CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

Maestría en Economía 2024–2026

Comercio Internacional

Tarea 1

Factores de Producción (Modelo de Heckscher-Ohlin)

PRESENTA: José Daniel Fuentes García

PROFESOR: Franco Maldonado

LABORATORISTA:

Instrucciones

Considere una economía pequeña y abierta al mundo (small-open economy - SME) con dos sectores (que producen un solo bien) y dos factores de producción. La producción de ambos bienes está definida por las siguientes funciones de producción:

$$f_1(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$
$$f_2(K, L) = K^{\beta} L^{1-\beta}$$

donde $0 < \alpha < \beta < 1$.

a)

Muestre que no existe reversibilidad de intensidad de factores - no FIR.

RESPUESTA:

MRTS de cada sector

$$\begin{aligned} \text{MRTS}_1 &= \frac{MP_{L,1}}{MP_{K,1}} && (1)\\ &= \frac{(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}}{\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}} && (2)\\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L} && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MRTS}_2 &= \frac{MP_{L,2}}{MP_{K,2}} && (4)\\ &= \frac{(1-\beta)K^{\beta}L^{-\beta}}{\beta K^{\beta-1}L^{1-\beta}} && (5)\\ &= \frac{1-\beta}{\beta}\frac{K}{L} && (6) \end{aligned}$$

Condición de minimización de costos, Comp Perfecta

$$\begin{aligned} \frac{w}{r} &= \text{MRTS}_1 && (7)\\ \frac{w}{r} &= \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K_1}{L_1} && (8)\\ \Rightarrow \frac{K_1}{L_1} &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r} && (9) \end{aligned}$$

$$\frac{w}{r} = \text{MRTS}_2 \tag{10}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{K_2}{L_2} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \frac{K_2}{L_2} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{w}{r} \tag{12}$$

Comparación de intensidades

$$\frac{K_2/L_2}{K_1/L_1} = \frac{\frac{\beta}{1-\beta}\frac{w}{r}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}} \tag{13}$$

$$= \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)} \tag{14}$$

$$0 < \alpha < \beta < 1 \Rightarrow \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)} > 1 \tag{15}$$

$$\Rightarrow \frac{K_2}{L_2} > \frac{K_1}{L_1} \tag{16}$$

Conclusión

$$\frac{K_2}{L_2} > \frac{K_1}{L_1} \quad \forall (w,r)$$

No existe reversibilidad de intensidad de factores.Bien 2 es siempre mas intensivo en capital ■

b)

En un gráfico del plano (w, r), muestre que el Teorema de Insensibilidad en los Precios de los Factores se cumple - FPIT

RESPUESTA:

Problema de costos

$$c(w,r) = \min_{K,L} \{wL + rK\} \qquad \textbf{Def. de costo} \tag{17}$$

$$\text{s.a.} \quad 1 = K^{\gamma}L^{1-\gamma} \qquad \textbf{Una unidad de output} \tag{18}$$

MRTS $= w/r$

$$\frac{w}{r} = \frac{MP_L}{MP_K} \quad \textbf{Óptimo de minimización de costos} \tag{19}$$
$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{(1-\gamma)K^{\gamma}L^{-\gamma}}{\gamma K^{\gamma-1}L^{1-\gamma}} \quad \textbf{Derivadas Cobb–Douglas} \tag{20}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{w}{r} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{K}{L} \quad \textbf{Simplificamos} \tag{21}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{K}{L} = \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{w}{r} \quad \textbf{Despejamos } K/L \tag{22}$$

Usamos la restricción para obtener L y luego el costo

$$1 = K^{\gamma}L^{1-\gamma} \quad \textbf{Restricción tecnológica} \tag{23}$$
$$1 = \left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma} L \quad \textbf{Reescribimos } K^{\gamma}L^{1-\gamma} \tag{24}$$
$$1 = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{w}{r}\right)^{\gamma} L \quad \textbf{Sustituimos } K/L \tag{25}$$
$$\Rightarrow \quad L = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{w}{r}\right)^{-\gamma} \quad \textbf{Despejamos } L \tag{26}$$

$$c(w,r) = wL + rK \quad \textbf{Costo mínimo} \tag{27}$$
$$K = \left(\frac{K}{L}\right) L \quad \textbf{Identidad} \tag{28}$$
$$K = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{w}{r}\right) L \quad \textbf{Sustituimos } K/L \tag{29}$$
$$\Rightarrow \quad c(w,r) = wL + r\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{w}{r}\right) L \quad \textbf{Sustituimos } K \tag{30}$$
$$= wL + \frac{\gamma}{1-\gamma}wL \quad \textbf{Cancelamos } r \tag{31}$$
$$= \frac{wL}{1-\gamma} \quad \textbf{Factorizamos} \tag{32}$$
$$= \frac{w}{1-\gamma}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{w}{r}\right)^{-\gamma} \quad \textbf{Sustituimos } L \tag{33}$$
$$= \frac{w^{1-\gamma}r^{\gamma}}{(1-\gamma)^{1-\gamma}\gamma^{\gamma}} \quad \textbf{Simplificamos potencias} \tag{34}$$

Competencia perfecta, precio = costo (dos curvas en (w, r))

$$p_i = c_i(w,r) \quad \textbf{Competencia perfecta} \tag{35}$$

$$p_1 = \frac{w^{1-\alpha} r^{\alpha}}{(1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}} \qquad \textbf{Sustituimos} \quad \gamma = \alpha \tag{36}$$

$$p_2 = \frac{w^{1-\beta} r^{\beta}}{(1-\beta)^{1-\beta}\beta^{\beta}} \qquad \textbf{Sustituimos} \quad \gamma = \beta \tag{37}$$

Despejamos r como función de w (para graficar)

$$r_1(w) = \left(\frac{p_1 (1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}}{w^{1-\alpha}} \right)^{1/\alpha} \tag{38}$$

$$r_2(w) = \left(\frac{p_2 (1-\beta)^{1-\beta}\beta^{\beta}}{w^{1-\beta}} \right)^{1/\beta} \tag{39}$$

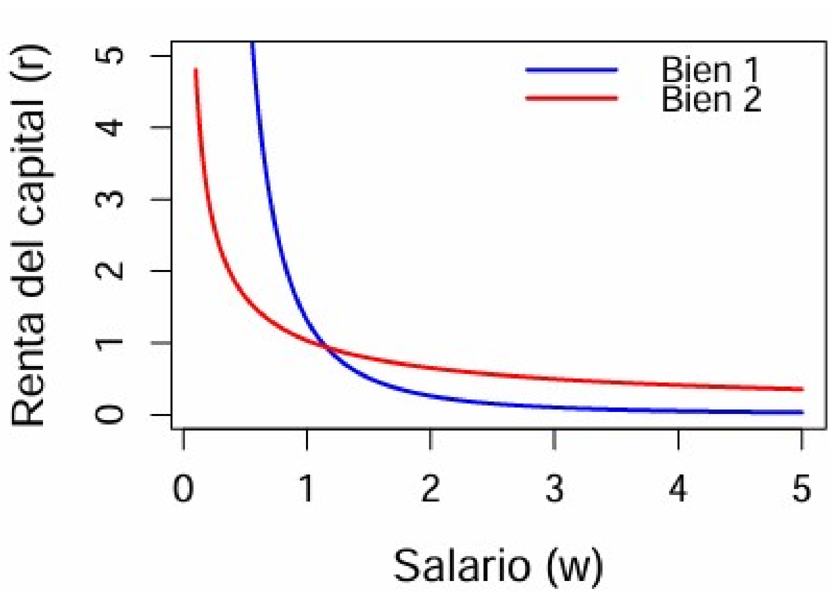
Equilibrio

$$p_1 = c_1(w, r) \tag{40}$$
$$p_2 = c_2(w, r) \tag{41}$$

El cruce de ambas curvas determina un único par (w, r).

Los precios de los factores están determinados por (p_1, p_2). ■

Figura 1: Determinación de los precios de los factores en el plano (w, r)



Nota: Curvas de beneficio cero $p_i = c_i(w, r)$ bajo tecnologías Cobb–Douglas. Su intersección determina un único vector (w, r), ilustrando el Teorema de Insensibilidad de los Precios de los Factores. Valores de $(p_1, p_2, \alpha, \beta)$ fijados para ilustración. Código disponible en: danifuentesga

c)

Asuma que la economía se encuentra en un equilibrio con diversificación (ambos bienes son producidos, $y_1 > 0$ y $y_2 > 0$). El sector 2 es afectado por un progreso tecnológico Hicks–Neutral (no cambia el balance de K y L en la función de producción), tal manera que la función de producción cambia a

$$f_2(K, L) = AK^{\beta}L^{1-\beta}, \qquad A > 1. \tag{42}$$

¿Qué pasa con r y w? ¿Cómo está relacionado con el Teorema de Stolper-Samuelson?

RESPUESTA:

Shock tecnológico

$$f_2(K, L) = K^{\beta}L^{1-\beta} \tag{43}$$
$$f_2(K, L) = AK^{\beta}L^{1-\beta}, \qquad A > 1 \tag{44}$$

Impacto sobre el costo unitario

$$c_2^{new}(w, r) = \frac{1}{A}c_2(w, r) \tag{45}$$

Competencia perfecta, beneficio cero

$$p_1 = c_1(w, r) \tag{46}$$
$$p_2 = c_2^{new}(w, r) \tag{47}$$
$$p_2 = \frac{1}{A}c_2(w, r) \tag{48}$$
$$Ap_2 = c_2(w, r) \tag{49}$$

Como los precios mundiales no cambian:

$$\hat{p}_1 = 0, \qquad \hat{p}_2 = 0$$

pero

$$\widehat{(Ap_2)} = \hat{A} > 0.$$

Sistema de Stolper–Samuelson

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{1L} & \theta_{1K} \\ \theta_{2L} & \theta_{2K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{r} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Solución

$$\hat{w} = -\frac{\theta_{1K}}{\theta_{2K} - \theta_{1K}}\hat{A} \tag{51}$$

$$\hat{r} = \frac{\theta_{1L}}{\theta_{1L} - \theta_{2L}}\hat{A} \tag{52}$$

Signos

$$\theta_{2K} > \theta_{1K}, \qquad \theta_{1L} > \theta_{2L}, \qquad \hat{A} > 0$$

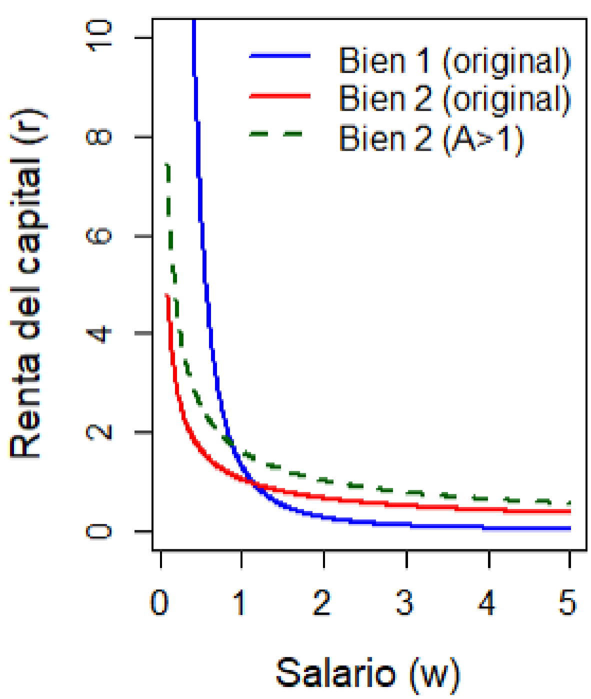
$$\hat{w} < 0, \qquad \hat{r} > 0.$$

Conclusión

$$\boxed{\hat{r} > 0 \quad \text{y} \quad \hat{w} < 0}$$

El progreso tecnológico en el bien capital-intensivo actúa como un aumento efectivo de su precio, por lo que se obtiene exactamente el resultado de Stolper–Samuelson. ■

Figura 2: Efecto del progreso tecnológico en el sector 2 sobre (w, r)



Nota: Curvas de beneficio cero $p_i = c_i(w, r)$ bajo tecnologías Cobb–Douglas. La curva verde representa el sector 2 tras un progreso tecnológico Hicks–neutral ($A > 1$), equivalente a un aumento efectivo de su precio. El nuevo cruce implica $r \uparrow$ y $w \downarrow$. Código disponible en: danifuentesga

d)

¿Qué pasa con la asignación de trabajo entre ambos sectores?

RESPUESTA:

Pleno empleo

$$a_{1L}y_1 + a_{2L}y_2 = \bar{L} \tag{53}$$
$$a_{1K}y_1 + a_{2K}y_2 = \bar{K} \tag{54}$$

Empleo sectorial

$$L_1 = a_{1L}y_1 \tag{55}$$
$$L_2 = a_{2L}y_2 \tag{56}$$

Shock tecnológico en el sector 2

$$A > 1$$

El sector 2 puede producir más con los mismos factores.

$$y_2 \uparrow \qquad y_1 \downarrow$$

Implicación para el empleo

$$L_2 = a_{2L}y_2 \tag{57}$$
$$L_1 = a_{1L}y_1 \tag{58}$$

Como a_{ij} no cambian y y_2 aumenta mientras y_1 disminuye,

$$L_2 \uparrow \qquad L_1 \downarrow$$

Conclusión

$$\boxed{L_2 \text{ aumenta y } L_1 \text{ disminuye}}$$

El progreso tecnológico en el sector 2 reasigna trabajo hacia dicho sector,
manteniendo pleno empleo total. ■

a) y b) A Mano

TAREA 1

Instrucciones ....

a) $MRTS_1 = \dfrac{MP_{L,1}}{MP_{L,2}}$

$$MP_{L,1} = \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial \alpha} = (1-\alpha)K^{\alpha} L^{1-\alpha-1}$$

$$MP_{K,1} = \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial \alpha} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}$$

$$MP_{L,2} = \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial \beta} = (1-\beta)K^{\beta} L^{1-\beta}$$

$$MP_{K,2} = \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial \beta} = \beta K^{\beta-1} L^{1-\beta}$$

$$\frac{1-\beta}{\beta}\frac{K}{L}$$

$$\boxed{\frac{w}{r} = MRTS_1} \qquad \frac{w}{r} = MRTS_2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K_1}{L_1} \qquad \Longleftrightarrow \frac{w}{r} = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{K_2}{L_2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{K_1}{L_1} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r} \qquad \Longleftrightarrow \frac{K_2}{L_2} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{w}{r}$$

Ahora $\dfrac{K_2/L_2}{K_1/L_1} = \dfrac{\dfrac{\beta}{1-\beta}\cancel{\dfrac{w}{r}}}{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\cancel{\dfrac{w}{r}}} = \dfrac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}$

donde $0<\alpha<\beta<1 \Longrightarrow \dfrac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)} > 1$

$\Longleftrightarrow \dfrac{K_2}{L_2} > \dfrac{K_1}{L_1} \quad \forall\ (w,r)$

Bien 2 intensivo en K ✓ NO FIR.

b) $c(w,r) = \min_{K,L} \{wL + rK\}$ s.a $K^{\varphi} L^{1-\varphi} = 1$ $\overset{\geq 1}{ó}$

del ejercicio anterior sabemos que:

$$\boxed{\frac{K}{L} = \frac{\varphi}{1-\varphi}\,\frac{w}{r}}$$

$\Longrightarrow 1 = K^{\cancel{\alpha}\varphi} L^{1-\cancel{\alpha}\varphi}$

$\Longleftrightarrow 1 = \left(\dfrac{K}{L}\right)^{\varphi} L$

$\Longleftrightarrow 1 = \left(\dfrac{\varphi}{1-\varphi}\,\dfrac{w}{r}\right)^{\varphi} L$

$\Longleftrightarrow L = \left(\dfrac{\varphi}{1-\varphi}\,\dfrac{w}{r}\right)^{-\varphi}$

$\Longrightarrow c(w,r) = wL + r\left[\dfrac{\varphi}{1-\varphi}\,\dfrac{w}{r}\right] L$

$$= wL + \frac{\varphi}{1-\varphi} wL$$

$$= \frac{wL}{1-\varphi}$$

$$= \frac{w}{1-\varphi}\left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\frac{w}{r}\right)^{-\varphi}$$

$$= \frac{w^{1-\varphi} r^{\varphi}}{(1-\varphi)^{1-\varphi}\varphi^{\varphi}}$$ ✓ ∎

$$\Longrightarrow \quad p_i = c_i(w, r)$$

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{w^{1-\alpha} r^{\alpha}}{(1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}} \\ p_2 &= \frac{w^{1-\beta} r^{\beta}}{(1-\beta)^{1-\beta}\beta^{\beta}} \end{aligned}\right\} \text{ Despejo } r$$

$$\Longrightarrow \quad r_1(w) = \left(\frac{p_1(1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}}{w^{1-\alpha}}\right)^{1/\alpha}$$

$$r_2(w) = \left(\frac{p_2(1-\beta)^{1-\beta}\beta^{\beta}}{w^{1-\beta}}\right)^{1/\beta}$$ ∎

donde $\beta > \alpha$

β es una plana

grafico en R