Labor 5 - 2017

A1. Seien $n, N \in \mathbb{N}^*$ und $p \in (0,1)$. Ohne die Befehle *randsample* oder *binornd* zu benutzen, schreibe man eine Funktion, welche:

(1) n Werte 0 und 1 generiert, so dass die Wahrscheinlichkeit 1 zu erhalten gleich p ist und die Wahrscheinlichkeit 0 zu erhalten gleich $1-p$ (man generiert eigentlich zufällige Werte für eine Bernoulli verteilte Zufallsgröße);

$$X \sim Bernoulli(p) \Longleftrightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix};$$

(2) N Werte einer binomial verteilten Zufallsgröße generiert

$$X \sim Bino(n,p) \Longleftrightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ (1-p)^n & np(1-p)^{n-1} & \dots & C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}.$$

(3) In einem Computerpool sind 15 Rechner. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neuer Virus einen Rechner angreift ist 0.4, unabhängig von anderen Rechnern. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Virus a) höchstens 10 Rechner; b) mindestens 10 Rechner; c) genau 10 Rechner angreift?

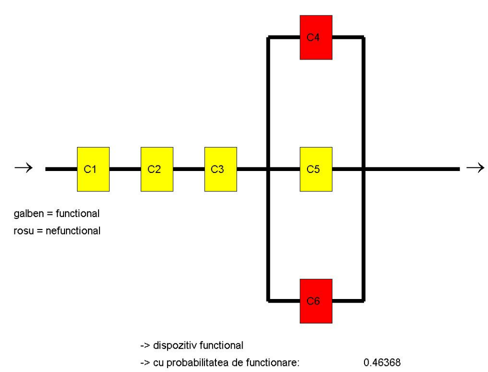
A2. (1) Man betrachtet eine Schaltung mit n Komponenten, welche unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$ funktionieren (z.B. $p = [0.8, 0.4, 0.6, 0.5, 0.9, 0.7]$). Welches ist die Warscheinlichkeit, dass die Schaltung funktioniert, wenn alle Komponenten a) in Serie; b) parallel geschaltet sind?

Bemerkung: Wenn $C_1, ..., C_n$ unabhängige Ereignisse sind $\Longrightarrow \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n$ sind unabhängige Ereignisse

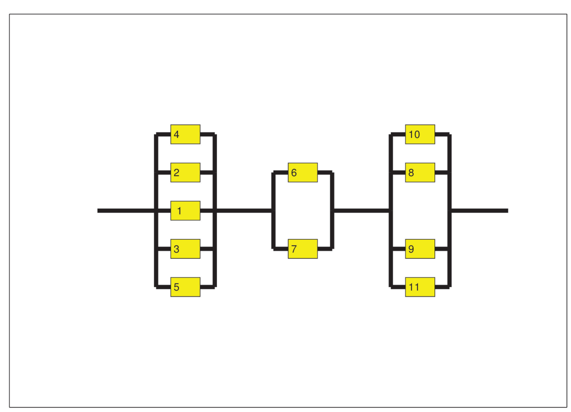
$$\Longrightarrow P(C_1 \cap \dots \cap C_n) = P(C_1) \cdot \dots \cdot P(C_n)$$

$$\Longrightarrow P(C_1 \cup \dots \cup C_n) = 1 - P(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_n) = 1 - (1 - P(C_1)) \cdot \dots \cdot (1 - P(C_n)).$$

(2) Man betrachtet eine Schaltung mit 6 Komponenten, welche unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_6$ funktionieren (z.B. $p = [0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.6, 0.5]$) und wie in dem Bild geschaltet sind. Man simuliere zufällige Situationen in welchen die Komponenten funktionieren oder nicht, anhand der Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_6$. Man gebe in jedem Fall an, ob die Schaltung funktioniert und man gebe die Wahrscheinlichkeit an mit welcher die Schaltung funktioniert.

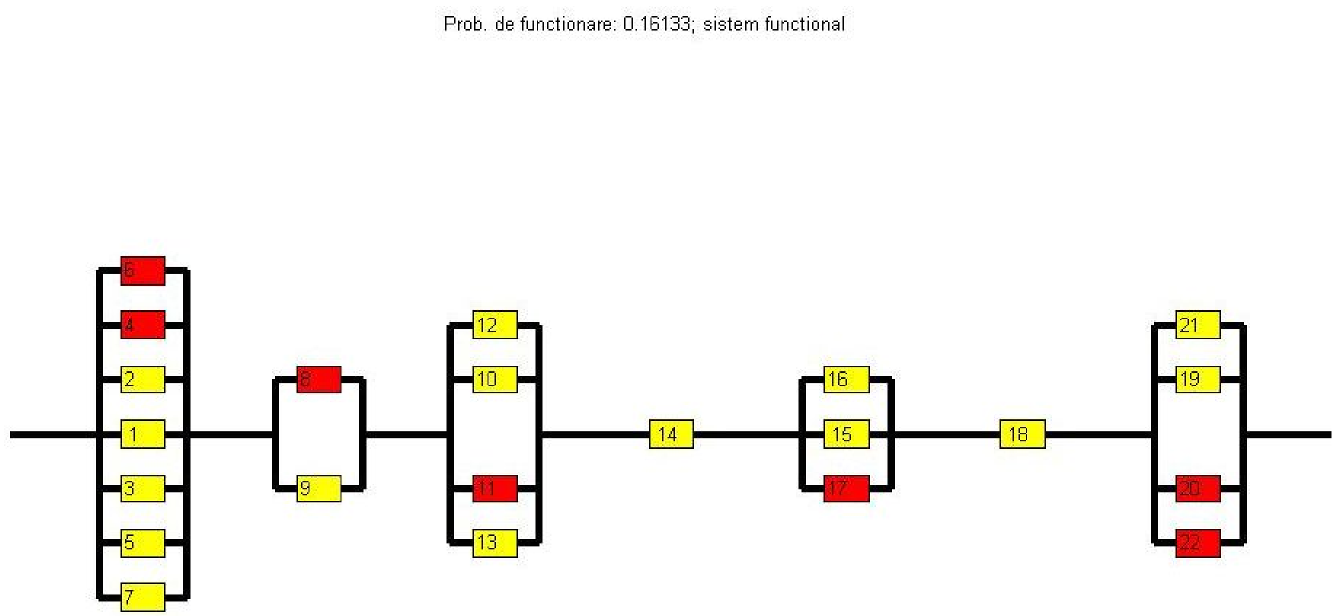


(3) Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und k Zahlen $i_1, ..., i_k \in \mathbb{N}$ so dass $i_1 + \dots + i_k = n$. Man betrachtet die Schaltung mit n Komponenten, welche unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$ funktionieren und die wie folgt geschaltet sind: die k Gruppen G_j, $j = \overline{1,k}$, sind eigentlich Parallelschaltungen mit je i_j Komponenten. Die Gruppen G_j $(j = \overline{1,k})$, sind in Serie geschaltet, z.B. in dem nebenstehenden Bild : $n = 11$, $k = 3$, $i_1 = 5$, $i_2 = 2$, $i_3 = 4$.



Man zeichne und simuliere zufällige Situationen in denen die Komponenten funktionieren oder nicht (im Bild sind alle funktionafähig). Man gebe an ob die gesamte Schaltung funktioniert oder nicht. Man berechne die Wahrscheinlichkeit mit welcher die gesamte Schaltung funktioniert.

Beispiel: $n = 22, k = 7$ (rot= funktioniert nicht; gelb= funktioniert)



Laborator 5 - 2017

A1. Se dau: n şi N numere naturale (nenule) şi $p \in (0,1)$. Fără a folosi comanda *randsample* sau *binornd*, să se scrie o funcţie :

(1) care generează n numere 0 şi 1, astfel încât probabilitatea de apariţie a lui 1 să fie egală cu p, iar probabilitatea de apariţie a lui 0 să fie $1-p$ (de fapt, se generează n valori pentru o variabilă aleatoare de tip Bernoulli);

$$X \sim Bernoulli(p) \Longleftrightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

(2) care generează N numere, care reprezintă valorile unei variabile aleatoare binomial distribuite

$$X \sim Binomial(n,p) \Longleftrightarrow X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ (1-p)^n & np(1-p)^{n-1} & \dots & C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

(3) O reţea de laborator este compusă din 15 calculatoare. Reţeaua a fost atacată de un virus nou, care atacă un calculator cu o probabilitatea 0.4, independent de alte calculatoare. Care este probabilitatea ca virusul a atacat a) cel mult 10 computere; b) cel puţin 10 calculatoare; c) exact 10 calculatoare.

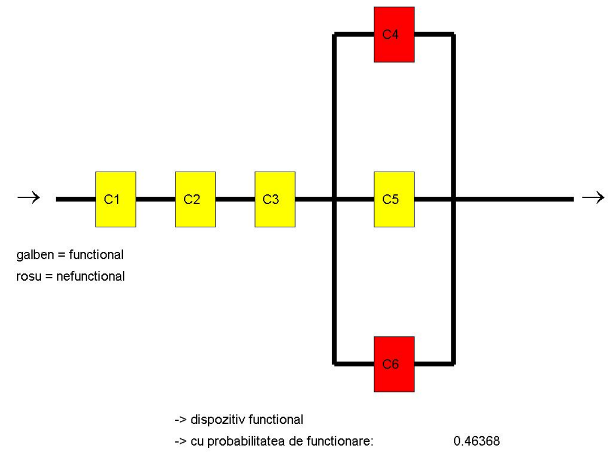
A2. **(1)** Se consideră un circuit format din n componente, care funcţionează independent una de alta, cu probabiltătile de funcţionare $p_1, \dots, p_n$ (de exemplu $p = [0.8, 0.4, 0.6, 0.5, 0.9, 0.7]$). Care este probabilitatea de funcţionare a sistemului dacă a) toate componentele sunt legate în serie;
b) toate componentele sunt legate în paralel?

Observaţie: Dacă $C_1, ..., C_n$ sunt evenimente aleatoare independente $\Longrightarrow \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_n$ sunt independente

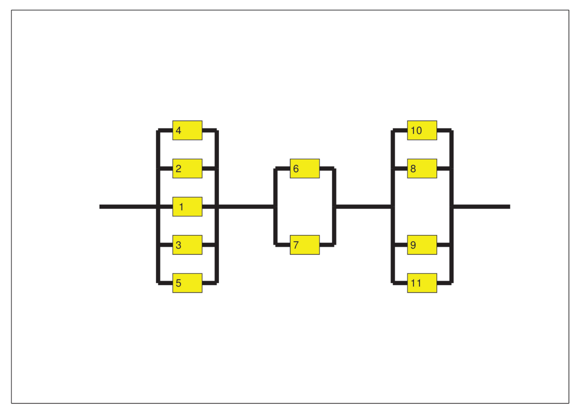
$$\Longrightarrow P(C_1 \cap \ldots \cap C_n) = P(C_1) \cdot \ldots \cdot P(C_n)$$

$$\Longrightarrow P(C_1 \cup \ldots \cup C_n) = 1 - P(\bar{C}_1 \cap \ldots \cap \bar{C}_n) = 1 - (1 - P(C_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(C_n)).$$

(2) Se consideră un circuit format din 6 componente, care funcţionează independent una de alta, cu probabiltăţile de funcţionare $p_1, \ldots, p_6$ (de exemplu $p = [0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.6, 0.5]$) şi sunt legate conform figurii alăturate.
Folosind funcţia de la aplicaţia A1, să se simuleze mai multe situaţii, în care componentele funcţionează (sau nu), folosind probabilităţile $p_1, ..., p_6$. Să se indice dacă sistemul este funcţional sau nu şi să se calculeze probabilitatea de funcţionare.



(3) Fie n număr natural, nenul, fie k numere naturale nenule $i_1, ..., i_k$ astfel încât $i_1 + \cdots + i_k = n$. Se consideră un circuit format din n componente, care funcţionează independent una de alta, cu probabiltăţile de funcţionare $p_1, \ldots, p_n$ şi care sunt legate în felul următor. Mai exact, se consieră k grupuri G_j, $j = \overline{1, k}$, formate din i_j componente legate în paralel. Apoi grupurile G_j ($j = \overline{1, k}$), sunt legate în serie. De exemplu în figura alăturată avem: $n = 11$, $k = 3$, $i_1 = 5$, $i_2 = 2$, $i_3 = 4$.
Folosind funcţia de la aplicaţia A1 şi formulele de la A2 să se deseneze şi să se simuleze mai multe situaţii, în care componentele funcţionează sau nu funcţionează (în figura alăturata toate sunt funcţionale), folosind probabilităţile $p_1, ..., p_n$. Să se indice dacă sistemul este funcţional sau nu şi să se calculeze probabilitatea de funcţionare a sistemului.



Alt exemplu: $n = 22, k = 7$ (roşu= nefuncţional, galben=funcţional)

Prob. de functionare: 0.16133; sistem functional