Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

1. und 2. Vorlesung - 2017

Im Alltag ...

Laut den meteorologischen **Vorhersagen** wird es morgen regnen.

Ob ich **riskiere** und die **Wette** verlieren werde?

Ich werde mit **Sicherheit** gewinnen!

Ist das wirklich **unmöglich**?

Ist dies tatsächlich **möglich**???

Welch ein Zufall!

Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Studium der zufälligen Phänomene beschäftigt.

- *zufällig* = unvorhersehbar, unbeabsichtigt
- *aleatorius* (lat.) = zufällig
- *alea* (lat.) = Spielwürfel; Würfelspiel

$\hookrightarrow$ man misst die Chancen für Erfolg oder das Risiko für Misserfolg von Ereignissen

Anwendungsgebiete:

$\rightarrow$ Glückspiele, Wetten, Loto
$\rightarrow$ meteorologische Vorhersagen
$\rightarrow$ Meinungsumfragen
$\rightarrow$ Versicherungsmathematik (Risikomessungen im Versicherungswesen und im Bankensystem)
$\rightarrow$ Kryptographie (Verschlüsselungsverfahren)
$\rightarrow$ Verarbeitung von Informationen, Komprimierbarkeit von Daten
$\rightarrow$ zufällige Algorithmen (z.B. Monte-Carlo-Methoden, Las-Vegas-Methoden
$\rightarrow$ Simulationen, Computerspiele

Zufällige Experimente (Versuche) und Ereignisse

Das zufällige Experiment ist ein Experiment dessen Ergebnis nicht vorhesehbar ist.
Das zufällige Ereignis ist das Ergebnis eines Experiments.

- Würfeln mit 2 Spielwürfeln
$\rightarrow$ beide Spielwürfel zeigen 1 an
- Wurf einer Münze
$\rightarrow$ die Münze zeigt Zahl an
- Ziehen einer Spielkarte
$\rightarrow$ eine 3 wurde gezogen
- Lottoziehung
$\rightarrow$ die Zahl 23 wurde erhalten

Grundbegriffe

• das unmögliche Ereignis, mit $\emptyset$ bezeichnet, taucht in der Durchführung des Experiments nie auf
• das sichere Ereignis ist das Ereignis das bei jeder Durchführung des Experiments auftaucht

• Grundraum (Ergebnismenge), mit Ω bezeichnet, ist die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments

◇ der Grundraum kann endlich oder unendlich sein

• wenn A eine Teilmenge von Ω ist, $A \subseteq \Omega$, dann wird A zufälliges Ereignis genannt, die Elemente von Ω heissen elementare Ereignisse

Analogie zwischen Ereignissen und Mengen!

Experiment: Man wirft einen Spielwürfel
Grundraum: $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$
e_i: die Zahl i ($i = 1, \ldots, 6$) wurde erhalten
$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ elementare Ereignisse
A: eine gerade Zahl wurde erhalten $\Rightarrow A = \{e_2, e_4, e_6\}$
$\bar{A}$: eine ungerade Zahl wurde erhalten $\Rightarrow \bar{A} = \{e_1, e_3, e_5\}$

Operationen mit Ereignissen

- Die **Vereinigung** der Ereignisse A und B

$$A \cup B = \{e \in \Omega \; : \; e \in A \, \text{oder} \, e \in B\}.$$

- Der **Durchschnitt** der Ereignisse A und B:

$$A \cap B = \{e \in \Omega \; : \; e \in A \, \text{und} \, e \in B\}.$$

- $\bar{A}$ ist das **Komplement** des Ereignisses A , d.h. $\overline{A}$ enthält alle Elementarereignisse die nicht in A sind.

- $A, B \subseteq \Omega$ sind disjunkte Ereignisse, wenn $A \cap B = \emptyset$

- Die **Differenz** der zufälligen Ereignisse A und B

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

- Es gilt $A \cup \bar{A} = \Omega, \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset.$

Beziehungen zwischen Ereignissen

• Aus dem Ereignis A **folgt** das Ereignis B, wenn jedes Element aus A auch Element aus B ist, d.h. $A \subseteq B$.

• Wenn aus A B folgt und aus B folgt A, dann sind die beiden Ereignisse A und B **gleich** : $A = B$.

Eigenschaften
$A, B, C \subseteq \Omega$

Die Vereinigung und Durchschnitt sind **kommutativ**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

assoziativ

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

und **distributiv**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

erfüllen die Gesetze von De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Es gilt $\bar{\bar{A}} = A$.

Relative und absolute Häufigkeit

Sei A ein zufälliges Ereignis das in einem Experiment auftaucht; man wiederholt das Experiment n mal (unter denselben gegebenen Bedingungen) und bezeichnen mit k wie oft das Ereignis A auftaucht; die relative Häufigkeit des Ereignisses A ist die Zahl

$$h_n(A) = \frac{k}{n}$$

k ist die absolute Häufigkeit des Ereignisses A

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten ein Experiment welches endlich viele, gleichwahrscheinliche Ergebnisse hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintretet ist

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle für das Eintreten von } A}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle innerhalb des Experiments}}.$$

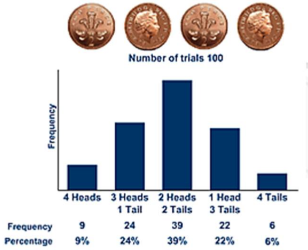
Nach wiederholtem Durchführen des Experiments (n hinreichend gross), unter denselben Bedingungen, ist die relative Häufigkeit $h_n(A)$ des Ereignisses A ungefähr gleich mit $P(A)$

$$h_n(A) \approx P(A), \text{ wenn } n \to \infty.$$

Experiment: Man wirft 4 Münzen.

Das Experiment wird $n = 100$ mal wiederholt.
Ereignis A: *die 4 Münzen zeigen 3 mal Zahl an*

$$f_n(A) = ?, \qquad P(A) = ?$$



$f_n(A) = \frac{22}{100} = 0.22$

$\Omega = \{(K,K,K,K),(K,Z,Z,Z),\ldots,(Z,Z,Z,K),(Z,Z,Z,Z)\}$

$A = \{(K,Z,Z,Z),(Z,K,Z,Z),(Z,Z,K,Z),(Z,Z,Z,K)\}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{2^4} = 0.25$

Würfelspiel (XVII. Jh.): Der Provinzadelige Chevalier de Méré war ein leidenschaftlicher Spieler. Gerne verführte er am Pariser Hof seine Mitspieler zu folgendem Würfelspiel:

A. *Wir werfen einen Würfel viermal. Wenn eine oder mehrere Sechsen dabei sind, gewinne ich. Wenn keine Sechs dabei ist, gewinnen Sie.*

Tatsächlich gewann der Chevalier mit diesem Spiel regelmäßig Geld. Er dachte sich eine neue Variante aus, die ebenso lukrativ sein sollte:

B. *Wir werfen ein Paar von Würfeln 24 mal. Wenn dabei eine Doppel-Sechs oder mehrere sind, gewinne ich. Wenn keine Doppel-Sechs dabei ist, gewinnen Sie.*

Man kann zeigen, dass $P(A) \approx 0.5177$ und $P(B) \approx 0.4914$. Obwohl die Differenz zwischen den beiden Wahrscheinlichkeiten klein ist, gewinnt der Spieler der Variante A öfter als der Spieler der Variante B.

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

1933 hat der russische Mathematiker **Andrei Nikolaevici Kolmogorov** im Buch "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit eingeführt.

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ so dass: jedem zufälligen Ereignis $A \in \mathcal{K}$ der Wert $P(A)$ zugeordnet wird

$\mathcal{K}$ hat die Struktur einer σ-Algebra (siehe Definition 1)

P erfüllt bestimmte Axiome (siehe Definition 2)

σ-Algebra

Definition 1

Eine Familie $\mathcal{K}$ von Ereignissen aus der Grundmenge Ω wird **$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** genannt, wenn:

(i) $\mathcal{K} \neq \emptyset$;

(ii) wenn $A \in \mathcal{K}$, dann $\overline{A} \in \mathcal{K}$;

(iii) wenn $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, dann $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.

Das Paar $(\Omega, \mathcal{K})$ nennt man **messbarer Raum**.

Beispiele:

- $A \subset \Omega \Rightarrow \mathcal{K} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra.
- Die Menge aller Teilmengen aus Ω ist eine σ-Algebra und wird mit $\mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet. Wenn Ω endlich ist, wie viele Elemente hat $\mathcal{P}(\Omega)$?

Eigenschaften einer σ-Algebra

Mit Hilfe von Definition 1 und den Gesetzen von De Morgan kann man beweisen:

Satz 1

Wenn $\mathcal{K}$ eine σ-Algebra in Ω ist, so gelten folgende Eigenschaften:

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$;

(2) $A, B \in \mathcal{K} \Longrightarrow A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{K}$;

(3) $A_n \in \mathcal{K},\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.

σ-Algebra

Satz 2

Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von Teilmengen aus Ω. Man definiert

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}\}. \tag{1}$$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{A})$ ist die kleinste σ-Algebra in $\mathcal{P}(\Omega)$, die $\mathcal{A}$ enthält.

Beweisidee:

- $\sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, weil $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra ist welche $\mathcal{A}$ enthält
- $\sigma(\mathcal{A})$ ist eine σ-Algebra (anhand Def. 1)
- $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ und $\sigma(\mathcal{A})$ is minimal, laut (1).

Definition 2

$\sigma(\mathcal{A})$ heisst die von der Menge $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra

Spezielle σ-Algebren: Borel-σ-Algebren

- Seien $\Omega := [a, b]$ (mit $a < b$)
  $\mathcal{A}$=die Menge aller abgeschlossenen Intervalle aus $[a, b]$

$\mathcal{B}([a, b]) := \sigma(\mathcal{A})$ heisst Borel-σ-Algebra auf $[a, b]$ und ist die kleinste σ-Algebra, die die Menge aller abgeschlossenen Intervalle aus $[a, b]$ enthält

$\Rightarrow \Big([a, b], \mathcal{B}([a, b])\Big)$ ist ein messbarer Raum

- Seien $\Omega := \mathbb{R}$
  $\mathcal{A}$=die Menge aller abgeschlossenen Intervalle aus $\mathbb{R}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{A})$ heisst Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und ist die kleinste σ-Algebra, die die Menge aller abgeschlossenen Intervalle aus $\mathbb{R}$ enthält

$\Rightarrow \Big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big)$ ist ein messbarer Raum

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

Definition 3

Sei $\mathcal{K}$ eine σ-Algebra in Ω. Eine Funktion $P : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ wird Wahrscheinlichkeitsmaß genannt, wenn folgende Axiome gelten:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{K}$;

(iii) jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Ereignissen (d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$) aus $\mathcal{K}$ gilt

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ heisst **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes

Satz 3

Sei $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es gilt:

(1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ şi $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\emptyset) = 0$

(3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$, d.h. P ist monoton.

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Übung: $P(A \cup B \cup C) =$???

Folgen von Ereignissen aus der σ-Algebra $\mathcal{K}$

$(A_n)_n$ ist eine **wachsende Folge von Ereignissen**, wenn $A_n \in \mathcal{K}$ und

$$A_n \subseteq A_{n+1}$$

$(B_n)_n$ ist eine **fallende Folge von Ereignissen**, wenn $B_n \in \mathcal{K}$ und

$$B_{n+1} \subseteq B_n$$

Beispiele:

1. Seien $\Omega := [0,1], \mathcal{K} := \mathcal{B}([0,1])$ Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$

$$A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right], n \geq 4 \qquad \Rightarrow \bigcup_{n=4}^{\infty} A_n =?$$

2. Seien $\Omega = [-1,2], \mathcal{K} := \mathcal{B}([-1,2])$ Borel-σ-Algebra auf $[-1,2]$

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], n \geq 1 \qquad \Rightarrow \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n =?$$

Satz 4

Sei $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es gelten folgende Eigenschaften:

(1) Wenn $(A_n)_n$ eine wachsende Folge von Ereignissen aus $\mathcal{K}$ ist, dann

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

(2) Wenn $(B_n)_n$ eine fallende Folge von Ereignissen aus $\mathcal{K}$ ist, dann

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big).$$

Beispiel

1. $\Omega := [0,1]$ Grundraum, $\mathcal{K} := \mathcal{B}([0,1])$ Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$; sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1]$, d.h. für jede $\alpha < \beta$ aus $[0,1]$ berechnet man

$$P\Big([\alpha,\beta]\Big) = P\Big([\alpha,\beta)\Big) = P\Big((\alpha,\beta]\Big) = P\Big((\alpha,\beta)\Big) := \beta - \alpha$$

P entspricht dem Lebesgue Maß

$$\text{für } A_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right], n \geq 4 \qquad \Rightarrow P(A_n) = ?$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=4}^{\infty} A_n\right) = ?$$