Logische und Funktionale Programmierung

Vorlesung 6: Seminarisierung einiger Begriffe aus der Prädikatenlogik

Babeş-Bolyai Universität, Department für Informatik, Cluj-Napoca
csacarea@cs.ubbcluj.ro

13. November 2017

Terme

- Terme sind also vollständig geklammerte Ausdrücke, die wir auch als markierte, geordnete Bäume auffassen können.
- Die Knoten sind mit Funktionssymbolen oder Variablen markiert.
- Jeder mit einem Funktionssymbol f der Stelligkeit n markierte Knoten hat genau n Unterbäume, einen für jedes Argument von f.

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{Jan/0, Vater/1, Mutter/1\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Terme:

x	Jan
$Vater(x)$	$Vater(Jan)$
$Mutter(x)$	$Mutter(Jan)$
$Vater(Mutter(x))$	$Vater(Mutter(Jan))$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Terme:

$x, y, z, 0, 1$

$succ(x), succ(0), succ(1)$

$x + y, x + z, x + 0, x + 1, (x + (succ(y) + 1)), \ldots$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Terme:

$x, y, z, 0, 1$

$succ(x), succ(0), succ(1)$

$x + y, x + z, x + 0, x + 1, (x + (succ(y) + 1)), \ldots$ Infix

$+(x, y), +(x, z), +(x, 0), +(x, 1), +(x, +(succ(y), 1))$ Präfix

Atome

Atome (Atomare Formeln) über Σ genügen dieser Syntax:

$$\begin{array}{llll} A, B & ::= & p(s_1, \ldots, s_m) & , p/m \in \Pi \\ \Big[& \mid & (s \approx t) & \text{(Gleichung)} \quad \Big] \end{array}$$

wobei $s_1, \ldots, s_m, s, t \in T_\Sigma(X)$.

Ist $m = 0$, so handelt es sich bei p um eine Aussagenvariable.

Atome:
Formeln der Form $p(s_1, \ldots, s_m)$, wobei $p/m \in \Pi$ und $s_1, \ldots, s_m \in T_\Sigma(X)$.

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{Jan/0, Anna/0, Vater/1, Mutter/1\}$

$\Pi = \{Mann/1, Frau/1, Bruder/2, \approx /2\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Atome:

$Mann(x)$	$Mann(Jan)$	$Mann(Anna)$
$Mann(Vater(x))$	$Frau(Vater(Jan))$	$Mann(Vater(Jan))$
$Bruder(x, y)$	$Bruder(x, Jan)$	$Bruder(x, Anna)$

$Vater(Jan) \approx Vater(Anna)$

$Vater(x) \approx Mutter(y)$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\Pi = \{\leq, \approx, \text{even}, \text{odd}\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Atome:

$x \leq y, \quad z \approx 0, \quad 0 \leq 1$

$succ(x) \leq succ(0), \quad succ(1) \approx succ(0)$

$x + y \leq x + z, \quad x + 0 \approx x + 1 \quad (x + (succ(y) + 1)) \leq z, \ldots$ Infix

$\text{even}(succ(0)), \quad \text{even}(x), \quad \text{even}(x + 1), \quad \text{odd}(x + (succ(y) + y))$

Beispiele

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

$\Omega = \{0/0, 1/0, succ/1, +/2\}$

$\Pi = \{\leq, \approx, \text{even}, \text{odd}\}$

$\{x, y, z\} \subseteq X$

Atome:

$x \leq y, \quad z \approx 0, \quad 0 \leq 1$

$succ(x) \leq succ(0), \quad succ(1) \approx succ(0)$

$x + y \leq x + z, \quad x + 0 \approx x + 1 \quad (x + (succ(y) + 1)) \leq z, \ldots$ Infix

Präfix:

$\leq (+(x, y), +(x, z)), \quad +(x, 0) \approx +(x, 1), \quad \leq (+(x, +(succ(y), 1)), z)$

$\text{even}(succ(0)), \quad \text{even}(x), \quad \text{even}(x + 1), \quad \text{odd}(x + (succ(y) + y))$

LITERALE

$$\begin{array}{llll} L & ::= & A & \text{(positives Literal)} \\ & \mid & \neg A & \text{(negatives Literal)} \end{array}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} Mann(Vater(x)) & Vater(Jan) \approx Vater(Anna) \\ \neg Mann(Vater(x)) & \neg(Vater(Jan) \approx Vater(Anna)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x \leq y & (x + (succ(y) + 1)) \approx z \\ \neg x \leq y & \neg((x + (succ(y) + 1)) \approx z) \end{array}$$

Klauseln

$$
\begin{array}{lcll}
C, D & ::= & \bot & \text{(leere Klausel)} \\
 & \mid & L_1 \vee \ldots \vee L_k,\ k \geq 1 & \text{(nichtleere Klausel)}
\end{array}
$$

Beispiele:

$\bot$

$Mann(Vater(x)) \quad \vee \quad \neg(Vater(Jan) \approx Vater(Anna))$

$\neg Frau(Vater(x))$

$\neg(x \leq y) \quad \vee \quad (x + (succ(y) + 1)) \approx z$

$x \leq y$

$\neg(x \leq y) \quad \vee \quad \neg(x \leq y) \quad \vee \quad (x \leq y)$

Zusammenfassung

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.
2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.
3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ:

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathsf{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathsf{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathsf{For}_\Sigma$, dann auch $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \to G, F \leftrightarrow G \in \mathsf{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathsf{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann $\forall x F \in \mathsf{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathsf{For}_\Sigma$

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x						
a						
$f(g(a, y, b), x)$						
$g(a, x)$						
$p(g(a, y, b), x)$						
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$	nein	nein	nein	ja	ja	nein
$\forall x(p(x, f(x, x)))$	nein	nein	nein	nein	ja	nein
$\forall b(p(b, f(b, b)))$	nein	nein	nein	nein	nein	ja

Beispiel: Arithmetik

$$\begin{aligned}
\Sigma_{PA} &= (\Omega_{PA},\ \Pi_{PA}) \\
\Omega_{PA} &= \{0/0,\ +/2,\ */2,\ s/1\} \\
\Pi_{PA} &= \{\leq /2,\ < /2, \approx /2\}
\end{aligned}$$

$+,\ *$ infix; $* >_p +$

Formelbeispiele über dieser Signatur sind

$$\forall x, y(x \leq y \leftrightarrow \exists z(x + z \approx y))$$
$$\exists x \forall y(x + y \approx y)$$
$$\forall x, y(x * s(y) \approx x * y + x)$$
$$\forall x, y(s(x) \approx s(y) \rightarrow x \approx y)$$
$$\forall x \exists y\ x < y$$

Gebundene und freie Variablen

Definitionen:

- In QxF, $Q \in \{\exists, \forall\}$, heißt F der Bindungsbereich des Quantors Qx.
- Ein Auftreten einer Variablen x heißt gebunden, wenn es zum Bindungsbereich eines Quantors Qx gehört.
- Alle anderen Auftreten von Variablen heißen frei.

Formeln ohne freie Variablen heißen Satzformen.

Variablenfreie Formeln heißen Grundformeln.

Beispiel

$$\forall y \; \overbrace{(\forall x \; \overbrace{p(x)}^{\textit{Bind.}} \rightarrow q(x, y))}^{\textit{Bindungsbereich}}$$

Beispiel

$$p(z) \to \forall x\,(q(x,z) \land \exists z\, r(y,z))$$

- x gebunden
- y frei
- z frei und gebunden

Substitution

Mit $F[s/x]$ bezeichnen wir das Resultat der Substitution aller freien Auftreten von x in F durch den Term s. $F[s/x]$ sei durch strukturelle Induktion über den Aufbau von F wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
x[s/x] &= s \\
x'[s/x] &= x' \;;\quad \text{falls } x' \neq x \\
f(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= f(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
\bot[s/x] &= \bot \\
\top[s/x] &= \top \\
p(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= p(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
(u \approx v)[s/x] &= (u[s/x] \approx v[s/x]) \\
\neg F[s/x] &= \neg(F[s/x]) \\
(F \rho G)[s/x] &= (F[s/x] \rho G[s/x]) \;;\quad \text{für alle binären Junktoren } \rho \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \\
(QyF)[s/x] &= Qz((F[z/y])[s/x]) \;;\quad z \text{ neue Variable}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Terme:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$g(f(x), g(f(x), z)) \quad [g(y, u)/x]$$
$$= g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z))$$

Beispiel

Atome:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y)\ \ [g(y, u)/x]$

$\quad = p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)),\ y)$

Beispiel

Formeln ohne Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y) \ \wedge\ (g(x, y) \approx f(g(z, z)))\ \ [g(y, u)/x]$$
$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)), y) \ \wedge\ (g(g(y, u), y) \approx f(g(z, z)))$$

Formeln mit Quantoren: Problematik

$$(QyF)[s/x] = Qz((F[z/y])[s/x]) \; ; \quad z \text{ neue Variable}$$

Der Grund für die Umbenennung der gebundenen Variablen y in eine neue „unbenutzte" Variable z ist die Vermeidung des Einfangens freier Variablen in s.

Sollte y in s auftreten, wären sonst diese Auftreten nach erfolgter Substitution gebunden.

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$(\ \forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z)) \ ) \quad [g(y, z)/x]$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\ \forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z)) \ ) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$$
\begin{aligned}
&(\ \forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \wedge\ \exists z(x \approx g(y, z))\ ) \quad [g(y, z)/x] \\
&\quad = \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \ \wedge\ \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x] \\
&\quad = \forall v(p(x, g(f(x), y))\,[v/x])[g(y, z)/x] \wedge \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])
\end{aligned}
$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z))) \quad [g(y, z)/x]$$
$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \wedge \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$
$$= \forall v(p(x, g(f(x), y))\,[v/x])[g(y, z)/x] \wedge \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])$$
$$= \forall v(p(v, g(f(v), y)))[g(y, z)/x] \wedge \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x])$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\ \forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z)) \ ) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

$$= \forall v(p(x, g(f(x), y)) \ [v/x])[g(y, z)/x] \wedge \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y)))[g(y, z)/x] \ \wedge \ \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y))) \ \wedge \ \exists u(g(y, z) \approx g(y, u))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$g(f(x), g(f(x), z)) \; [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z]$$
$$= g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Atome

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y)\ \ [g(y,u)/x, f(x)/y, a/z]$$
$$= p(g(f(g(y,u)), g(f(g(y,u)), a)), f(x))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln ohne Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y) \ \wedge\ (g(x, y) \approx f(g(z, z)))\ \ [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)), f(x)) \ \wedge\ (g(g(y, u), f(x)) \approx f(g(a, a)))$$

BEISPIEL

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \land \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \land \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \;\land$$
$$\exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \ \wedge$$
$$\exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \ \wedge$$
$$\exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \;\wedge$$
$$\exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \;\wedge$$
$$\exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \;\wedge\; \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \ \wedge$$
$$\exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \ \wedge$$
$$\exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \ \wedge \ \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \ \wedge \ \exists u(g(y, z) \approx g(f(x), u))$$

STRUKTUREN

Definition.

Eine Σ-Struktur (bzw. Σ-Interpretation bzw. Σ-Modell) ist ein Tripel

$$\mathcal{A} = (U, \ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega}, \ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt Universum von $\mathcal{A}$.

Oft identifizieren wir U mit $\mathcal{A}$, wenn die Interpretation der Funktions- und Prädikatensymbole eindeutig aus dem Kontext hervorgeht.

Mit Σ-Str bezeichnen wir die Menge aller Σ-Strukturen.

Strukturen

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$

$0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N},$
$+_{\mathcal{N}} (n_1, n_1) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

$\leq_{\mathcal{N}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\}$

Strukturen

Beispiel:

$$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$$

Eine andere Σ-Struktur:

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{A}}, +_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$$

$$0_{\mathcal{A}} = 1 \in \mathbb{N},$$

$$+_{\mathcal{A}} (n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n_2 = 0 \\ n_1^{n_2} & \text{wenn } n_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\leq_{\mathcal{A}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2^2\}$$

STRUKTUREN

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

Eine dritte Σ-Struktur:

$\mathcal{B} = (\{a, b\}, \{0_{\mathcal{B}}, +_{\mathcal{B}}:\{a, b\}\times\{a, b\}\rightarrow\{a, b\}\}, \{\leq_{\mathcal{B}}\subseteq \{a, b\}\times\{a, b\}, \approx_{\mathcal{B}}\})$

$0_{\mathcal{B}} = a \in \{a, b\}$,
$+_{\mathcal{B}}(a, a) = a$; $\quad +_{\mathcal{B}}(a, b) = b$;
$+_{\mathcal{B}}(b, a) = b$; $\quad +_{\mathcal{B}}(b, b) = b$;

$\leq_{\mathcal{B}} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$

Valuationen

Variablen für sich haben keine Bedeutung. Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Definition.

Unter einer (Variablen-) Belegung oder einer Valuation (über einer Σ-Struktur A) versteht man eine Abbildung

$$\beta : X \to U.$$

Wert eines Terms in A bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$
$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$
- Falls $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:
  $\mathcal{A}(\beta)(t) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(t_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(t_n))$

Wert eines Terms in A bzgl. β

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$

$0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N},$
$+_{\mathcal{N}} (n_1, n_1) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

$\beta : \{x, y, z\} \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 5, \beta(y) = 10, \beta(z) = 3$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\beta)((x + (y + z)) + (z + 0)) = \\
&\quad = (\beta(x) +_{\mathcal{N}} (\beta(y) +_{\mathcal{N}} \beta(z))) +_{\mathcal{N}} (\beta(z) +_{\mathcal{N}} 0_{\mathcal{N}}) = \\
&\quad = (5 + (10 + 3)) + (3 + 0) = 21
\end{aligned}$$

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

Die Menge der Wahrheitswerte sei $\{0, 1\}$.

$\mathcal{A}(\beta) : \mathsf{For}_\Sigma \to \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}(\beta)(\bot) = 0$$
$$\mathcal{A}(\beta)(\top) = 1$$

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(p(s_1,\ldots,s_n)) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad (\mathcal{A}(\beta)(s_1),\ldots,\mathcal{A}(\beta)(s_n)) \in p_{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(s \approx t) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(s) = \mathcal{A}(\beta)(t)$$

WAHRHEITSWERT EINER FORMEL IN A BZGL. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(F)$, wobei $\neg_b$ die Negation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

w	$\neg_b w$
0	1
1	0

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \wedge G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \wedge_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\wedge_b$ die Konjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\wedge_b$	0	1
0	0	0
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \vee G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\vee_b$ die Disjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\vee_b$	0	1
0	0	1
1	1	1

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\rightarrow_b$ die Implikation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\rightarrow_b$	0	1
0	1	1
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \leftrightarrow G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \leftrightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\leftrightarrow_b$ die Äquivalenz auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\leftrightarrow_b$	0	1
0	1	0
1	0	1

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$.

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ )$$

$$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2 \qquad (n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2 \qquad (n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$s(n) = n + 1 \qquad \text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$$

$$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\} \qquad \text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$$

Konvention: Auf den nächsten Folien wird der Unterschied zwischen den natürlichen Zahlen 0, 1 und den Wahrheitswerten 0 (falsch) und 1 (wahr) deutlich gemacht, indem wir die Wahrheitswerte in orangener Farbe schreiben.

Nota Bene:

- Der Wert eines Termes t in $\mathcal{A}$ bzgl. β ist ein Element in das Universum von $\mathcal{A}$.
- Der Wahrheitswert einer Formel F in $\mathcal{A}$ bzgl. β ist ein Wahrheitswert (0 oder 1).

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$\quad n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$
$\quad n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$
$\quad s_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$\quad s(n) = n + 1$
$\quad 0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ )$
$\quad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$
$\quad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$
$\text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$
$\quad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$
$\quad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(1) $\mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x) = 1 \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}(\beta))(s(s(x) + s(0)) \approx y) = 1$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) + s(0))) = s_\mathcal{A}(s_\mathcal{A}(\beta(x)) +_\mathcal{A} s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A})$
$= ((1+1)+(0+1))+1=4$
$\mathcal{A}(\beta)(y) = 4$
und $4 = 4$

(3) $\mathcal{A}(\beta))(x \approx y) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = 1; \quad \mathcal{A}(\beta)(y) = 4, \quad 1 \neq 4$

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$s_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$s(n) = n + 1$

$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ )$

$(n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$

$\text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(4) $\mathcal{A}(\beta)(\neg\text{gerade}(x)) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = \neg_b 0 = 1$

(5) $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0) \vee \text{gerade}(x)) = \mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 1 \vee_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) = 1$: $\mathcal{A}(\beta)(x) = 1$, $\mathcal{A}(s(0)) = s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A}) = 0+1 = 1$, und $(1, 1) \in \leq_\mathcal{A}$.

(6) $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0) \to \text{ungerade}(y)) = \mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) \to_b \mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0 \to_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) = 0$, da $\beta(y) = 4$, $\beta(s(0)) = 1$ und $(4, 1) \notin \leq_\mathcal{A}$;
$\mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0$ da $\beta(y) = 4 \notin \text{ungerade}_\mathcal{A}$.

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitswert einer Formel in A bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuition: $\forall$: verallgemeinerte Konjunktion ($\wedge_b$ ist minimum auf $\{0, 1\}$)

$\exists$: verallgemeinerte Disjunktion ($\vee_b$ ist maximum auf $\{0, 1\}$)

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$s_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$s(n) = n + 1$

$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\;)$

$(n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$

$\text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(7) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \text{gerade}(x)) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.

Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

$\min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \min\{1, 0\} = 0$

BEISPIEL

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$
$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$
$s_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$s(n) = n + 1$
$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;)$
$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$
$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$
$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$
$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$
$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(8) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \text{gerade}(x)) = \max\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$

Erklärung:
Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.
Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_{\mathcal{A}}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.
$\max\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \max\{1, 0\} = 1$

Beispiel

$$U_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$0_{\mathbb{N}} = 0 \in U_{\mathbb{N}}$$
$$s_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}} \to U_{\mathbb{N}}, \; s_{\mathbb{N}}(n) = n + 1$$
$$+_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}}, \; +_{\mathbb{N}}(n, m) = n + m$$
$$*_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}}, \; *_{\mathbb{N}}(n, m) = n * m$$
$$\leq_{\mathbb{N}} = \text{“kleiner-gleich”} \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$
$$<_{\mathbb{N}} = \text{“kleiner”} \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$

Mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 3$ ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) &= 3 \\
\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) &= 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) &= 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall z\; z \leq y) &= 0 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\; x < y) &= 1
\end{aligned}$$

Beispiel

(1) $\mathbb{N}(\beta)(s(x)+s(0)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(x)) +_{\mathbb{N}} s_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) = (1+1)+(0+1) = 3$

(2) $\mathbb{N}(\beta)(x+y \approx s(y)) = 1$

Erklärung:

$\mathbb{N}(\beta)(x+y) = \beta(x) +_{\mathbb{N}} \beta(y) = 1+3 = 4$

$\mathbb{N}(\beta)(s(y)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(y)) = 3+1 = 4.$

(3)
$$\begin{aligned}
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x+y \approx y+x)) &= \min_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x\mapsto a])(\forall y(x+y \approx y+x)) \\
&= \min_{a\in\mathbb{N}} \min_{b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x\mapsto a, y\mapsto b])(x+y \approx y+x) \\
&= \min_{a,b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x\mapsto a, y\mapsto b])(x+y \approx y+x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

da für alle $a, b \in \mathbb{N}$:

$\mathbb{N}(\beta[x\mapsto a, y\mapsto b])(x+y) = a+b = b+a = \mathbb{N}(\beta[x\mapsto a, y\mapsto b])(y+x)$

Beispiel

(4) $\mathbb{N}(\beta)(\forall z\ z \leq y) = \min\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 4$, so $\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$, da:

$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z) = a = 4$

$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(y) = \beta(y) = 3$

und $(4, 3) \not\in \leq_{\mathbb{N}}$.

(5) $\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\ x < y) = \min\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\exists y\ x < y)$

$= \min\limits_{a \in \mathbb{N}} \max\limits_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

Erklärung:

Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$: $\max\limits_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$,

da es gibt $b = a + 1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

weil $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x) = a$

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y) = b = a + 1$ und $(a, a + 1) \in <_{\mathbb{N}}$.