Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

3. Vorlesung - 2017

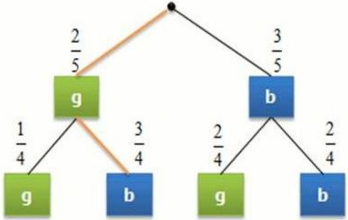
Bedingte Wahrscheinlichkeit

In einer Urne sind 2 grüne und 3 blaue Kugeln. 2 Kugeln werden ohne Zürücklegen gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass :

a) man eine grüne und danach eine blaue Kugel zieht?

b) beide Kugeln die gleiche Farbe haben?

Bedingte Wahrscheinlichkeit



1. Pfadregel: 1. Zug grün – 2. Zug blau

$$P(grün, blau) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

2. Pfadregel: (grün, grün) oder (blau, blau)

$$P(gg, bb) = P(gg) + P(bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 4

Sei $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{K}$. Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A durch B ist $P(\cdot|B) : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

wenn $P(B) > 0$. $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Eintreten des Ereignisses B bereits bekannt ist.

Übung

Man beweise, dass für $A, B \in \mathcal{K}, P(A) > 0, P(B) > 0$ gilt:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$$

Satz 5 - Multiplikationsregel

Sei $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$ so dass

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Es gilt

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Vollständiges System von Ereignissen

Definition 5

Eine Menge von Ereignissen $(A_i)_{i\in I}$ aus Ω heißt **vollständiges System von Ereignissen** (Partition, Unterteilung) in Ω, wenn

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

und für alle $i, j \in I$, $i \neq j$, die Ereignisse A_i und A_j disjunkt sind, d.h.

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset.$$

.

Beispiel: $A \subset \Omega \Rightarrow \{A, \bar{A}\}$ ist vollständiges System von Ereignissen in Ω.

Satz 6 - Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ sei $(A_i)_{i\in I}$ ein vollständiges System von Ereignissen mit $P(A_i) > 0$ und $A_i \in \mathcal{K}$ für alle $i \in I$. Für $A \in \mathcal{K}$ gilt

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A_i)P(A|A_i).$$

Satz 7 - Formel von Bayes

In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ sei $(A_i)_{i\in I}$ ein vollständiges System von Ereignissen mit $P(A_i) > 0$ und $A_i \in \mathcal{K}$ für alle $i \in I$ und sei $A \in \mathcal{K}$, so dass $P(A) > 0$. Es gilt

$$P(A_j|A) = \frac{P(A_j)P(A|A_j)}{\sum\limits_{i\in I} P(A_i)P(A|A_i)} \quad \forall j \in I.$$

Unabhängige Ereignisse

Sei $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 6

Die Ereignisse $A, B \in \mathcal{K}$ sind **unabhängig**, wenn das Auftauchen des Ereignisses A, das Auftauchen des Ereignisses B nicht beeinflusst und umgekehrt

Wenn A und B unabhängig sind, dann gilt

$$P(A|B) = P(A) \text{ und } P(B|A) = P(B)$$

Definition 6*

Die Ereignisse $A, B \in \mathcal{K}$ sind **unabhängig**, wenn

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Unabhängige Ereignisse

Satz 8

In einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ mit $A, B \in \mathcal{K}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A und B sind **unabhängig**;
b) A und $\bar{B}$ sind **unabhängig**;
c) $\bar{A}$ und B sind **unabhängig**;
d) $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind **unabhängig**.

Unabhängige Ereignissen

Definition 7

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{K}$ sind **unabhängig** (in der Gesamtheit), wenn für jede endliche Menge $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_m}).$$

$A_1, \dots, A_n$ aus $\mathcal{K}$ sind **paarweise unabhängig**, wenn

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \ \forall \ i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

Fragen: Was bedeutet:

a) dass 3 Ereignisse A, B, C paarweise unabhängig sind?

b) dass die 3 Ereignisse A, B, C unabhängig sind? Antworten:

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B), P(B \cap C) = P(B)P(C), P(A \cap C) = P(A)P(C)$

b) $P(A \cap B) = P(A)P(B), P(B \cap C) = P(B)P(C), P(A \cap C) = P(A)P(C)$ und $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Beispiel mit dem Tetraeder

Die 4 Flächen eines fairen Tetraeders sind eine rot, eine blau, eine grün gefärbt. Die vierte Fläche ist mit allen drei Farben bunt bemalt. Das Tetraeder wird geworfen, und es werden die folgenden Ereignisse betrachtet:
R: der Teraeder fällt auf eine Fläche mit roter Farbe
B: der Teraeder fällt auf eine Fläche mit blauer Farbe G: der Teraeder fällt auf eine Fläche mit grüner Farbe.

Sind die 3 Ereignisse R, B, G unabhängig?

Zufallsgrößen

Sei $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 8

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsgröße (zufällige Variable), wenn

$$\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{K} \quad \text{für} \quad \text{alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zufallsgröße $\to$ ZG

Beispiel: Ein Spieler wirft zwei unterscheidbare Münzen
$\Rightarrow \Omega = \{(K, Z), (K, K), (Z, K), (Z, Z)\}$

Die Zufallsgröße X zeigt an wie oft Zahl (Z) aufgetaucht ist:
$\Rightarrow X : \Omega \to \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{1}{2},$

weil $X((K, Z)) = 1, X((K, K)) = 0, X((Z, K)) = 1, X((Z, Z)) = 2$

Eine Zufallsgröße heißt

diskret, wenn sie endlich viele $(x_1, \ldots, x_n)$ oder abzählbar unendlich viele $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ Werte

stetig, wenn sie (überabzählbar viele) Werte in einem Intervall oder aus $\mathbb{R}$

annehmen kann.

Diskrete ZG: Summe der Zahlen beim Würfeln, Anzahl defekter Teile während der Produktion, Anzahl Druckfehler auf einer Zeitungsseite...

Stetige ZG: Brenndauer einer Glühlampe, Abfüllmenge in Konserven, Länge von hergestellten Schrauben, Temperaturen ...