Seminar 4

A1. Man weiss, dass 10% der hergestellten Produkte einer bestimmten Firma fehlerhaft sind. Die Produkte werden getestet bis man das erste fehlerhafte Produkt findet. Sei $X=$ Anzahl der getesteten Produkte **bevor** man das erste fehlerhafte Produkt findet. Man bestimme die Verteilungsfunktion von X und den Erwartungswert $E(X)$.

A2. Ein Teilchen bewege sich taktweise auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, und zwar springe es mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ einen Schritt nach rechts und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ einen Schritt nach links. Die Sprünge zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen unabhängig voneinander. Das Teilchen startet zum Zeitpunkt $n=0$ im Nullpunkt. Man bezeichne mit X_n die Koordinate des Teilchens zur Zeit $n \geq 0$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen nach $2n$ Schritten sich wieder im Startpunkt 0 befindet?

b) Bestimmen Sie $P(X_{2n}=m)$ für $m \in \mathbb{N}$.

A3. Der zufällige Radius einen Kreises hat gleichmäßge Verteilung in dem Intervall $[0,1]$, d.h. $R \sim \mathcal{U}[0,1]$. Man finde die Dichtefunktion für : (a) den Kreisumfang; (b) die Kreisfläche.

A4. Die Zeit in Minuten die ein bestimmtes System benötigt um neu zu starten ist eine zufällige Variable mit der Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,(10-x)^2 & : 0 < x < 10, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Man bestimme den Wert der Konstanten c !

(b) Man berechne die Verteilungsfunktion F_X!

(c) Man berechne den Erwartungswert $E(X)$.

(c) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das System zwischen 1 und 2 Minuten benötigt um neu zu starten. Man berechne $P(X < 3|X > 1)$.

A5. (Transformation einer Gleichverteilung) Sei X stetig gleichverteilt über [0, 1], d.h. $X \sim \mathcal{U}[0,1]$. Man bestimme die Dichtefunktion der zufälligen Variablen $Y := e^X$.

A6. (Transformation einer Normalverteilung) Sei X standard normalverteilt, d.h. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Man bestimme die Dichtefunktion der zufälligen Variablen: $Y := X^2$, $Z := 2X+1$.

A7. Die Lebensdauer in Jahren einer elektronischen Komponente ist eine zufällige Variable mit der Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^4} & : x \geq 1, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Man bestimme den Wert der Konstanten k.

(b) Man berechne die Verteilungsfunktion F_X.

(c) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die elektronischen Komponente mehr als 3 Jahre fehlerfrei funktioniert.