

## АНАЛИЗ АДАПТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ В ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ШУМОВ

О. А. Степанов, Цин Лян

*Представлены постановка и общее решение задачи адаптивной фильтрации, сформулированной в рамках байесовского подхода и учитывающей априорную неопределенность о характеристиках порождающих и измерительных шумов. Приведен обзор субоптимальных адаптивных алгоритмов фильтрации в линейной стационарной задаче при неизвестных характеристиках порождающих и измерительных шумов. Проанализированы их основные особенности и взаимосвязь с оптимальным алгоритмом. Обсуждены условия, при которых субоптимальные алгоритмы обеспечивают точность, близкую к точности оптимального алгоритма.*

*Ключевые слова:* адаптивный фильтр, неизвестные характеристики шумов, оптимальные и субоптимальные алгоритмы.

**Введение.** При обработке избыточной измерительной информации широкое применение получили алгоритмы калмановской фильтрации, разработка которых проводится в рамках стохастического подхода в предположении случайного характера оцениваемых процессов и ошибок измерения [1 – 9]. При этом нередко решаемые задачи носят стационарный характер, что существенно упрощает проектирование используемых алгоритмов фильтрации [10 – 12]. Однако при реализации алгоритмов необходима информация о математических моделях для оцениваемого вектора состояния и ошибок измерения, в частности, априорная информация о порождающих и измерительных шумах. Погрешности в задании модели приводят к несовпадению вырабатываемой в алгоритме характеристики точности в виде расчетной матрицы ковариаций с ее действительным значением, что в конечном счете может послужить причиной расходимости алгоритмов [13, 14]. Для преодоления этой проблемы существуют два основных направления. Одно из них связано с разработкой так называемых робастных алгоритмов, т.е. алгоритмов, которые мало чувствительны к отличию используемых характеристик от их действительных значений [15 – 19]. Другое направление связано с разработкой адаптивных алгоритмов, в которых неизвестные параметры уточняются непосредственно в процессе решения задачи фильтрации [20 – 31]. В последнее время адаптивный подход активно развивается применительно к задачам обработки навигационной информации [32 – 36]. В настоящей работе анализируются особенности построения адаптивных алгоритмов для специального класса задач дискретной стационарной фильтрации, в условиях когда неопределенность связана с неточно известными матрицами ковариаций порождающих и измерительных

шумов. При этом предполагается, что существует установившийся режим. В работе в рамках байесовского подхода формулируется постановка и предлагается общий алгоритм решения оптимальной дискретной задачи стационарной фильтрации при неточно известных матрицах ковариаций порождающих и измерительных шумов. Обсуждаются различные субоптимальные алгоритмы, основанные на анализе невязки измерения, и устанавливается их взаимосвязь с оптимальным алгоритмом.

**Постановка и общее решение задачи адаптивной фильтрации в рамках байесовского подхода.** Следуя общей постановке задачи оценивания случайных последовательностей в рамках байесовского подхода в условиях априорной неопределенности, введем два подвектора. Один подвектор  $x_i$  будет использован для описания исследуемого процесса во временной области с помощью формирующего фильтра, заданного с точностью до неизвестных параметров, а второй  $\theta_i$  – для описания неизвестных параметров. В этом случае можно сформулировать следующую интересующую нас задачу нелинейной фильтрации: оценить составной вектор состояния  $\tilde{x}_i$ , включающий два подвектора  $\tilde{x}_i^T = \left( \begin{pmatrix} x_i \end{pmatrix}^T, (\theta_i)^T \right)$  размерностей  $n_1$  и  $n_2$ , описываемый как [32 – 36]

$$\begin{aligned} x_i &= \Phi x_{i-1} + \Gamma(\theta_i) w_i, \\ \theta_i &= \theta_{i-1} = \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

по  $m$ -мерным измерениям вида

$$y_i = Hx_i + \Psi(\theta_i) v_i, \quad (2)$$

где  $\Phi$ ,  $H$  – известные матрицы соответствующей размерности;  $\Gamma(\theta_i)$ ,  $\Psi(\theta_i)$  – матрицы, элементы которых в общем случае нелинейным образом зависят от вектора неизвестных параметров  $\theta$ ;  $\theta$  – случайный вектор с известной функцией плотности распределения  $f(\theta)$ ;  $w_i$  и  $v_i$  – последовательности порождающих шумов и ошибок измерений, представляющие собой дискретные, центрированные белые шумы с единичными ковариационными матрицами. Предполагается, что векторы  $x_0, w_i, v_i$  независимы между собой и друг с другом и, кроме этого, являются гауссовскими.

Отличительная особенность сформулированной задачи заключается в ее нелинейном характере. Заметим, что в настоящей работе наибольший интерес представляет собой вектор  $\theta$ . В рамках байесовского подхода могут быть использованы различные функции потерь [37]. Так, использование квадратичной функции потерь порождает оптимальные в среднеквад-

ратическом смысле оценки. Выражения для этих оценок и соответствующих им матриц ковариаций в этом случае находятся с помощью следующих соотношений [36]:

$$\hat{\theta}_i(Y_i) = \int \theta f(\theta/Y_i) d\theta, \quad (3)$$

$$P_i^\theta(Y_i) = \int (\theta - \hat{\theta}_i)(\theta - \hat{\theta}_i)^T f(\theta/Y_i) d\theta, \quad (4)$$

$$M_{f(\theta, Y_i)} \{(\theta - \hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})^T\} = \iint (\theta - \hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})^T f(\theta, Y_i) d\theta dY_i, \quad (5)$$

где  $f(\theta, Y_i)$  – совместная ФПРВ для  $\theta$  и  $Y_i = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_i^T]^T$ , а  $f(\theta/Y_i)$ ; апостериорная плотность для вектора  $\theta$ . Интегралы здесь предполагаются многократными по соответствующим переменным с бесконечными пределами.

Как следует из представленных выражений, для нахождения оценки требуется знание апостериорной плотности  $f(\theta/Y_i)$ , отыскание которой и составляет суть проблемы. Более того, располагая  $f(\theta/Y_i)$ , можно найти и оценки, соответствующие другим нередко используемым при решении прикладных задач в рамках байесовского подхода функциям потерь. Так, например, при простой функции потерь оценка отыскивается как максимум апостериорной плотности, т.е. [37]

$$\hat{\theta}^{MAPI} = \arg_{\theta} f(\theta/Y_i). \quad (6)$$

В рассматриваемой задаче для плотности  $f(\theta/Y_i)$  справедливо следующее представление:

$$f(\theta/Y_i) = \frac{f(\theta)f(Y_i/\theta)}{\int f(\theta)f(Y_i/\theta)d\theta}, \quad (7)$$

где  $f(Y_i/\theta)$  – функция правдоподобия. Для получения упомянутых алгоритмов может быть использована аппроксимация для априорной плотности  $f(\theta)$  в виде [20, 28 – 36]

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^M \mu_0^j \delta(\theta - \theta^j), \quad \mu_0^j = \frac{f(\theta = \theta^j)}{\sum_{j=1}^M f(\theta = \theta^j)}, \quad (8)$$

где  $\theta^j$  – набор возможных значений параметров,  $j=1, 2, \dots, M$ . Подставляя (8) в (7), нетрудно для апостериорной плотности  $f(\theta/Y_i)$  получить представление

$$f(\theta/Y_i) = \sum_{j=1}^M \mu_i^j \delta(\theta - \theta^j), \quad \mu_i^j = \frac{\mu_0^j f(Y_i/\theta = \theta^j)}{\sum_{j=1}^M f(Y_i/\theta = \theta^j)}, \quad (9)$$

где

$$f(Y_i / \theta) = f(y_i / Y_{i-1}, \theta) f(y_{i-1} / Y_{i-2}, \theta) \dots f(y_1 / \theta). \quad (10)$$

Отличительная особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что при фиксированном значении  $\theta = \theta^j$  уравнения (1), (2) задают линейную гауссовскую задачу фильтрации, и, таким образом, плотности

$$f(y_i / Y_{i-1}, \theta = \theta^j) = N(y_i; H\hat{x}_{i/i-1}(\theta^j), L_i(\theta^j)) = N(v_i(\theta^j); 0, L_i(\theta^j)) \quad (11)$$

также будут гауссовскими. Входящие в эти плотности параметры определяют невязку измерения и ее матрицу ковариаций, т.е.

$$v_i(\theta^j) = y_i - H\hat{x}_{i/i-1}(\theta^j), \quad (12)$$

$$L_i(\theta^j) = HP_{i/i-1}^x(\theta^j)H^T + R_i(\theta^j), \quad (13)$$

которые могут быть найдены с использованием данных, получаемых с помощью банка соответствующих фильтров Калмана

$$\hat{x}_i^j = \Phi \hat{x}_{i-1}^j + K_i^j (y_i - H\Phi \hat{x}_{i-1}^j); \quad \hat{x}_{i/i-1}^j(\theta) = \Phi \hat{x}_{i-1}^j, \quad (14)$$

$$K_i^j = P_{i/i-1}^j H^T (HP_{i/i-1}^j H^T + R(\theta^j))^{-1}, \quad (15)$$

$$P_i^j = (E - K_i^j H) P_{i/i-1}^j, \quad P_{i/i-1}^j = \Phi P_{i-1}^j \Phi^T + Q(\theta^j), \quad (16)$$

где  $P_0^j = P_0$ ,  $R(\theta^j) = \Psi(\theta^j)\Psi^T(\theta^j)$ ,  $Q(\theta^j) = \Gamma(\theta^j)\Gamma^T(\theta^j)$ . Здесь верхний индекс означает, что задача линейной фильтрации решается при конкретном значении  $\theta^j$ , определяющем входящие в эти выражения матрицы.

Как следует из (10) – (11), при вычислении  $\mu_i^j$  может быть использовано выражение

$$\begin{aligned} f(Y_i / \theta) &= f(y_i / Y_{i-1}, \theta) f(y_{i-1} / Y_{i-2}, \theta) \dots f(y_1 / \theta) = \\ &= \left( \prod_{l=1}^i 1 / \sqrt{2\pi |L_l(\theta)|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^i v_l^T(\theta) (L_l(\theta))^{-1} v_l(\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (9) – (17), можно легко реализовать алгоритмы (3) – (6), к примеру, для (3), (4), можно записать [36]:

$$\hat{\theta}_i \approx \sum_{j=1}^M \mu_i^j \theta_i^j, \quad P_i^\theta \approx \sum_{j=1}^M \mu_i^j \theta_i^j (\theta_i^j)^T - \hat{\theta}_i \hat{\theta}_i^T. \quad (18)$$

Аппроксимация (8) получила наименование метода точечных масс [38]. Похожая аппроксимация для апостериорной плотности используется и в методе Монте-Карло и его разновидностях, порождающих так называемые фильтры частиц (particle filters) [39-41]. Сопоставление алгоритмов, вытекающих из метода Монте-Карло и метода точечных масс, показывает, что их свойства близки между собой при решении задачи оценивания вектора постоянных параметров. Основное достоинство метода Монте-Карло заключается в том, что с его использованием удастся оценивать погреш-

ность вычисления непосредственно в ходе вычислений [42]. Алгоритмы, вытекающие из метода точечных масс или метода Монте-Карло, можно трактовать как оптимальные алгоритмы, поскольку путем увеличения числа узлов вычислительную погрешность можно сделать сколь угодно малой. При построении соответствующих алгоритмов наибольшее распространение получили их рекуррентные варианты. В рекуррентных алгоритмах, основанных на использовании известного рекуррентного соотношения для апостериорной плотности, вычисление весов  $\mu_i^j$  осуществляется с помощью следующих рекуррентных соотношений [36]:

$$\mu_i^j = \frac{\mu_{i-1}^j \cdot f(y_i / Y_{i-1}, \theta = \theta^j)}{\sum_{j=1}^M \mu_{i-1}^j f(y_i / Y_{i-1}, \theta = \theta^j)}. \quad (19)$$

**Субоптимальные алгоритмы фильтрации.** Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые на практике упрощенные субоптимальные варианты построения адаптивных алгоритмов.

#### 1. Метод максимума правдоподобия

Один из методов, наиболее близко в идеологическом плане примыкающий к байесовским алгоритмам, является метод, основанный на максимизации функции правдоподобия (17). Методы, основанные на использовании максимума правдоподобия, сводятся к поиску экстремума условной плотности вероятности  $f(Y_i / \theta)$ . Как следует из (7), оценка, соответствующая простой функции (6), будет совпадать с оценкой, соответствующей максимуму правдоподобия, при равномерной априорной плотности распределения  $f(\theta)$ . При реализации таких алгоритмов нередко максимизацию  $f(Y_i / \theta)$  по  $\theta$  заменяют на максимизацию непосредственно по элементам матриц  $R(\theta^j) = \Psi(\theta^j)\Psi^T(\theta^j)$ ,  $Q(\theta^j) = \Gamma(\theta^j)\Gamma^T(\theta^j)$ , т.е. максимизацию  $f(Y_i / Q, R)$ . В целях упрощения и изложения зависимость  $Q$  и  $R$  от  $\theta$  не указываем. Заметим, что в ряде простейших случаев, когда в матрицах  $Q$  и  $R$  неизвестны по одному элементу, эти варианты между собой совпадают.

Рассмотрим такой способ более подробно. С этой целью запишем выражение, аналогичное (17):

$$f(Y_i / Q, R) = f(y_i / Y_{i-1}, Q, R) f(Y_{i-1} / Q, R) = f(y_1 / Q, R) \prod_{l=2}^i f(y_l / Y_{l-1}, Q, R).$$

Отсюда логарифмическая функция правдоподобия может быть представлена в виде

$$L(Q, R) = \ln f(y_1 / Q, R) + \sum_{l=2}^i \ln f(y_l / Y_{l-1}, Q, R).$$

Используя (11), нетрудно записать

$$\begin{aligned} L(Q, R) &= \ln f(y_1 / Q, R) + \sum_{l=2}^i \ln f(y_l / Y_{l-1}, Q, R) = \\ &= \sum_{l=1}^i \ln \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} - \frac{i}{2} \left( \frac{1}{i} \sum_{l=1}^i (\ln \det L_l + v_l^T L_l^{-1} v_l) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что невязки измерений  $v_i = y_i - H\Phi\hat{x}_{i-1}$  при известных матрицах  $Q = \Gamma\Gamma^T$  и  $R = \Psi\Psi^T$  представляют собой центрированную белую шумную последовательность с матрицей ковариаций  $L_i = HP_{i/i-1}H^T + R$ . Далее будем полагать, что система (1), (2) удовлетворяет условиям полной наблюдаемости и управляемости. В этом случае при увеличении числа измерений существует установившийся режим, для которого

$$\begin{cases} L_\infty = R + H(\Phi P_\infty \Phi^T + Q)H^T, \\ P_\infty = ((\Phi P_\infty \Phi^T + Q)^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}, \\ K_\infty = (\Phi P_\infty \Phi^T + Q)H^T L_\infty^{-1}. \end{cases} \quad (21)$$

Из этих соотношений видно, что матрица ковариации  $L_\infty$  зависит только от используемых при настройке алгоритма расчетных значений матриц  $Q$  и  $R$ . Из-за разницы между расчетными и действительными (истинными) значениями матриц  $Q$  и  $R$  расчетная матрица ковариации  $L_\infty$  также не будет совпадать с истинной матрицей ковариации невязки  $M(v_i v_i^T)$ .

При решении задачи методом максимума правдоподобия нередко в качестве критерия выбирают последнее слагаемое уравнения (20), т.е.

$$\langle \hat{Q}, \hat{R} \rangle = \arg \max_{Q, R} J(Q, R), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} J(Q, R) &= \frac{1}{i} \sum_{l=1}^i (\ln \det L_\infty + v_l^T L_\infty^{-1} v_l) = \\ &= \ln \det L_\infty + \text{trace} \left( \frac{1}{i} \sum_{l=1}^i v_l v_l^T L_\infty^{-1} \right) = \\ &= \ln \det L_\infty + \text{trace}(\hat{L}_{true} L_\infty^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_{true} &= \frac{1}{i} \sum_{l=1}^i v_l v_l^T \approx L_{true} = M(v_l v_l^T) = \\ &= H(\Phi P_{true}(K_\infty, Q_{true}, R_{true})\Phi^T + Q_{true})H^T + R_{true}. \end{aligned}$$

Важно обратить внимание на то, что  $L_{true}$  представляет собой оценку действительной матрицы ковариации невязки  $M(v_i v_i^T)$ . Она отличается от расчётной матрицы  $L_\infty$  из-за разницы между расчётными  $Q$ ,  $R$  и действительными значениями  $Q_{true}$ ,  $R_{true}$ . Заметим также, что, используя уравнение (14), в установившемся режиме истинную матрицу ковариации ошибок состояния  $P_{true}$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i - x_i &= \Phi \hat{x}_{i-1} + K_i (H(\Phi x_{i-1} + \Gamma(\theta) w_i) + \Psi(\theta) v_i - H \Phi \hat{x}_{i-1}) - x_i = \\ &= (E - K_i H)(\Phi(\hat{x}_{i-1} - x_{i-1}) - \Gamma(\theta) w_i) + K_i \Psi(\theta) v_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{true}(K_\infty, Q_{true}, R_{true}) &= M((\hat{x}_i - x_i)(\hat{x}_i - x_i)^T) = \\ &= (E - K_\infty H)(\Phi P_{true} \Phi^T + Q_{true})(E - K_\infty H)^T + K_\infty R_{true} K_\infty^T.\end{aligned}\quad (23)$$

В общем случае для отыскания максимума в (22) при реализации метода максимального правдоподобия требуется значительный объем вычислений, что и ограничивает применение его на практике. Заметим, что в скалярном случае с помощью уравнений (21) – (23) можно доказать, что в асимптотике значение  $J(Q, R)$  достигает максимума при условии  $Q = Q_{true}$ ,  $R = R_{true}$ . Это показывает, что с увеличением количества измерений матрица  $\hat{L}_{true i}$  стремится к  $L_{true}$ , т.е. метод максимума правдоподобия даёт точные оценки  $Q$  и  $R$ .

## 2. Метод уточнения ковариации (Covariance Matching Method)

Этот метод базируется на предположении о том, что ковариационную матрицу шума наблюдений  $R$  можно оценить по ковариационной матрице невязок [21]:

$$\begin{cases} \hat{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{l=i-N+1}^i v_l v_l^T - H P_{l/l-1} H^T, \\ \hat{Q}_i = \frac{1}{N} \sum_{l=i-N+1}^i K_l v_l (K_l v_l)^T + P_l - \Phi P_{l-1} \Phi^T, \end{cases}\quad (24)$$

где  $N$  – количество тактов усреднения в скользящем окне для формирования достаточной статистики; длина скользящего окна определяет адаптивность алгоритма к изменению характеристик шумов и выбирается эмпирически, обычно в пределах 10–50 отсчетов.

Метод уточнения ковариации является наиболее простым методом, используемым для оценивания  $Q$  и  $R$ . В результате очень легко применять и реализовать его в практическом случае. В настоящее время появились различные адаптивные фильтры, основанные на этой идее, такие, как адаптивный алгоритм с плавной подстройкой [43 – 45]. В этих алгоритмах цель адаптации достигается на основе непосредственной настройки матрицы ковариации ошибок или невязки.

Слабой стороной этих методов построения адаптивных алгоритмов является необходимость предположения о том, что изменение ковариации невязки обусловлено именно измерительным или порождающим шумом, а матрицы ковариации  $P_i$  известны точно. В реальном случае трудно, даже невозможно, выполнять данные условия. При этом метод уточнения ковариации даёт оценки  $Q$  и  $R$  большими погрешностями.

### 3. Корреляционный метод (Correlation Method)

Корреляционный метод [23,24,46] широко применяется в силу его простоты и низких требований к вычислительным ресурсам. Как правило, типовые процедуры корреляционного метода имеют вид

$$\begin{cases} D_0 = M(y_i y_i^T) = H P_x H^T + R, \\ D_j = M(y_i y_{i-j}^T) = H \Phi^j P_x H^T, j = 1, 2, \dots, \bar{m}, \end{cases} \quad (25)$$

где,  $P_x = M(x_i x_i^T) = M(x_\infty x_\infty^T) = \Phi P_x \Phi^T + Q$  – матрица ковариации для вектора состояния в установившемся режиме;  $D_j$  – матрица ковариации измерения;  $\bar{m}$  – количество корреляционных компонентов. Оценки значений ковариационных матриц  $D_j$  можно получить, используя эргодические свойства стационарной последовательности:

$$D_j = \frac{1}{i-j} \sum_{l=j+1}^i y_l y_{l-j}^T, j = 0, 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (26)$$

Известно [47], что когда случайный вектор  $y_i$  имеет гауссовское распределение с нулевым ожиданием и матрицей ковариации  $D_0$ , квадратичная форма для вектора  $y_i$  будет иметь  $\chi$ -квадрат распределение, т.е.  $y_i^T D_0^{-1} y_i \sim \chi^2$ . Рассмотрим один простой случай, когда  $y_i$  является скаляром и известна матрица  $Q$ . При использовании уравнений (25) – (26) для оценивания дисперсии  $R$  очевидно, что оценка  $R$  будет иметь нестандартное  $\chi$ -квадрат распределение.

Как видно из уравнения (25),  $D_i$  линейно зависит от матрицы ковариации  $Q, R$ . Для четкого представления данной зависимости введем произведение Кронекера, обозначаемого  $\otimes$ , и функцию матричного разложения по столбцам  $cs(A)$  в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

$$cs(A) = [a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1} \ a_{12} \ a_{22} \ \dots \ a_{mn}]^T,$$

где  $A$  – матрица размером  $m \times n$ ;  $B$  – матрица размером  $p \times q$ ;  $A \otimes B$  произведение Кронекера, порождающее блочную матрицу размером  $mp \times nq$ ;  $cs(A)$  – столбцовая матрица  $mn \times 1$ .



Основные свойства и соотношения произведения Кронекера представляются следующим образом:

$$cs(ABC) = (C^T \otimes A)cs(B), \quad (27)$$

где  $A, B, C$  – матрица размером  $m \times n$ ,  $n \times p$  и  $p \times q$ .

Используя свойство (27), запишем  $D_i$  в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} cs(D_0) \\ cs(D_1) \\ \vdots \\ cs(D_{\bar{m}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H \otimes H)(I - \Phi \otimes \Phi)^{-1} & I \\ (H \otimes H\Phi)(I - \Phi \otimes \Phi)^{-1} & 0 \\ \vdots & 0 \\ (H \otimes H\Phi^{\bar{m}})(I - \Phi \otimes \Phi)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cs(Q) \\ cs(R) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Отсюда следует, что после получения оценки корреляционных значений  $D_i$ , посредством линейного метода наименьших квадратов легко получить оценки  $Q, R$ . Необходимо отметить, что решение по методу наименьших квадратов существует только при выполнении условия наблюдаемости матрицы  $Q$ .

Существенно также, что при использовании данного метода в задаче оценивания матриц  $Q$  и  $R$  получаемые оценки являются субоптимальными. Покажем, что корреляционный метод является приближенным способом решения задачи методом максимума функции правдоподобия.

Прежде всего, рассмотрим одну более общую задачу оценивания корреляционной функции стационарного процесса  $k(\tau)$ . С этой целью запишем выражение в следующем виде:

$$f(y_1, y_2 \dots y_i / k(\tau)) = f(y_1 / k(\tau)) \prod_{l=1}^i f(y_l / Y_{l-1}, k(\tau)). \quad (29)$$

Для простоты полагаем, что измерение  $y_i$  является скаляром. Известно, что корреляционная функция задана для аргумента  $\tau = 1, 2 \dots \infty$ . Для стационарного эргодического процесса значение корреляционной функции  $k(\infty)$  всегда стремится к нулю. Допустим, что корреляционная функция имеет конечную длину  $\bar{m}$ , т.е.  $\tau = 1, 2 \dots \bar{m}$ , а также не будем учитывать влияние начальных измерений  $f(y_1, y_2 \dots y_{\bar{m}} / k(\tau))$  на функцию правдоподобия  $f(y_1, y_2 \dots y_i / k(\tau))$ . При этом получим

$$f(y_1, y_2 \dots y_i / k(\tau)) \approx \prod_{l=\bar{m}+1}^i f(y_l / y_{l-1}, y_{l-2} \dots y_{l-\bar{m}}, k(\tau)).$$

Вводя  $\tilde{y}_i = [y_{i-1}, y_{i-2} \dots y_{i-\bar{m}}]^T$ , при известной корреляционной функции можно записать матрицу ковариации вектора  $\tilde{Y}_i = [y_i; \tilde{y}_i^T]$ :

$$M(\tilde{Y}_i \tilde{Y}_i^T) = \begin{bmatrix} M(y_i y_i) & \text{cov}(y_i, \tilde{y}_i^T) \\ \text{cov}(y_i, \tilde{y}_i^T)^T & M(\tilde{y}_i \tilde{y}_i^T) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} & \text{cov}(y_i, \tilde{y}_i^T) & \\ k(0) & \overbrace{k(1) \quad k(2) \quad \dots \quad k(m)} & \\ k(1) & k(0) & k(1) \quad \dots \quad k(m-1) \\ k(2) & k(1) & k(0) \quad \dots \quad k(m-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(m) & \underbrace{k(m-1) \quad k(m-2) \quad \dots \quad k(0)}_{M(\tilde{y}_i \tilde{y}_i^T)} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Используя матрицу ковариации  $M(\tilde{Y}_i \tilde{Y}_i^T)$ , можем записывать условную функцию распределения  $f(y_i / y_{i-1}, y_{i-2} \dots y_{i-\bar{m}}, k(\tau))$  в виде

$$f(y_i / y_{i-1}, y_{i-2} \dots y_{i-\bar{m}}, k(\tau)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi) \det P_{\bar{m}}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y_i - K_{\bar{m}} \tilde{y}_i)^T P_{\bar{m}}^{-1} (y_i - K_{\bar{m}} \tilde{y}_i)\right),$$

где

$$\begin{cases} K_{\bar{m}} = \text{cov}(y_i, \tilde{y}_i^T) \times (M(\tilde{y}_i \tilde{y}_i^T))^{-1}, \\ P_{\bar{m}} = M(y_i y_i) - K_{\bar{m}} \text{cov}(y_i, \tilde{y}_i^T)^T. \end{cases} \quad (31)$$

Аналогично в качестве критерия выбираем второе слагаемое логарифмической функции правдоподобия, т.е.

$$J(k(\tau)) = J(K_{\bar{m}}, P_{\bar{m}}) = \sum_{l=\bar{m}+1}^i (\ln \det P_{\bar{m}} + (y_l - K_{\bar{m}} \tilde{y}_l)^T P_{\bar{m}}^{-1} (y_l - K_{\bar{m}} \tilde{y}_l)).$$

Дифференцируя  $J(K_{\bar{m}}, P_{\bar{m}})$  по  $K_{\bar{m}}$  и  $P_{\bar{m}}$ , получим оценки для  $K_{\bar{m}}$  и  $P_{\bar{m}}$ :

$$\begin{cases} \hat{K}_{\bar{m}} = \sum_{l=\bar{m}+1}^i y_l \tilde{y}_l^T \times \left( \sum_{l=\bar{m}+1}^i \tilde{y}_l \tilde{y}_l^T \right)^{-1}, \\ \hat{P}_{\bar{m}} = \frac{1}{i - \bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i (y_l - \hat{K}_{\bar{m}} \tilde{y}_l)^T (y_l - \hat{K}_{\bar{m}} \tilde{y}_l) = \frac{1}{i - \bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i y_l^T y_l - \hat{K}_{\bar{m}} \frac{1}{i - \bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i \tilde{y}_l y_l. \end{cases} \quad (32)$$

Сопоставляя (31) и (32), можно получить следующие оценки для  $M(y_i y_i^T)$ ,  $\text{cov}(y_i, \tilde{y}_i^T)$  и  $M(\tilde{y}_i \tilde{y}_i^T)$ :

$$\begin{cases} M(y_i y_i^T) \approx \frac{1}{i - \bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i y_l^T y_l, \text{cov}(y_i, \tilde{y}_i^T) \approx \frac{1}{i - \bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i y_l \tilde{y}_l^T, \\ M(\tilde{y}_i \tilde{y}_i^T) \approx \frac{1}{i - \bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i \tilde{y}_l \tilde{y}_l^T. \end{cases} \quad (33)$$

Соответственно сопоставляя (30) и (33), оценки для значений корреляционной функции могут быть записаны как

$$\hat{k}(j) \approx \frac{1}{i-\bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i y_l y_{l-j} \approx \frac{1}{i-\bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i y_{l-1} y_{l-1-j} \cdots \approx \frac{1}{i-\bar{m}} \sum_{l=\bar{m}+1}^i y_{l-\bar{m}} y_{l-\bar{m}+j}, \quad (34)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \bar{m}.$$

Из уравнения (34) видно, что данное приближенное решение функции максимума правдоподобия совпадает с уравнением (26). Другими словами, корреляционный метод обеспечивает решение, близкое к решению метода максимума правдоподобия. Отличия этих двух методов заключаются в том, что метод максимума правдоподобия базируется на отыскании максимума функции правдоподобия, зависящей непосредственно от  $Q, R$ , а в корреляционном методе оценки  $Q, R$  получаются в 2 этапа: первый этап – нахождение максимума функции правдоподобия, зависящей от  $k(\tau), \tau = 0, 1, 2, \dots, m$ ; второй этап – использование метода наименьших квадратов для отыскания оценки  $Q, R$ . Заметим, что при конечном количестве измерений оценки для корреляционного метода не совпадают с оценками метода максимума правдоподобия. Кроме того, в реальной ситуации всегда не выполняются допущения о конечности корреляционной функции  $k(\tau), \tau = 0, 1, 2, \dots, m$  и малом влиянии начальных измерений  $f(y_1, y_2, \dots, y_{\bar{m}} / k(\tau))$ . Следовательно, корреляционный метод является субоптимальным. Однако количество измерений со временем увеличивается, и оценки  $k(\tau)$  стремятся к истинным значениям. Таким образом, полученные оценки  $Q, R$  будут иметь высокую точность. Более того, если записывать корреляционный метод в рекуррентном виде, то он имеет очевидные преимущества в вычислительном плане.

### Примеры

Для иллюстрации некоторых из рассмотренных адаптивных алгоритмов было проведено их компьютерное моделирование для скалярного примера.

Пусть уравнение состояния системы имеет вид

$$x_i = \lambda x_{i-1} + w_i,$$

где  $\lambda = 0,5$ ,  $M(w_i) = 0$ ,  $M(w_i^2) = Q = 0,25$ . Дискретное время  $\Delta T = 0.01s$ .

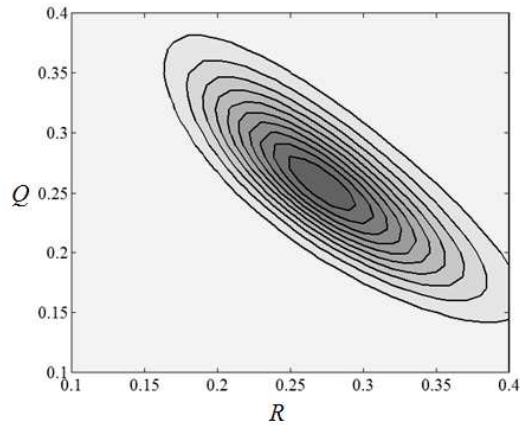
Уравнение измерения имеет вид:

$$y_i = x_i + v_i,$$

где  $M(v_i) = 0, M(v_i^2) = R = 0,25$ . Время моделирования – 5 с. В данном случае вектор  $\theta = [Q, R]^T$ .

#### 1. Байесовский метод и метод максимума правдоподобия

С помощью метода точечных масс получим апостериорную функцию распределения  $f(Q, R | Y_{500})$  на 500 измерениях, которая показана на рис. 1. Оценки по методу Байеса могут быть вычислены согласно уравнению (18).



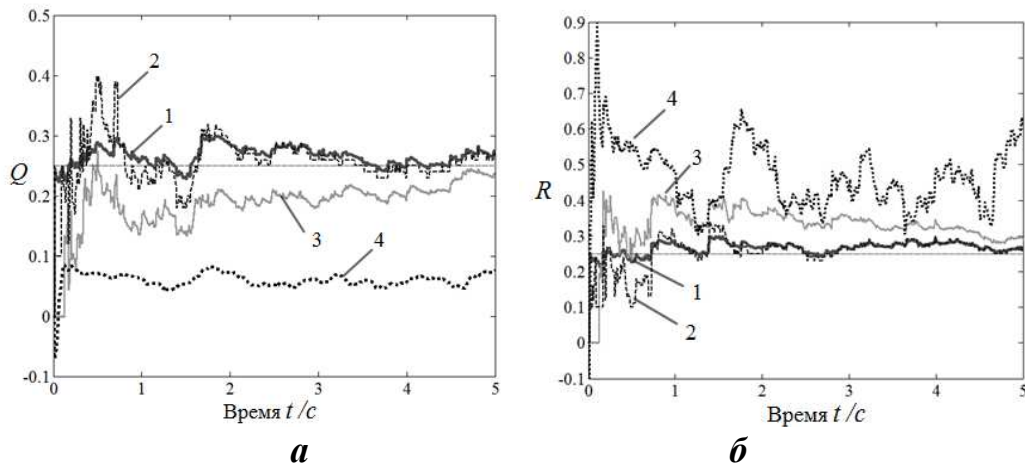
**Рис. 1. Изолинии апостериорная функция распределения  $f(Q, R | Y_{500})$**

В данном примере заданная априорная плотность  $f(Q, R)$  является равномерной. Как следует из излагаемого выше, функция правдоподобия  $f(Y_{500} | Q, R)$  имеет одинаковую форму с апостериорной функцией распределения  $f(Q, R | Y_{500})$ . Оценки метода максимума правдоподобия определяются соответственно по уравнению (22).

#### **2. Метод уточнения ковариации и корреляционный метод**

Оценки  $Q$  и  $R$  по методу уточнения ковариации и корреляционному методу получим, используя уравнения (24) – (26).

На рис.2 показаны переходные процессы оценивания  $Q$  и  $R$  для четырёх методов.



**Рис. 2. Переходные процессы оценивания  $Q$  (а) и  $R$  (б) по байесовскому методу (1), по методу максимума правдоподобия (2), по корреляционному методу (3) и по методу уточнения ковариации (4).**

Из рис.2 видно, что оценки для байесовского метода и метода максимума правдоподобия со временем совпадают. Как было описано выше, эти два метода отличаются друг от друга только на выборе критерия. Как и следо-

вало ожидать, процесс оценивания для байесовского метода является наименее протяжным по сравнению с оставленными методами. Как видно на рис. 2, метод уточнения ковариации дает смещенные оценки. Для корреляционного метода со временем его оценки тоже стремятся к истинным значениям. По сравнению с байесовским методом и методом максимума правдоподобия корреляционный метод является простым. Если на практике не требуются высокие точности, корреляционный метод может быть использован в качестве эффективного варианта.

### **Заключение**

С учетом байесовской постановки задачи адаптивной фильтрации проанализированы особенности построения адаптивных алгоритмов для специального класса задач дискретной стационарной фильтрации в условиях, когда неопределенность связана с не точно известными матрицами ковариаций порождающих и измерительных шумов. В частности, рассмотрена связь алгоритмов, основанных на методе максимум правдоподобия с байесовскими алгоритмами, а также субоптимальные алгоритмы: метод уточнения ковариации и корреляционный метод и обсуждены их особенности и связь с методом максимума правдоподобия. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект №14-08-00347)

### **Список литературы**

1. Gelb A. Applied Optimal Estimation // M.I.T. Press. Cambridge, MA. 1974.
2. Brown R.G., Hwang Patrick Y. C. Introduction to random signals and applied Kalman filtering. New York: John Wiley & Sons, 1997.
3. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalmanfiltering: Theory and practice using Matlab. N.Y.: John Wiley & Sons, 2001.
4. Ярлыков М.С., Аникин А.Л., Башаев А.В. и др. Марковская теория оценивания в радиотехнике. М.: Радиотехника, 2004.
5. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию фильтрации. Санкт-Петербург, 2010. 509 с.
6. Gibbs, Bruce P. Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling: A Practical Handbook. N.Y.: John Wiley&Sons, 2011.
7. Бар-Шалом Я., Ли Х.-Р. Траекторная обработка. Принципы, способы и алгоритмы. Ч.1, 2. М., 2011.
8. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч.2. Введение в теорию фильтрации. СПб.: ГНЦ РФ «ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2012. 417 с.

9. Степанов О.А. Основные подходы и методы решения прикладных задач обработки измерительной информации: материалы XVI конференции молодых учёных «Навигация и управление движением». 2014. С. 12 – 35.

10. Челпанов И.Б., Степанов О.А., Лопарев А.В. Опыт и перспективы использования алгоритмов стационарной фильтрации в задачах навигации // Гироскопия и навигация. 2010. № 4. С. 88.

11. Ивановский Р.И. Некоторые аспекты разработки и использования стационарных фильтров в навигационных системах // Гироскопия и навигация. 2011. № 3. С. 102 – 114.

12. Степанов О.А., Лопарев А.В., Челпанов И.Б. Частотно-временной подход к решению задач обработки навигационной информации // Автоматика и телемеханика. 2014. № 6. С. 132 – 153.

13. Кошаев Д.А., Степанов О.А. Универсальные Matlab-программы анализа потенциальной точности и чувствительности алгоритмов линейной нестационарной фильтрации // Гироскопия и навигация. 2004. №2. С. 81 – 92.

14. Ивановский Р.И. Проблемы чувствительности в задачах обработки информации и управления // Гироскопия и навигация. 2011. № 1 (72). С. 90 – 104.

15. Небылов А.В. Гарантирование точности управления. М.: Наука, 1998. 304 с.

16. Litvinenko J.A., Stepanov O.A., Tupysev V.A. Guaranteed Estimation in the Problems of Navigation Information Processing // Proceeding of IEEE Multi-conference on Systems and Control. Conference on Control Applications (CCA'09) Saint Petersburg, July, 2009. Russia, St. Petersburg .

17. Тупысев В.А. Синтез редуцированного фильтра калмановского типа с гарантированным качеством оценивания состояния динамической системы // Известия Российской Академии наук. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 33.

18. Лопарев А.В., Степанов О.А., Кулакова В.И. Приближенное решение задачи робастной фильтрации с использованием метода локальных аппроксимаций спектральных плотностей // Гироскопия и навигация. 2013. №3(82). С. 85 – 90.

19. Тупысев В.А., Литвиненко Ю.А. Сравнительный анализ редуцированных фильтров калмановского типа с гарантированным качеством оценивания // Гироскопия и навигация. 2012. № 2 (77). С. 3 – 12.

20. Magill D. Optimal adaptive estimation of sample stochastic processes // IEEE Transactions on Automatic Control. 1965. 10(4). P. 434 – 439.

21. Sage A.P., Husa G.W. Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics // Proc. Joint Automatic Control Conference. 1969. P. 760 – 769.

22. Hilborn C., Lainiotis D. Optimal estimation in the presence of unknown parameters // IEEE Trans. Systems, Science, and Cybernetics. 1969. 5(1). P. 38 – 43.
23. Mehra R. K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. 1970. 15(12). P. 175 – 184.
24. Mehra R. K. Approaches to adaptive filtering // IEEE Trans. On Automatic Control. 1972. 17(5). P. 693 – 698.
25. Alspach D.A. parallel filtering algorithm for linear systems with unknown time varying noise statistics // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. 19(5). P. 552 – 556.
26. Myers K.A., Tapley B.D. Adaptive Sequential Estimation with Unknown Noise Statistics // IEEE Trans. On Automatic Control. August 1976. Vol. 4. P. 520 – 523.
27. Alspach D., Scharf L., Abiri A. A Bayesian solution to the problem of the state estimation in an unknown noise environment // International Journal of Control. 1974. 19(2). P. 265 – 287.
28. Белоглазов И.Н., Казарин С.Н. Совместное оптимальное оценивание, идентификация и проверка гипотез в дискретных динамических системах. // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. №4. С 69 – 73.
29. Yang Yuanxi, Gao Weiguang. An optimal adaptive Kalman filter // Journal of Geodesy. 2006. Vol. 80. No. 4. P. 177 – 183.
30. Simon D. Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches. NJ: John Wiley and Sons. 2006.
31. Sarkka S. Bayesian Filtering and Smoothing. Cambridge: University Press, 2013.
32. Дмитриев С.П., Степанов О.А. Многоальтернативная фильтрация в задачах обработки навигационной информации // Радиотехника. 2004. №7. С. 11 – 17.
33. Степанов О.А., Соколов А.И., Долнакова А.С. Анализ потенциальной точности оценивания параметров случайных процессов в задачах обработки навигационной информации // Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М: ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, 16 – 19 июня 2014. С. 3730 – 3740.
34. Степанов О.А., Кошаев Д.А., Моторин А.В. Идентификация параметров модели аномалии в задаче авиационной гравиметрии методами нелинейной фильтрации // Гироскопия и навигация. 2015. № 3 (90). С. 95 – 101.
35. Stepanov O.A., Motorin A.V., Designing an error model for navigation sensors using the Bayesian approach // IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI). Sept 14 – 16. 2015. San Diego. P. 54 – 58.

36. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб.: ГНЦРФ «ЦНИИ «Электроприбор», 2003. 370 с.
37. Ван-Трис. Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции. М.: Советское радио. 1972. 744 с.
38. Bucy R.S., Senne K.D. Digital Synthesis of Non-linear Filters // Automatica. 1971. 7(3). P. 287 – 298.
39. Doucet A., Freitas D., Gordon N.J. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. New York: Springer-Verlag, 2001. 581 p.
40. Степанов О.А., Торопов А.Б. Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 16 – 19 июня 2014. 3324 – 3337.
41. Степанов О.А. Торопов А.Б. Сопоставление метода сеток и методов Монте-Карло в задаче корреляционно-экстремальной навигации // Труды XVII Международной конференции по интегрированным навигационным системам. 2010. С. 308-311.
42. Степанов О.А., Берковский Н.А. Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте-Карло в нелинейных задачах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 1. С. 3 – 14.
43. Hide C., Moore T., Smith M. Adaptive Kalman filtering for low cost INS/GPS // The Journal of Navigation. 2003. 56. P. 143 – 152.
44. Ding W., Wang J., Rizos C. Improving adaptive Kalman estimation in GPS/INS Integration // The Journal of Navigation. 2007. 60. P. 517 – 529.
45. Jwo D. J., Weng T. P. An adaptive sensor fusion method with applications in integrated navigation // The Journal of Navigation. 2008. 61. P. 705 – 721.
46. Bélanger P.R. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process // Automatica. 1974. 10. P. 267 – 275.
47. Chang G. Kalman filter with both adaptivity and robustness // Journal of Process Control. 2014. P. 81 – 87.

Степанов Олег Андреевич, д-р. техн. наук, проф., нач. научно-образовательного центра АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», [soalax@mail.ru](mailto:soalax@mail.ru), Россия, Санкт-Петербург, Университет ИТМО,

Лян Цин, асп., [liangqing1688@gmail.com](mailto:liangqing1688@gmail.com), Россия, Санкт-Петербург, Университет ИТМО



ANALYSIS OF ADAPTIVE FILTERS IN LINEAR STATIONARY PROBLEM  
WITH NOISE CHARACTERISTICS

O.A. Stepanov, Liang Qing

*The formulation and general solution of adaptive filtering problem using the Bayesian approach are presented. The different adaptive algorithms in linear stationary problem without the priori statistical information about system and measurement noises are provided. The main features of suboptimal algorithms and the relationship with the optimal algorithms are analyzed in detail. The conditions, which ensure the accuracy of suboptimal algorithms close to the optimal algorithm are discussed.*

*Key words: adaptive filter, the unknown noise characteristics, optimal and suboptimal algorithms.*

*Stepanov Oleg Andreevich, doctor of technical sciences, professor, Head of the Research and Education Center of JSC "Concern CSRI Elektropribor", [soalax@mail.ru](mailto:soalax@mail.ru), Russia, St. Petersburg, ITMO University,*

*Liang Qing, postgraduate, [liangqing1688@gmail.com](mailto:liangqing1688@gmail.com), Russia, St. Petersburg, ITMO University*

УДК 528.5

**РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ В ЗАДАЧЕ  
ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ  
ЗВЕЗД**

В.В. Цодокова, А.В. Моторин

*Применительно к задаче определения астрономических координат автоматизированным зенитным телескопом исследован вопрос точности оценивания параметров преобразования координат энергетических центров изображений звезд в стандартные координаты. Показано, что расчетная характеристика точности оценивания этих параметров может отличаться от действительной в случае использования для решения традиционного метода наименьших квадратов, не учитывающего погрешности определения координат энергетических центров изображений звезд. Предложены постановка задачи и алгоритм ее решения, позволяющие учитывать указанную погрешность и получать расчетную характеристику точности, соответствующую действительной.*

*Ключевые слова: фотоприемное устройство, координаты энергетического центра изображения звезды, стандартные координаты, оценка параметров, точность, метод наименьших квадратов.*

**Введение.** При использовании телевизионной аппаратуры для решения астрометрических и астрономо-геодезических задач необходимо осуществлять преобразование координат энергетических центров