Seminar 6 - 2017

A1. Die Verteilungsfunktion der stetigen Zufallsgröße X ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \leq x < 2 \\ d, & x < 0, \\ e, & x \geq 2. \end{cases}$$

Man bestimme $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, wenn man weiss, dass

i) $P(1 < X < 2) = \frac{1}{2}$,
ii) $E(X) = 1$.

A2. Eine Schaltung hat 3 Komponenten, welche unabhängig voneinander funktionieren. Die Lebensdauer einer Komponente hat Exponential-Verteilung und man weiss, dass so eine Komponente durchschnittlich 3 Stunden funktioniert. Sei T die Lebensdauer des gesamten Systems. Wie die drei Komponenten verbunden sind, ist in den drei Bildern dargestellt:
a) Bild A (parallel),
b) Bild B (in serie),
c) Bild C.
Man bestimme die Verteilungsfunktion, die Dichtefunktion und den Mittelwert der Zufallsgröße T.

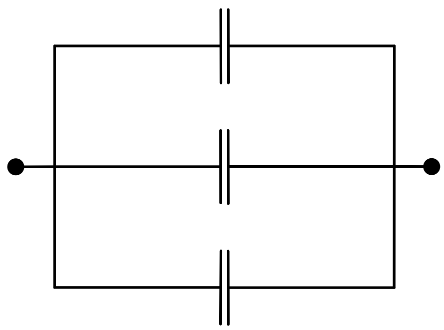

Bild A

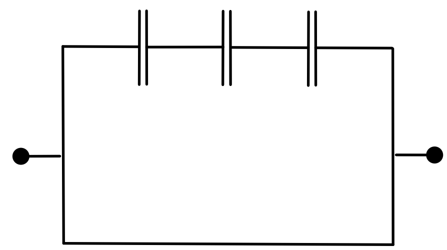

Bild B

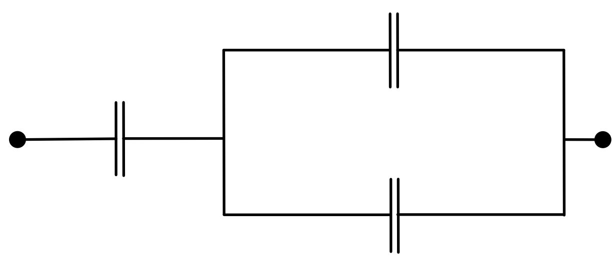

Bild C

A3. Der diskrete zufällige Vektor (X_1, X_2) hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

Man bestimme
a) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1 und X_2;
b) die Erwartungswerte von X_1 und X_2;
c) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_1 + X_2$ und $X_1 \cdot X_2$;
d) ob X_1 und X_2 abhängige oder unabhängige Zufallsgrößen sind;
e) $cov(X, Y)$.

A4. Seien $U, V \sim Unif[0, 1]$ unabhängige Zufallsgrößen. Man bestimme die Dichtefunktionen der Zufallsgrößen $U + V$ und $U \cdot V$.

A5. a) Sei X die Zufallsgröße, die anzeigt wie oft die Zahl 1 bei 3 Würfen eines fairen Würfels erhalten wurden. Man berechne den Erwartungswert von X.
b) Bei 432 Würfen von 3 fairen Würfeln wie oft taucht das Triplett (1,1,1) *durchschnittlich* auf?
A6. Sei $(p_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zahlen aus dem Intervall $(0,1)$ und sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen mit der Verteilung,

$$P(X_n = 0) = 1 - p_n, P(X_n = 1) = p_n \text{ für alle } n \geq 1.$$

Konvergiert fast sicher die Zufallsgröße

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - p_i) \quad (n \geq 1) \quad ?$$

Man begründe die Antwort.

A7. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrößen mit der gleichen Verteilung, d.h. $E(X_n) = m_1$, $V(X_n) = \sigma_1^2$ für alle $n \geq 1$ und sei $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgröße mit der gleichen Verteilung, d.h. $E(Y_n) = m_2 \neq 0$, $V(Y_n) = \sigma_2^2$ für alle $n \geq 1$. Konvergiert fast sicher die Zufallsgröße

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n} \quad (n \geq 1) \quad ?$$

Man begründe die Antwort.

Zusätzliche Übungen:

1. Die stetige Zufallsgröße X hat folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ cxe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$ Man bestimme $c \in \mathbb{R}$ und danach bestimme man die Streuung von X.

2. Der zufällige Vektor (X, Y) hat folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x, y > 0, \\ 0, & \text{sonst} . \end{cases}$

Man bestimme:
a) die Verteilungsfunktion des zufälligen Vektors (X, Y);
b) die Verteilungsfunktionen von X und Y;
c) die Dichtefunktionen von X und Y;
d) die Erwartungswerte von X und Y;
e) die Dichtefunktion der Zufallsgröße $X + Y$.
f) Sind die Zufallsgrößen X und Y abhängig oder unabhängig?

3. Sei X die Zufallsgröße, welche folgende Dichtefunktion hat $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$
Man bestimme die Dichtefunktionen folgender Zufallsgrößen: $2X + 1$, X^2, e^X und e^{X^2}.