Homogene DGL.

1) $y = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, x > 0$

$z = \frac{y}{x}, z = z(x)$

$y = z x \mid '$

$y' = z' x\ z$

$z' x + z = -z^2 + z$

$\left.\begin{array}{l} z' x = -z^2 \\ z' = \frac{dz}{dx} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} x = -z^2 \mid dx$

$x \neq 0$

$z^2 \neq 0$

$\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{x} dx \mid \int$

$\int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{1}{x} dx$

$-\frac{1}{z} = -\ln|x| + \ln k$

$-\frac{1}{z} = \ln |x|^{-1} \cdot k \mid (-1)$

$\frac{1}{z} = -\ln(x^{-1} k)$

$z = \frac{-1}{\ln(x^{-1} k)}$

$y = z x$

$y = \frac{-1}{\ln(x^{-1} k)} x, k \in \mathbb{R}$

$y(z) = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$ sing. Lösung für die Gl. in z ist

$y = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ eine sing. L. für die Gl. in y.

2) $\left\{\begin{array}{l} y' = \frac{y}{x+y}, x, y > 0 \\ y(1) = 1 \end{array}\right.$

$y' = \frac{y}{x+y}$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y} \;\Big|\cdot dx \right.$$

$$\left. dy = \frac{y}{x+y}\, dx \right) \to \text{keine DGL mit getrennten Var}$$

$$y' = \frac{y}{x+y}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+y}{x}}$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \;\Big|'$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{z}{1+z}$$

$$z'x = \frac{z}{1+z} - \frac{1+z}{z}$$

$$z'x = \frac{\cancel{z} - \cancel{z} - z^2}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{-z^2}{1+z} \;\Big|\cdot dx \; : x \neq 0$$

$$: \frac{z^2}{1+z} \neq 0$$

$$dz \cdot \frac{1+z}{z^2} = -\frac{dx}{x} \;\Big|\int$$

$$\int \frac{1+z}{z^2}\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{z^2} \right) dx = \int \frac{1}{z^2}\, dz + \int \frac{1}{z}\, dz = -\frac{1}{z} + \ln|z|$$

$$-\frac{1}{z} + \ln|z| = -\ln|x| + \ln k$$

$-\frac{1}{z} + \ln|z| = \ln x^{-1} \cdot k \rightarrow$ die allg. Lös. der DGL im implizit im z.

$-\frac{1}{\frac{y}{x}} + \ln\frac{y}{x} = \ln x^{-1} \cdot k$

$-\frac{x}{y} + \ln\frac{y}{x} = \ln x^{-1} k \Rightarrow$ die allg. Lös. der DGL in y im impl. F.

• $y(1) = 1 \Rightarrow x = 1, \ y = 1$

Einsetzen $\Rightarrow -1 + 0 = \ln k \Rightarrow \ln k = -1 \Rightarrow k = e^{-1}$

Die Lösung des Cauchyproblem

$$\boxed{-\frac{x}{y} + \ln\frac{y}{x} = \ln\frac{1}{xe}}$$

4. Lineare DGL 1 Ordnung

Die allgemeine Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

1) Falls $g(x) = 0$ heißt die DGL homogen

2) Falls $g(x) \neq 0$ heißt die DGL inhomogen

I Methode

1. Schritt

$y' + f(x) \cdot y = 0 \rightarrow$ die homogene DGL, eine DGL mit getrennten Var

$$y' = -f(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) \cdot y \Big| \cdot \frac{dx}{y} \quad y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx \ \Big| \int$$

$$\ln|y| = -\int f(x)\,dx + k$$

$$y = e^{-\int f(x)dx + k} = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{k}$$

$$y_0 = e^{-\int f(x)dx} \cdot k_1, \ e^{k} = k_1$$

die allg. L. der homogene DGL

3.

2. Schritt

y_p - eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Die Methode: Variation der Konstante

$$y_p = e^{-\int f(x)dx} \cdot k_1(x)$$

$$y_p' + f(x) \cdot y_p = g(x) \quad (\text{weil } y_p \text{ eine L ist})$$

$$\left(e^{-\int f(x)dx} \cdot k_1(x)\right)' + f(x) \cdot \left(e^{-\int f(x)dx} \cdot k_1(x)\right) = g(x)$$

$$\left(e^{-\int f(x)dx}\right)' \cdot k_1(x) + e^{-\int f(x)dx} \cdot k_1'(x) + f(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} \cdot k_1(x) = g(x)$$

$$\cancel{e^{-\int f(x)dx}(-f(x))k_1(x)} + e^{-\int f(x)dx} k_1' x + \cancel{f(x) e^{-\int f(x)dx} k_1(x)} = g(x)$$

$$e^{-\int f(x)dx} \cdot k_1'(x) = g(x)$$

$$k_1'(x) = \underbrace{g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}}_{P(x)}$$

$$k_1(x) = \int P(x)\, dx$$

$$y_p = e^{-\int f(x)dx} \cdot \int P(x)\, dx$$

3. Schritt

$$y = y_0 + y_p$$

Bsp.

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3x, \quad x > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 3x$$

1. Schritt

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0$$

$$y' = -\frac{1}{x} y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} y \quad \Big| \cdot dx \quad \Big| : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x} dx \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln k$$

$$y_0 = k \cdot x^{-1}$$

2. Schritt

$$y_p = k(x) \cdot x^{-1}$$

$$y_p' + \frac{1}{x} \cdot y_p = 3x$$

$$\left(k(x) \cdot x^{-1}\right)' + \frac{1}{x} k(x) x^{-1} = 3x$$

$$k'(x) \cdot x^{-1} + \cancel{k(x)(-1)} \cdot x^{-2} + \cancel{k(x)} x^{-2} = 3x$$

$k'(x) \cdot x^{-1} = 3x$

$k'(x) = 3x^2 \Rightarrow k(x) = \int 3x^2\,dx = \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} = x^3 + \underset{=0}{k_1}$

$y_p = x^3 \cdot x^{-1} = x^2$.

3. Schnitt:

$y = y_0 + y_p = k \cdot x^{-1} + x^2, \; k \in \mathbb{R}$

II Methode: die Methode des integrierenden Faktors

$y' + f(x)y = g(x) \;|\cdot \mu(x)$

$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

a) $\begin{cases} y' = -xy + 3x \\ y(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow y' + xy = 3x$

$y' + xy + 3x$

$f(x) = x$

$g(x) = 3x$

1. Schnitt

$y' + xy = 0$

$y' = -xy$

$\frac{dy}{dx} = -xy \;\Big|\cdot \frac{dx}{y}, \; y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = -x\,dx \;|\int$

$\int \frac{dy}{y} = -\int x\,dx$

$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + k$

$y_0 = e^{-\frac{x^2}{2} + k} = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^k = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1$

2. Schnitt:

$y_p = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1(x)$

$y_p' + xy_p = 3x$

$\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1(x)\right)' + x\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1(x)\right) = 3x$

$e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) \cdot \cancel{k_1(x)} + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1'(x) +$

$+ \cancel{x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1(x)} = 3x$

$e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1'(x) = 3x$

$k_1'(x) = 3x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

$k_1(x) = 3\int x e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$

$= 3\int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$

$= 3 e^{\frac{x^2}{2}}$

$y_p = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot 3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 3$

3. Schnitt

$y = y_0 + y_p = k_1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 3, \; k_1 \in \mathbb{R}$

$y(0) = 5$

$5 = k_1 + 3 \Rightarrow k_1 = 2$

$\boxed{y = 2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 3}$

5. Bernoullische DGL

$y' + f(x)y = g(x) \cdot y^\alpha$

$\alpha = 0 \Rightarrow$ lineare DGL 1. Ord.

$\alpha = 1 \Rightarrow y' + y(f(x) - g(x)) = 0 \rightarrow$ hom. lin. DGL.

$\alpha \neq 1, \alpha \neq 0$:

$y' + f(x)y = g(x) \cdot y^\alpha \quad | : y \neq 0$

$y' y^{-\alpha} + f(x) \underbrace{y^{1-\alpha}}_{z} = g(x)$

Subst. $y^{1-\alpha} = z$, $z = z(x)$

$(1-\alpha) y^{1-\alpha-1} \cdot y' = z'$

$(1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y' = z'$

$y^{-\alpha} \cdot y' = \frac{z'}{1-\alpha}$

$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x) z = g(x) \rightarrow$ lin. DGL 1. Ord.

$\Rightarrow z = \ldots \Rightarrow y = \ldots$

Bsp

$\begin{cases} y' = xy - 3xy^2 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$

$\alpha = 2$

$y' = xy - 3xy^2 \quad | : y^2 \neq 0$

$y' \cdot y^{-2} = xy^{-1} - 3x$

$z = y^{-1} \quad | '$

$z' = -y^{-2} \cdot y'$

$-z' = xz - 3x$

$z' = -xz + 3x$

1. Schritt

$z' = -xz$

$\frac{dz}{dx} = -xz \quad | \cdot dx, : z \neq 0$

$\frac{dz}{z} = -x\,dx$

$\ln|z| = -\frac{x^2}{2} + k$

$z = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot k_1$

2. Schritt

$z_p = \ldots$

$z = k_1 e^{-\frac{x^2}{2}} + 3$

$y^{-1} = z \Rightarrow y = z^{-1}$

$y = (k_1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 3)^{-1} \quad y(0) = \frac{1}{5} \Rightarrow k_1 = 2$

$y = (2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 3)^{-1}$