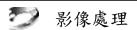
## 5. 影像轉換

- 5.1 傅立葉轉換
- 5.2 傅立葉轉換的特性5.3 快速傅立葉轉換

  - 5.4 離散餘弦轉換
  - 5.5 離散小波轉換
  - 5.6 主成份分析法
  - 5.7 霍夫轉換



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

- ♣ 影像轉換 (image transforms) 是介紹一些影像處理 的數學工具, 這些工具在影像處理中常被用到。
- ♣ 本章的轉換有
  - (1) 傅立葉轉換 (Fourier transform)、
  - (2) 離散餘弦轉換 (discrete cosine transform)、
  - (3) 小波轉換 (wavelet transform)、
  - (4) 主成份分析法 (principal component analysis)、
  - (5) 霍夫轉換 (Hough transform)。
- ♣ 上述轉換在影像強化 (image enhancement)、 影像描述 (image description)、影像壓縮 (image compression)、影像重建 (image restoration) 等都 用得到;例如,JPG 影像壓縮標準、MPEG 視訊壓 縮標準就是藉由離散餘弦轉換來完成的。

- 傅立葉轉換、離散餘弦轉換、小波轉換等不是非用不可;例如,要去除影像中的雜訊,可以將影像做傅立葉轉換變成頻率資料後,再將高頻資料濾除掉;剩下的中低頻資料再反轉回到空間域,如此就可得到一張去掉雜訊的影像。但是我們也可以直接在空間域中用一些遮罩運算將雜訊去除掉,如此完全不需用到傅立葉轉換。
- ♣ 只是這些轉換也是一些方法,提供另類的技術,在 某些應用上或許有更傑出的表現;例如上述的壓縮 標準。其實不論是過去的傅立葉轉換及離散餘弦轉 換,還是現在正熱門的小波轉換,在影像處理上都 佔了很重要的地位。

₹ 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

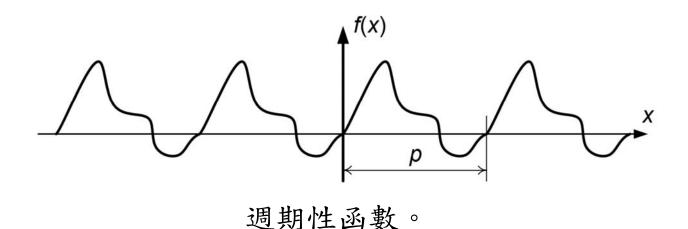
1

## 5.1 傅立葉轉換

- 傅立葉轉換是一個很重要的數學工具;傅立葉的理論很難,應用卻很簡單。
- 學習傅立葉轉換一定要從傅立葉級數 (Fourier series) 學起,才能懂得每一公式的意義。
- 傅立葉轉換的意義是任何連續性函數都可以分解成 各種不同頻率的三角週期性 (trigonometric periodic) 函數的線性組合。
- 影像是一個二維亮度函數,當然可以分解成三角函數的線性組合;但二維函數比較複雜,我們先從一維函數談起。

#### 5.1.1 傅立葉級數

● 假設有一個一維週期性函數 (periodic function) f(x), 週長 (period) 為 p, x 是空間變數 (spatial variable) 或時間變數 (time variable), 不同 x 代表不同的空間位置或時間。



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

6

根據傅立葉級數的定理,每一個連續週期性函數 f(x)都可分解成由一些不同頻率的週期性正弦 (sine)及餘弦 (cosine)函數所組成的,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
 (5.1)

公式 (5.1) 的等號右邊稱為傅立葉級數,其中  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ , ... 是實數常數,也稱為級數的係數 (coefficient),表示組成 f(x) 時,各正、餘弦函數所需要的份量。從公式 (5.1) 等號的左邊函數變成右邊級數,稱為分解 (decomposition);若從右邊級數變成左邊函數,則稱為合成或組合 (construction)。所以分解與合成是相對的兩個動作。

●傅立葉級數的係數是我們做傅立葉轉換所要求解得的資料,也就是我們想要了解 f(X) 函數裡,各種正、餘弦函數的份量。不同頻率資料具有不同的特性;因此改變一個函數所擁有的各種頻率資料量,就可改變函數的曲線或輪廓,也就是改變訊號或影像的樣貌或特性,達到訊號或影像處理的目的。



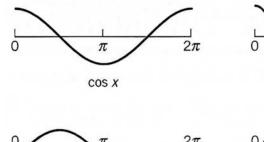
影像處理

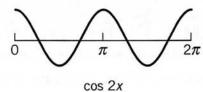
5. 影像轉換

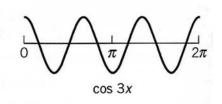
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

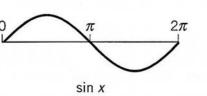
ç

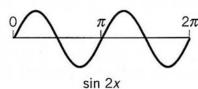
● 何謂不同頻率的正、餘弦函數?如下圖所示, sin X 在 2π 範圍內有 1 個波, 週長就是 2π, sin 2x 在 2π 範圍內有 2 個波, 週長是π。頻率與週長互為倒數, 因此 sin 2x 的頻率是 sin x 的 2 倍, sin 3x 的頻率是 sin x 的 3 倍;依此類推。cos 函數也一樣。

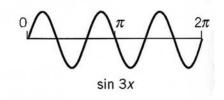












不同頻率的正弦及餘弦函數。

- ♠ 所有不同頻率的正、餘弦函數 sin nx, cos mx 有一個 很重要的特性,就是這些函數全部相互正交 (orthogonal)。
- 兩個向量的內積 (inner product) 為 0,就是兩向量正交,也就是兩向量夾角 90 度。兩函數 f(x) 及 g(x) 的內積為

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$

若 n 是整數, $\sin nx$ ,  $\cos nx$  都是週長為  $2\pi/n$  的週期性函數,如果在  $[-\pi,\pi]$  內它們都正交,則在  $[-2\pi,2\pi]$ 、 $[-4\pi,4\pi]$ 、...  $[-\infty,\infty]$  也都正交了;所以我只要在  $[-\pi,\pi]$  範圍內分析就可以了。



影像處理 5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 10

```
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \text{ if } n \neq m,
-\pi
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \text{ if } n \neq m,
-\pi
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0, \text{ for any integers } n \text{ and } m,
-\pi
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx \, dx = \pi.
-\pi
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx \, dx = \pi,
-\pi
```

$$2 \sin\theta \sin\phi = -\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)$$
$$2 \cos\theta \cos\phi = \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)$$
$$2 \sin\theta \cos\phi = \sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)$$

#### A. 2π 週長週期性函數

(5.1),我們可以得到一個結論,就是利用內積的運 算可以知道一個函數所擁有的各種不同頻率之正、 餘弦函數的份量 (傅立葉級數的係數);整理如下

原因数的历里(日立来級数的原数)
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, ...$$

 $= a_n \pi$ 

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

12

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots) \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos nx \cos x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \cos nx \sin x \, dx + \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \cos nx \sin nx \, dx + \dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_{n+1} \cos nx \cos nx \cos (n+1)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_{n+1} \cos nx \sin (n+1)x \, dx + \dots$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx \, dx$$

f(x)

#### ♣ 方波 (square wave) 範例

$$f(x) = \begin{cases} -k, & \text{if } -\pi < x < 0 \\ k, & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$$

with  $f(x+2\pi) = f(x)$ .

根據轉換公式

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{0} (-k) \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} k \cos nx \, dx \right]$$
$$= \frac{1}{\pi} \left[ -k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{0} + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{0}^{\pi} \right] = 0$$

$$b_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{0} (-k) \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} k \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{0} - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{0}^{\pi} \right] = \frac{k}{n\pi} \left[ \cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0 \right]$$

$$= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$



影像處理

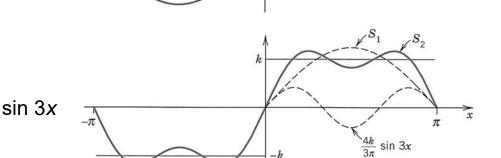
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

 $S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x$ 

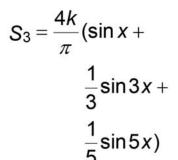
1/





$$S_2 = \frac{4k}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x),$$





#### B. 2L 週長週期性函數

◆ 如果週期性函數 f(x) 的週長是 2L 的話,公式 (5.1) 將可改寫成

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x)$$

其中各係數為

$$a_{0} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx,$$

$$a_{n} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_{n} = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, ...$$



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

16

#### C. 複數級數

● 通常為了讓傅立葉級數的表示式更簡明,我們引入 複數 (complex number) 來表示。根據歐伊勒 (或稱 尤拉) 公式 (Euler formula),

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$
  
 $e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$ .

這是 2π 週長函數的複數傅立葉級數。

若將 
$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}).$$

代入 
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
中,即可獲得

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}).$$

因此

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \ n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

同理 2L 週長函數的複數傅立葉級數為

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$



影像處理

其中

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 1

#### 18

#### D. 非週期性函數

實際的訊號或影像很少是週期性函數。我們可以假設非週期性函數的週長就是無窮大,也就是 2L 週長函數變成無窮大週長函數,將L變成 ∞,正、餘弦函數的頻率變化更多樣,我們就可以導出其傅立葉級數∞

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left[ a_{u} \cos ux + b_{u} \sin ux \right] du$$

其中

$$a_{U} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \, dx,$$

$$b_{u} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \, dx.$$

加入奇偶數積分的特性,複數傅立葉級數最終則推 導成

其中
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx.$$



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 2

#### 20

## 5.1.2 傅立葉轉換

● 傅立葉轉換 (Fourier transform) 是在做函數的內積 ,用內積運算萃取出一個函數內的各種不同頻率之 正、餘弦函數的份量。因此傅立葉係數中的 n 或 u 就是頻率。將各種不同份量、不同頻率之正、餘弦 函數組合成原來的函數就是反傅立葉轉換 (inverse Fourier transform)。所以

傅立葉轉換相當於做函數的分解 (decomposition); 反傅立葉轉換相當於做函數的合成 (construction)。 一維傅立葉轉換

$$\Im\{f(x)\} = F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx,$$

一維反傅立葉轉換

$$\mathfrak{J}^{-1}\left\{F(u)\right\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iu x} du.$$

傅立葉轉換及反轉換合稱為傅立葉轉換配對 (Fourier transform pair),在應用上它們常是成對 出現的。



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 22

● 傅立葉轉換的結果是複數,我們可以把它分解成實數部 R(u),及虛數部 I(u),

$$F(u) = R(u) + i I(u),$$

若表示成指數形式,則變成

$$F(u) = |F(u)| e^{i\phi(u)}$$

其中

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

 $\phi$  R(u)

稱為 f(x) 的傅立葉頻譜 (Fourier spectrum),

$$\phi(u) = tan^{-1} \left[ \frac{I(u)}{R(u)} \right]$$
稱為相位角 (phase angle),

如右上圖所示。

- ◆ 在傅立葉轉換及反轉換公式中, X 是空間變數 (spatial variable),不同的 X 代表不同的空間位置, u 是頻率變數 (frequency variable),不同的 u 表示 不同的頻率。所以 傅立葉轉換是將空間 (spatial-domain) 資料 轉換成頻率 (frequency-domain) 資料; 反傅立葉轉換是將頻率資料反轉換成空間資料。
- 影像是二維函數,我們可以將一維傅立葉轉換及反 轉換擴充成二維,用來描述影像的轉換反轉換。二 維傅立葉轉換及反轉換是做兩個獨立變數轉換成兩 個獨立變數;所以一維擴充成二維很直覺,

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

24

二維傅立葉轉換

$$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

二維反傅立葉轉換

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{F(u,v)\right\} = f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{i(ux+vy)} du dv$$

$$e^{-i(ux+vy)} = e^{-iux}e^{-ivy}$$

其中的傅立葉頻譜、相位角、及能量頻譜的定義 和一維的定義一樣

$$F(u,v) = |F(u,v)| e^{i\phi(u,v)},$$

$$|F(u,v)| = [R^{2}(u,v) + I^{2}(u,v)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(u,v)}{R(uv)} \right],$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^{2} = R^{2}(u,v) + I^{2}(u,v) \circ$$

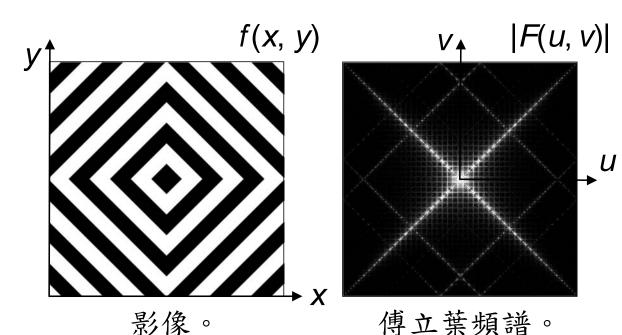
● 傅立葉轉換及反轉換是完美整合;將傅立葉轉換的 積分式代入傅立葉反轉換公式中的 F(u, v),一定可 得到 f(x, y);反過來,若將傅立葉反轉換的積分式代 入傅立葉轉換公式中的 f(x, y),也確實得到 F(u, v)。

>> 影像處理

5. 影像轉換

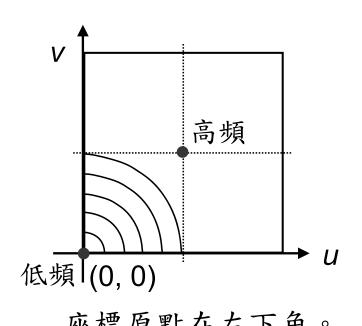
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 26

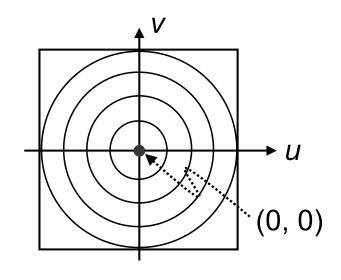
● 傅立葉轉換的結果是複數,複數是看不到的,我們只能看複數的大小,也就是它的量 |F(u)| or |F(u, v)| "傅立葉頻譜"。



傅立葉轉換範例。

#### 🯶 頻率空間的高低頻





座標原點在左下角。座標原點在正中央。

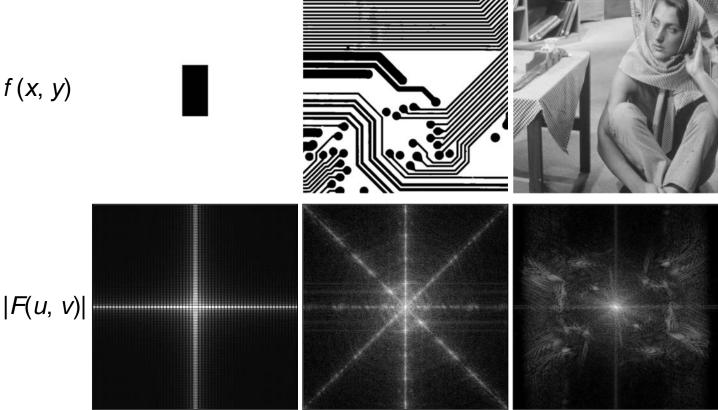
影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 28

一些影像的傅立葉轉換結果

f(x, y)



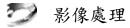
## 5.1.3 離散傅立葉轉換

- ➡ 訊號或影像都是離散資料,離散資料的傅立葉轉換就要用離散 (discrete) 傅立葉轉換。假設有一串信號共有 N 個空間或時間樣本 (sample):  $f(x_0)$ ,  $f(x_0+\Delta x)$ ,  $f(x_0+2\Delta x)$ , ...,  $f(x_0+(N-1)\Delta x)$ 。用簡單符號:f(0), f(1), f(2), ..., f(N-1) 來表示這 N 個樣本資料。則這 N 個資料的一維離散傅立葉轉換及反轉換為
  - 一維離散傅立葉轉換

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi ux/N}$$
, for  $u = 0, 1, 2, ..., N-1$ ,

一維離散反傅立葉轉換

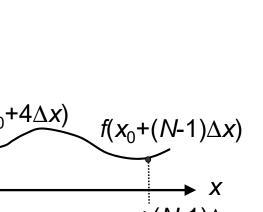
$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i2\pi ux/N}$$
, for  $x = 0, 1, 2, ..., N-1$ .



5. 影像轉換

 $f(x_0 + \Delta x)$ 

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 30



連續函數的抽樣 (sampling)。

- 轉換後的頻率資料為 F(u<sub>0</sub>), F(u<sub>0</sub>+Δu), F(u<sub>0</sub>+2Δu), .., F(u<sub>0</sub>+(N-1)Δu), 簡單寫成: F(0), F(1), F(2), ..., F(N-1)。
   從公式中可以看出來,離散傅立葉轉換及反轉換不會改變資料個數;也就是 N 個資料轉換後還是 N 個。
- Φ 從公式中看不出 Δx 與 Δu 是多少,也看不出 Δx 與 Δu 的關係。正、餘弦函數 sin x, cos x 的週長是 2π;

所以 $\sin\frac{2\pi}{N}x$ ,  $\cos\frac{2\pi}{N}x$  就是將週長轉換成N。 因此  $\sin\frac{2\pi u}{N}x$ ,  $\cos\frac{2\pi u}{N}x$  就相當於把週長轉換成 $\frac{N}{u}$ 。 離散反傅立葉轉換相當於把f(x)分解成週長為 $\infty$ , N,  $\frac{N}{2}$ ,  $\frac{N}{3}$  ...,  $\frac{N}{N-1}$  的正、餘弦函數。



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

32

上述的週長不是真正的週長,它們只是抽樣類而已; 真正的週長是抽樣間距  $\Delta x$  乘以抽樣類。所以真 正的週長是  $\infty$ ,  $N\Delta x$ ,  $\frac{N}{2}\Delta x$ ,  $\frac{N}{3}\Delta x$ , ...,  $\frac{N}{N-1}\Delta x$ 。 週長與頻率互為倒數 (reciprocal);所以分解出來的 正、餘弦函數頻率為 0,  $\frac{1}{N\Delta x}$ ,  $\frac{2}{N\Delta x}$ ,  $\frac{3}{N\Delta x}$ , ...,  $\frac{N-1}{N\Delta x}$ 。

止、餘弦函數頻率為  $U, \overline{N\Delta x}, \overline{N\Delta x}, \overline{N\Delta x}, \overline{N\Delta x}, \overline{N\Delta x}, \overline{N\Delta x}, \overline{N\Delta x}$ 頻率間距即為  $\Delta U = \frac{1}{N\Delta x}$ 。

頻率變數 U = 0, 1, 2, ..., N-1 也不是真正的頻率,真正的頻率就是上述的

$$0, \frac{1}{N\Delta x}, \frac{2}{N\Delta x}, \frac{3}{N\Delta x}, ..., \frac{N-1}{N\Delta x}$$

◆ 二維離散傅立葉轉換及反轉換可以很容易從一維離 散傅立葉轉換及反轉換擴充出來。假設有一張影像, 共有 M×N個像素 f(0,0), f(0,1), f(0,2), ..., f(M-1,0), .., f(M-1, N-1)。則這張影像的二維離散傅 立葉轉換及反轉換為

二維離散傅立葉轉換

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(ux/M+vy/N)},$$
  
for  $u = 0, 1, 2, ..., M-1, v = 0, 1, 2, ..., N-1,$ 

二維離散反傅立葉轉換

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi(ux/M+vy/N)},$$
  
for  $x = 0, 1, 2, ..., M-1, y = 0, 1, 2, ..., N-1.$ 

>> 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 34

- 单 其中像素間距  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  各別與頻率樣本間距  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  互為 M 及 N 倍倒數,  $\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}$  及  $\Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$
- 如果是影像是正方形的話,也就是 M=N,則二維離散傅立葉轉換

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)/N},$$
  
for  $u, v = 0, 1, 2, ..., N-1,$ 

二維離散反傅立葉轉換

$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi(ux+vy)/N},$$
  
for  $x, y = 0, 1, 2, ..., N-1$ .

## 5.2 傅立葉轉換的特性

● 通常一張影像所含的低頻資訊份量比高頻資訊多了千萬倍;在展示傅立葉頻譜時,為了不讓這種差異掩蓋了中高頻資訊的變化,我們通常會將傅立葉頻譜份量的動態範圍壓縮,如下頁圖示。原來傅立葉頻譜 |F(u, v)| 的變化範圍是 [0, 4×10<sup>6</sup>],我們將此範圍取對數轉換 D(u, v) = log [1+ c |F(u, v)|],

其中 C 是一個調整高低頻資料量比值的係數。如果 C = 1,我們就可以將傅立葉頻譜的變化範圍壓縮成 [0,6.6],中高頻資訊的變化就可以更明顯的呈現出來。如果中高頻資訊還是不明顯,則將 C 放大;小的中高頻資訊量會相對比大量的低頻資訊量增加比較多,就比較明顯了。

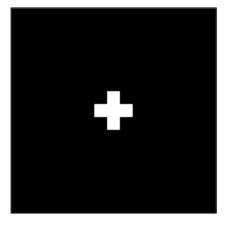


影像處理

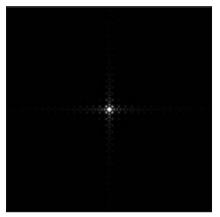
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

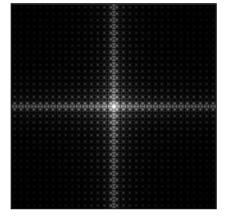




原始影像。

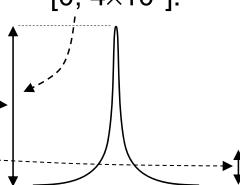


原始頻譜 頻譜範圍 [0, 4×10<sup>6</sup>].



修改的頻譜 頻譜範圍 [0, 6.6].

256 gray levels



## 5.2.1 平均值 (Average value)

♥ 整張影像的灰階平均值為

$$f(x,y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y).$$

傅立葉最低頻的頻譜為

$$F(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

也就是 
$$f(x,y) = \frac{1}{N}F(0,0)$$
.

|F(0,0)| 值很大,就是因為它是影像灰階平均值的 N 倍。



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

38

## 5.2.2 可分離性 (Separability)

● 二維離散傅立葉轉換可由下列公式計算

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-i2\pi u x/N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi v y/N}$$
、  
其中 u, v = 0, 1, 2, ..., N-1,

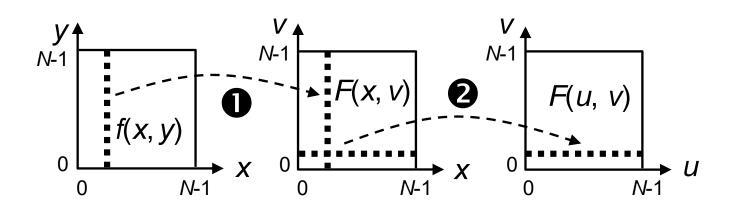
$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} e^{i2\pi u x/N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi v y/N}$$

其中x, y = 0, 1, 2, ..., N-1.

亦即 
$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x,v) e^{-i2\pi ux/N}$$

其中 
$$F(x,v) = N \left[ \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi vy/N} \right]$$

◆ 一個二維傅立葉轉換可視為2N次的一維傅立葉轉換



- 要做 N 次一維 N 元素的傅立葉轉換,將 N 種不同 y 變數值轉換成 N 種不同 v 變數值;
- ② 也是要做 N 次一維 N 元素的傅立葉轉換,將 N 種不同 X 變數值轉換成 N 種不同 U 變數值。 所以整體複雜度 (計算量)為 2N<sup>3</sup>.

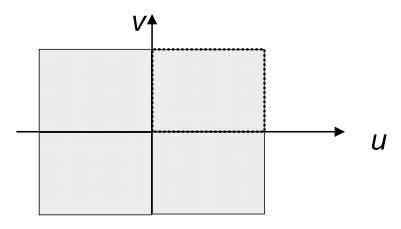


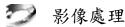
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 40

# **5.2.3** 週期性及共軛對稱性 (Periodicity and conjugate symmetry)

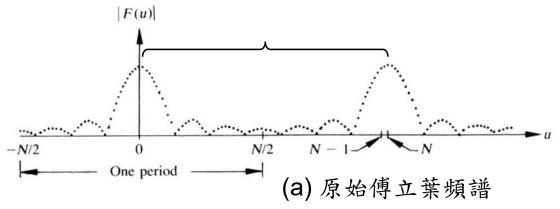
● 離散傅立葉轉換與反轉換都是週期性函數,週長為 N
 F(u, v) = F(u+N, v) = F(u, v+N) = F(u+N, v+N),
 F(u, v) = F\*(-u, -v) and |F(u, v)| = |F(-u, -v)|
 其中 F\*(u, v) 是 F(u, v) 的共軛複數 (complex conjugate).

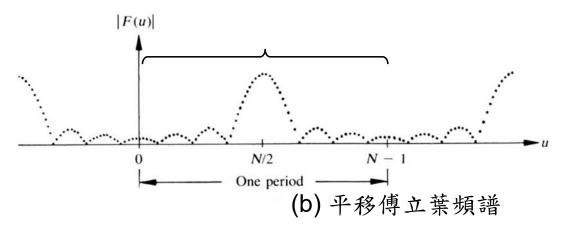




#### 一維範例

$$F(u) = F(u+N)$$
 and  $|F(u)| = |F(-u)|$ 







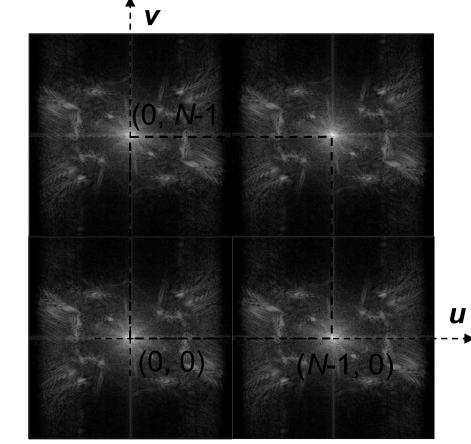
影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

42

週期性及共軛對稱性實例 (Girl image on page 28)



離散傅立葉轉換 能夠表現的最高 頻率只到 N/2。

## 5.2.4 位移性 (Translation)

₩ 位移性

$$f(x,y)e^{i2\pi(u_0x+v_0y)/N} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$
$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-i2\pi(u_{X_0}+v_y_0)/N}$$

以 
$$U_0=V_0=N/2$$
 為例,

$$e^{i2\pi(u_0x+v_0y)/N}=e^{i\pi(x+y)}=(-1)^{x+y}$$

所以  $f(x,y)(-1)^{X+y} \Leftrightarrow F(u-N/2,v-N/2)$ 

空間域上的平移並不影響頻譜的大小

$$|F(u,v)e^{-i2\pi(u_{X_0}+vy_0)/N}| = |F(u,v)|$$



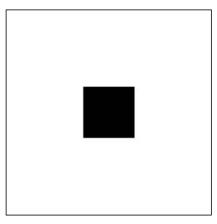
影像處理

5. 影像轉換

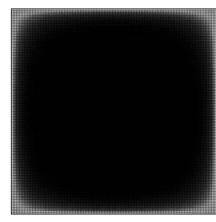
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 44

♣ 二維範例

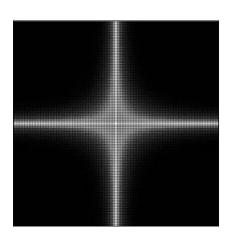
原點平移到 (N/2, N/2).



原始影像

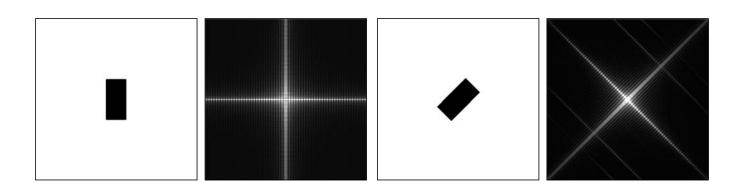


原始傅立葉頻譜 平移傅立葉頻譜



## 5.2.5 旋轉 (Rotation)

- 在極座標 (polar coordinate) 上  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $u = \omega \cos \phi$ ,  $v = \omega \sin \phi$ , 則 f(x,y) 與 F(u,v) 各自變成  $f(r, \theta)$  與  $F(\omega, \phi)$ 。
- ♣ 旋轉特性則為  $f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$ .
- 範例



0

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 46

## 5.2.6 分配律及尺度特性 (Distributivity and scaling)

♣ 分配律特性

$$\mathcal{F} \{f_{1}(x, y) + f_{2}(x, y)\} = \mathcal{F} \{f_{1}(x, y)\} + \mathcal{F} \{f_{2}(x, y)\}$$

$$\mathcal{F} \{f_{1}(x, y) | f_{2}(x, y)\} \neq \mathcal{F} \{f_{1}(x, y)\} \mathcal{F} \{f_{2}(x, y)\}$$

不等於

♣ 尺度特性

 $a f(x, y) \Leftrightarrow a F(u, v)$ 

及

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(\frac{u}{a}, \frac{v}{b})$$
 例如, $a = 2$  表示影像水平放大2倍

## 5.2.7 卷積與相關 (Convolution and correlation)

● 傅立葉轉換在頻率域及空間 (時間) 域間存在另一種基本的連結關係,這些關係可以用卷積 (convolution) 與相關 (correlation) 運算來表示。

#### A. 一維連續函數的卷積

兩函數 f(x) 及 g(x) 的卷積表示為 f(x)\*g(x),定義為

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(x - \alpha) d\alpha$$

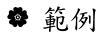


影像處理

5. 影像轉換

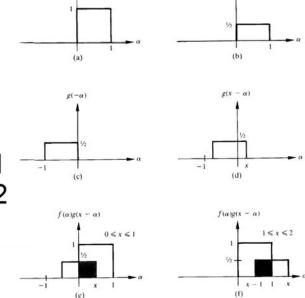
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 4

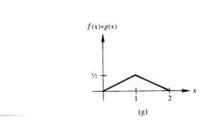




$$f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$$
  $g(x) = \frac{1}{2}, \quad 0 \le x \le 1$  則

 $f(x) * g(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \le x \le 1 \\ 1-x/2, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$ 





# ₩ 脈衝函數 (impulse function) 的

卷積

脈衝函數定義為

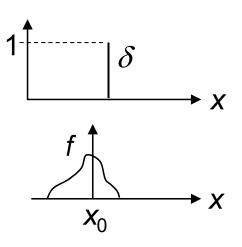
$$\delta(x-x_0) = 1$$
, if  $x = x_0$   
= 0, others

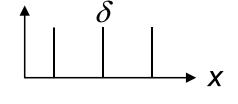
所以

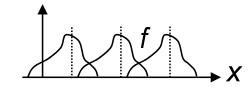
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \delta(x - \chi_0) \, dx = f(\chi_0).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = \int_{x_0^{-}}^{x_0^{+}} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

任何函數 f(x) 與脈衝函數卷積的 結果相當於將 f(x) 複製到各脈衝 函數的位置上,如右圖所示







>> 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 5

50

### ◆ 卷積理論 (convolution theorem)

$$f(x) g(x) \Leftrightarrow F(u) * G(u)$$

$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(u) G(u)$$

#### ♣ 卷積是可交換的 (exchangeable)

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$

$$F(u) * G(u) = G(u) * F(u)$$

#### B. 二維連續函數的卷積

兩函數 f(x,y), g(x,y) 的卷積表示為 f(x,y)\*g(x,y),定義為

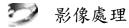
$$f(x,y) * g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta) g(x-\alpha,y-\beta) d\alpha d\beta.$$

如下頁所示

♣ 卷積理論 (convolution theorem)

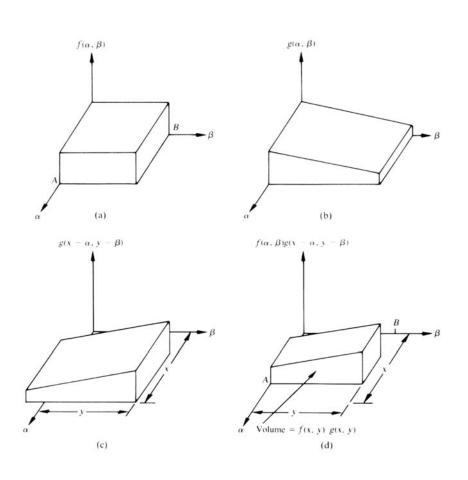
$$f(x, y) g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) G(u, v)$$



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 52



#### C. 一維連續函數的相關

兩函數 f(x) 及 g(x) 的相關表示為 f(x) ° g(x) ,定義為

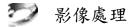
$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(\alpha) g(x + \alpha) d\alpha$$

#### D. 二維連續函數的相關

函數 f(x, y) 及 g(x, y) 的相關表示為 f(x, y)° g(x, y),定義為

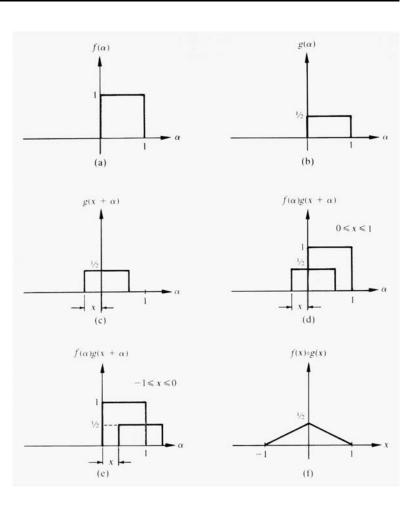
$$f(x,y) \circ g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(\alpha,\beta) g(x+\alpha,y+\beta) d\alpha d\beta$$

如下頁所示

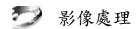


5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 54



55



相關理論 (correlation theorem)

5. 影像轉換

$$f^*(x) g(x) \Leftrightarrow F(u) \circ G(u)$$
  
 $f(x) \circ g(x) \Leftrightarrow F^*(u) G(u)$   
 $f^*(x, y) g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ G(u, v)$   
 $f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v) G(u, v)$ 



影像處理

5. 影像轉換

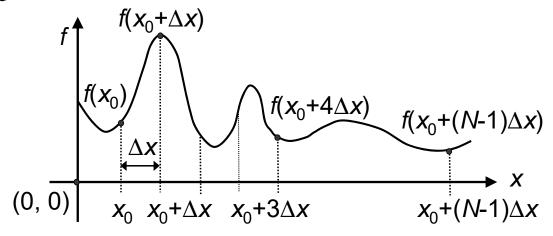
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 56

#### ♣ 討論

- @ 相關運算能夠用來做樣板比對 (template matching).
- ◎ 卷積與相關運算比較耗時,因此另一種運算方式 藉由卷積及相關定理,先用快速傅立葉轉換將函 數轉到頻率空間,再做乘法,最後再反轉回位置 空間。
- ◎ 卷積與相關運算具有交換率,也就是 f(x, y) \* g(x, y) = g(x, y) \* f(x, y) $f(x, y) \circ g(x, y) = g(x, y) \circ f(x, y)$

## 5.2.8 取樣 (Sampling)

- 傅立葉轉換及卷積理論提供一個較深入的取樣理論 分析的工具。在抽樣理論中,我們將探討
  - i. 在怎樣的取樣條件下抽取連續函數的樣本,才能 夠用這些離散樣本重建回原始的連續函數?
  - ii.要抽取多少樣本,才能夠保證沒有任何原始資料 遺失?



>> 影像處理

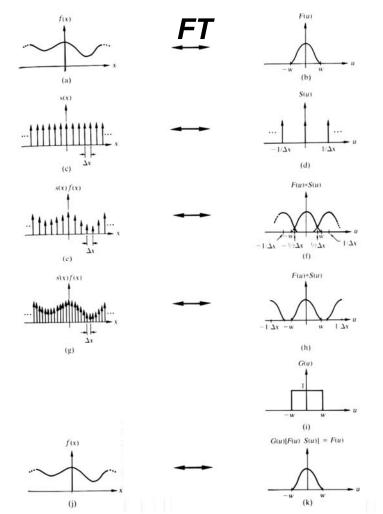
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 58

- ◆ 有限頻帶函數 (Band-limited function) f(x) 的定義為,若 f(x) 滿足 " $\mathcal{F}[f(x)] = 0$ , if  $u \notin [-w, +w]$  ",則 f(x) 即 為有限頻帶函數。
- 第一個問題 溫德克-雪濃 (Whittaker-Shannon) 抽樣理論 一個有限頻帶函數若滿足  $\Delta x \leq \frac{1}{2W}$  的取樣條件, 則這個有限頻帶函數就可以從該取樣的樣本重建回 原始連續函數。

頻率域

# ◆ 範例空間域



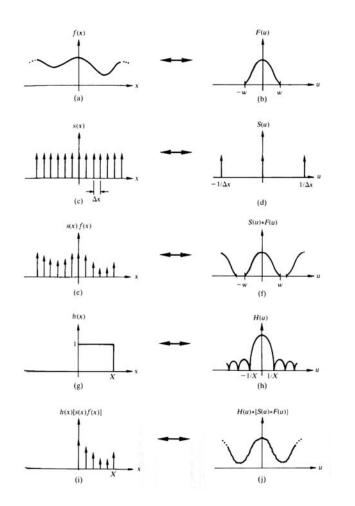
2

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 60

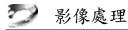
## 



● 唯一例外是連續函數 f(x) 本身就是一個有限頻帶或 問期性函數。在此情況下,重建出來的連續函數之 範圍依舊是從-~延伸到 ~。

#### 🏚 結論

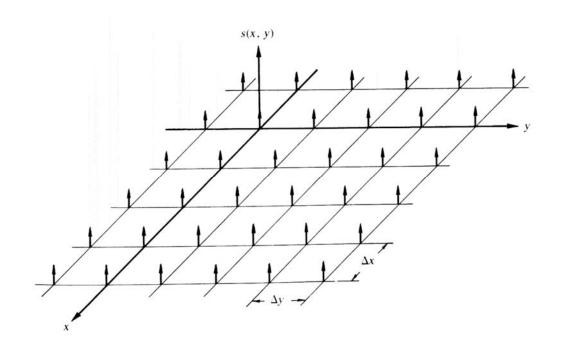
- i. 有限長度的 (finite duration) 函數 f(x) 不可能是有限頻帶的函數;相反的,一個有限頻帶的函數,其定義域 x 範圍必然是從 -∞ 到 ∞。
- ii. 在真實情況下,影像函數 f(x) 不可能是有限頻帶函數,所以影像的重建一定是近似影像而已。



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 62

♣ 二維影像的取樣範例

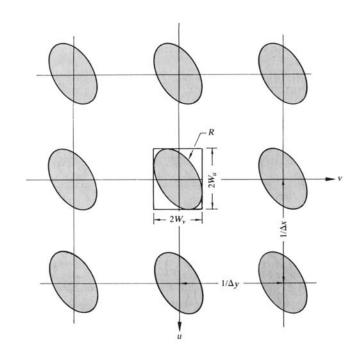


一個有限頻帶函數 f(x,y),若其 x 與 y 方向上的取 樣間距分別滿足

$$\Delta x \leq \frac{1}{2W_u} \mathcal{R} \Delta y \leq \frac{1}{2W_v}.$$

則該連續函數可以從樣本 重建回來。

🏶 由於影像大小一定都是 有限的,而且很少影像 是週期性函數;所以 影像的重建一定是 近似影像而已。



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 64

## 5.3 快速傅立葉轉換 (The fast Fourier transform)

🏶 計算傅立葉轉換

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi u x/N}$$

for u = 0, 1, ..., N-1,

需要  $N^2$ 乘法,及  $N \times (N-1)$  個加法,計算量平均為  $N^2$ 的倍數。

፟፟ 使用快速傅立葉轉換則可將計算量減少到 N log₂N 次。

66

資料數	FT	FFT	效能改進倍數
Ν	$N^2$	$N \log_2 N$	$N/\log_2 N$
2	4	2	2.00
4	16	4	2.00
8	64	24	2.67
16	256	64	4.00
32	1,024	160	6.40
64	4,096	384	10.67
128	16,384	896	18.29
256	65,536	2,048	32.00
512	262,144	4,608	56.89
1,024	1,048,576	10,240	102.40
2,048	4,194,304	22,528	186.18
4,096	16,777,216	49,152	341.33
8,192	67,108,864	106,496	630.15

- 換算成時間, 當 N = 8192 時, N<sup>2</sup> 的運算需要 1小時, 則 N log<sub>2</sub> N 只 是 5 秒而已



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

## 5.3.1 快速傅立葉轉換演算法

★ 快速傅立葉轉換演算法的原理是基於"連續雙重處理" (successive doubling) 或分割問題處理問題 (divide and conquer) 的觀念而來的。假設要做 N 個元素的傅立葉轉換

$$f(0), f(1), \ldots, f(N-1) \Rightarrow F(0), F(1), \ldots, F(N-1)$$

原始傅立葉轉換公式  $F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i2\pi ux/N}$ 

可簡化改寫成

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux}, \ u = 0, 1, 2, ..., N-1,$$

其中 
$$W_N = e^{-i2\pi/N}$$
.

$$F(u) = \frac{1}{2M} \sum_{x=0}^{2M-1} f(x) W_{2M}^{ux}$$

even

odd

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x)W_{2M}^{u(2x)}+\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x+1)W_{2M}^{u(2x+1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x)W_{M}^{ux}+\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x+1)W_{M}^{ux}W_{2M}^{u}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \{ F_{even}(u) + F_{odd}(u) W_{2M}^{u} \}, u = 0, 1, 2, ..., M-1.$$
.....(1)

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

已知

$$W_{2M}^{(u+M)2x} = W_{2M}^{2ux}W_{2M}^{2Mx} = W_{M}^{ux}e^{-i2\pi x} = W_{M}^{ux}(\cos 2\pi x - i\sin 2\pi x)$$

$$W_{2M}^{(u+M)(2x+1)} = W_{M}^{ux} W_{2M}^{u+M} = W_{M}^{ux} W_{2M}^{u} W_{2M}^{M} = W_{M}^{ux} W_{2M}^{u} e^{\frac{-i2\pi M}{2M}}$$
$$= W_{M}^{ux} W_{2M}^{u} (\cos \pi - i \sin \pi) = -W_{M}^{ux} W_{2M}^{u}$$

$$F(u+M) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{(u+M)x}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x)\underbrace{W_{2M}^{(u+M)(2x)}}+\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x+1)\underbrace{W_{2M}^{(u+M)(2x+1)}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x)W_{M}^{ux}-\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(2x+1)W_{M}^{ux}W_{2M}^{u}\right\}.$$

也就是

$$F(u+M) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(u) - F_{odd}(u) W_{2M}^{u} \right\}, \ u = 0, 1, 2, ..., M-1.$$

#### 總結 (summary)

$$f(.), 0, 2, 4, ..., N-2 Feven Fodd$$

$$0, 1, 2, ..., M-1, M, M+1, ..., N-1$$

$$F(u) F(u)$$

$$F(u) F(u+M)$$

$$F(0) F(0+M) = F(M)$$

$$F(1) F(1+M)$$

$$F(2) F(2+M)$$

$$\vdots$$

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 70

## 5.3.2 FFT 的運算次數 (Number of operations)

**a** 
$$n = 1$$
,  $N = 2$ ,  $M = 1$ 

$$f(0), f(1)$$
 $\downarrow$ 
 $F(0), F(1)$ 

$$n = 2, N = 4, M = 2$$

$$f(0), f(1), f(2), f(3)$$
 $\downarrow$ 
 $F(0), F(1), F(2), F(3)$ 

$$F(0) = \frac{1}{2} \{ f(0) + f(1) W_2^0 \}$$

$$F(1) = \frac{1}{2} \left\{ f(0) - f(1) W_2^0 \right\}$$
  
  $m(1) = 1$  and  $a(1) = 2$ 

$$F(0) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(0) + F_{odd}(0) W_4^0 \right\}$$

$$F(1) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}^{(2)}(1) + F_{odd}^{(2)}(1) W_4^1 \right\}$$

$$F(2) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(0) - F_{odd}(0) W_4^0 \right\}$$

$$F(3) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(1) - F_{odd}(1) W_4^1 \right\}$$

$$F(3) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(1) - F_{odd}(1) W_4^1 \right\}$$

$$m(2) = 2 m(1) + 2$$
 and  $a(2) = 2 a(1) + 4$ 

$$\bullet$$
 **n = 3**,  $N = 8$ ,  $M = 4$ 

$$f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)$$

F(0), F(1), F(2), F(3), F(4), F(5), F(6), F(7)

$$F(0) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(0) + F_{odd}(0) W_8^0 \right\} \quad F(5) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(1) - F_{odd}(1) W_8^1 \right\}$$

$$F(1) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(1) + F_{odd}(1) W_8^1 \right\} \quad F(6) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(2) - F_{odd}(2) W_8^2 \right\}$$

$$F(2) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(2) + F_{odd}(2) W_8^2 \right\} \quad F(7) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(3) - F_{odd}(3) W_8^3 \right\}$$

$$F(3) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(3) + F_{odd}(3) W_8^3 \right\}$$

$$F(4) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(0) - F_{odd}(0) W_8^0 \right\}$$

$$(4)$$

$$m(3) = 2m(2) + 4 \text{ and}$$

$$a(3) = 2 a(2) + 8.$$

$$F(4) = \frac{1}{2} \left\{ F_{even}(0) - F_{odd}(0) W_8^0 \right\}$$

#### 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 72

♥ 根據上列公式推論,可得  $m(n) = 2 m(n-1) + 2^{n-1}, n \ge 1$  $a(n) = 2 a(n-1) + 2^n, n \ge 1$ 

$$m(n) = 2 m(n-1) + 2^{n-1}$$

$$= 2 [2 m(n-2) + 2^{n-2}] + 2^{n-1}$$

$$= 2^2 m(n-2) + 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$= 2^2 [2 m(n-3) + 2^{n-3}] + 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$= 2^3 m(n-3) + 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$= ...$$

= 
$$2^{n-1} m(n-(n-1)) + (n-1) 2^{n-1}$$
  
=  $2^{n-1} + (n-1) 2^{n-1}$ 

$$= n 2^{n-1}$$

$$= (1/2) 2^n n \text{ (since } 2^n = N)$$

$$= (1/2) N log_2 N$$
.

73

$$a(n) = 2 a(n-1) + 2^{n}$$

$$= 2 [2 a(n-2) + 2^{n-1}] + 2^{n}$$

$$= 2^{2} a(n-2) + 2 \cdot 2^{n}$$

$$= 2^{2} [2 a(n-3) + 2^{n-2}] + 2 \cdot 2^{n}$$

$$= 2^{3} a(n-3) + 3 \cdot 2^{n}$$

$$= ...$$

$$= 2^{n-1} a(n-(n-1)) + (n-1) 2^{n}$$

$$= 2^{n} + (n-1) 2^{n}$$

$$= n 2^{n}$$

$$= N \log_{2} N$$

♠ 快速傅立葉轉換 (FFT) 的乘法數只要 (1/2) N log₂ N; 加法數只要 N log<sub>2</sub> N。

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 74

# 5.3.3 以 FFT 公式計算 inverse FFT

及傅立葉轉換 
$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{i2\pi ux/N}$$

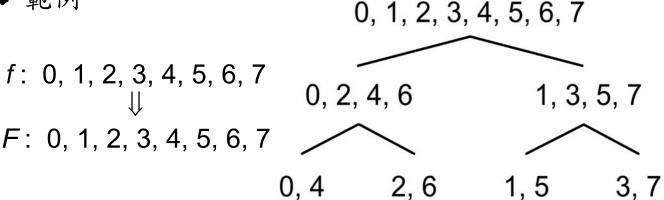
可以用 
$$\frac{1}{N}f^*(x) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}F^*(u)e^{-i2\pi ux/N}$$
 代替

◆ 反傅立葉轉換 
$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi(ux+vy)/N}$$

可以用 
$$f^*(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u,v) e^{-i2\pi(ux+vy)/N}$$
 代替

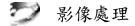
## 5.3.4 FFT 的實做問題





#### ₩ 問題

計算 F(0), F(1), F(2), F(3), F(4), F(5), F(6), F(7)  $F_{even} \leftarrow f(0), f(2), f(4), f(6)$   $F_{odd} \leftarrow f(1), f(3), f(5), f(7)$ 重排次序 f(0), f(4), f(2), f(6), f(1), f(5), f(3), f(7)



5. 影像轉換

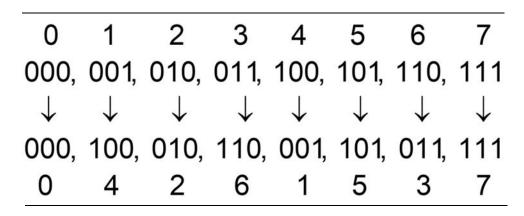
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 76

## ✿ 重新排序

可透過 bit-reversal 規則重新排序輸入信號 f(x)

Binary string  $b_1 b_2 b_3 \dots_2 \Rightarrow \dots b_3 b_2 b_1 \dots_2$ 

#### ₩ 範例一 (3 位元)



#### ● 範例二 (4 位元)

0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
$\downarrow$							
0000	1000	0100	1100	0010	1010	0110	1110
0	8	4	12	2	10	6	14
8	9	10	11	12	13	14	15
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
$\downarrow$							
0001	1001	0101	1101	0011	1011	0111	1111
1	9	5	13	3	11	7	15

🤝 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 7

78

# 5.4 離散餘弦轉換

(Discrete cosine transform, DCT)

#### ₩ 目的

將位置空間 (spatial domain) 信號轉換成頻率空間 (frequency domain) 信號

位置空間信號: f(0), f(1), ..., f(N-1)

變數X

**UDCT** 

頻率空間信號: c(0), c(1), ..., c(N-1)

變數U

◆ DCT與FT的最大差別在於,DCT只用餘弦函數, 所以頻率係數只是一個實數,不再是一個複數。 ● 一維離散餘弦 (傅立葉) 轉換

$$c(u) = \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}, \ u = 0, 1, 2, ..., N-1,$$

其中 
$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & \text{for } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & \text{for } u = 1, 2, ..., N - 1. \end{cases}$$

c(u), u = 0, 1, ..., N-1 稱為離散餘弦係數 (DCT coefficient) of f(x).



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

80

◆ 一維離散餘弦反轉換

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u) c(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

for x = 0, 1, 2, ..., N-1.

● 二維離散餘弦轉換

$$c(u,v) = \alpha(u)\alpha(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}f(x,y)\left[\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\left[\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

for u, v = 0, 1, 2, ..., N-1.

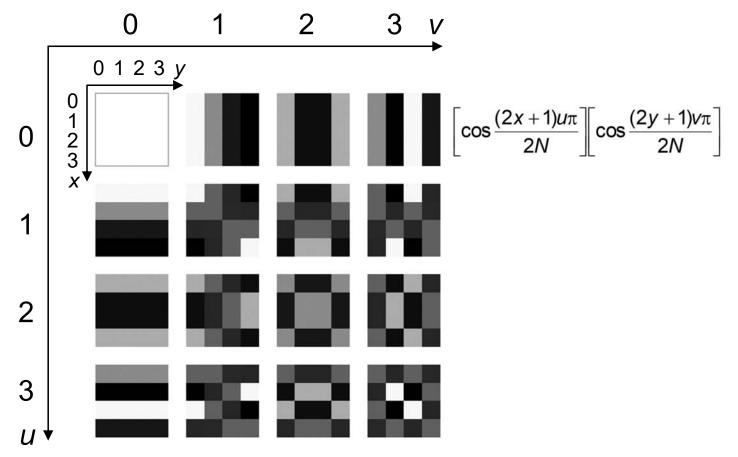
● 二維離散餘弦反轉換

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u) \alpha(v) c(u,v) \left[ \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \right] \left[ \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \right]$$

for x, y = 0, 1, 2, ..., N-1.

82

● 一個離散餘弦轉換的基底函數範例 (N=4)



2

影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

🏶 討論

- ♠ 在離散餘弦轉換與反轉換公式中, $\sqrt{\frac{2}{N}}$  可以用 $\frac{\sqrt{2}}{N}$  取代
- ◆ 二維離散餘弦轉換也具可分離性,因此二維離散餘弦轉換也可改為執行多次的一維餘弦轉換取代。
- ✿ 離散餘弦轉換可直接用快速傅立葉轉換計算求得

$$c(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) ,$$

$$c(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \exp\left(\frac{-i\pi u}{2N}\right) \right] \sum_{x=0}^{2N-1} f(x) \exp\left(\frac{-i\pi ux}{N}\right) \right\},$$

 $u = 1, 2, ..., N-1 \perp f(x) = 0 \text{ for } x = N, N+1, ..., 2N-1.$ 

# 5.5 離散小波轉換

- 假設有兩個相鄰的數位信號 a和 b。若我們把 a和 b 合成兩個數值 c和 d,則我們可以從 c和 d完全的還原 a和 b。例如,(a+b)/2=c,(a-b)/2=d,則 c+d=a, c-d=b。
- ♣ 為什麼我們要做 a、b到 c、d的轉換,再從 c、d 還轉回 a、b 呢?以上例來說,c是 a、b 信號的 "平均"值,而 d是 a、b 信號的"差異"值。平均值 及差異值都是資料的特徵,也就是 c 相當於 a、b 信號串中的某種低頻資訊,而 d 相當於某種高頻資 訊;高低頻資訊都是信號分析上很重要的特徵,而 小波轉換 (wavelet transform)就是具有上述 a、b 與 C、d 間轉換的意義。



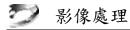
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 8

84

- ◆ 小波轉換和傅立葉轉換一樣都是一種信號分析的工具。不過小波轉換比傅立葉轉換在時間或空間域 (time or spatial domain) 及頻率域 (frequency domain) 上更具有局部性 (local property)。因此小轉換比傅立葉轉換更適於需要局部資料分析的應用。
- ◆ 小波轉換的理論基礎來自於線性代數的向量空間 (vector space)。在此向量空間中,我們要定義許多不同尺度 (scale 或稱長度 deviation) 的基底函數 (basis function)。而任一函數都可分解成這些基底函數的線性組合。

- ◆ 基底函數分成兩類:尺度 (scaling)函數和小波 (wavelet)函數。尺度函數是描述局部函數的大略數 值而小波函數則是描述局部函數的差異值;也就是 尺度函數值相當於上例的平均值而小波函數值相當 於上例的差異值。
- 尺度不同的尺度函數 (different-scaling functions) 也是表示不同解析度 (resolution) 的意思。一個尺度函數可以再分解成解析度低一階 (level) 的尺度函數和小波函數。所以小波轉換的意義就是可以將任何函數重複地分解成尺度不同和位置不同的尺度基底函數及小波基底函數之線性組合。



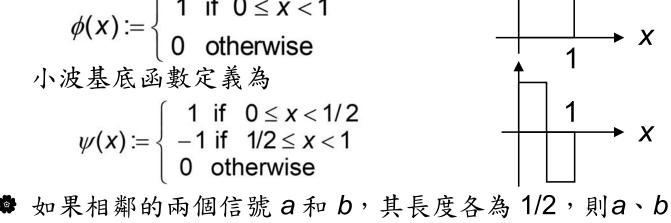
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 86

● 原始信號或影像是最精細的資料定義為第 n 階,其次是解析度少一倍的第 n-1 階,依此類推。階次的表示法有兩種,從最精細到最粗糙的階次依序為 n, n-1, n-2, n-3, ...; 另一種表示式為 0, 1, 2, 3, ...。 兩種表示式的意義相同,只是分解公式中的符號上下標會有所不同而已。在理論講解上第一種表示式 比較好用,所以本文採用第一種表示式。

1909 年 Alfred Haar 所定義的基底函數具有非常適用於 小波轉換的特性,因此被引入小波轉換中,做成最簡單 的基底函數,稱為 Haar basis functions;其中尺度基底 函數定義為

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



兩數相加的結果相當於尺度基底函數值  $\phi(x)$  的某一種 倍數; $a \cdot b$  兩數相減的結果相當於小波基底函數值  $\psi$ (X) 的某一種倍數。所以相鄰信號的相加減就相當於分解 成 Haar 尺度基底函數及小波基底函數。



>> 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

88

## 5.5.1 分解與合成

第 n-4 階 f(x) = [4, 2]

● 我們以一個一維的離散函數當例子來表示小波的重複分 解。下圖例中,實線代表上列兩數平均 (相加除以2) 成 下列一數,虛線代表上列兩數相減除以2成下列一數。

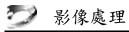
第 
$$n$$
 階  $f(x) = [1, 5, 8, 10, 9, 7, 5, 3, 2, 0, -4, -2, 3, 5, 6, 6]$ 

第 n-1 階 f(x) = [3, 9, 8, 4, 1, -3, 4, 6, -2, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 0]

第 *n*-2 階 
$$f(x) = [6, 6, -1, 5, -3, 2, 2, -1]$$
  
第 *n*-3 階  $f(x) = [6, 2, 0, -3]$ 

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- 這是函數依解析度的降低而逐步分解的例子。分解出來 的低頻資訊(平均值)放在左半邊,高頻資訊(差異值)放 在右半邊。低頻資訊再繼續分解,高頻資訊不再分解。
- ◆ 在上例中,我們可以看到第 n 階的所有函數值都可以 從第 n-1 階的數值還原回來,第 n-1 階左半邊的數值 都可以從第 n-2 階的數值還原回來,第 n-2 階左半邊 的函數值都可以從第 n-3 階的數值還原回來,依此類 推,到最後只剩下兩個數值 (例如上例的第 n-4 階)。因 此,我們可以用第 n-4 階的兩個數值,加第 n-3 階右 半邊的兩個數值,加第 n-2 階右半邊的四個數值,再 加第 n-1 階右半邊的八個數值,還原回第 n 階的所有 數值;也就是以最低階的高低頻資訊,加上所有較高 階的高頻資訊,我們就可以還原回原始的函數。上述 步驟其實就是小波分解與合成的意義。

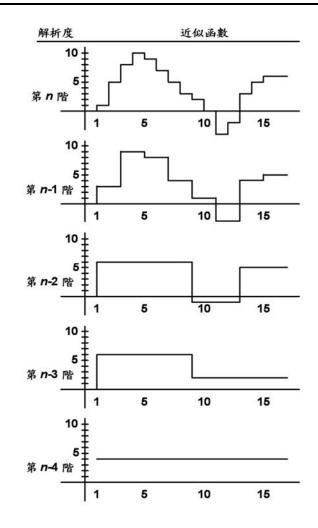


5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 90

● 上述的分解與合成好像只是資料的相加相減而已, 我們再以上述例子來解說與基底函數的關係。如果 我們僅看平均值(低頻資訊)這一部份變化的話,其 實那就是降低解析度的原始資料。我們以圖形來表 示其變化。

፟ 五種不同尺度之 尺度基底函數的 近似函數



影像處理

5. 影像轉換

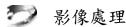
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 92

● 上圖可以看成是用了五種不同尺度的尺度基底函數 組合出五種不同近似程度的離散函數。以第 n-2 階 函數為例,我們可以用四個不同位置的 n-2 階尺度 基底函數來表示(合成)

$$f(x) = c_0^{n-2} \phi_0^{n-2}(x) + c_1^{n-2} \phi_1^{n-2}(x) + c_2^{n-2} \phi_2^{n-2}(x) + c_3^{n-2} \phi_3^{n-2}(x)$$

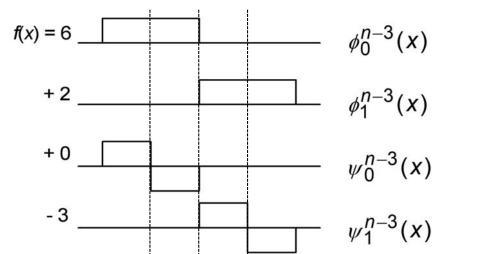
$$f(x) = 6$$
  $\phi_0^{n-2}(x)$ 
 $\phi_0^{n-2}(x)$ 
 $\phi_1^{n-2}(x)$ 
 $\phi_1^{n-2}(x)$ 
 $\phi_2^{n-2}(x)$ 

 $\phi_3^{n-2}(x)$ + 5



◆ 我們也可以用兩個 n-3 階的尺度基底函數及兩個 n-3 階的小波基底函數來組合第 n-2 階函數,這樣的表示式不會更進一步的降低解析度,除非只用二個 n-3 階的尺度基底函數 (一個 n-3 階函數等於二個 n-2 階函數的寬度)

$$f(x) = c_0^{n-3} \phi_0^{n-3}(x) + c_1^{n-3} \phi_1^{n-3}(x) + d_0^{n-3} \psi_0^{n-3}(x) + d_1^{n-3} \psi_1^{n-3}(x)$$



>> 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU

QЛ

♣ 我們也可以用一個 n-4 階的尺度基底函數,一個 n-4 階的 小波基底函數及二個 n-3 階的小波基底函數來組合,這樣 的表示式一樣維持原來的解析度

◆ 公式中的 cf's 和 df's 稱為函數係數,也就是一個函數經分解後的各個基底函數的加權數。這些加權數與最初相加相減分解出來的數值是完全一樣的;也就是說小波轉換是利用不同階的尺度及小波基底函數之組合來代表原始函數。

## 5.5.2 基底函數

- ♣ 上述的分解與合成只是小波轉換中最簡單的一種而已,定義出不同的基底函數就可以做成不同分解與合成的小波轉換。接下來,我們從基底函數的向量空間理論來探討小波轉換。我們定義 Vi為第 j 階向量空間。若以信號處理的應用觀點來看,一串信號的信號數是 2j 的話,我們稱這串信號的信號值 (signal value) 是 Vi 中的元素。
- ◆ 不同階的向量空間滿足下列包含的關係  $V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \cdots$
- 一個  $V^{j}$  向量空間的元素 (基底函數) 定義為  $\phi_{i}^{j}(x) := \phi(2^{j}x i), \quad i = 0,..., 2^{j} 1$  其中  $\phi(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$  i 則代表不同的位置。

>> 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 96

\* 若  $W^j$  和  $V^j$  是  $V^{j+1}$  空間中的正交互補 (orthogonal complement) 子空間,則  $V^{j+1} = W^j \oplus V^j$  。若  $\phi_i^j$ ,  $i = 0, \dots, 2^j - 1$  是  $V^j$  的基底函數,  $\psi_i^j$ ,  $i = 0, \dots, 2^j - 1$  是  $W^j$  的基底函數,則  $\phi_i^j$  'S 稱為尺度 函數, $\psi_i^j$ 'S 稱為小波函數。  $\phi_i^j$  则形成了  $V^{j+1}$  子 空間的基底,其中任一尺度函數  $\phi_i^j$  则形成了  $V^{j+1}$  子 空間的基底,其中任一尺度函數  $\phi_i^j$  與任一小波函數  $\psi_i^j$  正交。以列向量 (row vector) 來表示基底函數向量,  $\Phi^j(x) := [\phi_0^j(x) \cdots \phi_{2^{j-1}-1}^j(x)]$  , $\Psi^j(x) := [\psi_0^j(x) \cdots \psi_{2^{j-1}}^j(x)]$  若  $[\phi_0^{j-1}(x)\phi_1^{j-1}(x) \dots \phi_{2^{j-1}-1}^j(x)] = [\phi_0^j(x)\phi_1^j(x) \dots \phi_{2^{j-1}-1}^j(x)] P^j$   $[\psi_0^{j-1}(x)\psi_1^{j-1}(x) \dots \psi_{2^{j-1}-1}^{j-1}(x)] = [\phi_0^j(x)\phi_1^j(x) \dots \phi_{2^{j-1}-1}^j(x)] Q^j$ 

也就是 $\Phi^{j-1}(x) = \Phi^{j}(x) P^{j}$ , $\Psi^{j-1}(x) = \Phi^{j}(x) Q^{j}$ 則 $P^{j}$ 和 $Q^{j}$ 是分解 $\Phi^{j}$ 成為 $\Phi^{j-1}$ 和 $\Psi^{j-1}$ 的分解矩陣  $[\Phi^{j-1}|\Psi^{j-1}] = \Phi^{j}[P^{j}|Q^{j}]$ ,也就是 $P^{j}$ 及 $Q^{j}$ 是表示j 階及j-1 階基底函數間的關係。 $P^{j} Q^{j}$ 

**《**假設一串信號值為  $\mathbf{C}^{j} = [c_{0}^{j} \ c_{1}^{j} \dots c_{2^{j-1}}^{j}]^{T}$ ,其低一階解析度的數值 (尺度係數)  $\mathbf{C}^{j-1} = [c_{0}^{j-1} \ c_{1}^{j-1} \dots c_{2^{j-1-1}}^{j-1}]^{T}$ ,則  $\mathbf{C}^{j}$  與  $\mathbf{C}^{j-1}$  的關係為

$$\mathbf{C}_{2^{j-1}\times 1}^{j-1} = \mathbf{A}_{2^{j-1}\times 2^{j}}^{j} \mathbf{C}_{2^{j}\times 1}^{j}$$

7

影像處理

5. 影像轉換

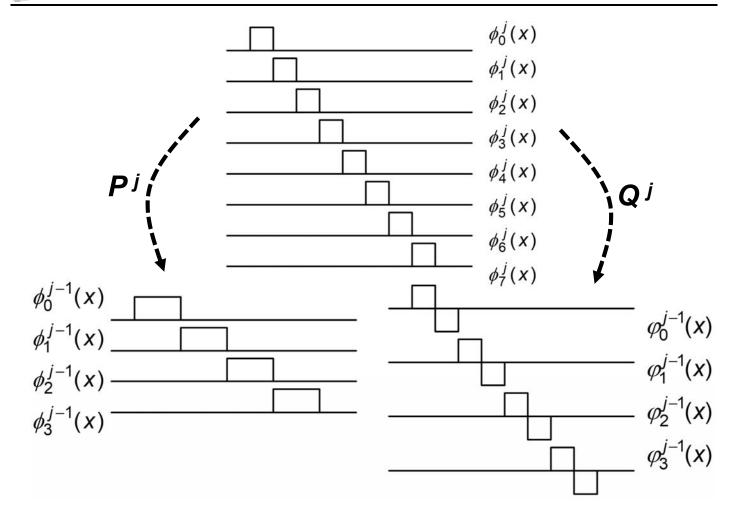
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 98

詳細變化之小波係數  $\mathbf{D}^{j-1} = [d_0^{j-1} \ d_1^{j-1} \ \dots \ d_{2^{j-1}-1}^{j-1}]^{j}$ 的關係為  $\mathbf{D}_{2^{j-1}\times 1}^{j-1} = \mathbf{B}_{2^{j-1}\times 2^{j}}^{j} \mathbf{C}_{2^{j}\times 1}^{j}$ 

若把兩式合成一式,則

$$\left[\frac{\mathbf{C}^{j-1}}{\mathbf{D}^{j-1}}\right]_{2^{j}\times 1} = \left[\frac{\mathbf{A}^{j}}{\mathbf{B}^{j}}\right]_{2^{j}\times 2^{j}} \mathbf{C}_{2^{j}\times 1}^{j}$$

這個公式稱為小波分解 (wavelet decomposition)。其中子矩陣 (submatrix)  $A^j$  與  $B^j$  各別描述第 j 階尺度係數到第 j-1 階尺度及小波係數間的關係。





影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 100

#### ● 範例

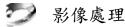
以 Harr函數為基底的一維小波轉換可表示為 d = Hc

$$\begin{bmatrix} 8/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

其中H是Harr函數的轉換矩陣, C為原始訊號, d是轉換後的實數信號

以 Daubechies  $D_4$  函數為基底的一維小波轉換可表示為  $e = D_4 c$ ,

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{-3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 3 \\ 5 \\ x \end{bmatrix}$$

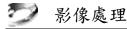


♣ 尺度係數 C<sup>j</sup> 可以從低一階的尺度係數 C<sup>j-1</sup> 及小波 係數 D<sup>j-1</sup> 重建回來

$$\mathbf{C}_{2^{j}\times1}^{j} = \left[\mathbf{P}^{j}\middle|\mathbf{Q}^{j}\right]_{2^{j}\times2^{j}} \left[\frac{\mathbf{C}^{j-1}}{\mathbf{D}^{j-1}}\right]_{2^{j}\times1}$$

章 這個公式稱為小波重建或合成 (wavelet reconstruction)。結合上兩式,我們可以得到

$$\left[\frac{\mathbf{A}^{j}}{\mathbf{B}^{j}}\right] = \left[\mathbf{P}^{j} \middle| \mathbf{Q}^{j}\right]^{-1} = \left[\mathbf{P}^{j} \middle| \mathbf{Q}^{j}\right]^{T}$$



5. 影像轉換

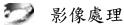
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 102

如果 f(x) 是 n 樣本點的一維離散函數,則其 n-j 階的小波分解可以寫成

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{j}-1} c_k^j \phi_k^j + \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=0}^{2^{i}-1} d_k^i \psi_k^i$$

現在我們要把基底函數  $\phi_k^i$ ,  $\psi_l^i$ ,與  $\phi_m^{i+1}$  間的關係,及小波係數  $c_k^i$ ,  $d_l^i$ ,與  $c_m^{j+1}$  間的關係導入此公式中。首先 f(x) 可以先改寫成下列式子

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{j}-1} (c_{k}^{j} \phi_{k}^{j} + d_{k}^{j} \psi_{k}^{j}) + \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=0}^{2^{i}-1} d_{k}^{i} \psi_{k}^{i} \dots (1)$$



如果 $C^{j}$ 、 $D^{j}$ 、 $\Phi^{j}$ 、及 $\Psi^{j}$  各別表示 係數向量  $[c_0^{j}\cdots c_{2^{j-1}}^{j}]^T$ ,  $[d_0^{j}\cdots d_{2^{j-1}}^{j}]^T$ 

及基底函數向量  $[\phi_0^j \cdots \phi_{2^j-1}^j], [\psi_0^j \cdots \psi_{2^j-1}^j]$ 

(注意,係數向量表示成行向量,基底函數向量表示成列向量),兩個 2 j+1×2 j 矩陣 P j+1 和 Q j+1 描述基底函數間的關係,

$$\begin{cases}
\boldsymbol{\phi}_{1\times2^{j}}^{j} = \boldsymbol{\phi}_{1\times2^{j+1}}^{j+1} \boldsymbol{P}_{2^{j+1}\times2^{j}}^{j+1} \\
\boldsymbol{\psi}_{1\times2^{j}}^{j} = \boldsymbol{\phi}_{1\times2^{j+1}}^{j+1} \boldsymbol{Q}_{2^{j+1}\times2^{j}}^{j+1}
\end{cases} (2)$$



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 104

根據公式 (1), f(x) 可表示成

$$f(x) = \Phi^{j} C^{j} + \Psi^{j} D^{j} + \sum_{i=j+1}^{n} \Psi^{i} D^{i}$$
 .....(3)

將公式(2)代入公式(3),則

$$f(x) = \Phi^{j+1}P^{j+1}C^j + \Phi^{j+1}Q^{j+1}D^j + \sum_{i=j+1}^n \psi^i D^i$$

$$= {m \Phi}^{j+1} ({m P}^{j+1} {m C}^j + {m Q}^{j+1} {m D}^j) + \sum_{i=j+1}^n {m \Psi}^i {m D}^i$$

根據小波分解的定義

$$f(x) = \Phi^{j+1}C^{j+1} + \sum_{i=j+1}^{n} \Psi^{i}D^{i}$$

我們可得到

$$P^{j+1}C^{j} + Q^{j+1}D^{j} = C^{j+1}$$
 .....(4)



如果兩個  $2^{j} \times 2^{j+1}$  矩陣  $A^{j+1}$  和  $B^{j+1}$  是描述小波係數間的關係,則

$$\begin{cases}
\mathbf{C}^{j} = \mathbf{A}^{j+1}\mathbf{C}^{j+1} \\
\mathbf{D}^{j} = \mathbf{B}^{j+1}\mathbf{C}^{j+1}
\end{cases}$$
(5)

將公式(5)代入公式(4),則

$$P^{j+1}A^{j+1}C^{j+1} + Q^{j+1}B^{j+1}C^{j+1}$$
  
=  $(P^{j+1}A^{j+1} + Q^{j+1}B^{j+1})C^{j+1} = C^{j+1}$ 

所以

$$P^{j+1}A^{j+1} + Q^{j+1}B^{j+1} = I_{2^{j+1}\times 2^{j+1}}$$



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 106

若表示成擴充矩陣 (augmented matrices) 形式的話,

則 
$$\left[ \mathbf{P}^{j+1} \middle| \mathbf{Q}^{j+1} \right]_{2^{j+1} \times 2^{j+1}} \left[ \frac{\mathbf{A}^{j+1}}{\mathbf{B}^{j+1}} \right]_{2^{j+1} \times 2^{j+1}} = \mathbf{I}_{2^{j+1} \times 2^{j+1}}$$
也就是  $\left[ \frac{\mathbf{A}^{j+1}}{\mathbf{B}^{j+1}} \right] = \left[ \mathbf{P}^{j+1} \middle| \mathbf{Q}^{j+1} \right]^{-1}$ 
或  $\left[ \frac{\mathbf{A}^{j+1}}{\mathbf{B}^{j+1}} \right]^{-1} = \left[ \mathbf{P}^{j+1} \middle| \mathbf{Q}^{j+1} \right]$ 

矩陣  $A^{j+1}$  和  $B^{j+1}$  稱為分析濾波器 (analysis filters)。 將係數  $C^{j+1}$  分解成低解析度係數  $C^{j}$  和  $D^{j}$  的程序 稱為小波分析或分解 (analysis or decomposition)。 矩陣  $P^{j+1}$  和  $Q^{j+1}$  稱為合成濾波器 (synthesis filters)。 從低解析度係數  $C^{j}$  和  $D^{j}$  合成高解析度係數  $C^{j+1}$ 的程序稱為小波合成或重建 (synthesis or reconstruction)。

7

影像處理

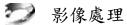
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 108

## 5.5.3 基底函數的正交性

- ◆ 小波轉換的基底函數可根據他們的正交性 (orthogonality)
   分為: 正交(orthogonal)、
   半正交 (semiorthogonal)、
   雙正交(biothogonal)等。
- Haar function是這些類別的共同最低階函數。正交函數的優點是運算容易、有效率,但缺點是通常會失去對稱性 (symmetry);對稱性對於壓縮及邊偵測的應用很重要。
- 正交基底函數的意義是同階的所有基底函數全部相互正交,不管是尺度函數還是小波函數,也不管是那一階的函數。以數學公式來表示 [d! | d!

 $egin{cases} \phi_k^j \perp \phi_l^j \ \psi_k^j \perp \psi_l^j \ \phi_k^j \perp \psi_l^j \end{cases}$  , for all j, k, and l.



● 半正交基底函數則定義為同階的每一個尺度函數與每一個小波函數均正交,不管是那一階函數

 $\phi_k^j \perp \psi_l^j$  , for all j, k, and l.

也就是半正交基底函數中,尺度函數間不必正交,小波函數間不必正交。

雙正交基底函數是由於尺度函數  $\phi_k^j$  與小波函數  $\psi_l^j$  不正交,但一定存在另一組尺度函數  $\widetilde{\phi}_k^j$  與小波函數  $\widetilde{\psi}_l^j$ ,

使得兩組基底函數相互正交  $\left[egin{aligned} igl(\phi_k^j\cdot\widetilde{\phi}_l^j) = I \ igl(\psi_k^j\cdot\widetilde{\psi}_l^j) = I \ igl(\phi_k^j\cdot\widetilde{\psi}_l^j) = 0 \end{aligned} \right]$ 

$$\left[ [\psi_k^j \cdot \widetilde{\phi}_l^j] = \mathbf{0} \right]$$



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 110

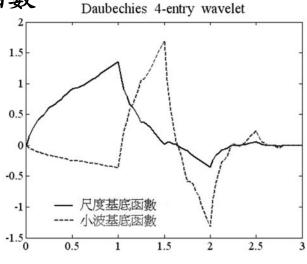
# 5.5.4一些常用的小波基底函數

A. 正交 (orthonormal) 基底函數

**Haar function** 

低頻濾波函數  $L: \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1)$ 

高頻濾波函數  $H: \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ 



Daubechies  $D_4$ 

低頻濾波函數 L:  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$  (1+ $\sqrt{3}$ , 3+ $\sqrt{3}$ , 3- $\sqrt{3}$ , 1- $\sqrt{3}$ )

高頻濾波函數 H:  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$   $(1-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ 

## B. 雙正交 (Biorthogonal) 基底函數

$$\begin{cases}
\overline{\mathbf{P}^{j}} = 2^{n} (\mathbf{A}^{j})^{T} \\
\overline{\mathbf{Q}^{j}} = 2^{n} (\mathbf{B}^{j})^{T}
\end{cases}$$
, where  $n$  is dimension.

**B**-1

低頻分解濾波函數 
$$L_d$$
:  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  (-1, 3, 3, -1)

高頻分解濾波函數 
$$H_d$$
:  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$  (1, -3, 3, -1)

低頻重建濾波函數 
$$L_r$$
:  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$  (1, 3, 3, 1)

高頻重建濾波函數 
$$H_r$$
:  $\frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, -3, 3, 1)$ 



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 112

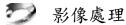
**B**-2

低頻分解濾波函數 
$$L_d$$
:  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$  (-1, 2, 6, 2, -1, 0)

高頻分解濾波函數 
$$H_d$$
:  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  (0, 0, 1, -2, 1, 0)

低頻重建濾波函數 
$$L_r$$
:  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  (0, 1, 2, 1, 0, 0)

高頻重建濾波函數 
$$H_r$$
:  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$  (0, 1, 2, -6, 2, 1)



## 5.5.5 二維小波轉換

- ◆ 小波轉換相當於一個階層式次頻帶系統 (hierarchical subband system),其中各分解波段資料在頻率域上是對數 (logarithmically)的分佈。
- 在二維影像中,相同的尺度函数 φ及小波函数 ψ分 別用於影像中垂直及水平兩方向的分解。
- 舉例來說,尺度函數  $\phi_{LL}(x, y)$  是一個由水平低頻  $\phi(x)$  加垂直低頻 (low-low subband)  $\phi(y)$  所合成的二維小波轉換。所有四個二維小波次頻帶是由尺度函數  $\phi(x)$  與小波函數  $\psi(x)$  所組成:



影像處理

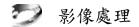
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 114

 $\phi_{LL}(X, y) = \phi(X) \phi(y)$ ;水平低通、垂直低通  $\psi_{LH}(X, y) = \phi(X) \psi(y)$ ;水平低通、垂直高通  $\psi_{HL}(X, y) = \psi(X) \phi(y)$ ;水平高通、垂直低通  $\psi_{HH}(X, y) = \psi(X) \psi(y)$ ;水平高通、垂直高通 其中 H 代表高通濾波器,而 L 表示低通濾波器 水平,垂直 L H

水平+垂直+ LL<sub>n</sub> HL<sub>n</sub> 水平+垂直- LH<sub>n</sub> HH<sub>n</sub>

H 水平-垂直-



◆ 二維影像 DWT 的基本理論如下:一張影像先透過水平及垂直方向的次頻帶濾波器,分解成 LL<sub>n</sub>, HL<sub>n</sub>, LH<sub>n</sub>, HH<sub>n</sub> 四個次頻帶。

其中  $HL_n$ ,  $LH_n$ , 及  $HH_n$  次頻帶是最高解析度的小波係數。

接著繼續將  $LL_n$  次頻帶分解成低一階解析度的次頻帶  $LL_{n-1}$ ,  $HL_{n-1}$ ,  $LH_{n-1}$ , Q  $HH_{n-1}$ 

以上分解程序可以重複多次,次數是依應用的需求而定的;每多一階層的分解,既多出3個次頻帶。

◆ 小波樹中,每一層都有不同的頻率資訊,包含低-低、低-高、高-低、及高-高等頻率。並且原始影像可以這些小波及尺度係數完全重建回來。

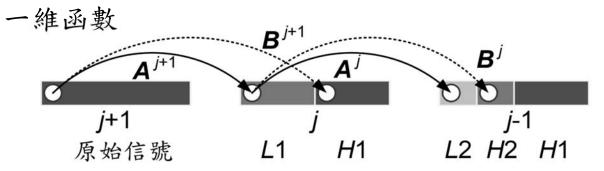


影像處理

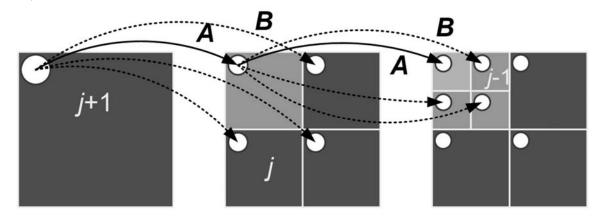
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 116

♠ 離散小波分解示意圖

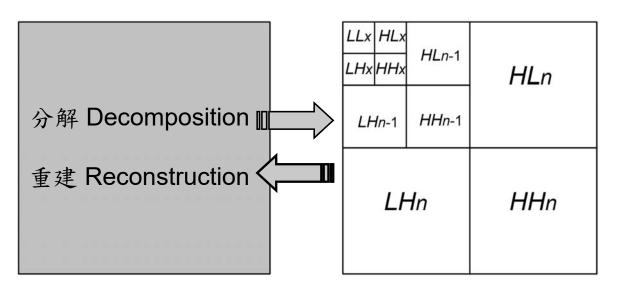


二維函數



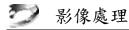
#### 影像處理

#### ♣ 二維小波分解



原始影像

一個三層二元分解次頻帶的 架構圖,其中x=n-2.



5. 影像轉換

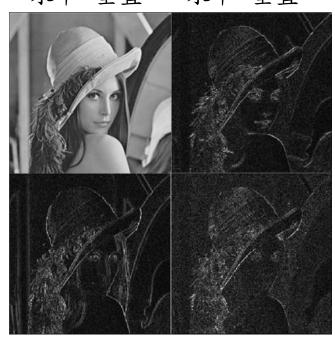
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 118

 ◆ 以 Lena 影像為範例,做了3層二元分解 (dyadic decomposition)的 DWT 架構,其中包含10個次頻帶。

 核平+垂直+ 水平+垂直-水平-垂直+ 水平-垂直-水平-垂直-水平-垂直-水平-垂直-水平-垂直-水平-垂直-水平-垂直-水平-垂直-水平-垂直-



原始的 Lena 影像。



三階 DWT 分解影像。

#### 直接二維小波轉換

🏶 二維 Harr 基底函數

一次 2x2 範圍的四元素轉換

	•	•	
••	<i>C</i> <sub>1</sub>	$c_2$	
••	$C_3$	$C_4$	

四元素表示成一個向量 $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4]^T$ . 則二維小波 分解可表示成 d = Hc, 其中 H 是二維 Harr 轉換矩 陣,d是分解後的向量

$$\mathbf{d} = \mathbf{H} \mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

反轉換矩陣  $H^{-1} = H$ .



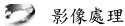
影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 120

♣ 上述的 4×4 矩陣 H 可以由一維 Haar 2×2 轉換矩陣 的二次式獲得

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{2\times2} \, \mathbf{c}_{2\times2} \, \mathbf{H}_{2\times2}^T &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c_1 + c_3}{\sqrt{2}} & \frac{c_2 + c_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_1 - c_3}{\sqrt{2}} & \frac{c_2 - c_4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{2} & \frac{c_1 - c_2 + c_3 - c_4}{2} \\ \frac{c_1 + c_2 - c_3 - c_4}{2} & \frac{c_1 - c_2 - c_3 + c_4}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{H}_{4\times4} \, \mathbf{c}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



- ♣ 一維 Daubechies D<sub>4</sub> 小波轉換矩陣
  - 一維的 Daubechies  $D_4$  小波轉換可以表示成

$$\mathbf{D_4} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{low f. of } c_2 \& c_3 \\ \text{low f. of } c_4 \& c_5 \\ \text{high f. of } c_2 \& c_3 \\ \text{high f. of } c_4 \& c_5 \end{bmatrix}$$
其中  $\mathbf{D_4}$  轉換矩陣是  $4 \times 6$  矩陣 
$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \Big[ 1 + \sqrt{3} \ 3 + \sqrt{3} \ 3 - \sqrt{3} \ 1 - \sqrt{3} \Big]$$
 and   
 $H_1 H_2 H_3 H_4 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \Big[ 1 - \sqrt{3} \ -3 + \sqrt{3} \ 3 + \sqrt{3} \ -1 - \sqrt{3} \Big]$ 



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 122

反轉換的重建表示成



上述公式可以用下列公式驗證

$$\begin{aligned} d_2 &= (1+\sqrt{3})c_1 + (3+\sqrt{3})c_2 + (3-\sqrt{3})c_3 + (1-\sqrt{3})c_4 \\ d_3 &= (1+\sqrt{3})c_3 + (3+\sqrt{3})c_4 + (3-\sqrt{3})c_5 + (1-\sqrt{3})c_6 \\ d_4 &= (1-\sqrt{3})c_1 + (-3+\sqrt{3})c_2 + (3+\sqrt{3})c_3 + (-1-\sqrt{3})c_4 \\ d_5 &= (1-\sqrt{3})c_3 + (-3+\sqrt{3})c_4 + (3+\sqrt{3})c_5 + (-1-\sqrt{3})c_6 \end{aligned}$$

從係數 di's 重建回來的原始資料為

$$c_{1} = (1+\sqrt{3})d_{2} + (1-\sqrt{3})d_{4}$$

$$c_{2} = (3+\sqrt{3})d_{2} + (-3-\sqrt{3})d_{4}$$

$$c_{3} = (3-\sqrt{3})d_{2} + (1+\sqrt{3})d_{3} + (3+\sqrt{3})d_{4} + (1-\sqrt{3})d_{5}$$

$$c_{4} = (1-\sqrt{3})d_{2} + (3+\sqrt{3})d_{3} + (-1+\sqrt{3})d_{4} + (-3-\sqrt{3})d_{5}$$

$$c_{5} = (3-\sqrt{3})d_{3} + (3+\sqrt{3})d_{5}$$

$$c_{6} = (1-\sqrt{3})d_{3} + (-1-\sqrt{3})d_{5}$$



影像處理

5. 影像轉換

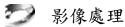
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 124

## ♣ 二維 Daubechies D<sub>4</sub> 轉換

二維的 Daubechies  $D_4$  小波轉換可以由一維 Daubechies  $D_4$  轉換矩陣的二次式獲得

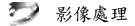
$$(\boldsymbol{D}_4)_{4\times 6} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} (\boldsymbol{D}_4^T)_{6\times 4} = \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix}$$

重建的程序可以表示成



# **5.6** 主成份分析法 (The principal component analysis)

- 主成份分析法是1901年由英國人 Karl Pearson 初創理論;1933年美國教授 Harold Hotelling 另行推導公式;1947年芬蘭人 Kari Karhunen 及1955年以色列人 Michel Loève 各別整理出書暢導該技術。
- 主成份分析法 (principal component analysis, PCA)
  - = Hotelling 轉換 (Hotelling transform)
  - = 離散 Karhunen-Loève 轉換 (KL transform, KLT)
- ◆ 主成份分析法是基於統計特性所發展出來的高維度 (high-dimensional) 資料分析技術。



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 126

- ◆ 主成份分析法是將一組有相關的資料線性組合成另一組資料;組合轉換後的資料彼此間沒有相關性 (correlation),而且能排列出轉換後資料的重要性。
- 以資料的分佈廣度 (distinction) 表示資料的重要性,資料分佈越廣,區別能力愈強、愈可靠,也就愈重要。所以若要縮減資料量的話,則可從最不重要的資料逐一或一次去掉,如此就可以達到最小誤差的資料縮減目的。
- 主成份分析法可應用於 資料縮減 (reduction)、特徵擷取 (extraction)、圖形 方向分析 (direction analysis)、分類 (taxonomy)、 生物/醫學/農業/財務/經濟/工程/.. 等統計分析



#### 線性資料

1 2 3 4 5	3
-----------	---

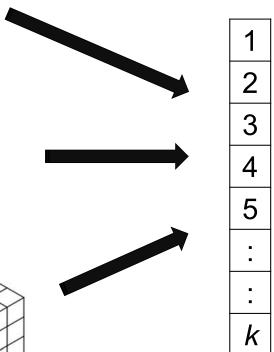
## 平面資料 (m x n)

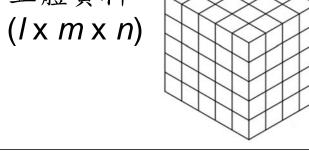
1	2	3	 n
<i>n</i> +1	<b>n</b> +2		2 <i>n</i>
2 <i>n</i> +1			
			mxn

立體資料



向量







影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 128

## 5.6.1 主成份分析的原理

假設有 n 個 k 維特徵向量 (feature vector) 或樣本 向量 (sample vector) 或觀察向量 (observation vector),

$$\mathbf{x}_i = [\mathbf{x}_{i1} \ \mathbf{x}_{i2} \ ... \ \mathbf{x}_{ik}]^T, i = 1, 2, ..., n.$$

其平均向量為 
$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_{i}$$

將每一個特徵向量減去平均向量正規化成  $\chi_i = \chi_i - \overline{\chi}, i = 1, 2, ..., n.$ 

n個 k維正規化向量可以組成一個 kxn 特徵矩陣

$$\mathbf{X} = [\chi_1 \ \chi_2 \ .. \ \chi_n].$$

步驟1. 求出這 n 個特徵向量的 kxk 共變異數矩陣 (covariance matrix)

$$C_{x} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X} \mathbf{X}^{T}$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_{i} - \overline{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_{i} - \overline{\mathbf{x}})^{T} = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{i} \mathbf{x}_{i}^{T} \right] - \overline{\mathbf{x}} \overline{\mathbf{x}}^{T}$$

- 步驟2. 求共變異數矩陣  $C_x$  的 k 個固有值  $\lambda_i$  及固有向量  $e_i$ , $(C_x \lambda_i I)$   $e_i = 0$ 。
- 步驟3. 將固有值依大小排序。因為共變異數矩陣是二次式 (quadratic form) 的對稱矩陣,所有固有值都大於等於 0。



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 130

步驟 4. 將所有固有向量 e; 正交化且正規化成正交且單位長度的向量 (orthonormal vector); 最後將所有正交且單位長度的固有向量 e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub>,.., e<sub>k</sub> 當作行向量,依固有值大小的次序排成一個矩陣

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1 \; \mathbf{e}_2 \; .. \; \mathbf{e}_k] \;,$$

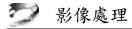
其中所有固有向量 **e**<sub>i</sub>稱為主成份 (principal component), **e**<sub>1</sub> 稱為第一主成份 (first principal component), 其他依此類推。

步驟5. 將每一個原始 K 維向量  $\mathbf{x}_i$  做轉換  $\mathbf{x}_{i1}$   $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}^T (\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})$   $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i1} \\ \mathbf{x}_{i2} \\ \mathbf{x}_{i3} \\ \vdots \end{bmatrix}$   $\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i1} \\ \mathbf{y}_{i2} \\ \mathbf{y}_{i3} \\ \vdots \end{bmatrix}$ 

- ♣ 上述轉換的意義是將原始向量  $X_i$  位移到所有向量的中心點,再正交投影到各個固有向量  $e_j$  上計算投影分量,j=1,2,...,k,。
- 每一個  $\mathbf{X}_{j}$  向量都是所有基本向量  $\mathbf{I}_{j}$  的線性組合,其中  $\mathbf{I}_{j}$  是笛卡兒直角座標系統 (Cartesian coordinate system) 的第  $\mathbf{J}$  主軸;  $\mathbf{I} = [\mathbf{I}_{1} \ \mathbf{I}_{2} \ .. \ \mathbf{I}_{k}]^{T}$ 。每一個  $\mathbf{Y}_{i}$  向量都是所有固有向量  $\mathbf{e}_{i}$  的線性組合。
- ◆ A 矩陣的行向量是單位正交向量 (orthonormal vector), A<sup>T</sup> = A<sup>-1</sup>。所以做反轉換只需要轉置矩陣即可,

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A} \ \mathbf{y}_i + \overline{\mathbf{x}} \ .$$

₩ 其實上兩個轉換的數學意義都是在做座標轉換而已。



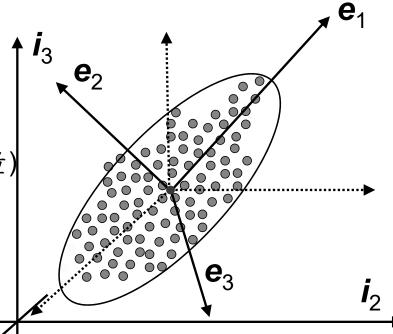
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 132

♥ 以三維特徵向量 (k=3) 為例

#### 步驟:

- 0. 減去平均向量
- 1. 計算共變異數矩陣 (了解資料分佈廣度)
- 計算固有值與固有向量)
   (了解資料分佈最廣的方向)
- 3. 分佈廣度排序
- 4. 正規化固有向量長度
- 5. 轉換到新座標



- ♣ 上述轉換後的 Y;向量具有一些特性,
- 特性 1. 所有  $y_i$  向量的平均向量等於 0 向量,

$$\overline{\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}\} = E\{\mathbf{A}^T (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})\} = \mathbf{A}^T E\{\mathbf{x}\} - \mathbf{A}^T \overline{\mathbf{x}} = 0.$$

特性 2.  $y_i$  向量的共變異數矩陣與  $x_i$  向量的共變異數矩陣有對角線化 (diagonalization) 的關係,

$$C_{y} = E\{A^{T}(x - \overline{x})(A^{T}(x - \overline{x}))^{T}\}$$

$$= E\{A^{T}(x - \overline{x})(x - \overline{x})^{T}A\}$$

$$= A^{T}E\{(x - \overline{x})(x - \overline{x})^{T}\}A$$

$$= A^{T}C_{x}A.$$



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 134

特性  $3. y_i$  向量的共變異數矩陣是一個對角線 (diagonal)

矩陣 
$$\mathbf{C}_{y} = \begin{bmatrix} \lambda_{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{k} \end{bmatrix}$$

- 特性 4. 原始 n 個  $x_i$  向量的總變異數 (total variance) 等於共變異數矩陣  $C_x$  的對角線元素的總和,也等於所有固有值的總和,也就是共變異數矩陣  $C_y$  的對角線元素的總和,  $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = c_{11} + c_{22} + ... + c_{kk} = tr A$ .
- 第 3 及 4 特性最重要。第 3 特性表示所有  $y_i$  向量中的所有變數 $y_{ij}$ , j = 1, ..., k, 彼此無關 (uncorrelated);第 4 特性表示各變數  $y_{ij}$ , j = 1, 2, ..., k, 的分佈廣度比值即為  $λ_1:λ_2:...:λ_k$ 。

# 5.6.2 資料壓縮 (Data compression - 1)

- **\$** 假設有 M 張大小為  $n \times n$  的影像  $f_1(x,y), f_2(x,y), ..., f_M(x,y)$
- ◆ 每張影像表示成一個 n² 維的向量 X;,

$$\mathbf{x}_{i} = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \cdot \\ x_{ij} \\ \cdot \\ x_{in^{2}} \end{bmatrix}$$

其中 $X_{ij}$ 表示 $X_i$ 向量的第j個元素。



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 136

\* X's 向量的共變異數矩陣  $C_X$  是一個  $n^2 \times n^2$  對稱矩陣。求  $n^2$  個固有向量  $e_i$  做成轉換矩陣,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ .. \ \mathbf{e}_k] \circ$$

每一個原始  $n^2$  維向量  $X_i$  的轉換為

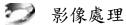
$$y_i = A^T (x_i - \overline{x})$$

 反轉換為
  $A_{kxn^2}^T = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & ... & e_{1n^2} \\ e_{21} & e_{22} & ... & e_{2n^2} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & ... & e_{kn^2} \end{bmatrix} \} k$ 

◆ 上述轉換與反轉換並沒有達到資料縮減的目的。 若只使用分佈最廣的 k 個方向 (固有向量) 做轉換

$$\mathbf{y}_{k\times 1} = (\mathbf{A}^T)_{k\times n^2} (\mathbf{x}_{n^2\times 1} - \overline{\mathbf{x}})$$
,

則轉換後的 y 向量只保留最重要的 k 維資料,如此既有達成資料縮減的目的。



- 這個轉換的意義相當於保留最重要的 k個 y 資料,把 (n²-k) 個不重要的 y 資料去掉。作法上只是把原來 n²×n² 轉換矩陣 AT 變成只保留最上面 k列,也就是將最大的 k個固有值所對應的固有向量保留在 A 矩陣中,最小的 (n²-k) 個固有值所對應的固有向量去掉。如此,轉換出來的 y 向量維度只有 k,也就是相當於資料量變成原來的 k/n²倍。
- 要從  $\mathbf{y}$  向量重建回  $\mathbf{x}$  向量,只要執行  $\hat{\mathbf{x}}_{n^2 \times 1} = \mathbf{A}_{n^2 \times k} \mathbf{y}_{k \times 1} + \overline{\mathbf{x}}_{n^2 \times 1}$  就可以。

> 影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 138

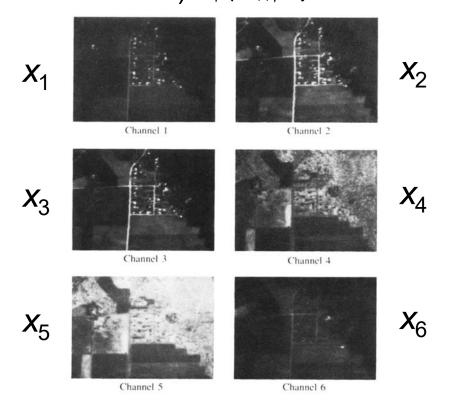
◆ 資料保留愈少,資訊保留量必然愈少。上述的 是從原來 n 維的 X 向量轉成只剩 K 維的向量;因 此資訊變少,其產生的誤差為

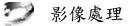
$$R = \sum_{j=1}^{n^2} \lambda_j - \sum_{j=1}^k \lambda_j = \sum_{j=k+1}^{n^2} \lambda_j$$
.  
全部資訊 保留的資訊 少掉的資訊

◆ 我們知道固有值的關係 λ<sub>1</sub>≥λ<sub>2</sub>≥...≥λ<sub>n²</sub>, R相當於是最小的 (n²-k) 個固有值的總和;所以在保留 k 個資料的情形下,誤差 R 是最小的,也就是主成份分析法具有最小平方誤差估計的意義。

# 5.6.3 資料壓縮 (Data compression - 2)

♥ 以下六張影像是由一個六頻段多頻譜掃描儀 (6-band multispectral scanner) 所拍攝的

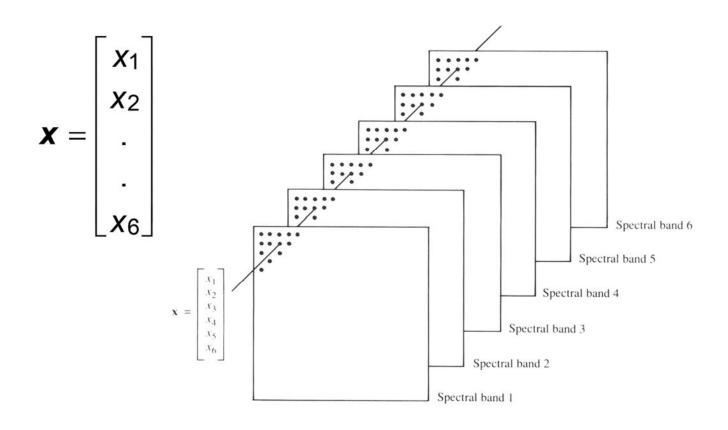




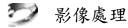
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 140

★ 六張影像中的每一個相同位置像素之灰階形成一個 6 維向量

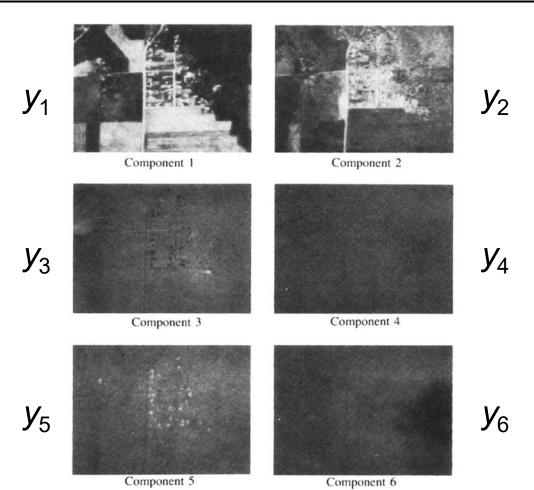


- 與前一節的方法相同,用6維的向量產生一個 6×6 共變異數矩陣 C<sub>x</sub>。
- ◆ 令  $e_i$ 與  $\lambda_i$ , i=1,2,... 6 為  $C_x$  的固有向量及固有值,假設  $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_6$ ;並建立出一個單範正交的固有向量矩陣 (orthonormal eigenvector matrix) A。
- 以正規化轉換  $y = A(x-m_x)$  ,將向量 x 轉換成 y
- 再將所有的6維 y's 向量拆解回影像形式,則重建的影像成下頁圖



5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 142



#### >> 影像處理

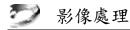
# 5.6.4 影像旋轉的應用

(Application to image rotation)

- ◆ 以影像中物件像素的座標值做為特徵向量,可以分析該物件的方向。
- ◆ 令 X 為像素二維座標,求出物件上所有像素的  $2\times2$  共變異數矩陣  $C_X$ 。  $C_X$  矩陣的較大固有值所對應的固有向量是物件分佈最廣的方向。因此將固有向量做成轉換矩陣  $A^T$ ,則轉換  $Y = A^TX$ ,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

相當於將向量X正交投影到兩個固有向量上,變成固有向量所定義的座標系統中的表示式。



5. 影像轉換

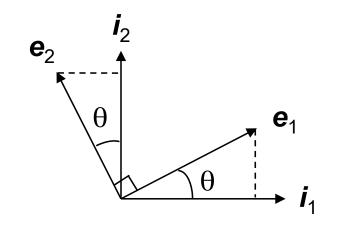
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 144

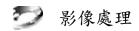
● 上述轉換相當於對固有向量座標原點做旋轉

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

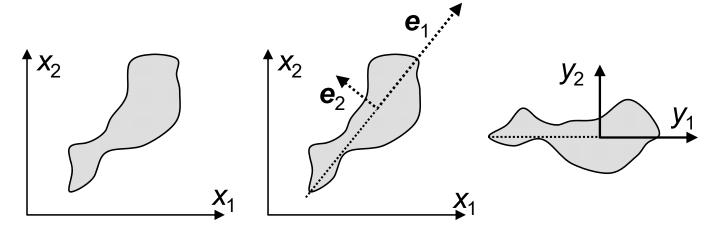
這樣的旋轉物件中心點會偏移;所以完整的旋轉應用要先將旋轉中心移到物件的中心點。

其中 
$$\boldsymbol{m}_{x} \cong \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{x}_{i}$$





#### ₩ 旋轉範例



**e**<sub>1</sub> 是相對應較大固有值的固有向量,**e**<sub>2</sub> 是相對應較小固有值的固有向量;**e**<sub>1</sub> 與**e**<sub>2</sub> 彼此正交,構建成一個新的座標系統。



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 146

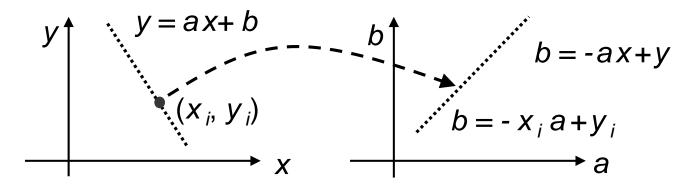
# 5.7 霍夫轉換

- 霍夫轉換 (Hough transform) 是用來偵測影像中的特定幾何結構的圖形。
- ◆ 其意義為 位置空間 (coordinate space, *CS*) ↓ 参數空間 (parameter space, *PS*).

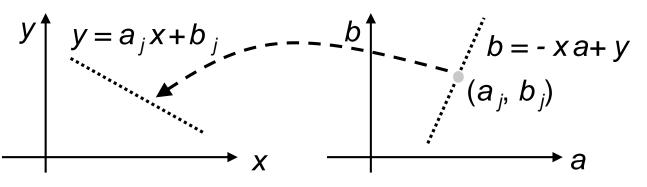
# 5.7.1 以偵測直線 y = ax + b 為例

## ● 第一個觀念 (以偵測直線 y = ax + b 為例)

位置空間中的一個點映射到參數空間中變成一條線



參數空間中的一個點也會映射到位置空間中變成一條線





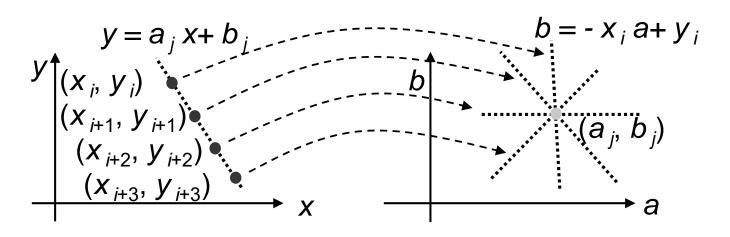
影像處理

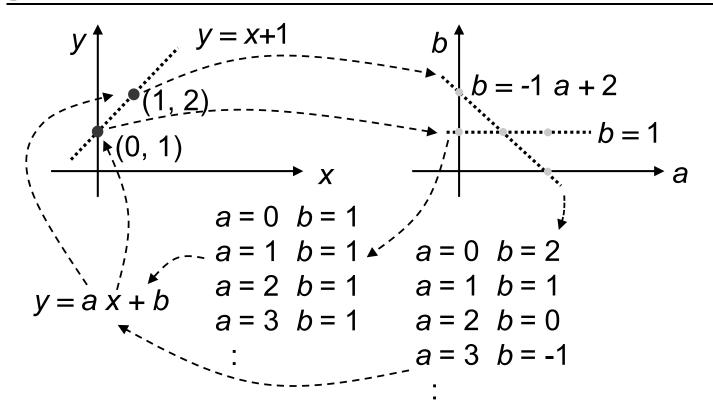
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 148

#### ✿ 第二個觀念

在位置空間中的一條線是由 n 個點所構成的,每一個點映射到參數空間都會變成一條線,而在參數空間中的這 n 條線一定會交集於一個點





✿ 在位置空間中共線的點對映到參數空間中的線一 定有共同交點。因此在參數空間中找較多線的交 點,就可以找到位置空間中的圖形參數。



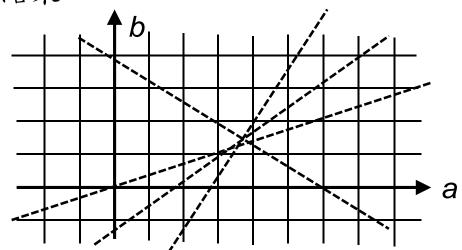
>> 影像處理

5. 影像轉換

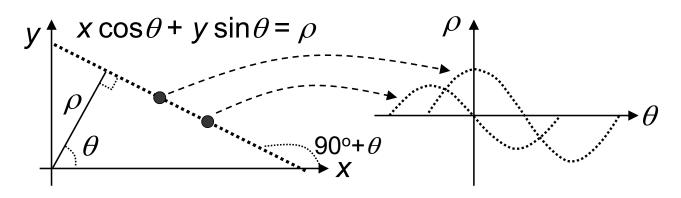
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 150

- ♥ 實做上會碰到的問題
- 1. 精密度 (precision) 與準確度 (accuracy)

參數空間中的直線因整數座標值的關係而不會交 於一點;因此為了容忍這樣的誤差,我們在參數 空間上劃分較粗的格子,落在同一格子的交叉點 就算是相同位置的交叉點。這樣的做法帶來較不 準確的結果。



- 2. 使用 y=ax+b代表一直線,在轉換到參數空間時會 遇到一個問題;當一直線近似垂直時,其斜率會趨 近無限大,因此要改用極座標表示式。
- 令斜率  $a = \sin(90^{\circ}+\theta)/\cos(90^{\circ}+\theta) = \cos\theta/(-\sin\theta)$ , 截距  $b = \rho/\sin\theta$ , 代入原公式既得 極座標 (polar coordinate system) 表示式  $x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$ ,  $-90^{\circ} \le \theta \le 90^{\circ}$ . 如此一個 (x, y) 點將會轉成一條週期性曲線  $(\rho, \theta)$  。



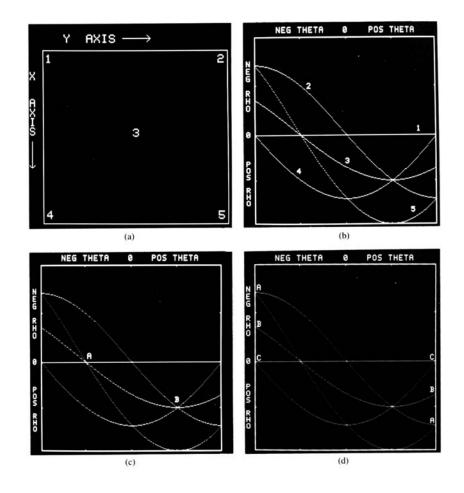
2

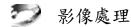
影像處理

5. 影像轉換

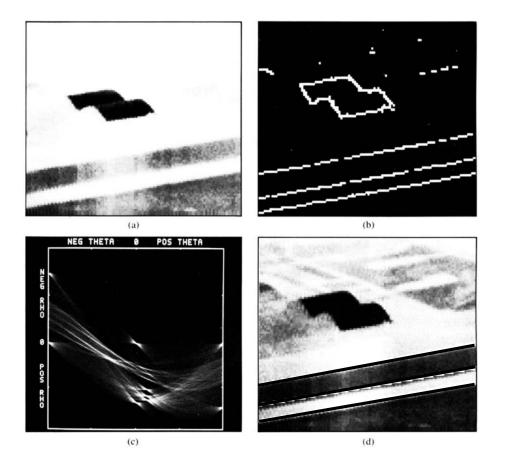
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 152







#### 真實範例





影像處理

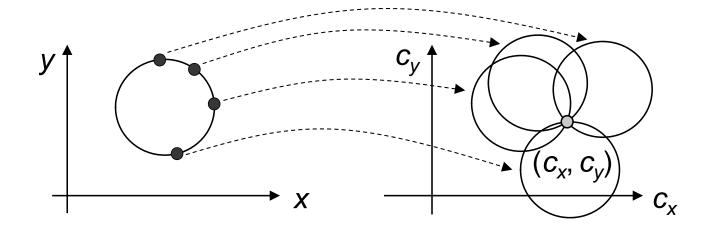
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 154

# 5.7.2 偵測圓 (circle)

● 已知半徑為 K 的圓, K = 常數

位置空間 
$$\Rightarrow$$
 參數空間 
$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = k^2 (c_x - x)^2 + (c_y - y)^2 = k^2$$



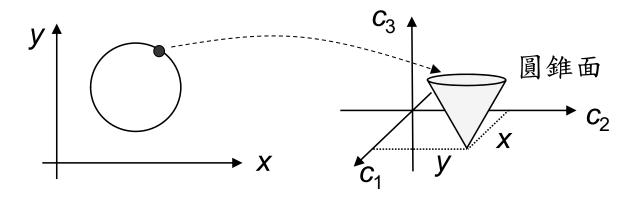
#### ♣ 未知半徑的圓

位置空間

參數空間

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = c_3^2 \quad (c_1-x)^2 + (c_2-y)^2 = c_3^2$$

問題:位置空間的一點對應到參數空間中幾個點?



Hough 轉換的複雜度與給定函數的維度與參數 有強烈的相關性。



影像處理

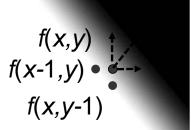
5. 影像轉換

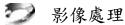
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 156

# 5.7.3 使用梯度改進霍夫轉換的效率 [Kimme et al. 1975]

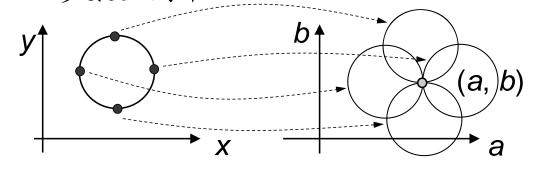
- 🏶 目的 偵測一個固定半徑 r 的圓  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .
- gradient 🏶 內容 函數 f(x,y) 在點 (x,y) 上的梯度可定義為  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ . 對於一張數位影像  $\frac{\partial f}{\partial v}$  及  $\frac{\partial f}{\partial v}$  可由

f(x,y) - f(x-1,y) 及 f(x,y) - f(x,y-1) 近似。

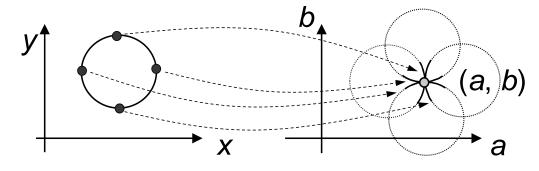




◆ 沒使用梯度時,每一個圓上點都要轉換一個圓到 ab 參數空間中



◆ 使用梯度,則每一個圓上點只要轉換一個弧線 (arc)到 ab 參數空間中即可





影像處理

5. 影像轉換

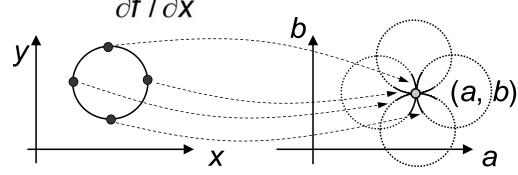
D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 158

(a, b)

**後** 後幾何觀點思考,圓上點 (x, y) 與圓心點 (a,b) 的關係可表示 為極座標關係式  $a = x - r \sin \phi$   $b = y + r \cos \phi$ , 其中  $\phi(x)$  為邊運算所獲

 $\phi = \tan^{-1}(\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x})$ 

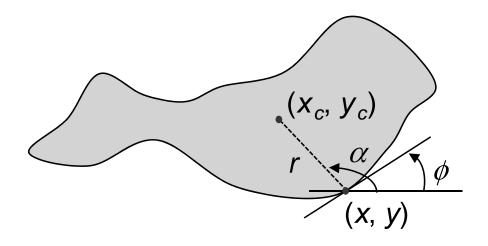
得的梯度角度



## 5.7.4 一般化的霍夫轉換

(generalized Hough transform)

- ◆ 本方法是為了偵測沒有簡單公式可描述的圖形 (no simple analytic form)
- ✿ 先假設物體在影像上的方向及大小已知)





影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 160

# 韓 建立參考表 (Reference table)

- 步驟1.在物體內選取一個參考點  $(X_c, Y_c)$ , 並畫一直線到物體的每一個邊界點 (X, Y)。
- 步驟2.計算每一邊界點的梯度方向  $\phi$ , 並將參考點定義為此方向的極座標表示式  $(r, \alpha)$ ;  $(r, \alpha)$  是邊界點與參考點的相對位置。
- 步驟3.建立一個以所有邊界點之梯度方向與參考點之 (r, α) 值的對應表格 (如下頁),以邊界點的梯度方向為索引,這個表格稱為參考表 (reference table) R。

#### R- table

邊界點的梯度方向	參考點的 (r, α) 值
$\phi_1$	$(r_{11}, \alpha_{11}), (r_{12}, \alpha_{12}), (r_{13}, \alpha_{13}),$
$\phi_2$	$(r_{21}, \alpha_{21}), (r_{22}, \alpha_{22}), (r_{23}, \alpha_{23}), \dots$
$\phi_3$	$(r_{11}, \alpha_{11}), (r_{12}, \alpha_{12}), (r_{13}, \alpha_{13}), \dots$ $(r_{21}, \alpha_{21}), (r_{22}, \alpha_{22}), (r_{23}, \alpha_{23}), \dots$ $(r_{31}, \alpha_{31}), (r_{32}, \alpha_{32}), (r_{33}, \alpha_{33}), \dots$
:	•
$\phi_n$	$(r_{n1}, \alpha_{n1}), (r_{n2}, \alpha_{n2}), (r_{n3}, \alpha_{n3}),$

影像處理

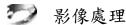
5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 162

#### ▶ 霍夫轉換程序

計算每一個邊界點(X, Y)的梯度方向 $\phi$ ,根據參考 表格,找出對應的參考點之極座標  $(r, \alpha)$ ,再將此 極座標累積到參數空間的票箱中。

- S 1. 清空所有票箱 (accumulator array) A
- S2.對於每一個邊界點(x, y)做
  - S2.1. 計算梯度角度  $\phi$
  - S2.2. 查參考表找出  $\phi$ 所對應的  $(r, \alpha)$ ,計算  $X_c = X + r(\phi) \cos(\alpha(\phi))$  $y_c = y + r(\phi) \sin(\alpha(\phi))$
  - S2.3. 累加一票到  $(x_c, y_c)$  票箱中
- S3. 尋找 A 票箱矩陣中的最多票數的位置  $(X_m, Y_m)$



⇒ 若物體大小(S)及旋轉(θ)因素也考慮到參數空間時(也就是物體的大小及旋轉方向都是未知),則累加陣列需延伸成為四維參數空間

 $(x_{Cmin}: x_{Cmax}, y_{Cmin}: y_{Cmax}, s_{min}: s_{max}, \theta_{min}: \theta_{max})$ 

而上一頁的演算法只要修改步驟 2.2, 2.3 即可

S2.2. 查參考表找出 Ø所對應的極座標,

迴圈 
$$S = S_1, S_2, ..., S_n$$
  
迴圈  $\theta = \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$   
 $X_c = X + S r(\phi) \cos(\alpha(\phi)) + \theta$   
 $Y_c = Y + S r(\phi) \sin(\alpha(\phi)) + \theta$ 

S 2.3. 累加一票到  $(x_c, y_c)$  票箱中  $A(x_c, y_c, s, \theta) = A(x_c, y_c, s, \theta) + 1.$ 



影像處理

5. 影像轉換

D.-C. Tseng of IPVR Lab. in NCU 164

## 5.7.5 討論

- 1. 霍夫轉換十分耗時。
- 2. 霍夫轉換並不精確,但可做特定圖形上的點分類。
- 3. 霍夫轉換可處理斷線及曲線,但不知是否有斷線。
- 4. 霍夫轉換可偵測實線或曲線的長度。
- 霍夫轉換可偵測一個具有簡單公式表示的圖形, 但一般化的霍夫轉換可偵測任意外形的圖形。
- 6. 霍夫轉換可偵測橢圓形的位置及大小,但不知道 橢圓的方向。

