MAC0210 - 1ª Lista de Exercícios - Data de entrega: 7/4

Instruções: as questões em papel devem ser resolvidas à mão e escaneadas; as demais questões devem ser implementadas em Octave. Use os nomes `questaoX[itemY]` para facilitar a identificação e entregue um único arquivo (tgz/zip) no PACA até as 23:55 do dia 7/4.

Questão 1

(a) (em papel) Realize a dedução e os cálculos análogos aos do exemplo 1.2 usando a expressão

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

para aproximar a primeira derivada $f'(x_0)$. Mostre que o erro é $\mathcal{O}(h^2)$, verificando que o termo dominante do erro é $-\frac{h^2}{6}f'''(x_o)$ quando $f'''(x_o) \neq 0$.

(b) Escreva um código em Octave para produzir uma tabela similar à do exemplo 1.2, com os erros absolutos da aproximação proposta no item(a), e compare-os aos erros da tabela original, através de comentários no código.

(c) Adapte o código do exemplo 1.3 para produzir um gráfico similar ao da figura 1.3, mas correspondente à aproximação do item (a). Discuta (em comentários no código) as diferenças e similaridades do seu gráfico com o da figura 1.3.

Questão 2 A função $f_1(x_0,h) = \sin(x_o+h)-\sin(x_0)$ pode ser transformada em outra forma $f_2(x_0,h)$ usando a identidade trigonométrica

$$\sin(\phi)-\sin(\psi) = 2\cos\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)$$

de tal forma que $f_2(x_0,h) = f_1(x_0,h)$, $\forall x_0 \forall h$ (em aritmética exata).
Implemente em Octave uma fórmula alternativa que evite os erros de cancelamento ao computar a aproximação $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ para a derivada de $f(x) = \sin(x)$ em $x = x_0$, e use essa fórmula para computar aproximações de $f'(1.2)$ para $h = 1, 0.1, \ldots, 10^{-19}, 10^{-20}$. Explique, através de comentários no código, a diferença de acurácia dos seus resultados em relação aos resultados do exemplo 1.3.

Questão 3

(a) Escreva uma função em Octave que receba como entrada dois parâmetros x e n, e devolva x arredondado para n dígitos decimais, usando apenas operações aritméticas elementares (incluindo exponenciação). Considere que x pode ser escalar, vetor ou matriz, e devolva uma estrutura correspondente (com todas as componentes arredondadas usando n dígitos decimais).

(b) Adapte o código do exemplo 2.2 para testar sua função, refazendo o gráfico da figura 2.2 para ilustrar os erros de arredondamento no cálculo da função $g(t) = e^{-t}(\sin(2\pi t)+2)$ para $t \in [0,1]$ usando $n = 5$ casas decimais. Comente no código a relação entre a escala vertical do gráfico e o parâmetro n utilizado, e corrija a última linha que calcula o erro relativo, colocando a expressão correta nesse caso para a unidade de arredondamento η.

$\boxed{\text{Questão 4}}$ Escreva um código em Octave que compute a expressão $\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n}$ de 3 formas: (i) implementação direta; (ii) usando arredondamento para 5 casas decimais (use a sua função da questão 3); e (iii) como em (ii) mas na ordem inversa dos termos. Explique através de comentários no código as diferenças observadas.

$\boxed{\text{Questão 5}}$

(a) (papel) Mostre que $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \ \forall x \geq 1$.

(b) Escreva um código que gere um exemplo numérico que evidencie qual das duas formas é mais adequada à computação numérica, explicando no código a forma preferida e a razão para as diferenças em acurácia observadas.

$\boxed{\text{Questão 6}}$ Em tratamento estatístico de dados é frequente o uso das expressões

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são valores dados. É fácil ver que σ^2 também pode ser escrito como

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2.$$

(a) (papel) Qual das duas expressões para σ^2 é mais barata computacionalmente em termos de número de operações aritméticas? (considere que $\bar{x}$ já foi computado anteriormente). Qual das duas expressões deve produzir resultados mais acurados para σ^2 em geral?

(b) Escreva um código que produza um exemplo pequeno, usando um sistema decimal com apenas 2 dígitos significativos, para ilustrar sua conclusão do item (a).

$\boxed{\text{Questão 7}}$ Considere a função polinomial

$$f(x) = (x-2)^9 = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512.$$

(a) Escreva um código em Octave que avalie essa função em 161 pontos equidistantes no intervalo $[1.92, 2.08]$ usando dois métodos: (i) regra de Horner (exemplo 1.4) para a forma expandida $x^9 - 18x^8 + \cdots$; e (ii) calculando $(x-2)^9$ diretamente. Plote os resultados em duas figuras diferentes. Explique, em comentários no código, as diferenças entre os dois gráficos.

(b) Aplique o método da bisecção (função `bisect`, página 43) para encontrar a raiz da função acima no intervalo $[1.92, 2.08]$ usando os dois métodos de cálculo de $f(x)$ acima, tendo como tolerância absoluta o valor $\varepsilon = 10^{-6}$. Explique no código as diferenças entre as soluções encontradas.

$\boxed{\text{Questão 8}}$ (papel) Considere a função $g(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

(a) Calcule os dois pontos fixos dessa função.

(b) Considere a iteração de ponto fixo $x_{k+1} = g(x_k)$. Qual é o comportamento esperado da sequência gerada a partir de valores x_0 próximos de cada um dos pontos fixos do item (a). Explique seu argumento.

(c) Qual é o número aproximado de iterações necessárias para que o erro da aproximação produzida pela iteração de ponto fixo seja reduzido por um fator de 10?