Labor 7 - 2017

A1. Gegeben sind $r, N \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$.

Bei der Durchführung eines Experiments taucht das Ereignis A ("Erfolg") mit Wahrscheinlichkeit p auf und $\bar{A}$ ("Mißerfolg") mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Man wiederholt das Experiment bis das erste Mal A ("Erfolg") auftaucht.
Sei X die Zufallsgröße, welche anzeigt wie oft $\bar{A}$ ("Mißerfolg") auftaucht bis zum ersten Mal A ("Erfolg") auftaucht; dieses ist die geometrische Verteilung.

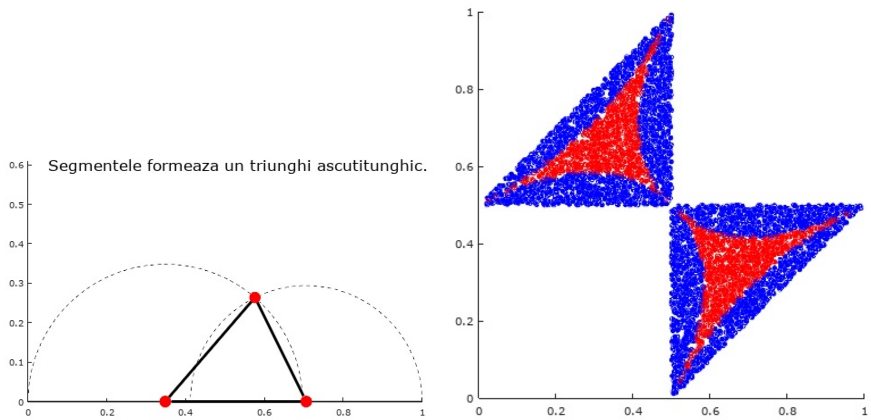
$$X \sim Geo(p) \iff X \sim \begin{pmatrix} k \\ p(1-p)^k \end{pmatrix}_{k=0,1,2,\ldots}$$

Zufällige Werte: *geornd* $\longrightarrow$ Statistics Package Octave/Matlab.
Sei Z die Zufallsgröße, welche anzeigt wie oft $\bar{A}$ ("Mißerfolg") auftaucht bis zum r-ten Auftauchen vom Ereignis A ("Erfolg"); dieses ist die negative Binomialverteilung $BN(r,p)$ (Pascal Verteilung):

$$Z \sim BN(r,p) \iff Z \sim \begin{pmatrix} k \\ C_{r+k-1}^{k} p^r (1-p)^k \end{pmatrix}_{k=0,1,2,\ldots}$$

Zufällige Werte: *nbinrnd* $\longrightarrow$ Statistics Package Octave/Matlab.
Ohne *geornd* und *nbinrnd* zu benutzen, simuliere man N zufällige Werte für
a) $X \sim Geo(p)$;
b) $Z \sim BN(r,p)$.
Anwendung: a) Zwei Sportler zielen unabhängig auf eine Zielscheibe. $p_1 = 0.8$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Sportler das Zentrum der Zielscheibe trifft, bzw. $p_2 = 0.75$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Sportler das Zentrum der Zielscheibe trifft. Man zielt auf die Scheibe bis das Zentrum der Scheibe vom ersten oder zweiten Sportler getroffen wurde. Sei V die Zufallsgröße, welche anzeigt wie oft das Zentrum der Scheibe verfehlt wurde, bis das Zentrum der Scheibe vom ersten oder zweiten Sportler getroffen wurde.
b) Ein dritter Sportler zielt auf die Scheibe bis er das Zentrum der Scheibe zum zweiten Mal trifft. Sei U die Zufallsgröße, welche anzeigt wie oft das Zentrum der Scheibe verfehlt wurde, bis das Zentrum der Scheibe zwei Mal vom dritten Sportler getroffen wurde. $p_3 = 0.7$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Sportler das Zentrum der Zielscheibe trifft.
Man simuliere zufällige Werte für V und U. Man schätze die Erwartungswerte von V und U.
A2. (*Aufgabe aus "Tractatus de ratiociniis in aleae ludo" von Christian Huyghens*) Zwei Spieler A und B werfen alternativ zwei Würfel. Spieler A gewinnt, falls die Summe der Zahlen 6 ist und Spieler B gewinnt falls die Summe der Zahlen 7 ist. Spieler A beginnt das Spiel. Man schätze anhand von Simulierungen die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A gewinnt (Antwort: $\frac{30}{61}$).
A3. Man wählt zufällig zwei Zahlen $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit $x_1 \le x_2$. Das Intervall $[0,1]$ wird in drei Teilintervalle $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, 1]$ geteilt.
a) Falls die Längen der drei Teilintervalle ein Dreieck bilden, zeichne man ein Dreieck und gebe an, ob es spitzwinklig, stumpfwinklig oder rechtwinklig ist.
b) Man simuliere $N(= 100, 1000)$ Werte für x_1 und x_2. Man gebe an, wie viele Werte den Seitenlängen eines Dreiecks entsprechen und von diesen wie viele ein spitzwinkliges Dreieck bilden. Anhand der erhaltenen Ergebnisse, schätze man die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, dass die drei Längen einem spitzwinkligen

Dreieck entsprechen, *wenn man weiss*, dass die Längen ein Dreieck bilden .
c) Man wähle $N(= 100, 1000)$ zufällige Punkte im Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Man zeichne mit rot diejenigen Punkte deren Koordinaten (x_1, x_2) das Intervall $[0, 1]$ in drei Teilintervalle teilen dessen Längen ein spitzwinkliges Dreieck bilden, und mit blau diejenigen Punkte deren Koordinaten (x_1, x_2) das Intervall $[0, 1]$ in drei Teilintervalle teilen dessen Längen ein stumpfwinkliges oder rechtwinkliges Dreieck bilden. Anhand der Anzahl der roten und blauen Punkte, schätze man die bedingte Wahrscheinlichkeit von b).



Laborator 7 - 2017

A1. Se dau r şi N numere naturale, precum şi $p \in (0, 1)$.

La execuţia unui experiment poate să apară evenimentul A ("succes") cu probabilitatea dată p, iar $\bar{A}$ ("insucces") cu probabilitatea $1 - p$. Se repetă experimentul până la apariţia primului "succes".
Fie X variabila aleatoare, care indică numărul de "insuccese" până la apariţia primului "succes"; aceasta este distribuţia geometrică.

$$X \sim Geo(p) \iff X \sim \begin{pmatrix} k \\ p(1-p)^k \end{pmatrix}_{k=0,1,2,...}$$

Valori aleatoare: *geornd* din Statistics Package Octave/Matlab.
Fie Z variabila aleatoare, care indică numărul "insucceselor" până la apariţia "succesului" de rang r; aceasta este o variabilă aleatoare cu distribuţia binomial negativă $BN(r, p)$ (sau distribuţia Pascal):

$$Z \sim BN(r, p) \iff Z \sim \begin{pmatrix} k \\ C_{r+k-1}^k p^r (1-p)^k \end{pmatrix}_{k=0,1,2,...}$$

Valori aleatoare *nbinrnd* din Statistics Package Octave/Matlab.
Fără a folosi *geornd* şi *nbinrnd*, să se scrie o funcţie care generează N numere care
a) reprezintă valorile unei variabile aleatoare X geometric distribuite $Geo(p)$;
b) reprezintă valorile unei variabile aleatoare Z cu distribuţia binomial negativă $BN(r, p)$.
Aplicaţie: a) Doi jucători trag alternativ (şi independent) la o ţintă. Probabilitatea ca primul jucător să nimerească ţinta este $p_1 = 0.8$, respectiv $p_2 = 0.75$ ca al doilea să nimerească ţinta. Se trage la ţintă până când ţinta este nimerită de primul sau al doilea jucător. Fie V variabila aleatoare care indică de câte ori ţinta nu a fost nimerită de niciun jucător, până când ţinta este nimerită de primul sau al doilea

jucător.
b) Un al treilea jucător trage (singur) la ţintă până când ţinta este nimerită a doua oară. Fie U variabila aleatoare care indică de câte ori al treilea jucător ratează ţinta, până când nimereşte ţinta a doua oară. Probabilitatea de a nimeri ţinta la un joc este $p_3 = 0.7$.
Simulaţi valori posibile pentru variabilele aleatoare V şi U. Estimaţi valorile medii ale variabilelor aleatoare V şi U.
A2. (*Problema lui Christian Huyghens din "Tractatus de ratiociniis in aleae ludo"*) Doi jucători A şi B aruncă alternativ două zaruri. Jucătorul A va câştiga dacă suma zarurilor este 6, iar jucătorul B va câştiga dacă suma este 7. Se stabileşte că A începe jocul.

a) Arătaţi că probabilitatea de a câştiga jucătorul A este $\frac{30}{61}$.

b) Simulaţi numeric acest joc şi analizaţi frecvenţa relativă obţinută.

A3. Se aleg aleator două numere din intervalul $[0,1]$. Notăm cu x_1 şi x_2 numerele alese astfel încât $x_1 \leq x_2$. Numerele împart segmentul $[0,1]$ în trei segmente: $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, 1]$.
a) Simulaţi grafic alegerea numerelor x_1 şi x_2. În cazul în care segmentele determinate de x_1 şi x_2 formează un triunghi, să se deseneze un triunghi corespunzător şi să precizeze tipul triunghiului: ascuţitunghic, obtuzunghic sau dreptunghic (a se vedea desenul de mai jos).
b) Simulaţi de $N(= 100, 1000)$ ori alegerea numerelor x_1 şi x_2. Afişaţi de câte ori segmentele formează un triunghi şi dintre acestea de câte ori segmentele formează un triunghi ascuţitunghic. Folosind rezultatele obţinute, estimaţi *probabilitatea condiţionată* ca segmentele să formeze un triunghi ascuţitunghic, ştiind că segmentele formează un triunghi.
c) Alegeţi aleator $N(= 100, 1000)$ puncte în pătratul $[0,1] \times [0,1]$. Desenaţi cu roşu punctele ale căror coordonate, considerate ca numere în intervalul $[0,1]$, împart segmentul $[0,1]$ în trei segmente care formează un triunghi ascuţitunghic, iar cu albastru cele care determină un triunghi obtuzunghic sau dreptunghic (a se vedea figura de mai jos). Folosind numerele de puncte roşii şi albastre, estimaţi probabilitatea condiţionată de la subpunctul b).