MAC0210 - 2a Lista de Exercícios - Data de entrega: 26/5

Instruções: as questões em papel devem ser resolvidas à mão e escaneadas; as demais questões devem ser implementadas em Octave. Use os nomes `questaoX[itemY]` para facilitar a identificação e entregue um único arquivo (tgz/zip) no PACA até as 23:55 do dia 26/5.

Questão 1 (Cap. 10 Q. 11) (no papel) Dada uma sequência $y_0, y_1, y_2, \ldots$, defina o operador de diferença para a frente Δ por $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Potências de Δ são definidas recursivamente por

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_i &= y_i \\ \Delta^j y_i &= \Delta(\Delta^{j-1} y_i),\ j = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Assim, $\Delta^2 y_i = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$, etc. Considere a interpolação polinomial em pontos equiespaçados: $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \ldots, n$.

(a) Mostre que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_j] = \frac{1}{j!h^j} \Delta^j f(x_0).$$

[Dica: Use indução matemática.]

(b) Mostre que o polinômio interpolador de grau n é dado pela fórmula de diferença para a frente de Newton

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} \Delta^j f(x_0),$$

onde $s = \frac{x - x_0}{h}$ e $\binom{s}{j} = \frac{s(s-1)\cdots(s-j+1)}{j!}$ (com $\binom{s}{0} = 1$).

Questão 2 (Cap. 10 Q. 13) (no papel) Seja $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)$ uma permutação das abcissas $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Mostre que

$$f[\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k] = f[x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

[Dica: Considere a k-ésima derivada do polinômio único de grau k passando por esses $k + 1$ pontos, independentemente de como eles estão ordenados.]

Questão 3 (Cap. 10 Q. 17+18)

(a) (no papel) Construa dois exemplos simples e genéricos, para inteiros positivos n quaisquer, um onde a interpolação em $n + 1$ pontos equidistantes é mais acurada do que a interpolação em $n + 1$ pontos de Chebyshev, e outro em que a interpolação de Chebyshev é mais acurada. Seus exemplos devem ser convincentes sem o recurso de uma implementação computacional.

(b) Implemente em Octave os seus exemplos acima, para $n = 10, 20, \ldots, 100$, calculando os erros (máximos) para as interpolações, e plotando os gráficos correspondentes (função original, interpolação equidistante e interpolação de Chebyshev).

(c) Escreva um código em Octave que interpole a função $f(x) = \sin(x)$ em 5 pontos de Chebyshev no intervalo $[0, \pi/2]$. Repita a interpolação usando 5 pontos de Chebyshev no intervalo $[0, \pi]$. Plote $f(x)$ e o polinômio interpolador, e compare os resultados (comente no código).

Questão 4 (Cap. 10 Q. 22+23)

(a) (no papel) Para uma certa função f, você tem uma tabela de diferenças divididas estendidas da forma:

i	z_i	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	5.0	$f[z_0]$			
1	5.0	$f[z_1]$	$f[z_0, z_1]$		
2	6.0	4.0	5.0	-3.0	
3	4.0	2.0	$f[z_2, z_3]$	$f[z_1, z_2, z_3]$	$f[z_0, z_1, z_2, z_3]$

Preencha as entradas desconhecidas na tabela.

(b) (no papel) Qual é o polinômio osculante $p_2(x)$ de grau 2 que satisfaz $p_2(5.0) = f(5.0), p_2'(5.0) = f'(5.0), p_2(6.0) = f(6.0)$?

Questão 5 (Cap. 10 Q. 24)

(a) Escreva um código em Octave que interpole $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ com um polinômio osculante que coincida com $f(x)$ e $f'(x)$ nas abcisssas $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$. Gere um gráfico (com eixo vertical logarítmico) comparando $f(x)$ e o polinômio interpolador, e outro gráfico mostrando o erro do seu polinômio interpolador nesse intervalo. Use o comando semilogy para gerar os seus gráficos.

(b) Modifique o código para gerar outro polinômio interpolador que coincida com $f(x)$ e $f'(x)$ nas abcissas $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, e $x_2 = 3$. Gere mais dois gráficos: comparação da função e do polinômio, e erro. Compare a qualidade desse novo polinômio com aquele da parte (a).

(c) Modifique agora o código para gerar um polinômio interpolador que coincida com $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ nas abcissas $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$. Gere mais dois gráficos e comente no código sobre a qualidade dessa aproximação em relação aos dois polinômios obtidos anteriormente.

Questão 6 (Cap. 10 Q. 25) (no papel) Uma técnica popular que aparece em métodos para minimizar funções de várias variáveis envolve um passo de busca unidirecional por um ponto de mínimo, onde um valor x^* apropriado é encontrado para uma função de uma variável $f(x)$, dados os valores de $f(0)$, $f'(0)$, e $f(1)$. A função $f(x)$ é definida para todo $x \geq 0$, tem uma segunda derivada contínua e satisfaz $f(0) < f(1)$ e $f'(0) < 0$. Um polinômio quadrático é obtido interpolando os valores dados e x^* é definido como o mínimo desse polinômio.

(a) Encontre x^* para os valores $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $f(1) = 2$.

(b) Mostre que o polinômio interpolador sempre possui um mínimo que satisfaz $0 < x^* < 1$. Pode-se mostrar o mesmo para a função f? (prove ou dê um contra-exemplo)

$\boxed{\text{Questão 7 (Cap. 11 Q. 3)}}$ Seja uma função $f \in C^3[a,b]$ dada em pontos equidistantes $x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n$, onde $nh = b - a$. Suponha ainda que $f'(a)$ também é dada.

(a) Construa um algoritmo para obter uma interpolação quadrática por trechos que seja C^1. Ou seja, a função interpoladora é escrita como

$$v(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2,\ x_i \leq x \leq x_{i+1},\ \forall i = 0, \ldots, n-1,$$

e seu algoritmo deve determinar os $3n$ coeficientes a_i, b_i e c_i.

(b) (no papel) Quão acurada será essa aproximação em função de h? Justifique.

$\boxed{\text{Questão 8 (Cap. 11 Q. 4)}}$ (no papel) Verifique que o polinômio interpolante Hermitiano de $f(x)$ e sua derivada nos pontos t_i e t_{i+1} pode ser escrito explicitamente como

$$s_i(x) = f_i + (h_i f_i')\tau + \Big(3(f_{i+1} - f_i) - h_i(f_{i+1}' + 2f_i')\Big)\tau^2$$
$$+ \Big(h_i(f_{i+1}' + f_i') - 2(f_{i+1} - f_i)\Big)\tau^3,$$

onde $h_i = t_{i+1} - t_i$, $f_i = f(t_i)$, $f_i' = f'(t_i)$, $f_{i+1} = f(t_{i+1})$, $f_{i+1}' = f'(t_{i+1})$ e $\tau = \frac{x - t_i}{h_i}$.