CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

Maestría en Economía 2024–2026

Elección Discreta

Tarea 2

PRESENTA: José Daniel Fuentes García

PROFESOR: Edwin Muñóz

LABORATORISTA: Adair Hernández

Jose Daniel Fuentes García
Github : danifuentesga

Índice

Lista de tablas **2**

Lista de figuras **3**

Instrucciones **4**

Problema 1 : Simulando Elecciones **4**
a) 4
b) 8
c) 11

Problema 2: Agregación **11**
a) 12
b) 13

Problema 3 **13**
a) 14

Problema 4 : Sustitución **15**
a) 15
b) 17
c) 19
A Mano) 19
d) 23

Lista de tablas

Tabla 1. Estadísticas Descriptivas de la Demanda por Alternativa 7
Tabla 2. Estadísticas Descriptivas de la Demanda por Alternativa (Logit) . . . 11
Tabla 3. Demanda Agregada Esperada por Alternativa 13

Lista de figuras

1 Distribución de la Demanda de la Alternativa 1 5
2 Distribución de la Demanda de la Alternativa 2 5
3 Distribución de la Demanda de la Alternativa 3 6
4 Distribución de la Demanda de la Alternativa 4 6
5 Distribución de la Demanda de todas las Alternativas 7
6 Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 1: Gumbel vs. Logit condicional 8
7 Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 2: Gumbel vs. Logit condicional 9
8 Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 3: Gumbel vs. Logit condicional 9
9 Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 4: Gumbel vs. Logit condicional 10
10 Distribución simulada de la demanda de todas las Alternativa : Gumbel vs. Logit condicional 10

Instrucciones

Fecha límite: jueves 12 de febrero a las 12:30 pm vía **Teams**.

Problema 1 : Simulando Elecciones

En las siguientes preguntas, asuma que hay **tres tipos de consumidores** s_1, s_2, s_3, con **50 consumidores de cada tipo** (es decir, **150 en total**), que $|B| = 4$ y que la utilidad determinística es $v(x_j, s_n) = 3 + 2\log(y_n - p_j)$, donde y_n es el **ingreso observado** del consumidor de tipo n, con $y_n \in \{500, 4000, 10000\}$, y p_j es el **precio** de la alternativa j, definido como $p_j = 100 \times j$ para $j = 1, \ldots, 4$; además, asuma que la **utilidad no observada** es *i.i.d.* Gumbel.

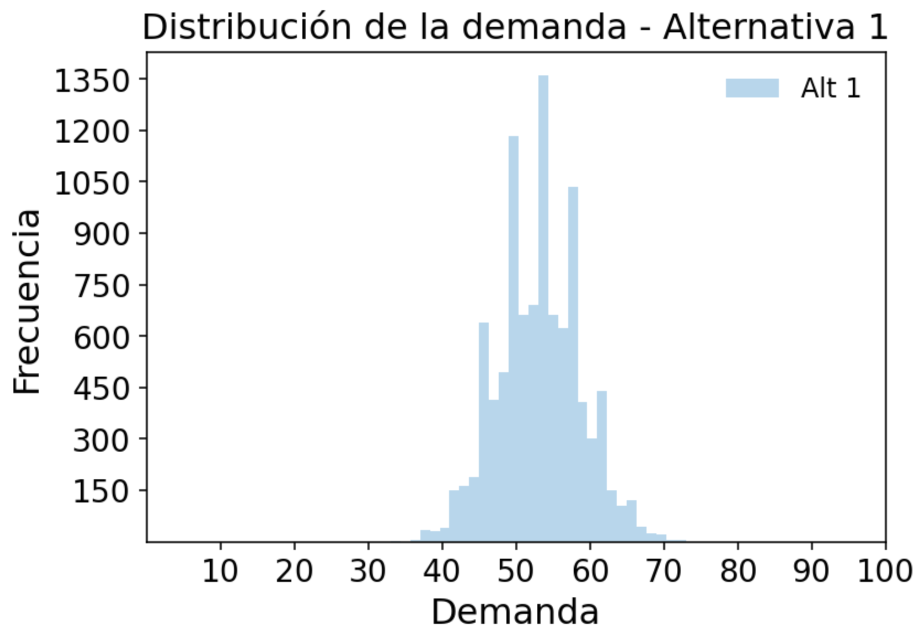
a)

Simule las elecciones de cada consumidor generando una realización de la **utilidad no observada**. Esto es, la utilidad del consumidor n por consumir la alternativa j es $v_{jn} + \varepsilon_{jn}$ donde ε_{jn} es una realización de la v.a. distribuida *Gumbel* con parámetros $\mu = 0$, $\beta = 1$. La alternativa elegida por el consumidor es aquella que le da **mayor utilidad total** (observada más no observada).

A esto le llamamos **episodio**. **Simule 10000 episodios** de elección, re muestreando los valores de la utilidad no observada para cada episodio. Note que en cada episodio, para cada consumidor necesita muestrear **cuatro valores** para la parte no observada de la utilidad. **Calcule** la demanda de cada alternativa en cada episodio. **Grafique** la distribución de la demanda de cada alternativa y encuentre su **promedio** y **desviación estándar**.

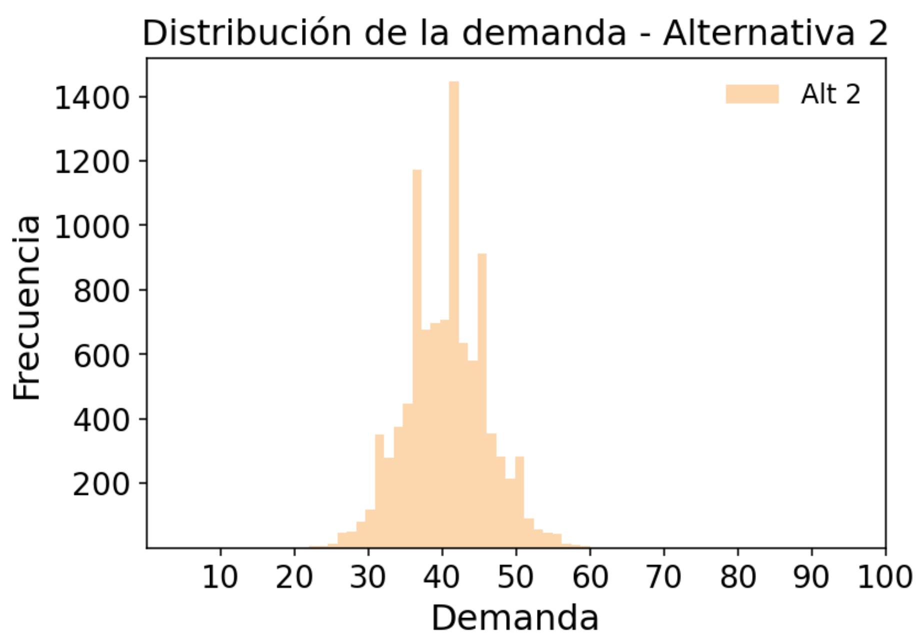
RESPUESTA:

Figura 1: Distribución de la Demanda de la Alternativa 1



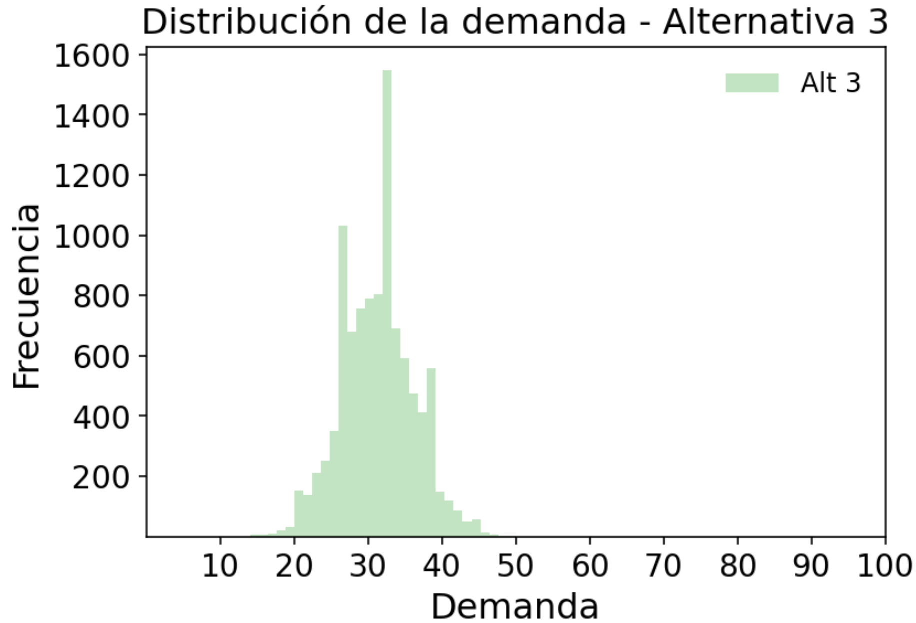
Nota: Demanda simulada de la alternativa 1 ($p_1 = 100$) en 10,000 episodios con utilidad no observada Gumbel. Código disponible en `danifuentesga`

Figura 2: Distribución de la Demanda de la Alternativa 2



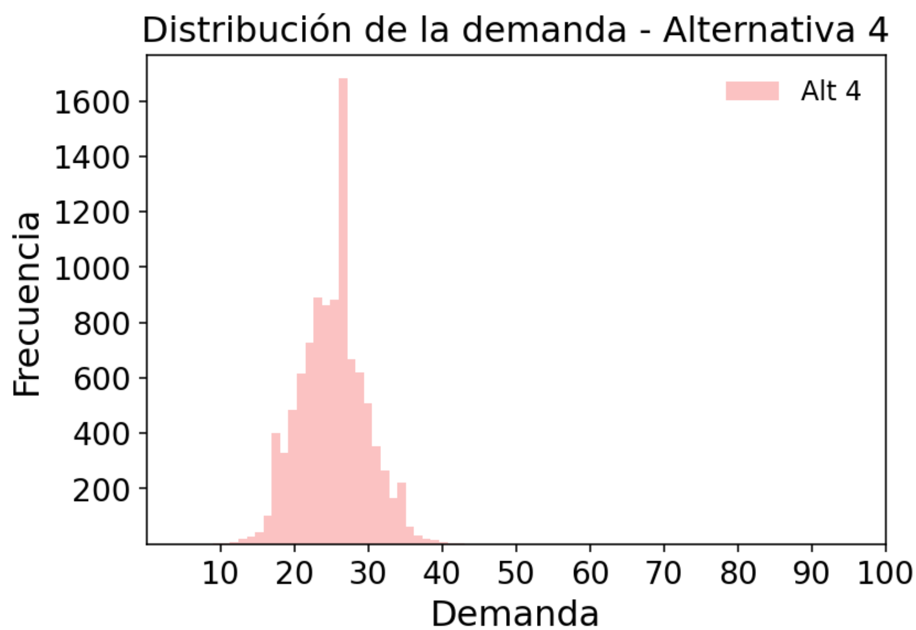
Nota: Demanda simulada de la alternativa 1 ($p_2 = 200$) en 10,000 episodios con utilidad no observada Gumbel. Código disponible en `danifuentesga`

Figura 3: Distribución de la Demanda de la Alternativa 3



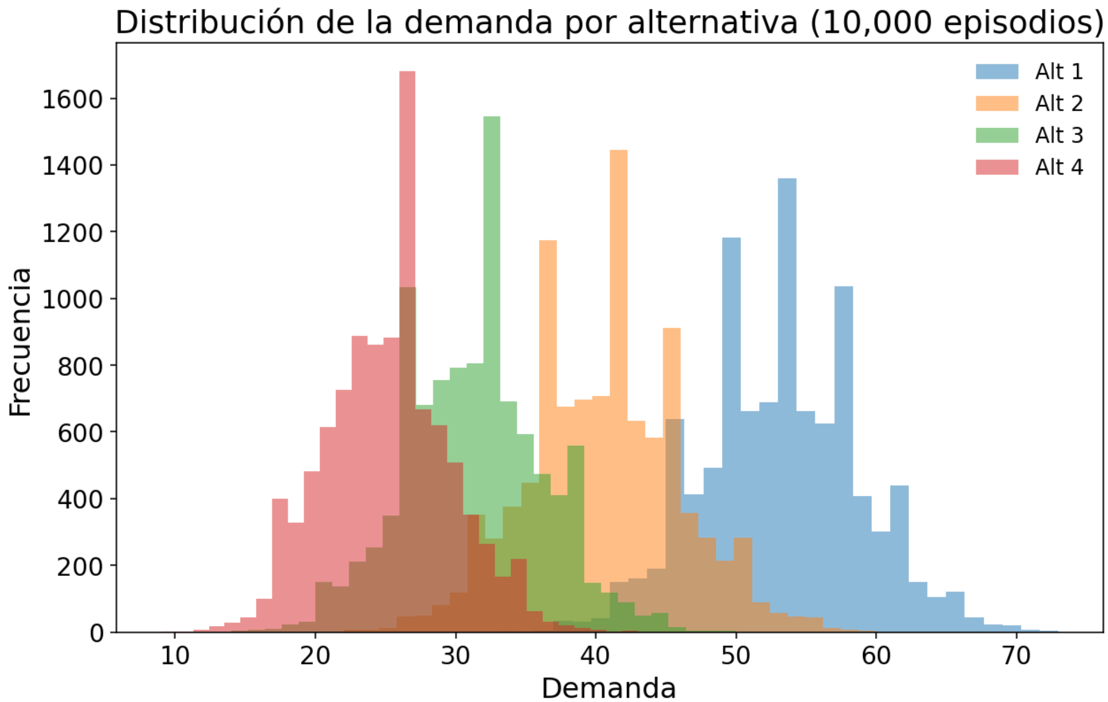
Nota: Demanda simulada de la alternativa 1 ($p_3 = 300$) en 10,000 episodios con utilidad no observada Gumbel. Código disponible en `danifuentesga`

Figura 4: Distribución de la Demanda de la Alternativa 4



Nota: Demanda simulada de la alternativa 1 ($p_4 = 400$) en 10,000 episodios con utilidad no observada Gumbel. Código disponible en `danifuentesga`

Figura 5: Distribución de la Demanda de todas las Alternativas



Nota: Distribuciones empíricas de la demanda para las cuatro alternativas ($p_j = 100j,\ j = 1, \ldots, 4$) obtenidas a partir de 10,000 episodios simulados. En cada episodio, 150 consumidores (50 por tipo con ingresos $y \in \{500, 4000, 10000\}$) eligen la alternativa que maximiza su utilidad $U_{jn} = 3 + 2\ln(y_n - p_j) + \varepsilon_{jn}$, donde ε_{jn} es i.i.d. Gumbel ($\mu = 0, \beta = 1$). Las variaciones en la demanda entre episodios provienen exclusivamente del componente no observado de la utilidad. Proceso disponible en: danifuentesga

Tabla 1. Estadísticas Descriptivas de la Demanda por Alternativa

Alternativa	Promedio	Desv. Estándar
Alt 1	53.00	5.61
Alt 2	40.53	5.49
Alt 3	31.28	4.94
Alt 4	25.20	4.42

Fuente: Elaboración propia con simulaciones Gumbel.

La tabla 1 resume cómo se distribuye la demanda por alternativa a lo largo de los **10,000 episodios simulados**. La **Alternativa 1** presenta la mayor **demanda promedio**, seguida por las alternativas 2, 3 y 4 en ese orden. La **desviación estándar** indica que la cantidad de consumidores que la eligen cada alternativa fluctúa en aproximadamente 5 personas entre un episodio y otro (variación en las preferencias no observadas).

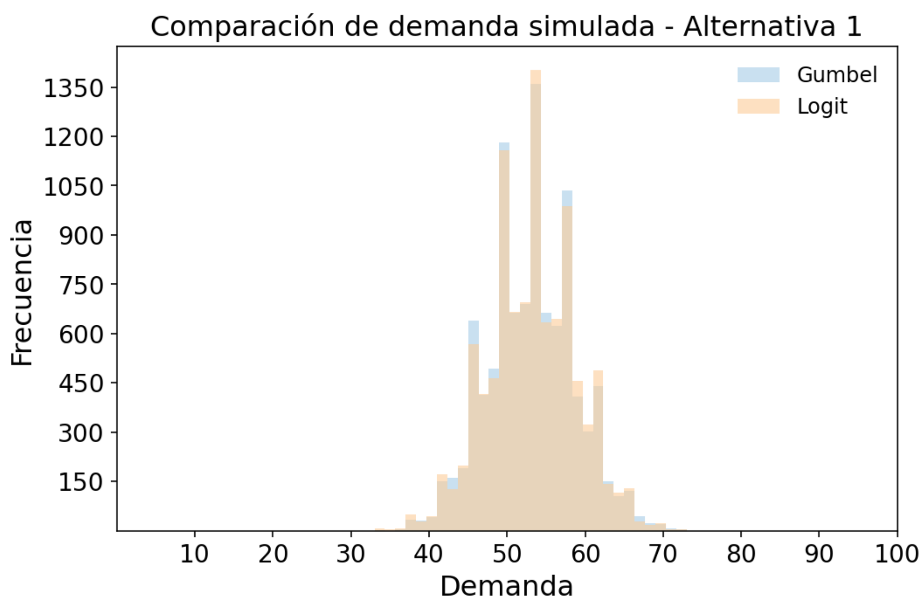
b)

Simule las elecciones de los **150 consumidores**, asumiendo ahora que cada elección es una realización de una variable aleatoria **multinomial** con las probabilidades dadas por el *logit condicional* (¿por qué es el supuesto correcto?).

Repita esto 10000 episodios. Para cada episodio, **calcule** la demanda de cada alternativa. **Grafique** la distribución de la demanda de cada alternativa y encuentre su **promedio** y **desviación estándar** a través de todos los episodios.

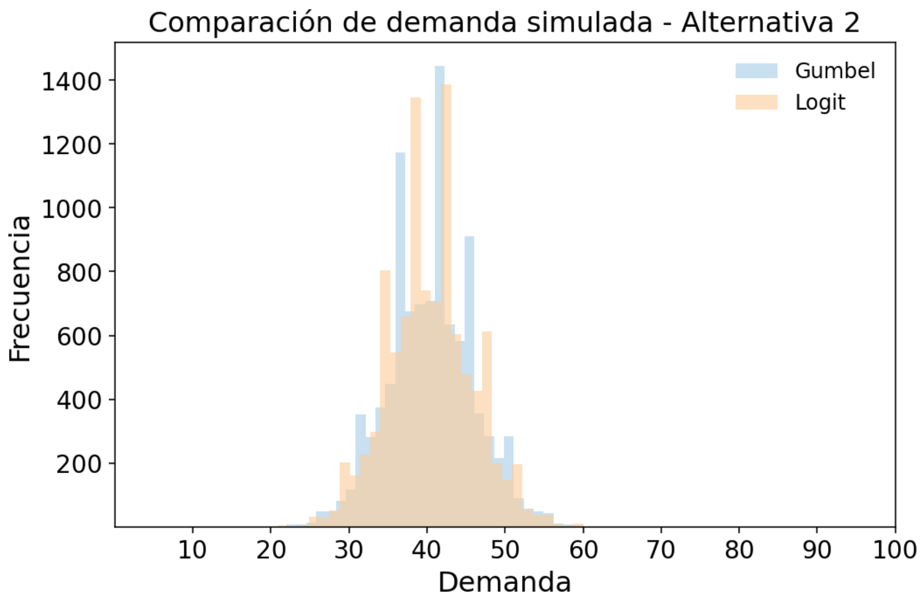
RESPUESTA:

Figura 6: Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 1: Gumbel vs. Logit condicional



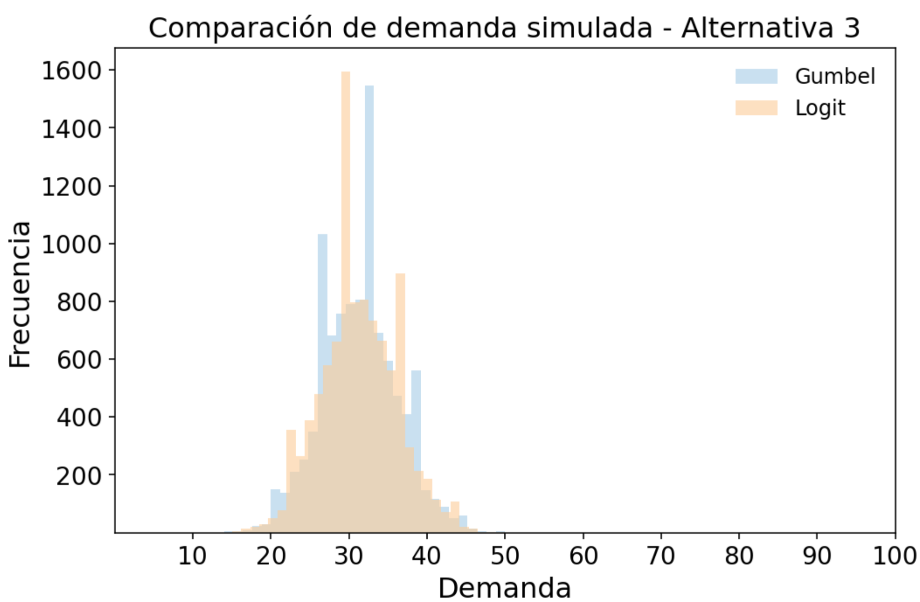
Nota: Demanda simulada de la alternativa 1 ($p_1 = 100$) comparando el mecanismo con simulación Gumbel y el logit condicional. danifuentesga

Figura 7: Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 2: Gumbel vs. Logit condicional



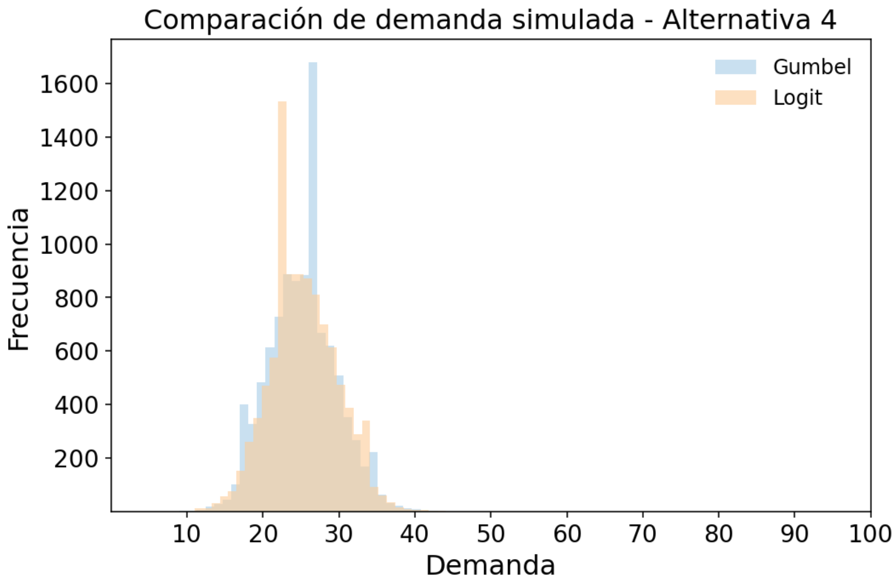
Nota: Demanda simulada de la alternativa 2 ($p_2 = 200$) comparando el mecanismo con simulación Gumbel y el logit condicional. danifuentesga

Figura 8: Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 3: Gumbel vs. Logit condicional



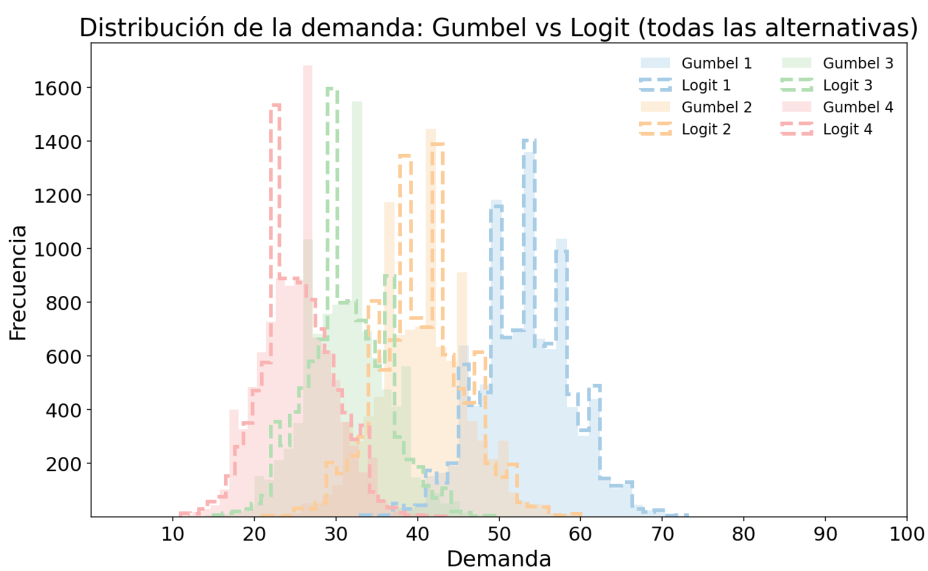
Nota: Demanda simulada de la alternativa 1 ($p_3 = 300$) comparando el mecanismo con simulación Gumbel y el logit condicional. danifuentesga

Figura 9: Distribución simulada de la demanda de la Alternativa 4: Gumbel vs. Logit condicional



Nota: Demanda simulada de la alternativa 4 ($p_4 = 400$) comparando el mecanismo con simulación Gumbel y el logit condicional. danifuentesga

Figura 10: Distribución simulada de la demanda de todas las Alternativa : Gumbel vs. Logit condicional



Nota: Distribuciones empíricas de la demanda para las cuatro alternativas ($p_j = 100j,\ j = 1, \ldots, 4$) obtenidas a partir de 10,000 episodios simulados con 150 consumidores (50 por tipo con ingresos $y \in \{500, 4000, 10000\}$). Se comparan dos mecanismos equivalentes del modelo de utilidad aleatoria: (i) maximización de $U_{jn} = v_{jn} + \varepsilon_{jn}$ con choques Gumbel i.i.d., y (ii) elecciones multinomiales con probabilidades dadas por el logit condicional. danifuentesga

Tabla 2. Estadísticas Descriptivas de la Demanda por Alternativa (Logit)

Alternativa	Promedio	Desv. Estándar
Alt 1	53.08	5.66
Alt 2	40.42	5.42
Alt 3	31.22	4.92
Alt 4	25.28	4.45

Fuente: Elaboración propia con probabilidades teóricas del modelo logit.

c)

Discuta la relacion entre **(a)** y **(b)**. **RESPUESTA:**

Las notas de la **clase 3** muestran la demostración formal de cómo, al suponer que el término no observado de la utilidad sigue una distribución **Gumbel**, se llega a la forma analítica del **logit**. De manera intuitiva, cuando simulamos con Gumbel vía *Monte Carlo*, lo que hacemos es repetir muchas veces un mismo mercado generando gustos no observados distintos y viendo qué alternativa gana en cada repetición. Al promediar esas elecciones a lo largo de miles de episodios, aparece un patrón muy estable en las proporciones de elección.

Ese patrón coincide exactamente con la fórmula logit y esto ocurre porque la forma particular de la Gumbel hace que, al comparar utilidades, los choques no observados se “acomoden” de tal manera que, en promedio, el resultado depende solo de la parte observada de la utilidad. Aunque la simulación parece un experimento con muchos resultados distintos, todos esos resultados terminan contando la misma historia: qué alternativa tiene mayor utilidad observada. Por eso, al final, la simulación y la fórmula analítica casi dicen lo mismo.

Problema 2 : Agregación

Suponga $s_n \in S \subset \mathbb{R}^m$, $|S| < \infty$, esto es, hay un **número finito de tipos de consumidores** (acorde a sus **características observadas**), y en la población hay un número M_n de consumidores de tipo n. Entonces el número total de consumidores es $M_1 + M_2 + \cdots + M_{|S|}$.

Además, suponga que $|B|$ es el **número de alternativas** (obviamente finito, exhaustivo y excluyente), y cada alternativa puede ser producida mágicamente (**oferta ilimitada**).

Asuma que la probabilidad de que un consumidor con características observadas s_n elija (consuma) la alternativa j cuando enfrenta el conjunto de alternativas B es $P(j \mid s_n, B) = p_{nj} > 0$ para todo n, j.

a)

Encuentre una expresión analítica para la **demanda esperada** (desde la perspectiva del **econometrista**) de cada alternativa.

RESPUESTA:

Como una primera aproximación, voy a usar el ejemplo del ejercicio 1, tenemos tres tipos de consumidores s_1, s_2, s_3 y 50 personas de cada tipo, enfrentando cuatro alternativas. La **demanda agregada esperada** de cada alternativa se puede escribir explícitamente como:

$$\mathbb{E}[D_1] = 50\, p_{11} + 50\, p_{21} + 50\, p_{31},$$

$$\mathbb{E}[D_2] = 50\, p_{12} + 50\, p_{22} + 50\, p_{32},$$

$$\mathbb{E}[D_3] = 50\, p_{13} + 50\, p_{23} + 50\, p_{33},$$

$$\mathbb{E}[D_4] = 50\, p_{14} + 50\, p_{24} + 50\, p_{34}.$$

Entonces podría decir que para cada alternativa j, sumas *tipo por tipo*: (# personas del tipo n) $\times$ (probabilidad de que ese tipo elija j).

Como $P(\text{elige } j \mid s_n, B) = p_{nj}$, se tiene

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\text{elige } j\} \mid s_n, B] = p_{nj}.$$

Por lo tanto, la **demanda esperada** es

$$\mathbb{E}[D_j \mid B] \;=\; \sum_{n\in S} M_n\, p_{nj}, \qquad \forall j \in B.$$

- **En el ejercicio 1** si 50 personas de un tipo eligen j con probabilidad 0,2, entonces "en promedio" ese tipo aporta $50 \times 0{,}2 = 10$ compradores a j; y asi te vas con los demas tipos.

b)

Usando esta expresión, **calcule** la **demanda esperada** de cada alternativa en el **ejercicio 2**. **Interprete**.

RESPUESTA:

Tabla 3. Demanda Agregada Esperada por Alternativa

Alternativa	Demanda esperada	Proporción
Alt 1	53.06	0.354
Alt 2	40.45	0.270
Alt 3	31.20	0.208
Alt 4	25.29	0.169

Nota: La demanda esperada se obtuvo sumando las probabilidades logit individuales. Por ejemplo, si tres personas tienen probabilidades de elegir la alternativa 1 iguales a 0.6, 0.3 y 0.1 respectivamente, entonces la demanda esperada de esa alternativa es $0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1$. Es decir, en promedio, se espera que una persona la elija. En la tabla se aplica exactamente esta misma lógica, pero sumando las probabilidades de los 150 consumidores.

Problema 3

Considere el siguiente modelo de elección: $u_n(j) = v(x_j, s_n) + \varepsilon_{jn}$ donde ε_{jn} corresponde a la **parte no observada** de la utilidad que recibe el consumidor n por consumir la alternativa j en el conjunto de alternativas B. Ahora vamos a asumir que ε_{jn} son *i.i.d.* pero con distribución **exponencial**, *i.e.*, su pdf es $f(\varepsilon) = e^{-\varepsilon}$ y su cdf $F(\varepsilon) = 1 - e^{-\varepsilon}$. **Asuma** $|B| = 2$, esto es, solo hay **dos alternativas**.

a)

Obtenga una expresión para la **probabilidad de elección** de 1, $P(1 \mid s_n, B)$.

RESPUESTA:

Con dos alternativas $B = \{1, 2\}$, el consumidor elige 1 si su utilidad total es mayor que la de 2:

$$P(1 \mid s_n, B) = P\Big(u_n(1) \geq u_n(2)\Big) = P\Big(v_1 + \varepsilon_1 \geq v_2 + \varepsilon_2\Big),$$

donde $v_j \equiv v(x_j, s_n)$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$ con $f(\varepsilon) = e^{-\varepsilon}$, $F(t) = 1 - e^{-t}$ para $t \geq 0$.

Reordenando la desigualdad:

$$v_1 + \varepsilon_1 \geq v_2 + \varepsilon_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_2 \leq (v_1 - v_2) + \varepsilon_1.$$

Defina $\Delta \equiv v_1 - v_2$. Entonces

$$P(1 \mid s_n, B) = P\Big(\varepsilon_2 \leq \Delta + \varepsilon_1\Big).$$

Para calcularlo de forma sencilla, condicionamos en un valor de ε_1 ("fijamos" ε_1) y luego promediamos:

$$P(1 \mid s_n, B) = \int_0^\infty P\Big(\varepsilon_2 \leq \Delta + e_1\Big)\, f_{\varepsilon_1}(e_1)\, de_1.$$

Aquí aparece un detalle importante: como $\varepsilon_2 \geq 0$ siempre, si $\Delta + e_1 < 0$ entonces $P(\varepsilon_2 \leq \Delta + e_1) = 0$. En cambio, si $\Delta + e_1 \geq 0$, entonces

$$P(\varepsilon_2 \leq \Delta + e_1) = F(\Delta + e_1) = 1 - e^{-(\Delta + e_1)}.$$

Con esto, la probabilidad queda (por casos):

$$P(1 \mid s_n, B) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \Big(1 - e^{-(\Delta+e_1)}\Big) e^{-e_1}\, de_1 = 1 - \frac{1}{2}e^{-\Delta}, & \text{si } \Delta \geq 0, \\ \displaystyle\int_{-\Delta}^\infty \Big(1 - e^{-(\Delta+e_1)}\Big) e^{-e_1}\, de_1 = \frac{1}{2}e^{\Delta}, & \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$

Es decir, con errores exponenciales la probabilidad de elegir 1 depende de $\Delta = v_1 - v_2$, pero **no** toma la forma logit; queda una expresión por casos debido a que la exponencial solo permite choques **no negativos**.

Problema 4 : Sustitución

Suponga que $P(j \mid s_n, A) = \dfrac{e^{v(x_j, s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k, s_n)}}$, que $x_j \in \mathbb{R}^\ell$, $s_n \in \mathbb{R}^m$, $\ell, m \in \mathbb{N}$, $v : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. **Asuma** que v es tan diferenciable como sea necesario. Note que $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{j\ell}) = (x_{jr})_{r=1}^\ell$ es un **vector de características** de un producto.

a)

Considere $i \neq j$, $i, j \in A$. **Muestre** que

$$\frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} = -\, Prob(i \mid s_n, A)\, Prob(j \mid s_n, A)\, \frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}}.$$

RESPUESTA:

$$P(i \mid s_n, A) = \frac{e^{v(x_i, s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k, s_n)}} \qquad \textbf{Def. de Probabilidad Logit} \qquad (1)$$

$$= \frac{e^{v_i}}{D} \qquad \textbf{Notación: } v_i := v(x_i, s_n),\ D := \sum_{k\in A} e^{v_k} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\frac{e^{v_i}}{D}\right) \qquad \textbf{Sustituimos } P(i) = e^{v_i}/D \tag{3}$$

$$= \frac{D \cdot \frac{\partial e^{v_i}}{\partial x_{jr}} - e^{v_i} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_{jr}}}{D^2} \qquad \textbf{Regla del cociente} \tag{4}$$

$$\frac{\partial e^{v_i}}{\partial x_{jr}} = e^{v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Regla de la cadena} \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_{jr}} = 0 \qquad \textbf{Porque } i \neq j \text{ y } v_i = v(x_i, s_n) \text{ no depende de } x_{jr} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial e^{v_i}}{\partial x_{jr}} = 0 \qquad \textbf{Sustituimos } \frac{\partial v_i}{\partial x_{jr}} = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} = \frac{D \cdot 0 - e^{v_i} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_{jr}}}{D^2} \qquad \textbf{Sustituimos } \frac{\partial e^{v_i}}{\partial x_{jr}} = 0 \tag{8}$$

$$= -\frac{e^{v_i}}{D^2}\frac{\partial D}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Simplificamos} \tag{9}$$

$$D = \sum_{k \in A} e^{v_k} \qquad \textbf{Def. de } D \tag{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial D}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\sum_{k \in A} e^{v_k}\right) \qquad \textbf{Derivamos ambos lados} \tag{11}$$

$$= \sum_{k \in A} \frac{\partial e^{v_k}}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Linealidad de la derivada} \tag{12}$$

$$\frac{\partial e^{v_k}}{\partial x_{jr}} = e^{v_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Regla de la cadena} \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_{jr}} = 0 \quad \text{si } k \neq j \qquad \textbf{Porque } v_k = v(x_k, s_n) \text{ no depende de } x_{jr} \text{ si } k \neq j \tag{14}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in A} \frac{\partial e^{v_k}}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial e^{v_j}}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Sólo sobrevive el término } k = j \tag{15}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial D}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial e^{v_j}}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Sustituimos en } \frac{\partial D}{\partial x_{jr}} \tag{16}$$

$$= e^{v_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Regla de la cadena} \tag{17}$$

$$= e^{v_j}\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}} \qquad \textbf{Def. de } v_j \tag{18}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} = -\frac{e^{v_i}}{D^2}\left(e^{v_j}\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}}\right) \quad \textbf{Sustituimos } \frac{\partial D}{\partial x_{jr}} \tag{19}$$

$$= -\frac{e^{v_i}e^{v_j}}{D^2}\,\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}} \quad \textbf{Multiplicamos} \tag{20}$$

$$= -\left(\frac{e^{v_i}}{D}\right)\left(\frac{e^{v_j}}{D}\right)\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}} \quad \textbf{Reescribimos } \frac{e^{v_i}e^{v_j}}{D^2} \tag{21}$$

$$\frac{e^{v_i}}{D} = P(i \mid s_n, A) \quad \textbf{Def. de } P(i \mid s_n, A) \tag{22}$$

$$\frac{e^{v_j}}{D} = P(j \mid s_n, A) \quad \textbf{Def. de } P(j \mid s_n, A) \tag{23}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} = -P(i \mid s_n, A)\,P(j \mid s_n, A)\,\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}} \quad \textbf{Sustituimos definiciones } \blacksquare \tag{24}$$

b)

Considere $x_i \in A$. **Muestre** que:

$$\frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{ir}} = Prob(i \mid s_n, A)\Big(1 - Prob(i \mid s_n, A)\Big)\,\frac{\partial v(x_i, s_n)}{\partial x_{ir}}.$$

RESPUESTA:

$$P(i \mid s_n, A) = \frac{e^{v(x_i, s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k, s_n)}} \quad \textbf{Def. de Probabilidad Logit} \tag{25}$$

$$= \frac{e^{v_i}}{D} \quad \textbf{Notación: } v_i := v(x_i, s_n),\ D := \sum_{k\in A} e^{v_k} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

$$\frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{ir}} = \frac{\partial}{\partial x_{ir}}\left(\frac{e^{v_i}}{D}\right) \quad \textbf{Sustituimos } P(i) = e^{v_i}/D \tag{28}$$

$$= \frac{D \cdot \frac{\partial e^{v_i}}{\partial x_{ir}} - e^{v_i} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_{ir}}}{D^2} \quad \textbf{Regla del cociente} \tag{29}$$

$$\frac{\partial e^{v_i}}{\partial x_{ir}} = e^{v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_{ir}} \qquad \textbf{Regla de la cadena}D \tag{30}$$

$$\frac{\partial e^{v_k}}{\partial x_{ir}} = e^{v_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_{ir}} \qquad \textbf{Regla de la cadena} \tag{31}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_{ir}} = 0 \quad \text{si } k \neq i \qquad \textbf{Porque} \;\; v_k = v(x_k, s_n) \text{ no depende de } x_{ir} \tag{32}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial D}{\partial x_{ir}} = e^{v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_{ir}} \qquad \textbf{Sólo sobrevive el término} \;\; k = i \Rightarrow \frac{\partial P(i \mid}{\partial x} \tag{33}$$

$$= \frac{e^{v_i}}{D^2}\left(D - e^{v_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_{ir}} \qquad \textbf{Factorizamos} \tag{34}$$

$$= \left(\frac{e^{v_i}}{D}\right)\left(1 - \frac{e^{v_i}}{D}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_{ir}} \qquad \textbf{Dividimos por} \;\; D \tag{35}$$

$$\frac{e^{v_i}}{D} = P(i \mid s_n, A) \qquad \textbf{Def. de probabilidad} \tag{36}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{ir}} = P(i \mid s_n, A)\Big(1 - P(i \mid s_n, A)\Big)\frac{\partial v(x_i, s_n)}{\partial x_{ir}} \qquad \textbf{Sustituimos definiciones} \quad \blacksquare \tag{37}$$

c)

Muestre que:

$$\sum_{i \in A} \frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} = 0.$$

RESPUESTA:

$$\begin{aligned}
P(i \mid s_n, A) &= \frac{e^{v(x_i, s_n)}}{\sum_{k \in A} e^{v(x_k, s_n)}} && \textbf{Def. de Probabilidad Logit} && (38)\\
&=: \frac{e^{v_i}}{D} && \textbf{Notación: } v_i := v(x_i, s_n),\ D := \sum_{k \in A} e^{v_k} && (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in A} \frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} &= \frac{\partial}{\partial x_{jr}} \left(\sum_{i \in A} P(i \mid s_n, A) \right) && \textbf{Derivo} && (40)\\
\sum_{i \in A} P(i \mid s_n, A) &= 1 && \textbf{Suma de probabilidades} && (41)\\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_{jr}} \left(\sum_{i \in A} P(i \mid s_n, A) \right) &= \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(1) && \textbf{Derivamos ambos lados} && (42)\\
&= 0 && \textbf{Derivada de una constante} && (43)\\
\Rightarrow \sum_{i \in A} \frac{\partial P(i \mid s_n, A)}{\partial x_{jr}} &= 0 && \textbf{Conclusión} \quad \blacksquare && (44)
\end{aligned}$$

A Mano)

EJERCICIO 4

Instrucciones....

a) Demostrar

$$\frac{\partial P(i|s_n,A)}{\partial x_{jr}} = -Prob(i|s_n,A)\, Prob(j|s_n,A)\frac{\partial V(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}$$

$$P(i|s_n,A) = \frac{e^{V(x_i,s_n)}}{\underbrace{\sum_{k\in A} e^{V(x_k,s_n)}}_{D}} \quad V_i$$

$$\Rightarrow P(i|s_n,A) = \frac{e^{V_i}}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P(i|s_n,A)}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\frac{e^{V_i}}{D}\right) = \frac{D\cdot \frac{\partial e^{V_i}}{\partial x_{jr}} - e^{V_i}\cdot \frac{\partial D}{\partial x_{jr}}}{D^2}$$

Como $i \neq j$ $\quad x_i \perp x_j \quad \therefore \frac{\partial e^{V_i}}{\partial x_{jr}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\frac{e^{V_i}}{D}\right) = \frac{\cancel{D\cdot 0} - e^{V_i}\cdot \frac{\partial D}{\partial x_j}}{D^2}$$

donde $\frac{\partial D}{\partial x_{jr}} = \sum \frac{\partial e^{V_K}}{\partial x_{jr}} = e^{V_K}\frac{\partial V_K}{\partial x_{jr}}$ $\Big|$ en $K \neq j$ $\frac{\partial V_K}{\partial x_{jr}} = 0$

Solo se queda termino $K = j$

$$\Rightarrow \frac{\partial D}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial e^{V_j}}{\partial x_{jr}} = e^{V_j}\frac{\partial V_j}{\partial x_{jr}} = e^{V_j}\frac{\partial V(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}$$

$$\therefore \frac{\partial P(i|S_n,A)}{\partial x_{jr}} = -\frac{e^{V_i}}{D^2}\left(e^{V_j}\frac{\partial V(x_j,S_n)}{\partial x_{jr}}\right) = -\frac{e^{V_i}e^{V_j}}{D^2}\frac{\partial V(x_j,S_n)}{\partial x_{jr}}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{e^{V_i}e^{V_j}}{D^2}\frac{\partial V(x_j,S_n)}{\partial x_{jr}} = -\left(\frac{e^{V_i}}{D}\right)\left(\frac{e^{V_j}}{D}\right)\frac{\partial V(x_j,S_n)}{\partial x_{jr}}$$

donde $\frac{e^{V_i}}{D} = P(i|S_n,A)$ y $\frac{e^{V_j}}{D} = P(j|S_n,A)$

$$\therefore \frac{\partial P(i|S_n,A)}{\partial x_{jr}} = -P(i|S_n,A)\,P(j|S_n,A)\frac{\partial V(x_j,S_n)}{\partial x_{jr}} \quad \blacksquare$$

b) Demostrar $\frac{\partial P(i|S_n,A)}{\partial x_{ir}} = Prob(i|S_n,A)(1-Prob(i|S_n,A))\frac{\partial V(x_i,S_n)}{\partial x_{ir}}$

$$P(i|S_n,A) = \frac{e^{\overbrace{V(x_i,S_n)}^{V_i}}}{\underbrace{\sum_{k\in A} e^{V(x_k,S_n)}}_{D}} = \frac{e^{V_i}}{D} \Rightarrow \text{Quiero } \frac{\partial}{\partial x_{ir}}\left(\frac{e^{V_i}}{D}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_{ir}}(\cdot) = \frac{D\cdot\frac{\partial e^{V_i}}{\partial x_{ir}} - e^{V_i}\cdot\frac{\partial D}{\partial x_{ir}}}{D^2} = \frac{D\cdot e^{V_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_{ir}} - e^{V_i}\left(e^{V_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_{ir}}\right)}{D^2}$$

Factorizo $e^{V_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_{ir}}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P(i|S_n,A)}{\partial x_{ir}} = \frac{e^{V_i}}{D^2}(D-e^{V_i})\frac{\partial V_i}{\partial x_{ir}}$$

donde $\frac{e^{V_i}}{D} = P(i \mid S_n, A)$ y además,

$$\frac{D - e^{V_i}}{D} = 1 - \frac{e^{V_i}}{D} = 1 - P(i \mid S_n, A)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{V_i}}{D^2}(D - e^{V_i}) = \left(\frac{e^{V_i}}{D}\right)\left(1 - \frac{e^{V_i}}{D}\right) = P(i \mid S_n, A)\,(1 - P(i \mid S_n, A)) \quad \blacksquare$$

c) Demostrar que $\sum_{i \in A} \frac{\partial P(i \mid S_n, A)}{\partial X_{jr}} = 0$

Por DEF., $\sum_{i \in A} P(i \mid S_n, A) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial X_{jr}}\left[\sum_{i \in A} P(i \mid S_n, A)\right] = \frac{\partial}{\partial X_{jr}}(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial X_{jr}}\left[\sum_{i \in A} P(i \mid S_n, A)\right] = 0 \text{ ?} \quad \blacksquare$$

ESTA BIEN?
O MUY CORTO
PARA SER
VERDAD?

d)

Suponga en sus respuestas anteriores que x_{jr} es el **precio** de la alternativa j. **Interprete** sus resultados en términos económicos. **Considere** la posibilidad de que dos alternativas sean muy parecidas. ¿Tiene esto sentido?

RESPUESTA:

Si x_{jr} es el **precio** de la alternativa j, los resultados podrían tener esta interpretación : cuando sube el precio de j (y dado que usualmente $\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial p_j} < 0$), la alternativa j pierde atractivo y su probabilidad de elección disminuye, mientras que esa probabilidad se **redistribuye** entre las demás opciones; por eso, para $i \neq j$ se obtiene $\frac{\partial P(i|s_n, A)}{\partial p_j} > 0$, y en conjunto se cumple que $\sum_{i \in A} \frac{\partial P(i|s_n, A)}{\partial p_j} = 0$, es decir, la probabilidad total no cambia, solo se reparte distinto.

Ejemplo: Pienso en el ejemplo usado en clase sobre las tres formas de ir al Colmex: *Uber*, *Didi* y *Metro*. Si sube el precio de Uber, el modelo logit predice que su probabilidad de elección disminuye y que esa probabilidad se redistribuye entre Didi y el Metro.

Sin embargo, como Uber y Didi son alternativas muy parecidas (ambas son servicios de transporte privado por aplicación), es razonable esperar que la mayoría de los usuarios que dejan Uber se cambien a Didi, y no al Metro, que es una alternativa muy distinta en términos de comodidad, tiempo y otras cosas