Labor 9 - 2017

Generieren von Zufallszahlen (Pseudozufallszahlen)

P1. Man erstelle Programme welche zufällige Werte für die Verteilungen, welche in I,II,III, IV und V vorgestellt werden. Man schätze die zugehörigen Mittelwerte.

I. Generieren von Zufallszahlen, welche eine gegebene, stetige Verteilungsfunktion F haben

Sei X eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F. Dann ist F eine stetige und monoton wachsende Funktion. Wenn F *umkhrbar* ist, d.h. es existiert F^{-1} so dass für jedes $y \in (0,1)$ existiert eindeutig $x \in \mathbb{R}$ so dass $F(x) = y$, also $F^{-1}(y) = x$.

Generieren von Zufallszahlen $Y(i)$, $i = \overline{1, N}$, welche dieselbe Verteilung wie X haben:

- Gegeben ist $N \in \mathbb{N}$, man definiert F^{-1}.
- Seien $U(i) \sim Unif[0,1]$, $i = \overline{1, N}$.
- Man berechnet $i = \overline{1, N}$: $Y(i) = F^{-1}(U(i))$.
- Ergebnis: $Y(i), i = \overline{1, N}$.

Ideen: Seien $U \sim Unif[0,1]$ und $Y = F^{-1}(U)$. Wir zeigen, dass Y dieselbe Verteilungsfunktion wie X hat: für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F^{-1}(U) \le y) = P(U \le F(y)) = F(y),$$

also hat Y dieselbe Verteilungsfunktion wie X, weil $F_Y = F$.
Beispiel: für $X \sim Exp(\lambda)$, gilt

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0 \Longrightarrow F^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda},\ y \in (0,1)$$

d.h. $-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \sim Exp(\lambda)$, wenn $U \sim Unif[0,1]$.

▶ Das Histogramm der relativen Häufigkeiten hat dieselbe Form wie die (theoretische) Dichtefunktion;
▶ die empirische Verteilungsfunktion schätzt die theoretische Verteilungsfunktion;
▶ die empirische Verteilungsfunktion, für die Daten $v_1, \ldots, v_n$ ist $\hat{F}_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ definiert durch

$$\hat{F}_n(v) = \frac{\#\{i \in \{1, ..., n\} : v_i \le v\}}{n}, v \in \mathbb{R}.$$

In der Praxis konstruiert man für eine bestimmte Methode die empirische Verteilungsfunktion und stellt sie graphisch dar, dann auf demselben Bild stellt man auch die theoretische Verteilungsfunktion dar.

```
function [Z]=ExpLam(lam,N)
U=rand(1,N);
Z=-log(U)/lam;

% Programm
clc
clear all
close all
lam=5;
N=10000;
[Z]=ExpLam(lam,N);
```

```
figure
hold on
n=25; %Anzahl Klassen im Histogramm
hist(Z,n) %Histogramm der absoluten Hfg.
title(['Absolute Hfg. Histogramm, ','E(X):',num2str(mean(Z)),', V(X):',num2str(var(Z,1))])
[nh,yh]=hist(Z,n);
figure
subplot(2,1,1);
hold on
bar(yh,nh/N,'histc') % Histogramm der relativen Hfg.
title(['Relative Hfg. Histogramm, ', 'Lambda=', num2str(lam)])
lyh=length(yh);
mid=zeros(1,lyh);
for i=1:lyh-1
mid(i)=(yh(i)+yh(i+1))/2;  % Mitte der KLasse
end
mid(lyh)=yh(end);
plot(mid,nh/N,'g*')
subplot(2,1,2);
x=min(Z):0.01:max(Z);
plot(x,exppdf(x,1/lam),'g*') % theoretische Dichtefkt.
title(['Theoretische Dichtefkt., ', 'Lambda=', num2str(lam)])
figure
hold on
v=sort(Z);
tt=min(Z):0.01:max(Z);
j=0;
Frep=zeros(1,length(tt));
for t=min(Z):0.01:max(Z)
    j=j+1;
    Frep(j)=sum(v<=t)/length(Z); % Wert in t der empirischen Verteilungsfkt.
end
plot(tt,Frep,'r.')
plot(x,expcdf(x,1/lam),'b.') % theoretische Verteilungsfkt.
legend('Empirische Verteilungsfkt.','Theoretische Verteilungsfkt.','Location','southeast')
title(['Verteilungsfunktion, ', 'Lambda=', num2str(lam)])
```

II. Generieren von Zufallszahlen, welche die $Gamma$-Verteilung haben

Methode 1: Seien $n \in \mathbb{N}, \beta > 0$ gegeben. Sind $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\frac{1}{\beta})$ unabhängige Zufallsgrößen

$$\Longrightarrow \; X_1 + \cdots + X_n \sim Gamma(n, \beta)$$

d.h. $-\beta \ln(U_1) - \cdots - \beta \ln(U_1) = -\beta \ln(U_1 \cdot \cdots \cdot U_n) \sim Gamma(n, \beta)$, wenn $U_i \sim Unif[0,1]$, $i = 1, 2..., n$ unabhängige Zufallsgrößen sind.

Generieren von Zufallszahlen für die $Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$, Verteilung:

Methode 2 (Marsaglia-Tsang):

▶ Im Fall $X \sim Gamma(\alpha, 1)$ mit $\alpha \geq 1$:

Schritt 1: Seien $d = \alpha 1/3,\ c = 1/\sqrt{9d}$.
Schritt 2: Man generiert $Z \sim N(0,1), U \sim Unif[0,1]$ unabhängige Zufallsgrößen.
Schritt 3: Wenn $Z > 1/c$ und $ln(U) < \frac{1}{2}Z^2 + d(1-V) + d \cdot ln(V)$, mit $V = (1+cZ)^3$, dann $X = d \cdot V$, sonst fortsetzen mit Schritt 2.
▶ Im Fall $X \sim Gamma(\alpha, 1)$ mit $0 < \alpha < 1$:
Wenn $Y \sim Gamma(\alpha+1, 1)$ und $V \sim Unif[0,1]$ unabhängig sind, dann folgt $X = Y \cdot V^{\frac{1}{\alpha}} \sim Gamma(\alpha, 1)$.
▶ Im Fall $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ mit $0 < \alpha, 0 < \beta, \beta \neq 1$:
Man generiert $Y \sim Gamma(\alpha, 1)$, dann folgt $X = \frac{Y}{\beta} \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

Literatur: G. Marsaglia, W. Tsang, *A simple method for generating gamma variables.* ACM Transactions on Mathematical Software, 26(3):363-372, 2000.

III. Generieren von Zufallszahlen für die *normale* Verteilung

Methode 3 (Box-Muller): Seien $U_1, U_2 \sim Unif[0,1]$ unabhängige Zufallsgrößen.

$$\Longrightarrow\ Y_1 = \sqrt{-2\ ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \sim N(0,1),\ Y_2 = \sqrt{-2ln(U_1)}\sin(2\pi U_2) \sim N(0,1)$$

sind unabhängige Zufallsgrößen.

Methode 4 (Marsaglia Polar-Methode): Seien $V_1, V_2 \sim Unif[-1,1]$ unabhängige Zufallsgrößen.
Sei $S = V_1^2 + V_2^2$. Wenn $0 < S \leq 1$, dann

$$Z_1 = V_1\sqrt{\frac{-2ln(S)}{S}} \sim N(0,1),\ Z_2 = V_2\sqrt{\frac{-2ln(S)}{S}} \sim N(0,1)$$

sind unabhängige Zufallsgrößen.

IV. Generieren von Zufallszahlen für die χ^2 (*Chi-Quadrat*) Verteilung

Methode 5:
Seien $X_1, \ldots, X_n \sim N(0,1)$ unabhängige Zufallsgrößen $\Longrightarrow\ X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$.

Methode 6:

$$X \sim \chi^2(n) \iff X \sim Gamma\Big(\frac{n}{2}, 2\Big)$$

V. Generieren von Zufallszahlen für die *Student*-Verteilung

Methode 7:
Seien $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ unabhängige Zufallsgrößen $\Longrightarrow\ \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim Student(n)$

Methode 8 (Bailey):
Schritt 1: Seien $V_1, V_2 \sim Unif[-1,1]$ unabhängige Zufallsgrößen.
Schritt 2: Sei $S = V_1^2 + V_2^2$. Wenn $S > 1$, dann wird mit Schritt 1 fortgesetzt,
sonst $T = V_1\sqrt{\dfrac{n(S^{-\frac{2}{n}} - 1)}{S}} \sim Student(n)$.

Literatur: R.W. Bailey, *Polar generation of random variates with the T-distribution.* Mathematics of Computation 62(206), 779781, 1994.

P2. Sei X die Zufallsgrösse welche die vergangenenen Minuten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pizza-Bestellungen in einer bestimmten italienischen Gaststätte anzeigt. Man setzt voraus, dass X eine Exponential-Verteilung hat mit Erwartungswert 4 Minuten ($\Longrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$). Man simuliere $N(= 100, 1000)$ zufällige Werte für

X.
a) Welches ist die Wahscheinlichkeit, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bestellungen keine 2 Minuten vergehen?
b) Welches ist die Wahscheinlichkeit, dass kein Kunde innerhalb von 5 Minuten Pizza bestellt?
Man vergleiche die erhaltenen Ergebnisse, mit den theoretischen Werten.

Hinweise: $X \sim Exp(\frac{1}{4})$; a) $P(X \leq 2) = expcdf(2, 4)$; b) $P(X > 5) = 1 - expcdf(5, 4)$.

P3. Ein spezieller Motor funktioniert mit Hilfe einer Pumpe, zusätzlich sind noch zwei Pumpen als Reserve installiert: falls die erste Pumpe nicht mehr funktionierfähig ist, wird die zweite Pumpe eingesetzt, und falls die zweite Pumpe auch nicht funktioniert wird die dritte Pumpe eingesetzt. Man weiss, dass durchschnittlich solch eine Pumpe 20 Tage funktionsfähig ist und eine Exponential-Verteilung hat ($\lambda = \frac{1}{20}$). Was für eine Verteilung hat die Zufallsgröße, welche anzeigt wie lange der Motor funktioniert (d.h. die Zeit bis keine der drei Pumpen funktionionsfähig ist)? Man simuliere zufällige Werte für diese Zufallsgr̈ße, mit Hilfe der $Unif[0, 1]$-Verteilung. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Motor mehr als 60 Tage funktionsfähig ist?

Hinweis: $X_1, X_2, X_3 \sim Exp(\frac{1}{20})$ X_i=Lebensdauer der i-ten Pumpe, $i \in \{1, 2, 3\}$; die Zufallsgröße, welche anzeigt wie lange der Motor funktioniert, ist
$X_1 + X_2 + X_3 \sim Gamma(3, 20)$; $P(X_1 + X_2 + X_3 > 60) = 1 - gamcdf(60, 3, 20)$

P4. Die Lebensdauer einer elektronischen Komponente ist eine normal-verteile Zufallsgröße. *Durchschnittlich* funktioniert so eine Komponente 100 Stunden, mit einer *Standardabweichung* von 2 Stunden.
1) Man simuliere $N(= 100, 1000)$ zufällige Werte. Mit welcher Wahscheinlichkeit funktioniert die Komponente mehr als 99 Stunden?
2) $k = 20$ solche Komponenten sind a) in serie; b) in paralel verbunden. Welches ist die *durchschnittliche* Lebensdauer des gesamten Systems?
Hinweise: 1) X=Lebensdauer einer elektronischen Komponente; $E(X) = 100$; $\sqrt{V(X)} = 2; V(X) = 4$.

$$X \sim N(100, 4) \iff (X - 100)/2 \sim N(0, 1)$$

2) $X_1, ..., X_{20} \sim N(100, 4)$
a) $E(\min\{X_1, ...X_{20}\})$; b) $E(\max\{X_1, ..., X_{20}\})$.

P5. Es ist bekannt, dass die Fehler der Koordinaten beim Lokalisieren von Zielen im 3-dimensionalen Raum normale Zufallsgrößen sind mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1 (cm). Man schätze die Wahrscheinlichkeit, dass die Distanz zwischen dem Punkt und dem (tatsächlichen) Ziel kleiner als 2 (cm) ist.
Man vergleiche die erhaltenen Ergebnisse mit den theoretischen Werten.

Hinweise: $X_1, X_2, X_3 \sim N(0, 1)$ (Fehler der Koordinaten);

$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leq 2 \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 4,$$

und $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \sim \chi^2(3)$; $P(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 4) = chi2cdf(3, 4)$.

Befehle aus Octave/Matlab: Innerhalb dieses Labors versucht man diese Befehle zu umgehen und die gewünschten Verteilungen ohne diese Befehle zu generieren. Man benutzt sie für den Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen.
Exponential-Verteilung: $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ (in Octave/Matlab $\mu = \frac{1}{\lambda}$)
$exprnd(\mu, M, N)$ zufällige Werte
$exppdf(x, \mu)$ Wert der Dichtefunktion $f_X(x)$
$expcdf(x, \mu)$ Wert der Verteilungsfunktion $F_X(x)$
Gamma Verteilung: $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$

$gamrnd(\alpha, \beta, M, N)$ zufällige Werte
$gampdf(x, \alpha, \beta)$ Wert der Dichtefunktion $f_X(x)$
$gamcdf(x, \alpha, \beta)$ Wert der Verteilungsfunktion $F_X(x)$
Normale Verteilung: $X \sim N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
$normrnd(m, \sigma, M, N)$ zufällige Werte
$randn(m, \sigma, M, N)$ zufällige Werte, wenn $m = 0, \sigma = 1$
$normpdf(x, m, \sigma)$ Wert der Dichtefunktion $f_X(x)$
$normcdf(x, m, \sigma)$ Wert der Verteilungsfunktion $F_X(x)$
Chi-Quadrat χ^2 Verteilung: $X \sim \chi^2(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$
$chi2rnd(n, M, N)$ zufällige Werte
$chi2pdf(x, n)$ Wert der Dichtefunktion $f_X(x)$
$chi2cdf(x, n)$ Wert der Verteilungsfunktion $F_X(x)$
Student Verteilung: $X \sim Student(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$
$trnd(n, M, N)$ zufällige Werte
$tpdf(x, n)$ Wert der Dichtefunktion $f_X(x)$
$tcdf(x, n)$ Wert der Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

Laboratorul 9 - 2017

P1. Realizaţi programe care generează N valori aleatoare care urmează distribuţiile prezentate la I,II,III, IV şi V. Estimaţi valorile medii corespunzătoare.

I. Generarea de numere pseudo-aleatoare ce urmează o distribuţie continuă dată

Fie X o variabilă aleatoare ce are funcţia de repartiţie F. Din teorie se ştie că F este continuă şi monoton crescătoare. Presupunem că F *este inversabilă*, adică există F^{-1}: pentru orice $y \in (0,1)$ există un unic $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = y$, ceea ce este echivalent cu $F^{-1}(y) = x$.

Procedeul de generare a numerelor aleatoare $Y(i)$, $i = \overline{1, N}$, *care au aceeaşi distribuţie ca* X *este*:

- Se citeşte numărul N, se defineşte funcţia F^{-1}.
- Se generează N numere aleatoare uniform distribuite pe [0,1]: $U(i)$, $i = \overline{1, N}$.
- Pentru fiecare $i = \overline{1, N}$: $Y(i) = F^{-1}(U(i))$.
- Se afişează: $Y(i), i = \overline{1, N}$.

Verificarea procedeului: Fie variabila aleatoare $U \sim Unif[0,1]$ şi definim variabila aleatoare $Y = F^{-1}(U)$. Arătăm că Y are aceeaşi funcţie de repartiţie ca X: pentru orice $y \in \mathbb{R}$ are loc

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F^{-1}(U) \leq y) = P(U \leq F(y)) = F(y),$$

deci Y are aceeaşi distribuţie ca X, pentru că $F_Y = F$.
Exemplu: pentru $X \sim Exp(\lambda)$, atunci

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0 \Longrightarrow F^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda},\ y \in (0,1)$$

adică $-\frac{1}{\lambda}\ln(U) \sim Exp(\lambda)$, dacă $U \sim Unif[0,1]$.

▶ histograma frecvenţelor relative are aceeaşi formă ca funcţia densitate de probabilitate (teoretică);
▶ funcţia de repartiţie empirică estimează funcţia de repartiţie (teoretică);
▶ funcţia de repartiţie empirică, folosind datele generate $v_1, \ldots, v_n$ este $\hat{F}_n : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\hat{F}_n(v) = \frac{\#\{i \in \{1, ..., n\} : v_i \leq v\}}{n}, v \in \mathbb{R}.$$

Practic pentru o anumită metodă: se construieşte şi se reprezintă grafic funcţia de repartiţie empirică, folosind datele generate, apoi pe aceeaşi figură se reprezintă grafic funcţia de repartiţie (teoretică).

```
function [Z]=ExpLam(lam,N)
U=rand(1,N);
Z=-log(U)/lam;

% Programul principal
clc
clear all
close all
lam=5;
N=10000;
[Z]=ExpLam(lam,N);
figure
hold on
n=25; %numarul de clase
hist(Z,n)
title(['Hist. frecv. absolute, ','Media:',num2str(mean(Z)),', Varianta:',num2str(var(Z,1))])
[nh,yh]=hist(Z,n);
figure
subplot(2,1,1);
hold on
bar(yh,nh/N,'histc') % histograma frecv. relative
title(['Histograma frecv. relative, ', 'Lambda=', num2str(lam)])
lyh=length(yh);
mid=zeros(1,lyh);
for i=1:lyh-1
mid(i)=(yh(i)+yh(i+1))/2;  % mijlocul clasei
end
mid(lyh)=yh(end);
plot(mid,nh/N,'g*')
subplot(2,1,2);
x=min(Z):0.01:max(Z);
plot(x,exppdf(x,1/lam),'g*') % functia de densitate teoretica
title(['Functia de densitate, ', 'Lambda=', num2str(lam)])
figure
hold on
v=sort(Z);
tt=min(Z):0.01:max(Z);
j=0;
Frep=zeros(1,length(tt));
for t=min(Z):0.01:max(Z)
    j=j+1;
    Frep(j)=sum(v<=t)/length(Z); % valoarea functiei de repartitie empirice in t
end
plot(tt,Frep,'r.')
```

```
plot(x,expcdf(x,1/lam),'b.') % functia de repartitie predefinita
legend('F. de repartitie empirica','F. de repartitie teoretica','Location','southeast')
title(['Functia de repartitie, ', 'Lambda=', num2str(lam)])
```

II. Generarea de numere pseudo-aleatoare care urmează distribuţia *Gamma*

Metoda 1: Fie $n \in \mathbb{N}, \beta > 0$ date. Considerăm n variabile aleatoare independente $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\frac{1}{\beta})$

$$\Longrightarrow \; X_1 + \cdots + X_n \sim Gamma(n, \beta)$$

adică $-\beta \ln(U_1) - \cdots - \beta \ln(U_1) = -\beta \ln(U_1 \cdot \dots \cdot U_n) \sim Gamma(n, \beta)$, dacă $U_i \sim Unif[0,1]$, $i = 1, 2..., n$ sunt variabile aleatoare independente.

Generarea de numere pseudo-aleatoare care urmează distribuţia $Gamma(\alpha, \beta)$ cu $\alpha > 0, \beta > 0$:

Metoda 2 (Marsaglia-Tsang):
▶ În cazul în care $X \sim Gamma(\alpha, 1)$ cu $\alpha \geq 1$:
Pasul 1: Fie $d = \alpha 1/3,\; c = 1/\sqrt{9d}$.
Pasul 2: Se generează $Z \sim N(0,1), U \sim Unif[0,1]$ variabile aleatoare independente.
Pasul 3: Dacă $Z > 1/c$ şi $ln(U) < \frac{1}{2}Z^2 + d(1 - V) + d \cdot ln(V)$, cu $V = (1 + cZ)^3$, atunci $X = d \cdot V$, altfel se continuă cu Pasul 2.
▶ În cazul în care $X \sim Gamma(\alpha, 1)$ cu $0 < \alpha < 1$:
Generăm mai întâi $Y \sim Gamma(\alpha + 1, 1)$ şi $V \sim Unif[0,1]$ independente, atunci $X = Y \cdot V^{\frac{1}{\alpha}} \sim Gamma(\alpha, 1)$.
▶ În cazul în care $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ cu $0 < \alpha, 0 < \beta, \beta \neq 1$:
Generăm mai întâi $Y \sim Gamma(\alpha, 1)$ şi atunci $X = \frac{Y}{\beta} \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

Sursa: G. Marsaglia, W. Tsang, *A simple method for generating gamma variables.* ACM Transactions on Mathematical Software, 26(3):363-372, 2000.

III. Generarea de numere pseudo-aleatoare care urmează distribuţia *normală*

Metoda 3 (Box-Muller): Fie $U_1, U_2 \sim Unif[0,1]$ variabile aleatoare independente.

$$\Longrightarrow \; Y_1 = \sqrt{-2\; ln(U_1)} \cos(2\pi U_2) \sim N(0,1),\; Y_2 = \sqrt{-2 ln(U_1)} \sin(2\pi U_2) \sim N(0,1)$$

variabile aleatoare independente.

Metoda 4 (Metoda polară Marsaglia): Fie $V_1, V_2 \sim Unif[-1,1]$ variabile aleatoare independente.
Fie $S = V_1^2 + V_2^2$. Dacă $0 < S \leq 1$, atunci

$$Z_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2 ln(S)}{S}} \sim N(0,1),\; Z_2 = V_2 \sqrt{\frac{-2 ln(S)}{S}} \sim N(0,1)$$

sunt variabile aleatoare independente.

IV. Generarea de numere pseudo-aleatoare care urmează distribuţia χ^2 (*Chi-pătrat*)

Metoda 5:
$X_1, \dots, X_n \sim N(0,1)$ variabile aleatoare independente $\Longrightarrow \; X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$.

Metoda 6:

$$X \sim \chi^2(n) \iff X \sim Gamma\Big(\frac{n}{2}, 2\Big)$$

V. Generarea de numere pseudo-aleatoare care urmează distribuţia *Student*

Metoda 7:

$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ variabile aleatoare independente $\Longrightarrow \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim Student(n)$

Metoda 8 (Bailey):

Pasul 1: Fie $V_1, V_2 \sim Unif[-1,1]$ variabile aleatoare independente.

Pasul 2: Fie $S = V_1^2 + V_2^2$. Dacă $S > 1$, atunci se reia Pasul 1, altfel $T = V_1\sqrt{\dfrac{n(S^{-\frac{2}{n}}-1)}{S}} \sim Student(n)$.

Sursa: R.W. Bailey, *Polar generation of random variates with the T-distribution.* Mathematics of Computation 62(206), 779781, 1994.

P2. Fie X variabila aleatoare, care indică timpul trecut (exprimat în minute) între două comenzi succesive de pizza la un anumit restaurant italian. Se presupune că X urmează legea exponenţială cu media de 4 minute ($\Longrightarrow$ parametrul este $\frac{1}{4}$). Simulaţi $N(=100, 1000)$ valori aleatoare pentru X.
a) Care este probabilitatea ca între două comenzi succesive să nu treacă 2 minute?
b) Care este probabilitatea ca niciun client să nu comande pizza într-un interval de 5 minute?
Comparaţi rezultatele obţinute prin simulare cu cele teoretice.

Indicaţie: $X \sim Exp(\frac{1}{4})$; a) $P(X \leq 2) = expcdf(2,4)$; b) $P(X > 5) = 1 - expcdf(5,4)$.

P3. Un anumit motor pentru un vapor de croazieră de ultima generaţie funcţionează cu ajutorul unei pompe, şi două pompe sunt montate de rezervă, astfel: după ce prima pompă s-a defectat se foloseşte cea de-a doua, iar după defectarea celei de-a doua pompe se folosesşte cea de-a treia. Se ştie că o astfel de pompă funcţionează în medie 20 de zile până la defectare şi urmează distribuţia exponenţială ($\lambda = \frac{1}{20}$). Ce distribuţie are variabila aleatoare care indică timpul de funcţionare până la defectarea motorului (adică niciuna din cele 3 pompe nu e funcţională)? Să se simuleze valori pentru această variabilă aleatoare, folosind distribuţia continuă uniformă. Care este probabilitatea ca motorul să funcţioneze mai mult de 60 de zile fără să se defecteze?

Indicaţie: $X_1, X_2, X_3 \sim Exp(\frac{1}{20})$;
variabila aleatoare care indică timpul de funcţionare până la defectarea motorului $X_1+X_2+X_3 \sim Gamma(3,20)$;
$P(X_1+X_2+X_3 > 60) = 1 - gamcdf(60,3,20)$

P4. Durata de funcţionare a unui anumit dispozitiv este o variabilă aleatoare, care urmează legea normală. În medie un astfel de dispozitiv funcţionează 100 de ore, cu o deviaţie standard de 2 ore.
1) Simulaţi $N(=100, 1000)$ valori aleatoare. Care este probabilitatea ca un astfel de dispozitiv să funcţioneze mai mult de 99 de ore?
2) $k = 20$ astfel de dispozitive sunt legate a) în serie; b) în paralel. Care este durata medie de funcţionare a unui astfel de sistem?
Hinweise: 1) $X=$ durata de funcţionare a dispozitivului; $E(X) = 100; \sqrt{V(X)} = 2; V(X) = 4$.

$$X \sim N(100,4) \iff (X-100)/2 \sim N(0,1)$$

2) $X_1, ..., X_{20} \sim N(100,4)$
a) $E(\min\{X_1, ...X_{20}\})$; b) $E(\max\{X_1, ..., X_{20}\})$.

P5. Presupunem că erorile coordonatelor în spaţiul 3 dimensional atunci când încercăm să localizăm o ţintă, sunt variabile aleatoare normal distribuite cu media 0 şi deviaţia standard 1 (cm). Să se estimeze probabilitatea ca distanţa dintre punctul ales şi ţinta (reală) să nu fie mai mult de 2 (cm). Comparaţi rezultatele simulărilor cu cele teoretice.

Indicaţii: $X_1, X_2, X_3 \sim N(0,1)$ (erorile coordonatelor);

$$\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leq 2 \;\Rightarrow\; X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 4,$$

iar $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \sim \chi^2(3)$; $P(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 4) = chi2cdf(3,4)$.