Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

5. Vorlesung - 2017

Unabhängige zufällige Variablen

Gegeben sind zwei ZG

$$X \sim \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}, Y \sim \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J}$$

Definition 9

Zwei **diskrete** Zufallsgrößen X, Y sind unabhängig genau dann, wenn für alle $i \in I, j \in J$ gilt

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Beispiel: Man wirft zwei vierseitige Würfel (Zahlen:1,2,3,4). Seien X und Y die Zahlen, die auf dem ersten, bzw. zweiten Würfel angezeigt werden. X und Y sind unabhängige ZG.
Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X + Y$ und $X \cdot Y$.

Gegeben sind n ZG

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} x^1_{i_1} \\ p^1_i \end{pmatrix}_{i_1 \in I_1}, \ldots, X_n \sim \begin{pmatrix} x^n_{i_n} \\ p^n_i \end{pmatrix}_{i_n \in I_n}$$

Definition 9*

n **diskrete** Zufallsgrößen $X_1, ..., X_n$ sind unabhängig genau dann, wenn für alle $i_1 \in I_1, ..., i_n \in I_n$ gilt

$$P(X_1 = x^1_{i_1}, \ldots, X_n = x^n_{i_n}) = P(X_1 = x^1_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x^n_{i_n}).$$

Definition 10

Der **Erwartungswert** oder **Mittelwert** einer diskreten Zufallsgröße

$$X \sim \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I} \qquad \text{mit } p_i = P(X = x_i), i \in I$$

ist gegeben durch

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i),$$

vorausgesetzt, dass $\sum_{i \in I} |x_i| P(X = x_i) < \infty$.

- Der Erwartungswert charakterisiert die zentrale Tendenz der Werte der Zufallsgröße X.
- In Octave/Matlab: *mean*(x), x= Vektor

Satz 9 - Eigenschaften des Erwartungswertes

Es seien X und Y diskrete Zufallsgrößen. Dann gilt

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (Additivität)
2. $E(aX) = aE(X)$ für $a \in \mathbb{R}$ (Homogenität)
3. $|E(X)| \leq E(|X|)$
4. $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ (Monotonie)
5. $E(\mathbb{I}_A) = P(A)$ für ein Ereignis $A \in \mathcal{K}$
6. ist $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $H(X)$ ZG ist , dann gilt

$$E(H(X)) = \sum_{i \in I} H(x_i) P(X = x_i),$$

falls $\sum_{i \in I} |H(x_i)| P(X = x_i) < \infty$.

Beispiele: Man berechne den Erwartungswert der ZG X: für $X \sim Unif(n), X \sim Bernoulli(p), X \sim Poisson(\lambda), X \sim Bino(n, p)$.