1(x) y_1' + k_2(x)$
$y_2') + Q(x) \cdot (k_1(x) y_1 + k_2(x) \cdot y_2) = f(x)$

$k_1'(x)\, y_1' + k_1(x) y_1'' + k_2'(x)\, y_2' + k_2(x)\, y_2'' + P(x) \cdot k_1(x)\, y_1' + P(x) k_2(x) \cdot$
$y_2' + Q(x) k_1(x) y_1 + Q(x) \cdot k_2(x)\, y_2 = f(x)$

$\boxed{k_1'(x)\, y_1' + k_2'(x)\, y_2' = f(x)}$

$$\begin{cases} k_1'(x)\cdot y_1 + k_2'(x)\, y_2 = 0 \\ k_1'(x)\cdot y_1' + k_2'(x)\, y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$k_1' = \varphi(x) \mid \int \quad k_1 = \int \varphi(x)\,dx$$

$$k_2' = \psi(x) \mid \int \quad k_2 = \int \psi(x)\,dx$$

$$y_p = \int \varphi(x)\,dx\; y_1 + \int \psi(x)\,dx \cdot y_2$$

<u>3 Schritt</u>

$$y = y_0 + y_p = k_1 y_1 + k_2 y_2 + y_p \quad , k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Beispiel</u>

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

1. Schritt

$$y_0 = e^{-x}\cdot k_1 + e^{-2x} k_2$$

2 Schritt

$$y_p = e^{-x} k_1(x) + e^{-2x} k_2(x)$$

$$y_p' = -e^{-x}\cdot k_1(x) + \underline{e^{-x} k_1'(x)} + (-2)\, e^{-2x}\cdot k_2(x) + \underline{e^{-x} k_2'(x)}$$

$$e^{-x} k_1'(x) + e^{-2x} k_2'(x) = 0 \Rightarrow \text{Bed}$$

$$y_p'' = e^{-x} k_1(x) - e^{-x} k_1'(x) + 4e^{-2x} k_2(x) - 2e^{-2x} k_2'(x)$$

$$e^{-x} k_1(x) - e^{-x} k_1'(x) + 4e^{-2x} k_2(x) - 2e^{-2x}\cdot k_2'(x) + 3(-e^{-x} k_1(x) - 2e^{-2x}\cdot k_2(x))$$
$$+ 2(e^{-x} k_1(x) + e^{-2x} k_2(x)) = e^x$$

$$\cancel{e^{-x}\cdot k_1(x)} - e^{-x} k_1'(x) + \cancel{4e^{-2x} k_2(x)} - 2e^{-2x} k_2'(x) \cancel{- 3e^{-x} k_1(x)} \cancel{- 6e^{-2x}\cdot}$$
$$\cancel{k_2(x)} + \cancel{2e^{-x}\cdot k_1(x)} + \cancel{2e^{-2x}\cdot k_2(x)} = e^x$$

$$k_1'(x)\cdot(-e^{-x}) - 2e^{-2x} k_2'(x) = e^x$$

$$\begin{cases} k_1'(x)\cdot e^{-x} + k_2'(x)\cdot e^{-2x} = 0 \\ k_1'(x)\cdot(-e^{-x}) + k_2'(x)\cdot(-2e^{-2x}) = e^x \end{cases} +$$

$$\qquad - k_2'(x)\cdot e^{-2x} = e^x$$

$k_2'(x) = -e^{-3x} \Rightarrow k_2(x) = \int -e^{3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{3x}$

$k_1'(x) \cdot e^{-x} + \left(-\frac{1}{3}e^{3x}\right)' \cdot e^{-2x} = 0$

$k_1'(x) \cdot e^{-x} - e^{+3x} \cdot e^{-2x} = 0$

$k_1'(x) \cdot e^{-x} = e^{x}$

$k_1'(x) = e^{2x} \Rightarrow k(x) = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

$y_p = k_1(x)\,y_1 + k_2(x) \cdot y_2$

$= \frac{1}{2}e^{2x} \cdot e^{-x} - \frac{1}{3}e^{3x} \cdot e^{-2x} = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{3}e^{x} = \frac{1}{6}e^{x}$

3 Schritt

$y = y_0 + y_p$

$y = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{x}, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f(x), \; a, b \in \mathbb{R}.$

Der hom Fall

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$

$\boxed{y = e^{r x}} \Rightarrow y' = r \cdot e^{r x}, \; y'' = r^2 e^{r x}$

$r^2 e^{r x} + a \cdot r e^{r x} + b e^{r x} = 0 \;|\; : e^{r x} \neq 0$

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$

↳ die charakteristische Gl.

I. $\Delta > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$y_1(x) = e^{r_1 x}$

$y_2(x) = e^{r_2 x}$

(Hsg. y_1, y_2 lin. unabh.)

$y = k_1 \cdot y_1 + k_2 y_2 = k_1 e^{r_1 x} + k_2 \cdot e^{r_2 x}, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

III. $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

$y_1(x) = e^{rx}$ $\quad$ (Hsg: y_1, y_2 l.u)

$y_2(x) = x \cdot e^{rx}$

III $\Delta < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$e^{ix} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$

$y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$

$y = k_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + k_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$

v

J

✓

✓

✓