Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

8. Vorlesung - 2017

Bemerkung:

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ Zufallsvektor. Der n dimensionale Vektor

$$E(X) = \Big(E(X_1), \ldots, E(X_n)\Big)$$

ist der Erwartungswert des Zufallsvektors X.

Beispiel: Seien $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. (X, Y) sind die Koordinaten eines zufälligen Punktes in der Ebene. Sei K ein zufälliger Kreis, so dass $(X, Y) \in K$ und $(0,0)$ ist der Mittelpunkt des Kreises K. Man bestimme den Erwartungswert für den Flächeninhalt des Kreises K!

Mittelwert $E(X)$ und Varianz $V(X)$ in Matlab

Werte der ZG X seien $x = [x_1, \ldots, x_n]$

$$\Rightarrow mean(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

$mean(x) \approx E(X)$ wenn n groß ist

$$\Rightarrow var(x,1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - mean(x))^2$$

$var(x,1) \approx V(X)$ wenn n groß ist

Definition 19

$\operatorname{cov}(X, Y) = E\Big((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\Big)$ ist die **Kovarianz** der Zufallsgrößen X und Y.

Kovarianz $\operatorname{cov}(X, Y)$ in Matlab:

- Werte der ZG X, Y seien $x = [x_1, \dots, x_n]$ bzw. $y = [y_1, \dots, y_n]$
- man bezeichne:

$$CV := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - mean(x))(y_i - mean(y))$$

- in Matlab:

$$\Rightarrow \ \operatorname{cov}(x, y, 1) = \begin{pmatrix} var(x,1) & CV \\ CV & var(y,1) \end{pmatrix}$$

Satz 17

Sind X, Y ZG (diskret oder stetig), dann gilt:

(1) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

(2) $V(aX + b) = a^2 V(X) \;\forall\; a, b \in \mathbb{R}$.

(3) X und Y unabhängig
$\Rightarrow\;\; E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y);\;\; V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

(4) $\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$.

(5) $\operatorname{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$.

(6) $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab \operatorname{cov}(X, Y)$
$\forall\; a, b \in \mathbb{R}$.

Verteilung	Erwartungswert	Varianz
$Bin(n, p)$	np	$np(1-p)$
$Poisson(\lambda)$	λ	λ
$Unif[a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
$Gamma(\alpha, \beta)$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
$Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Definition 18

$(X_n)_n$ ist eine **Folge von unabhängigen ZG**, wenn
$\forall \ \{i_1, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N}$ die ZG $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ sind unabhängig, d.h.

$$P(X_{i_1} \leq x_{i_1}, \dots, X_{i_k} \leq x_{i_k}) = P(X_{i_1} \leq x_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(X_{i_k} \leq x_{i_k})$$

$\forall \ x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}$.

Zum Beispiel:
ZG X_n= die angezeigte Zahl im n-ten Wurf eines Würfels
$\Rightarrow (X_n)_n$ ist eine Folge von unabhängigen ZG

Definition 19

Die Folge $(X_n)_n$ von ZG **konvergiert fast sicher** zur ZG X, wenn

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Bezeichnung: $X_n \overset{\text{f.s.}}{\to} X$

1. Beispiel:

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} ???$$

2. Beispiel:

$\Omega := [0,1]$ Grundraum, $\mathcal{K} := \mathcal{B}([0,1])$ Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$; sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1]$, d.h. für alle $\alpha < \beta$ aus $[0,1]$ berechnet man

$$P\Big([\alpha,\beta]\Big) = P\Big([\alpha,\beta)\Big) = P\Big((\alpha,\beta]\Big) = P\Big((\alpha,\beta)\Big) := \beta - \alpha$$

P entspricht dem Lebesgue Maß auf [0,1] (siehe 2. Vorlesung)

$$X_n(\omega) = \omega + \omega^n,\ \omega \in [0,1], n \geq 1 \Rightarrow\ X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \qquad ???$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{für } \omega \in [0,1) \\ 2 & \text{für } \omega = 1 \end{cases}$$

Sei $X(\omega) = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$

$$\Rightarrow\ \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \omega\} = [0,1)$$

$$\Rightarrow\ P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \omega\}) = P([0,1)) = 1$$

Relative und absolute Häufigkeit

Sei A ein zufälliges Ereignis das in einem Experiment auftaucht; man wiederholt das Experiment n mal (unter denselben gegebenen Bedingungen); man bezeichnen mit $k_n(A)$ wie oft das Ereignis A auftaucht; die relative Häufigkeit des Ereignisses A ist die Zahl $h_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$; die absolute Häufigkeit des Ereignisses A ist die Zahl $k_n(A)$.

Experiment: Man wirft n mal eine Münze; A: man erhält *Zahl*

n Anzahl Durchführungen Exp.	absolute Häufigkeit $k_n(A)$	relative Häufigkeit $h_n(A)$
100	48	0.48
1000	497	0.497
10000	5005	0.5005

$h_n(A) \xrightarrow{f.s.} \frac{1}{2}$ (siehe Satz 20)

Das Starke Gesetz der großen Zahlen (SGGZ)

Definition 20

Die Folge von ZG $(X_n)_n$ mit $E|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt das **starke Gesetz der großen Zahlen (SGGZ)** wenn

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(X_k - E(X_k) \Big) \xrightarrow{f.s.} 0.$$

Das Starke Gesetz der großen Zahlen (SGGZ)

Satz 18

Sei $(X_n)_n$ Folge von unabhängigen ZG mit $E|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} V(X_n) < \infty \Rightarrow (X_n)_n$ erfüllt das **SGGZ**.

Satz 19

Sei $(X_n)_n$ Folge von unabhängigen ZG mit der gleichen Verteilung wie die ZG X (d.h. $E(X_n) = E(X)$, $V(X_n) = V(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (X_n)_n$ erfüllt das **SGGZ**, d.h.

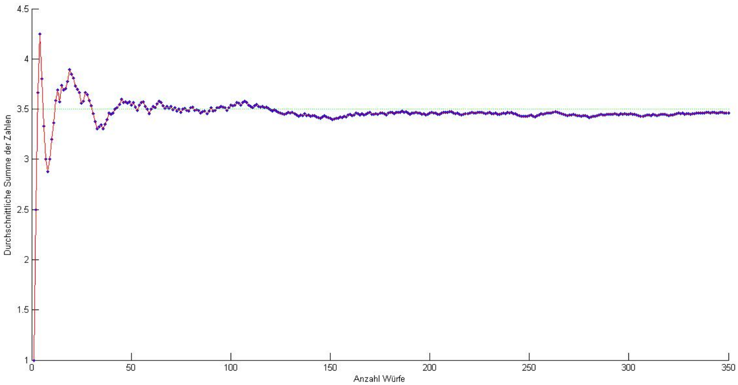
$$\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{f.s.} E(X).$$

Würfeln: Matlab Simulation Gesetz der großen Zahlen

```
clear all
clf
hold on
n=350;
x=unidrnd(6,1,n);
for i=1:n
 s(i)=sum(x(1:i))/i;
 y(i)=i;
 plot(y(i),s(i),'b.')
 plot(y(i),3.5,'g-')
end
plot(y,s,'r-')
xlabel('Anzahl Würfe')
ylabel('Durchschnittliche Summe der Zahlen')
```

$\Rightarrow$ x(1:7)=[1, 4, 6, 6, 2, 1 ,1]
$\Rightarrow$ s(1:7)=[1, 2.5, 3.6667, 4.25, 3.8, 3.3333, 3]

Gesetz der großen Zahlen



Satz 20

Sei A ein zufälliges Ereignis das in einem Experiment auftaucht; man wiederholt das Experiment n mal (unter denselben gegebenen Bedingungen).
Das Gesetz der großen Zahlen: je öfter man das Zufallsexperiment durchführt (also je größer n), desto besser approximiert die relative Häufigkeit $h_n(A)$ des Ereignisses A seine echte Wahrscheinlichkeit $P(A)$:

$$h_n(A) \xrightarrow{f.s.} P(A), \text{ wenn } n \to \infty.$$

In der Praxis: $h_n(A) \approx P(A)$, wenn n hinreichend groß ist!
Beweis: Man benutzt Satz 19.