$\boxed{6a}$ Temos $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ e $P_2'(x) = 2ax + b$

Substituindo os pontos $(0,1)$ e $(1,2)$ em $P_2(x)$ e $(0,-1)$ em $P_2'(x)$

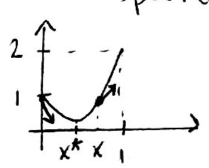
$$\begin{cases} 1 = 0.a + 0.b + c \\ 2 = 1.a + 1b + c \\ -1 = 2.0a + b \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{matrix}$$

O polinômio interpolador da função é $P(x) = 2x^2 - x + 1$, portanto sua derivada é $P'(x) = 4x - 1$. Como $x = x^*$ quando $P'(x) = 0$,

$0 = 4x^* - 1 \rightarrow \boxed{x^* = \frac{1}{4}}$ (P(x) tem concavidade para cima)

$\boxed{6b}$ Temos $f'(0) < 0$, ou seja, a inclinação do gráfico do polinômio vai para baixo

Pelo teorema do valor médio, com $f(0)$ e $f(1)$ $(1>0)$, sabemos que $\exists\, x$ $(0 < x < 1)$ tal que $f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$. Como $f(0) < f(1)$, $f'(x) > 0$. Daí concluimos que existe um ponto no intervalo $[0,1]$ que fará a função crescer novamente. Portanto o polinômio interpolador



sempre possui um mínimo que satisfaz $0 < x^* < x$ e como $x < 1 \Rightarrow 0 < x^* < 1$.

Todas as características do polinômio utilizadas para provar tal afirmação foram retiradas da definição da função f, portanto esta prova também vale para f.