17.03.2017

SD Cl

Monica Bota bmonica@math.ubbcluj.ro

Gesamtnote: Test 20%, Labor: 20%, Finalarbeit 20%

Literatur H. Șerban, Ecuații și sist. de ec. diferențiale, Presa Univ. Cj, 2009

R. Precup, Ec. diferențiale, Risoprint, 2011

W. Walter, Gewöhnliche Differentialgl. Springer 2009

Braun, DGL u. ihre Anwendungen, Springer, 1994.

$x^2-5x+6=0 < \begin{matrix} x_1=2 \in \mathbb{R} \\ x_2=3 \in \mathbb{R} \end{matrix}$

Die Lösung einer DGL ist eine Funktion

$y=y(x)$ y - die unbekannte F

x - die unabhängige Variable

Def. Unter einer Differenzialgleichung verstehen wir eine Beziehung zw. eine F und einige Ableitungen von ihr:

Bsp:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & y'=y \\ 2. & y^2+y'^2=c,\ c\in\mathbb{R} \\ 3. & y''+c^2y=0,\ c\in\mathbb{R} \\ 4. & x''+2x'+x=1 \end{array}\right\} \text{gewöhnliche DGL}$$

5. $u_t=u_{xx}$

1. $y'=y$

$y=y(x)$

$y' \Rightarrow$ DGL 1 Ordnung

2. $y^2+y'^2=c,\ c\in\mathbb{R}$

$y=y(x)$ DGL 1. Ord.

3. $y=y(x)$ DGL 2. Ord

4. $x=x(t)$, t = Zeit DGL 2. Ord.

5. Partielle DGL

Def Die höchste auftretende Ableitungsordnung heißt Ordnung der DGL

Die allgemeine Form einer DGL n-ter Ordnung

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ → implizite Form

$F: \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$

$y^{(n)} = f(x, y, y', y^{(n-1)})$ → explizite Form

$f: \underset{D_f}{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Def: Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (1)

$\varphi \in C^n(I)$ eine Lösung der DGL ist wenn

1) I - Intervall

2) $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in D_f$

3) $\varphi^{(n)} = \cancel{f(x, \theta, y', \dots, y^{(n-1)})}\ f(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$

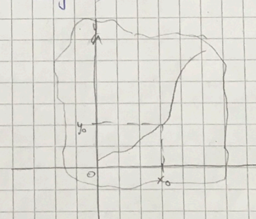
$y' = f(x, y(x))$ $f: D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$

$\varphi \in C^1(I)$ (φ ist stetig und differentierbar auf I)

1) I - Intervall

2) $(x, y(x)) \in D_f$

3) $\cancel{f(x) = f(x,}$ $\varphi = f(x, \varphi(x))$



Unter einer Lösung der DGL verstehen wir eine hinreichend oft differenzierbare Funktion welche die DGL in einem gewisen Gebiet unabhängigen variablen identisch erfüllt.

Bsp. $y' = y$

$y(x) = e^x$

$(e^x)' = e^x$ W Lösung der DGL

$y_0(x) = 2e^x$

$(2e^x)' = 2e^x$ W

$y(x) = e^{2x}$

$y'(x) = 2e^{2x}$

$2e^x = e^{2x}$ F

$y' = y \mid \cdot e^{-x}$

$y' \cdot e^{-x} = y \cdot e^{-x}$

$y' \cdot e^{-x} - y \cdot e^{-x} = 0$

$(y \cdot e^{-x})' = 0 \mid \int$

$y \cdot e^{-x} = k$, $k \in \mathbb{R}$ ~~K~~onstante

$\boxed{y = k e^{x}, \; k \in \mathbb{R}}$ allgemeine Lösung der DGL

$$\begin{cases} y = k \cdot e^{x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$x = 0$

$y = 1$

$\Rightarrow 1 = k e^{0} \Rightarrow k = 1$

$\boxed{y = e^{x}}$ – die eindeutige Lösung der DGL zusammen mit der Bed. $y(0) = 1$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ → Cauchyproblem od. Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$ → Randwertproblem

Systeme von DGL

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Bsp $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$ → System erster Ordnung.

$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_1(x) \\ y_2 = y_2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$ die unbekannten Fkt

DGL 1. Ordnung

1. $y' = f(x) \mid \int \Rightarrow y(x) = \int f(x)\,dx + k,\ k \in \mathbb{R}$

$y' = \ln x \mid \int \Rightarrow y = \int \ln x\,dx =$

$= \int (x)' \ln x\,dx =$

$= x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx$

$= x\ln x - x + k,\ k \in \mathbb{R}$.

2. DGL mit getrennten Variablen

$y'(x) = f(x)\,g(y(x)),\quad g(y) \neq 0$

$y' = \frac{dy}{dx}$ (die Ableitung von y nach x)

$\frac{dy}{dx} = f(x)\,\cancel{g(y(x))}\,g(y) \mid \cdot dx$

$dy = f(x)\,g(y)\,dx \mid : g(y) \neq 0$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \mid \int$

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

Stammfkt / Stammfkt.

$G(y) + k_1 = F(x) + k_2$

$G(y) = F(x) + k,\quad k = k_2 - k_1$ allg Lösung im impliziter Form

$y = G^{-1}(F(x) + k),\ k \in \mathbb{R}$ allg Lösung im explizite Form

$g(y) = 0$

$\exists\, y_0 \in \mathbb{R} : g(y_0) = 0 \Rightarrow y_0$ - singuläre Lösung ist.

Bsp: 1) $y' = \frac{1}{x} y \quad , x > 0$

$f(x, y) = \frac{1}{x} y$

$D_f = (0, \infty) \times \mathbb{R}$

$y' = \frac{dy}{dx} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad g(y) = y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y \quad | \, dx$

$dy = \frac{1}{x} y \, dx \quad | : y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = \frac{1}{x} dx \quad | \int$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + k \quad , k \in \mathbb{R}$. Lös. in impliziter Form

$|y| = e^{\ln|x| + k}$

$|y| = e^{\ln|x|} \cdot e^k$

$y = \pm e^{\ln|x|} \cdot e^k$

$y = e^{\ln|x|} \cdot k_1 \quad , k_1 = \pm e^k$

$y = |x| k_1$

$y = x k_1$ → die allg. L in expliziter Form

$g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow 0' = \frac{1}{x} \cdot 0$ W $\Rightarrow y = 0$ singuläre Lösung

2) $y' = y$

$f(x, y) = y \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^2$

$f(x) = 1$

$g(y) = y$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = y \quad | \, dx$

$dy = y \, dx \quad | : y \neq 0$

$\frac{dy}{y} = dx \quad \int$

$\int \frac{1}{y} dx = \int dx$

$\ln|y| = x + k$

$|y| = e^{x+k} = e^x e^k$

$y = \pm e^x e^k$

$\boxed{y = e^x \cdot k, \quad k = \pm e^k}$ allg. L

$y = 0 \Rightarrow$ sing. L.

3. Homogene DGL 1. Ordnung (Euler)

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Substitution: $z := \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \mid '$

$z = z(x) \qquad y' = z'x + zx' = z'x + z$

Einsetzen

$\Rightarrow z'x + z = f(z)$

$z'x = f(z) - z \rightarrow$ DGL mit getrennten Variablen

$z' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{dx} \cdot x = f(z) - z \mid \cdot dx$

$dz \cdot x = (f(z) - z)\,dx \mid : f(z) - z \neq 0$

$\frac{dz}{f(z) - z} \cdot x = dx \mid : x \neq 0$

$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \mid \int$

$F(z) = \ln|x| + k \Rightarrow F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + k$

$z = F^{-1}(\ln|x| + k) + k \in \mathbb{R}$

$\frac{y}{x} = F^{-1}(\ln|x| + k) \Rightarrow y = x \cdot F^{-1}(\ln|x| + k), \; k \in \mathbb{R}$

$f(z) - z = 0 \Rightarrow$ sing. L für die Gl. in z

$y_0 = x \cdot z_0$