② ⓐ Usando Taylor

(I) $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)h^3}{3!} + \frac{f^4(x_0)h^4}{4!} + \frac{f^5(x_0)h^5}{5!} + O(h^6)$

(II) $f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} - \frac{f'''(x_0)h^3}{3!} + \frac{f^4(x_0)h^4}{4!} - \frac{f^5(x_0)h^5}{5!} + O(h^6)$

Fazendo (I) - (II):

$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + \frac{2h^3 f'''(x_0)}{3!} + \frac{2h^5 f^5(x_0)}{5!} + O(h^6)$ (*)

(III) $f(x_0+2h) = f(x_0) + f'(x_0)2h + \frac{f''(x_0)4h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)8h^3}{3!} + \frac{f^4(x_0)16h^4}{4!} + \frac{f^5(x_0)32h^5}{5!} + O(h^6)$

(IV) $f(x_0-2h) = f(x_0) - f'(x_0)2h + \frac{f''(x_0)4h^2}{2!} - \frac{f'''(x_0)8h^3}{3!} + \frac{f^4(x_0)16h^4}{4!} - \frac{f^5(x_0)32h^5}{5!} + O(h^6)$

Fazendo (III) - (IV)

$f(x_0+2h) - f(x_0-2h) = 4h f'(x_0) + \frac{16h^3 f'''(x_0)}{3} + \frac{64h^5 f^5(x_0)}{5!}$ (**)

Tomando (**) - 2(*)

$f(x_0+2h) - f(x_0-2h) - 2f(x_0-h) = \frac{12h^3 f'''(x_0)}{6} + \frac{60h^5 f^5(x_0)}{120} + O(h^6)$

$f'''(x_0) = \underline{f(x_0+2h) - f(x_0-2h) - 2f(x_0+h) + 2f(x_0-h)} - \underbrace{\frac{h^2 f^5(x_0)}{4} - O(h^6)}_{-\frac{h^2 f^5(\xi)}{4},\ \xi \in [x_0-2h,\, x_0+2h]}$

Erro:

$E(h) = \max_{\xi \in [x_0-2h,\, x_0+2h]} \left(\frac{h^2}{4} f^5(\xi) \right)$

ⓒ Conforme h diminui, os erros de arredondamento tendem a aumentar.

ⓓ Para obter $f'''(x_0)$ de quarta ordem, deveria-se expandir Taylor de h^7. Para que a combinação linear das expressões cancelarem todos os termos, menos $O(1)$ e $O(h^7)$, é necessário cancelar 5 termos. Porém, para que esse sistema linear não forneça apenas a solução trivial, é necessário adicionar mais 1 coeficiente.

Portanto, essa fórmula requer 6 pontos.