

# Теоретическая часть

Анализ и формулы для основной части были представлены в основной части работы. Здесь представляю лишь формулы для сборки матрицы и вектора правой части линеаризованной по методу Ньютона

# Исследование

Ниже представлены таблицы с характеристиками сходимости количества узлов и количества итераций по нелинейности на всех временных слоях

## Метод простой итерации

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^{n+1} - u(x,t)^n _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^{n+1} - u(x,t)^n _{L_2}}{ u(x,t)^n - u(x,t)^{n-1} _{L_2}}\right)$
1	11	119	9.155494e-08	0
2	21	208	3.715434e-08	1.301107e+00
3	41	353	1.635214e-07	-2.137877e+00
4	81	564	5.153245e-08	1.665926e+00
5	161	804	2.625490e-07	-2.349034e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 2x^2 + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^{n+1} - u(x,t)^n _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^{n+1} - u(x,t)^n _{L_2}}{ u(x,t)^n - u(x,t)^{n-1} _{L_2}}\right)$
1	11	103	3.890227e-03	0
2	21	183	9.798925e-04	1.989159e+00
3	41	323	2.454316e-04	1.997303e+00
4	81	547	6.154468e-05	1.995615e+00
5	161	803	1.507836e-05	2.029155e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = x^3 + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^{n+1} - u(x,t)^n _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^{n+1} - u(x,t)^n _{L_2}}{ u(x,t)^n - u(x,t)^{n-1} _{L_2}}\right)$
1	11	71	3.912039e-03	0
2	21	141	9.741860e-04	2.005651e+00

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}^2}\right)$
3	41	241	2.433090e-04	2.001408e+00
4	81	402	6.065667e-05	2.004051e+00
5	161	742	1.486094e-05	2.029141e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = x^4 + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}^2}\right)$
1	11	80	1.214100e-02	0
2	21	141	2.986090e-03	2.023558e+00
3	41	242	7.433376e-04	2.006168e+00
4	81	481	1.856697e-04	2.001280e+00
5	161	802	4.631607e-05	2.003153e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}^2}\right)$
1	11	79	1.066488e-03	0
2	21	143	2.669859e-04	1.998032e+00
3	41	243	6.679561e-05	1.998938e+00
4	81	403	1.669873e-05	2.000015e+00
5	161	643	4.054345e-06	2.042198e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}^2}\right)$
1	11	119	9.155494e-08	0
2	21	208	3.715434e-08	1.301107e+00
3	41	353	1.635214e-07	-2.137877e+00
4	81	564	5.153245e-08	1.665926e+00
5	161	804	2.625490e-07	-2.349034e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t^2$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}\right)$
1	11	121	1.538674e-03	0
2	21	204	7.837862e-04	9.731552e-01
3	41	347	3.937348e-04	9.932359e-01
4	81	539	1.971766e-04	9.977355e-01
5	161	818	9.845802e-05	1.001908e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t^3$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}\right)$
1	11	119	4.411252e-03	0
2	21	203	2.294004e-03	9.433204e-01
3	41	330	1.164032e-03	9.787372e-01
4	81	508	5.857115e-04	9.908684e-01
5	161	782	2.934329e-04	9.971598e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + e^t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}\right)$
1	11	97	6.858606e-04	0
2	21	177	3.524306e-04	9.605760e-01
3	41	307	1.781518e-04	9.842320e-01
4	81	539	8.943058e-05	9.942671e-01
5	161	804	4.462511e-05	1.002913e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + \sin(t)$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}}\right)$
1	11	118	6.966347e-04	0
2	21	207	3.596696e-04	9.537299e-01
3	41	346	1.816208e-04	9.857426e-01
4	81	557	9.154871e-05	9.883183e-01
5	161	804	4.584023e-05	9.979254e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + t^2$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	82	1.316144e-03	0
2	21	142	5.685822e-04	1.210876e+00
3	41	241	2.838319e-04	1.002332e+00
4	81	399	1.447834e-04	9.711405e-01
5	161	702	7.345375e-05	9.789881e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + t^3$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	81	3.215417e-03	0
2	21	138	1.677325e-03	9.388430e-01
3	41	243	8.634555e-04	9.579689e-01
4	81	404	4.386762e-04	9.769653e-01
5	161	665	2.212058e-04	9.877677e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + e^t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	70	1.340520e-03	0
2	21	127	4.524199e-04	1.567058e+00
3	41	230	1.830342e-04	1.305549e+00
4	81	403	8.350207e-05	1.132229e+00
5	161	643	4.048926e-05	1.044273e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^t + \sin(t)$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	79	1.393894e-03	0
2	21	141	4.560330e-04	1.611911e+00
3	41	243	1.756016e-04	1.376832e+00
4	81	403	7.696543e-05	1.190023e+00

N	Nodes	Iteration	$\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }\right)$
5	161	643	3.599562e-05	1.096389e+00

Метод Ньютона

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t$

N	Nodes	Iteration	$\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }\right)$
1	11	16	1.174797e-08	0
2	21	25	1.939046e-08	-7.229351e-01
3	41	44	3.751197e-09	2.369924e+00
4	81	83	1.155411e-09	1.698945e+00
5	161	163	1.148152e-09	9.092376e-03

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 2x^2 + t$

N	Nodes	Iteration	$\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }\right)$
1	11	32	3.890265e-03	0
2	21	43	9.799256e-04	1.989124e+00
3	41	83	2.454131e-04	1.997460e+00
4	81	162	6.137994e-05	1.999373e+00
5	161	267	1.889803e-05	1.699531e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = x^3 + t$

N	Nodes	Iteration	$\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t) }{ u(x,t) }\right)$
1	11	31	3.912003e-03	0
2	21	42	9.741506e-04	2.005691e+00
3	41	82	2.433092e-04	2.001354e+00
4	81	162	6.082387e-05	2.000081e+00
5	161	264	1.892459e-05	1.684376e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = x^4 + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	31	1.214099e-02	0
2	21	42	2.986059e-03	2.023572e+00
3	41	82	7.434259e-04	2.005982e+00
4	81	162	1.856790e-04	2.001378e+00
5	161	322	4.640915e-05	2.000330e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	24	1.066484e-03	0
2	21	43	2.669836e-04	1.998040e+00
3	41	83	6.677314e-05	1.999411e+00
4	81	162	1.670122e-05	1.999314e+00
5	161	163	4.377704e-06	1.931707e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	16	1.174797e-08	0
2	21	25	1.939046e-08	-7.229351e-01
3	41	44	3.751197e-09	2.369924e+00
4	81	83	1.155411e-09	1.698945e+00
5	161	163	1.148152e-09	9.092376e-03

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t^2$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	24	1.538635e-03	0
2	21	44	7.838912e-04	9.729261e-01
3	41	51	3.937405e-04	9.934081e-01
4	81	83	1.970618e-04	9.985968e-01
5	161	163	9.856593e-05	9.994875e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + t^3$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	24	4.411195e-03	0
2	21	43	2.294089e-03	9.432482e-01
3	41	69	1.164039e-03	9.787823e-01
4	81	83	5.855382e-04	9.913037e-01
5	161	163	2.935896e-04	9.959625e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + e^t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	26	6.858642e-04	0
2	21	28	3.523188e-04	9.610413e-01
3	41	45	1.780884e-04	9.842884e-01
4	81	84	8.948248e-05	9.929160e-01
5	161	163	4.485540e-05	9.963234e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = 3x + \sin(t)$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	25	6.965193e-04	0
2	21	40	3.596517e-04	9.535628e-01
3	41	44	1.817500e-04	9.846449e-01
4	81	83	9.126313e-05	9.938517e-01
5	161	163	4.570490e-05	9.976834e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + t^2$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	24	1.316134e-03	0
2	21	43	5.685916e-04	1.210841e+00
3	41	81	2.839424e-04	1.001795e+00
4	81	142	1.447898e-04	9.716380e-01

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
5	161	163	7.143677e-05	1.019221e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + t^3$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	26	3.215404e-03	0
2	21	40	1.677347e-03	9.388190e-01
3	41	75	8.634902e-04	9.579291e-01
4	81	129	4.387277e-04	9.768541e-01
5	161	192	2.212002e-04	9.879729e-01

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^x + e^t$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	25	1.340536e-03	0
2	21	44	4.524343e-04	1.567030e+00
3	41	83	1.830826e-04	1.305214e+00
4	81	162	8.352043e-05	1.132293e+00
5	161	163	3.925923e-05	1.089097e+00

$\lambda(u) = u^2 + 1$   $u(x,t) = e^t + \sin(t)$

N	Nodes	Iteration	$ u(x,t)^* - u(x,t) _{L_2}$	$\log\left(\frac{ u(x,t)^* - u(x,t)_h _{L_2}}{ u(x,t)^* - u(x,t)_{\frac{h}{2}} _{L_2}}\right)$
1	11	24	1.393889e-03	0
2	21	43	4.559543e-04	1.612154e+00
3	41	83	1.755613e-04	1.376914e+00
4	81	156	7.752160e-05	1.179305e+00
5	161	163	3.641089e-05	1.090229e+00