Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

4. Vorlesung - 2017

Diskrete Zufallsgrößen $X : \Omega \to \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_i & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$$

$I \subseteq \mathbb{N}$ (Indexmenge)

mit den Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i) > 0$, $i \in I$, wobei $\sum_{i \in I} p_i = 1$

Klassische diskrete Verteilungen

Bernoulli Verteilung: $X \sim \mathit{Bernoulli}(p)$, $p \in (0,1)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Beispiel: Bernoullisches Versuchsschema
Innerhalb eines Experiments taucht A (*Erfolg*) oder $\bar{A}$ (*Misserfolg*) auf

$\mathbb{I}_A = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ taucht auf
$\mathbb{I}_A = 1 \Leftrightarrow A$ taucht auf
$\Rightarrow \mathbb{I}_A \sim \mathit{Bernoulli}(p)$ mit $p := P(A)$

$$\mathbb{I}_A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

Binomialverteilung: $X \sim Bino(n, p)$

• Innerhalb eines Experiments taucht A oder $\bar{A}$ auf (Bernoullisches Versuchsschema)

• $A = Erfolg$ mit $P(A) = p$, $\quad \bar{A} = Misserfolg$ mit $P(\overline{A}) = 1 - p$
• man wiederholt das Experiment n-mal

(z.B. Münzwurf, Ziehen mit Zurücklegen im Urnenmodell)

• Zufallsgröße $X=$ Anzahl der Erfolge in n Wiederholungen des Experiments

$\Rightarrow$ mögliche Werte: $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$

Beispiel: Ein Würfel wird 2-mal geworfen. Sei X die ZG die anzeigt wie oft die Zahl 6 auftaucht. Man gebe die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an!

Eine Zufallsgröße X mit dem Wertebereich $\{0, \ldots, n\}$ heißt **binomialverteilt** mit den Parametern $n \geq 1$ und $p \in (0, 1)$, falls gilt

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Diskrete Gleichverteilung: $X \sim Unif(n)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Ein Würfel wird geworfen. Sei X die ZG die anzeigt welche Zahl aufgetaucht ist

$$\Rightarrow X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Geometrische Verteilung $X \sim Geom(p)$

Innerhalb eines Experiments taucht A (*Erfolg*) mit $P(A) = p$ oder $\bar{A}$ (*Misserfolg*) mit $P(\bar{A}) = 1 - p$ auf

X = Anzahl der Versuche vor dem ersten Erfolg

Mögliche Werte: $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Beispiel: X zeigt an wie oft man würfelt bis die erste 6 auftaucht
$\Rightarrow X \sim Geom(\frac{1}{6})$

Eine Zufallsgröße X mit dem Wertebereich $\{0, 1, 2, \dots\}$ heißt **geometrisch verteilt** mit dem Parameter $p \in (0, 1)$, falls gilt

$$P(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Geometrische Verteilung

Mitunter heißt in der Literatur anstelle der obigen Zufallsgröße

X - Anzahl der Versuche **vor** dem ersten Erfolg

Y - Anzahl der Versuche **bis** (einschließlich) zum ersten Erfolg

auch geometrisch verteilt.

Y nimmt Werte in $\{1, 2, \ldots\}$ an. Offensichtlich gilt $Y = X + 1$ und

$$P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Beispiel: Eine Nachricht wird Bit für Bit gesendet. Die Wahrscheinichkeit, dass das ein Bit das letzte ist beträgt 0.2. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nachricht die Länge n hat?

Y = Länge der Nachricht ($\in \{1, 2, 3...\}$) $\Rightarrow$

$$P(Y = k) = 0.2 \cdot 0.8^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Hypergeometrische Verteilung: $X \sim Hyp(N, M, n)$

Qualitätskontrolle

In einem Posten von N Teilen sind M defekt und $N - M$ nicht defekt. Man entnimmt **ohne Zurücklegen** eine Stichprobe von n ($n \leq N$) Teilen, davon sind k ($k \leq M$) defekt und $n - k$ ($n - k \leq N - M$) nicht defekt. Wir betrachten die Zufallsgröße $X =$ Anzahl der defekten Teile in der Stichprobe.

Mögliche Werte für X sind $\{0, 1, \ldots, n^*\}$ mit

$$n^* = \min(M, n) = \begin{cases} M & \text{für } M < n \text{ (weniger defekte als entnommene Teile)} \\ n & \text{für } M \geq n \text{ (mehr defekte als entnommene Teile)} \end{cases}$$

Bei der Entnahme **ohne Zurücklegen** ändern sich die Entnahme-Wahrscheinlichkeiten in jedem Schritt!

Seien $N, M, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $M, n \leq N$ und $n^* = \min(M, n)$, $n + M \leq N$. Eine Zufallsgröße X mit dem Wertebereich $\{0, \ldots n^*\}$ heißt **hypergeometrisch verteilt** mit den Parametern N, M, n, falls gilt

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, \ldots, n^*.$$

Die hypergeometrische Verteilung

		Urnenmodell	**Lotto** $M = 6$ **aus** $N = 49$
von	N	Kugeln	49 Zahlen
sind	M	rot	6 Glückszahlen
und	$N - M$	schwarz	43 keine Glückszahlen
entnehmen	n	Kugeln	$n =$6 Zahlen (getippt, $n = M$)
davon sind	k	rot	$k =$2 richtig getippt
und	$n - k$	schwarz	$n - k =$4 falsch getippt
X:	Anzahl roter Kugeln		X: Anzahl richtig getippter Zahlen z.B. $X = 2$ zwei Zahlen waren richtig

Beispiel: Von $N = 100$ LCD-Displays sind $M = 6$ defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe von $n = 5$ zufällig ausgewählten Displays höchstens eines defekt ist?

Ziehen mit Zurücklegen

In einer Urne mit N Kugeln sind M rot und $N - M$ schwarz.
Man entnimmt **mit Zurücklegen** n Kugeln, davon sind k rot und $n - k$ schwarz.
Wir betrachten die Zufallsgröße:
$X =$ Anzahl der entnommenen roten Kugeln
Man gebe die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an!

Antwort:
$X \sim B(n, p)$ binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{M}{N}$.

Poisson-Verteilung: $X \sim Poisson(\lambda)$
Eine Zufallsgröße X mit dem Wertebereich $\{0, 1, 2, \dots\}$ heißt **Poisson-verteilt** mit dem Parameter $\lambda > 0$, falls gilt

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Beispiele:
X: Anzahl einkommender Gespräche pro Stunde in einer Telefonzentrale
X: Anzahl der in 1 Minute zerfallenen Atomkerne eines radioaktiven Präparates

Ampel: Es bezeichne X die zufällige Anzahl von Fahrzeugen, die an einer Ampel während der einminütigen Rotphase eintreffen.
X sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 5$
(d.h. im Mittel treffen in 1 Minute 5 Fahrzeuge ein).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 1 Minute höchstens 2 Fahrzeuge eintreffen?