

Лекция 1 (24к3). Элементы гидрогазодинамики и теплообмена. Вывод уравнений конвективного теплообмена.

Наука о движении жидкостей и газов – гидрогазодинамика (ГГД). Это часть механики сплошных сред. В рамках ГГД изучаются законы движения жидкостей и газов и на их основе исследуются взаимодействия потоков этих текучих сред с обтекаемыми твердыми поверхностями или телами. Жидкости и газы отличаются внутренней структурой. В газах структурные элементы – атомы или молекулы находятся на больших расстояниях друг от друга, чем в жидкостях, поэтому силы взаимодействия относительно малы. В жидкостях расстояния между микрочастицами малы и силы взаимодействия велики, но существенно меньше, чем в твердых телах. Из-за этих различий в молекулярном строении жидкости и газы обладают различными физическими свойствами. В отличие от твердых тел жидкости и газы не сохраняют форму. Жидкости принимают форму емкости, в которых они находятся. При этом они могут иметь свободную поверхность или границу раздела жидкость-газ, или границу раздела несмешивающихся жидкостей. На этих границах проявляются силы межмолекулярного взаимодействия (поверхностное натяжение) и свойство капиллярности, приводящее к возможности образования капель, эффектов смачивания твердых стенок и образованию менисков. Газы целиком заполняют емкость, в которой они находятся и не образуют поверхностей свободного уровня.

1. Примеры текучих сред, поведение которых под действием массовых и поверхностных сил изучается в рамках гидро-газодинамики: в первую очередь окружающие нас в природных условиях воздух и вода - очевидные примеры. Они относятся к ньютоновским текучим средам. В технических системах это чистые газы и их смеси при различных концентрациях, (воздух – смесь газов, основные из которых: азот N_2 – 78,084%, кислород O_2 – 20,948%, аргон Ar – 0,934%, углекислый газ CO_2 – 0,0314%), различные чистые ньютоновские жидкости и растворы в них, расплавы простые и многокомпонентные.

Для ньютоновских жидкостей, к которым относится большинство жидкостей и газов предполагается линейная связь между *тензорами напряжений* и *тензорами скоростей деформации* [1-4, 9]. Закон Ньютона-Стокса предполагает линейную зависимость между напряжениями и пространственными градиентами компонент скорости, т.е. в жидкостях напряжения пропорциональны *скоростям относительных деформаций*. В этом состоит отличие ньютоновских текучих сред от упругих твердых тел, для которых закон Гука устанавливает линейную связь между *напряжениями и деформациями* [1-4, 18]. Для простейшего упругого элемента это зависимость деформации x от приложенной силы f : $f = kx$.

Во многих технологических процессах используются текучие среды, обладающие неньютоновскими свойствами. Течения неньютоновских жидкостей описывается более сложными уравнениями реологии [3, 19]. К ним относятся среды, обладающие, например, вязкопластическими, псевдопластическими, вязкоупругими свойствами.

2. Движение текучих сред рассматривается в рамках концепции *сплошных сред*. В гидродинамике и теории конвективного тепло-массообмена рассматриваются явления, имеющие макроскопический характер. Любой малый элемент в объеме жидкости имеет такой размер, что содержит очень большое число молекул.

(Для справки: радиус первой боровской орбиты в атоме водорода $a_0 = 0,529 \times 10^{-8}$ см. Число Авогадро $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ моль⁻¹, т.е. это число молекул в моле. Грамм-молекула – моль – это масса количества однородного вещества численно равная его молекулярному весу μ и выраженная в граммах. Число молекул в моле и число атомов в грамм-атоме для всех веществ одинаковы. Число молекул в 1 см³ идеального газа – число Лошмидта – $2,687 \times 10^{19}$ 1/см³. В 1 мм³ содержится $2,687 \times 10^{16}$ молекул.)

Считается, что масштаб элементарного объема (“жидкой частицы”) мал в сравнении с характерным размером гидродинамической системы, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями. Именно так понимаются в гидродинамике выражения “жидкая частица” и “точка жидкости”. Эта элементарная частица жидкости предполагается однородной, изотропной и непрерывной в макроскопическом смысле. Ни молекулярное строение, ни молекулярное движение внутри частицы не рассматривается и не учитывается. Когда говорится о смещении частицы жидкости, то речь идет о смещении элементарного объема (его центра масс), рассматриваемого как точка. Этот элементарный “контрольный” объем dV сплошной среды находится в состоянии термодинамического равновесия. Т.е. за короткие времена в нем происходит выравнивание плотности ρ , температуры T , давления P . И для характеристики среды можно ввести понятия (макрохарактеристики): плотность – ρ , динамическая вязкость – μ , коэффициент теплопроводности – λ , теплоемкости C_V - при постоянном объеме и C_P - при постоянном давлении. Т.е. свойства, характерные для данной текучей среды в конкретном случае для большого объема.

Т.о. надо ясно понимать, что когда говорится в рамках понятия “сплошная среда” об элементарном “контрольном” объеме, то имеется в виду, что в нем много структурных элементов – молекул и контрольный объем находится в термодинамическом равновесии и к нему применимо *термодинамическое уравнение состояния*.

Для газов уравнение состояния: $PV_\mu = RT$, где R – универсальная газовая постоянная, численно равная работе совершаемой 1 моле идеального газа при изобарическом нагревании (при $P = \text{const}$) на 1K $R = 8,31 \times 10^3$ Дж/кмоль×град. Для массы газа M объем $V = (M/\mu)V_\mu$ и $PV = (M/\mu) RT$ (здесь μ – молекулярный вес газа).

3. Чтобы привести жидкость в движение, к ней необходимо приложить силу. Силы, действующие на какой-либо элемент жидкости, можно разделить на массовые (объемные) и поверхностные.

Массовыми называют силы, приложенные ко всем частицам жидкости и обусловленные внешними силовыми полями (например, гравитационным, действующими на все сплошные среды, или магнитным, действующими на электропроводные магнитовосприимчивые среды – такие как расплавы металлов). Эти силы действуют аналогично на все текучие среды независимо от их агрегатного состояния.

Поверхностные силы возникают вследствие действия окружающей жидкости или твердых тел, они приложены к поверхности контрольного объема жидкости. Такими силами являются силы внешнего давления и силы вязкого трения.

Вынужденное движение рассматриваемого объема жидкости происходит под действием внешних поверхностных сил, приложенных на его (объема) границах, за счет предварительно сообщенной кинетической энергии (например, в технических системах работает насос или вентилятор, а в природных условиях и в локальных масштабах ветер). Как вынужденное рассматривается и течение изучаемого объема жидкости под действием однородного в нем поля массовых сил. Например, изотермическая пленка жидкости, стекающая по стенке под действием сил тяжести (или как поток воды в реках, на гидростанции и в водопаде).

Все реальные жидкости и газы (текучие среды) обладают *вязкостью*, т.е. свойством оказывать сопротивление

деформации: между частицами и слоями, движущимися с различными скоростями, всегда возникает *сила внутреннего трения*, противодействующая движению. Согласно закону Ньютона это касательная сила τ , отнесенная к единице поверхности, которая действует в любой точке *ламинарного* потока в плоскости, ориентированной по течению, пропорционально изменению скорости в направлении нормали к этой плоскости (т.е. пропорционально градиенту скорости):

$$F_{TP} / A = \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

Т.о., для ламинарного течения ньютоновской жидкости *напряжение сдвига* пропорционально градиенту скорости. Коэффициент μ называется

коэффициентом динамической вязкости или просто коэффициентом вязкости. Он измеряется в системе СИ в следующих единицах: $[\mu] = \text{Паскаль} \cdot \text{секунда} = (\text{Па} \cdot \text{с}) = \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{кг} / \text{м} \cdot \text{с}$. До 1980 года использовались единицы – пуаз (П) и сантипуаз (сП). $1 \text{пуаз}(\text{П}) = 0,1 \text{Па} \cdot \text{с} = 0,1 \text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$.

$1 \text{сП} = 1 \text{мПа} \cdot \text{с} = 1 \text{мН} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ (миллиньютон $\cdot \text{с} / \text{м}^2$).

Единица силы: $[F] = \text{ньютон (Н)} = \text{кг} \times \text{м} / \text{с}^2$. $1 \text{Н} = 0,102 \text{кгс}$; $1 \text{кгс} = 9,81 \text{Н}$.

Определение динамической вязкости.

Рассматривается установившееся ламинарное течение вязкой жидкости в плоском слое между двумя параллельными жесткими горизонтальными границами (плоское течение Куэтта с линейным распределением скорости по высоте слоя рис.1.1).

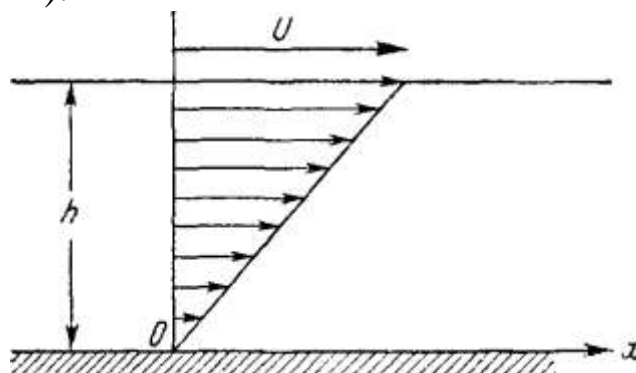


Рис. 1.1. Плоское течение Куэтта

Нижняя граница неподвижна, а верхняя граница движется с постоянной скоростью - V , площадь верхней границы - A , толщина слоя - h . Сила

трения: $F_{\text{тр}} = \frac{\mu \cdot A \cdot V}{h}$, здесь по определению μ – коэффициент

динамической вязкости, коэффициент внутреннего трения. Если рассматривать трение на единице площади равномерно движущейся плоской жесткой поверхности, то μ – коэффициент пропорциональности в линейном законе зависимости трения от пристеночного градиента скорости, здесь V/h .

Необходимо понимать, что все физические величины имеют размерность. Это важно учитывать, например, при преобразовании уравнений в безразмерный вид.

Таблица 1. Размерности параметров.

F	μ	A	V	h
Н	$\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \text{Па} \cdot \text{с} = \text{кг} / \text{м} \cdot \text{с}$	м^2	$\text{м} / \text{с}$	м

Текучестью называется величина, обратная динамической вязкости
 $\varphi = 1/\mu$ $[\varphi] = \text{м}^2 / \text{Н} \cdot \text{с} = 1/\text{Па} \cdot \text{с}$

Кинематическая вязкость $\nu = \mu/\rho$. В уравнения гидродинамики и теплопередачи часто входит именно ν , размерность которой $[\nu] = \text{м}^2 / \text{с}$. До 1980 года единица измерения 1 стокс. 1Ст = $10^{-4} \text{м}^2/\text{с}$ и сантистокс – 1сСт = $10^{-6} \text{м}^2/\text{с} = 1 \text{мм}^2/\text{с}$. Единица измерения $[\mu]$ – 1пуаз (П) = 0,1 Па/с = 0,1 Н·с/м².

Коэффициенты μ, ν – физические параметры жидкости. Они существенно зависят от температуры, для большого количества текучих сред они являются функциями состояния вещества (см. [10] уравнения состояния).

Исключения – неньютоновские жидкости [19], у которых μ зависит от изменения скорости \vec{W} и температуры T.

Для ньютоновских жидкостей $\mu \approx Ae^{b/T}$, A и b – эмпирические постоянные, т.е. динамическая вязкость жидкостей μ резко уменьшается с ростом температуры, а в случае газов с ростом температуры μ возрастает.

Для измерения вязкости используются различные методы, например, такие в основе которых лежат точные решения уравнений движений вязкой жидкости – уравнений Навье-Стокса:

1) определение объема жидкости, протекающей через капилляр – формула Пуазейля: $V = \frac{\pi \Delta P t R^4}{8\mu l}$. Здесь: ΔP – разность давлений между входом и

выходом капилляра, возникающая из-за потерь на трение; l – длина трубки; R – радиус трубки; t – время протекания жидкости.

2) Падение шарика в жидкости – закон Стокса – вискозиметр Гёпплера. $F_{\text{тр}} = 6\pi\mu rU$ (сила вязкого трения при установившейся скорости падения шарика).

Диссипация (рассеивание) энергии – за счет вязкого трения при течении жидкости и газа, обладающих вязкостью, часть кинетической энергии необратимо переходит в теплоту и вызывает нагревание жидкости. В большей части задач гидродинамики ею можно пренебречь.

На поведение текучих сред – жидкостей и газов под действием внешних сил (давления) оказывает влияние их сжимаемость.

(Для справки - единицы измерения давления:

1атм (физическая) = 760мм рт. ст.;

1ат (техническая) = 1кгс/см²;

1атм = 1,033233 ат;

1атм = 1,013250·10⁵ Па \approx 0,1 МПА; 1Па = 1Н/м².)

В системе СИ *сила* в 1Н – это сила, сообщаящая телу массой в 1 кг ускорение в 1м/с^2 .

Изотермическая сжимаемость или коэффициент сжатия тела при постоянной температуре $T = const$, $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$ для воды $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-10}$ 1/Па, т.е. повышение давления P на 0,1МПа (т.е. на одну атмосферу) вызывает относительное изменение ρ на 1/20 000. То же для других капельных жидкостей, что позволяет пренебречь для них изотермической сжимаемостью при анализе многих природных и технологических процессов. Для воздуха в нормальном состоянии $\varepsilon = 10^{-5}$ 1/Па, – т.о. сжимаемость воздуха (и других газов) в 20 000 раз больше сжимаемости воды. Если скорость движения газа ниже скорости звука $w < \frac{1}{4} w_{зв}$, то газ несжимаем и его течение точно описывается уравнениями движения несжимаемой жидкости.

Дифференциальные уравнения гидродинамики.

1. Уравнение неразрывности – закон сохранения массы.

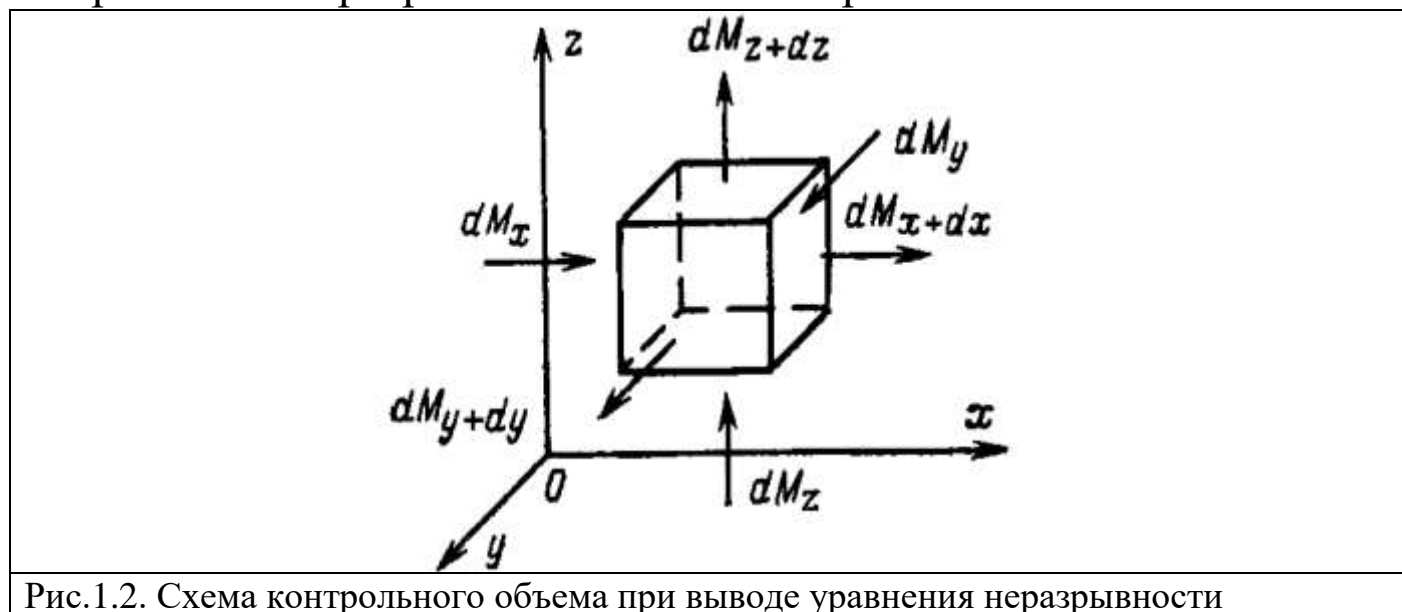


Рис.1.2. Схема контрольного объема при выводе уравнения неразрывности

Закон сохранения любой величины Q можно записать для *контрольного объема* (КО) следующим образом:

Изменение Q в КО по времени	=	Поток Q через поверхность внутри КО	–	Поток Q через поверхность из КО	+	Сумма источников и стоков в КО
-------------------------------------	---	--	---	--	---	---

При выводе уравнения неразрывности (закона сохранения массы) Q – это масса $= \rho dx dy dz = \rho dV$.

Если источники и стоки массы отсутствуют, то последний член справа равен нулю и уравнение показывает, что изменение массы жидкости в КО по времени равно *резльтирующему потоку* массы через поверхность КО.

Масса жидкости в КО равна $\rho dx dy dz$. Ее изменение в КО по времени составляет величину $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$, которая равна нулю для потока несжимаемой жидкости.

Поток массы через левую грань на рис.1.2, перпендикулярную направлению X , равен $\rho u dy dz$.

Поток через параллельную грань, отстоящую на dx равен $\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy dz$. А результирующий поток массы в направлении оси

X равен $-\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz$, аналогично в направлении Y результирующий

поток массы $-\frac{\partial \rho v}{\partial y} dy dx dz$. В результате для 3-х мерного течения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \text{ а при постоянной плотности } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

В компактной (канонической) форме это уравнение для несжимаемой текучей среды имеет вид: $\text{div} \vec{U} = 0$, где вектор $\vec{U} = (u, v, w)$.

2. Уравнения движения.

Вывод дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости с привлечением понятий тензоров напряжений и деформаций требует громоздких математических выкладок [1- 3]. Михеевым М.А. был предложен простой и наглядный вывод дифференциальных уравнений движений вязкой жидкости для случая одномерного движения (несжимаемой жидкости). Вывод не является строгим, но наглядным.

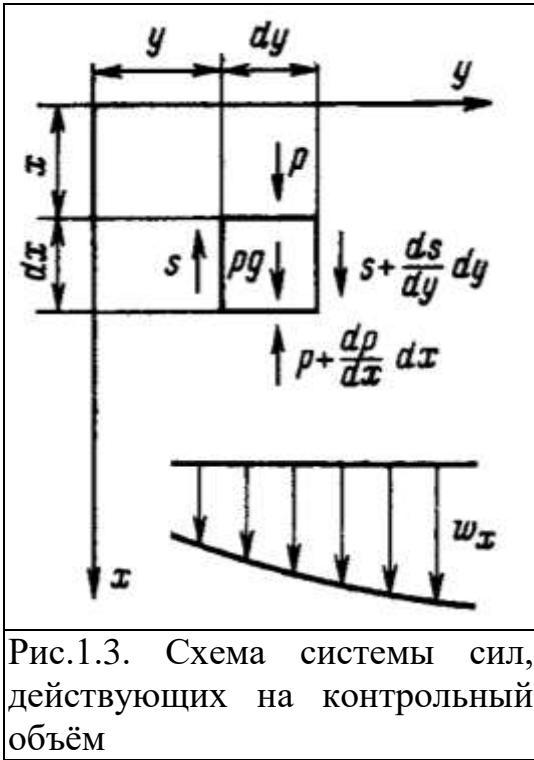


Рис.1.3. Схема системы сил, действующих на контрольный объём

Выделяем КО в потоке жидкости $dV = dx dy dz$. Пусть локально в выделенном сечении по высоте обтекаемой стенки $x_i \pm \Delta x$ скорость в потоке изменяется только в направлении по нормали к стенке, по оси Y (рис.1.3), причем произвольно. Вывод основан на втором законе Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$. Равнодействующая всех сил \vec{F} , действующих на КО равна его массе, умноженной на ускорение. Силы, действующие на КО – массовые и поверхностные. Массовые силы

характеризуются вектором ускорения \vec{a} , значение которого равно отношению силы, действующей на данную частицу, к массе

этой частицы. Из массовых сил учтем только силу тяжести, тогда на единицу массы действует сила $\vec{F} = \vec{g}$. Значение поверхностных сил равно отношению силы, действующей на элемент поверхности, к величине этой поверхности. Поверхностные силы – силы трения и силы давления.

Т.о., на КО действуют сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения. Найдем проекции этих сил на ось OX . Сила тяжести приложена в центре тяжести элемента. Ее проекция на ось OX $df_1 = \rho g_x dV$. Т.е. масса этого контрольного элемента жидкости, умноженная на ускорение свободного падения \vec{g}_x .

Равнодействующая сил давления df_2 : если на верхней грани элемента dV сила давления равна P , то на площадку $dz dy$ действует сила $P dy dz$. На нижней грани давление с точностью до второго члена разложения P в ряд Тэйлора равно $P + \frac{dP}{dx} dx$ и на эту грань действует сила

$$-\left(P + \frac{dP}{dx} dx\right) dy dz.$$

Знак «-» указывает на то, что эта сила действует против направления движения жидкости (противодействует на нижней грани). Равнодействующая сил давления равна их алгебраической сумме

$$df_2 = -\frac{dP}{dx} dV. \text{ Одновременно отсюда видно, что если движение жидкости}$$

обусловлено давлением, то давление вниз по потоку падает вследствие потерь на преодоление вязкого трения.

Равнодействующая сил трения df_3 определяется из следующих соображений: т.к. скорость при обтекании стенки изменяется только в направлении оси oY (по нормали к стенке), то сила трения возникает на боковых гранях элемента жидкости. У левой грани (рис.1.3) скорость движения частиц жидкости ниже, чем в самом элементе, поэтому в сечении y сила трения направлена против движения и равна $\tau dx dz$. Около правой грани, наоборот, скорость больше, чем в самом элементе, поэтому в сечении $y + dy$ сила трения направлена в сторону движения.

Равнодействующая этих сил $df_3 = \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy \right) dx dz - \tau dx dz = \frac{d\tau}{dy} dV$,

подставляя $\tau = \mu \frac{dw_x}{dy}$, получаем $df_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dV$.

Проекция на ось oX равнодействующей всех сил, приложенных к КО:

$$df = \left(\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} \right) dV \quad (a)$$

По второму закону механики эта равнодействующая равна произведению массы элемента на его ускорение dw_x/dt и учитывает силы инерции:

$$df = \rho \frac{dw_x}{dt} dV \quad (б)$$

Приравнивая правые члены уравнений (а) и (б) и произведя сокращения, окончательно получаем уравнение движения вдоль оси oX :

$$\rho \frac{dw_x}{dt} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}$$

В общем случае трехмерного движения жидкости с постоянными физическими параметрами поле скорости описывается тремя уравнениями движения, каждое соответственно в проекциях сил на оси oX , oY , oZ .

Для оси oX :

$$\rho \frac{dw_x}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

для оси oY :

$$\rho \frac{dw_y}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

для оси oZ :

$$\rho \frac{dw_z}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

Уравнения (2-4) называются *уравнениями Навье-Стокса*, где слагаемые имеют размерность силы, отнесенной к единице объема. В общем случае

составляющие скорости w_x, w_y, w_z изменяются во времени и пространстве. Член, стоящий в левой части уравнений (2-4) представляет собой полную производную от скорости по времени. По определению

полной производной: $\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}$

Производные $\frac{\partial w_{x_i}}{\partial t}$ характеризуют изменение \vec{w} во времени в какой-либо точке потока жидкости – т.е. это та часть ускорения, которая зависит от изменения состояния потока (локального изменения скорости \vec{w}) в данной точке от времени. Остальные три члена характеризуют изменение \vec{w} в пространстве при переходе от точки к точке в окрестности точки наблюдения, т.е. это та часть ускорения, которая возникает при перемещении частицы жидкости в точку потока с другой скоростью течения.

В векторной форме система из трех уравнений будет иметь вид:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} \quad (5)$$

Более адекватный подход к выводу уравнений движения опирается на понятия тензоров деформации, напряжений и скоростей деформации [1-3].

Тензор деформации – тензор, который характеризует сжатие (растяжение) и изменение формы в каждой точке твердого тела при деформации.

Тензор деформации Коши-Грина в классической сплошной среде (частицы которой являются материальными точками и обладают лишь тремя трансляционными степенями свободы) определяется как

$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right)$, где \mathbf{u} – вектор, описывающий *смещение точки тела*: его координаты – разность между координатами близких точек

после (dx'_i) и до (dx_i) деформации. Дифференцирование производится по координатам в отсчётной конфигурации (до деформирования). Расстояния до и после деформации связаны через ε_{ij} : $dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j$ (по повторяющимся индексам ведётся суммирование). По определению тензор деформации симметричен, то есть: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Этот тензор деформации называют тензором деформации Грина-Лагранжа, а правую меру деформации Коши-Грина (удвоенный обсуждаемый тензор деформации плюс единичный тензор) – правым тензором деформации Коши-Грина. Нелинейный тензор деформации Коши-Грина обладает свойством материальной объективности. Это означает, что если кусок деформируемого тела совершает движение как жесткое тело (т.е. перемещается в пространстве как целое), тензор деформации поворачивается вместе с элементарным объёмом материала. Удобно использовать такие тензоры при записи определяющих уравнений материала, тогда принцип материальной объективности выполняется автоматически, то есть если наблюдатель двигается относительно деформируемой среды, поведение материала не меняется (тензор напряжений поворачивается в системе отсчёта наблюдателя вместе с элементарным объёмом материала). Существуют также другие объективные тензоры деформации, например, тензор деформации Альманси, тензоры деформации Пиола, Фингера и т. д. В некоторые из них входят производные от перемещений по координатам в отсчётной конфигурации (до деформирования), а в некоторые — по координатам в актуальной конфигурации (после деформирования). То, что в классической сплошной среде энергия деформации зависит лишь от симметричного тензора деформации, следует из закона баланса моментов. Любая взаимно-однозначная функция объективного тензора деформации будет также объективным тензором деформации. Например (в силу симметричности и положительной определенности тензора деформации) можно использовать квадратный корень из тензора деформации Коши-Грина. Однако, задавая определяющие уравнения при помощи этих тензоров, важно следить за предположениями о характере зависимости свободной энергии (или напряжений) от тензоров деформации. Ясно, что предположения о, скажем, дифференцируемости свободной энергии по тензору деформации Коши-Грина, по корню из него или по его квадрату приведут к уравнениям совершенно разных материалов. Линейная по \mathbf{u} теория общего вида при малых \mathbf{u} получится лишь в первом случае.

При малых \mathbf{u} можно пренебречь квадратичными слагаемыми, и пользоваться тензором деформации в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Линейный тензор деформации Коши-Грина (совпадает с линейным тензором деформации Альманси с точностью до знака) не обладает свойством материальной объективности при больших поворотах, поэтому его не используют в определяющих уравнениях для больших деформаций. В приближении малых поворотов это свойство сохраняется. Диагональные элементы ε_{ij} описывают линейные деформации растяжения либо сжатия, недиагональные – деформацию сдвига.

Тензор напряжений (иногда *тензор напряжений Коши*) – тензор второго

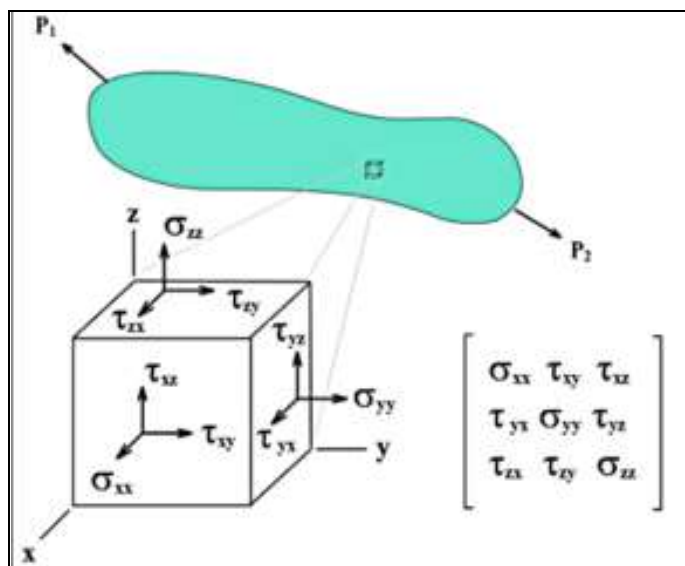


Рис.1.4. Полный тензор механического напряжения элементарного объёма тела. Символ σ обозначает нормальные механические напряжения, а τ – касательные напряжения.

ранга, состоящий из девяти величин (рис.1.3), представляющих механические напряжения в произвольной точке нагруженного тела. В декартовой системе координат эти девять величин записываются в виде таблицы, в которой по главной диагонали стоят нормальные составляющие векторов напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через рассматриваемую точку среды, а в остальных позициях – касательные компоненты векторов напряжений на этих площадках.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} в декартовой системе координат

Ox_i (то есть $Oxyz$) вводят следующим образом. Рассматривают бесконечно малый объём тела (сплошной среды) в виде прямоугольного параллелепипеда, грани которого ортогональны координатным осям и имеют площади dS_i . На каждой грани dS_i параллелепипеда действуют поверхностные силы dF_i . Если обозначить проекции этих сил на оси Ox_j как dF_{ij} , то компонентами тензора напряжений называют отношение проекций силы к величине площади грани, на которой действует эта сила:

$$\sigma_{ij} = \frac{dF_{ij}}{dS_i}$$

По индексу i здесь суммирования нет. Компоненты σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , обозначаемые также как σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} – это нормальные напряжения, они представляют собой отношение проекции силы dF_i на нормаль к площади рассматриваемой грани dS_i : $\sigma_{11} = \frac{dF_{11}}{dS_1}$ и т. д.

Компоненты σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} , обозначаемые также как τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} – это касательные напряжения, они представляют собой отношение проекции

силы dF_i на касательные направления к площади рассматриваемой грани dS_i : $\sigma_{12} = \frac{dF_{12}}{dS_1}$ и т. д.

При отсутствии собственного момента импульса сплошной среды, а также объемных и поверхностных пар тензор напряжений симметричен (так называемый закон парности касательных напряжений), что является следствием уравнения баланса момента импульса. В частности, тензор напряжений симметричен в классической *теории упругости* и *гидродинамике идеальной* и *линейно-вязкой* жидкостей.

При учёте сжимаемости текучей среды система уравнений Навье – Стокса и неразрывности принимает следующий вид:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i,k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{i,k} \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Где μ – коэффициент динамической вязкости (*сдвиговая вязкость*), ζ – «*вторая вязкость*», или *объёмная вязкость*, $\delta_{i,k}$ – дельта функция Кронекера.

Основные механизмы переноса теплоты.

Как правило, сложные процессы переноса теплоты можно разделить (или представить в виде суперпозиции) на три более простых физически, внутренне однотипных, способа: *теплопроводность*, *конвекция* и *тепловое излучение*.

1. Теплопроводность.

В неизотермических макроскопических системах, или, другими словами, в вещественной среде с неоднородным полем температуры T , возникает обмен внутренней энергией между отдельными элементами и между областями рассматриваемой среды – самопроизвольный необратимый процесс распространения теплоты в пространстве – тепловой поток. Это могут быть: 1-нестационарные процессы релаксации – затухание внесенных в систему тепловых возмущений; 2 – установившиеся процессы – при наличии внешних возобновляемых источников энергии, т.е. поддерживается постоянный перепад температуры между границами области или задан постоянный тепловой поток на стенках, который передается через рассматриваемую область. Когда нет больших скоростей течения, физико-химических превращений, взаимной диффузии, разнородных веществ и т.п., тепловой поток направлен из области с более высокой температурой в область с низкой температурой – т.е., это наблюдается очень просто, без маскировки сути процесса, в элементарно простых ситуациях.

Теплопроводность (кондукция) – молекулярный перенос теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры. Т.е., это процесс распространения энергии только вследствие взаимодействия структурных частиц (молекул, ионов, атомов, свободных электронов). В чистом виде теплопроводность имеет место в твердых телах и в неподвижных слоях жидкости и газа. Явление теплопроводности – передача тепловой энергии происходит при непосредственном соприкосновении между частицами тела или отдельных тел, имеющих различные температуры.

В жидкостях и твердых телах – диэлектриках, перенос энергии осуществляется путем упругих волн (колебания “решетки”).

В газах – путем диффузии атомов или молекул.

В металлах – путем диффузии свободных электронов, а роль упругих колебаний кристаллической решетки здесь второстепенна.

В жидкостях и газах в чистом виде механизм теплопередачи в режиме молекулярной (кондуктивной) теплопроводности может быть реализован лишь в условиях, исключающих перенос теплоты конвекцией, а так же лучистого (радиационного) теплообмена. Это возможно в условиях теоретической невесомости или в трудно реализуемых экспериментально условиях: для систем, находящихся в поле тяжести и подогреваемых сверху, так чтобы отсутствовали радиальные (горизонтальные) градиенты температуры. То же можно реализовать при подогреве снизу тонких слоев при отсутствии градиентов температуры в направлении, нормальном силе тяжести, и при значениях градиента температуры ниже критических.

2. Конвекция (перемешивание) – процесс переноса теплоты вследствие перемещения относительно больших масс вещества в неоднородном поле температур.

3. Теплообмен излучением (лучистый или радиационный ТО) – процесс переноса энергии, выделившейся вследствие теплового движения в веществе, в виде электромагнитных волн через полностью или частично прозрачную для них среду.

(Закон смещения Вина) Видимая часть электромагнитного спектра излучений лежит в диапазоне длин волн $(3.8 \div 7.6) \times 10^{-7} \text{ м}$ или $(0.38 \div 0.76) \text{ мкм}$.

При пропускании электротока через тонкую нить при 900K $\lambda_{\text{max}} = 3.2 \times 10^{-6} \text{ м}$ – это в ИК диапазоне, при 1000K нить красная, при 1600K и выше нить кажется раскаленной добела.

Поверхность Солнца имеет $T = 5800\text{K}$ $\lambda_{\text{max}} = 5.2 \times 10^{-7} \text{ м}$ – это середина видимой области.

Основные законы излучения построены применительно к абсолютно черному телу и при условии термодинамического равновесия [4,13,15]. Испускание энергии по разным длинам волн происходит неравномерно. Так

же оно зависит от температуры. Это описывается законом Планка, полученным из статистической термодинамики:

$$E_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1)} \quad (a)$$

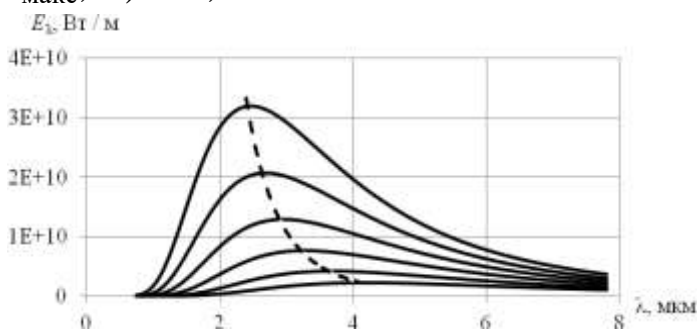
Здесь T – абсолютная температура тела, $k = 1,38 \times 10^{-23}$ – постоянная Больцмана. Для этого закона можно выделить два предельных случая.

Для малых длин волн ($\lambda T \ll hc/k$): $E_{\lambda} \approx 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \exp(-hc/\lambda kT)$ – закон Вина.

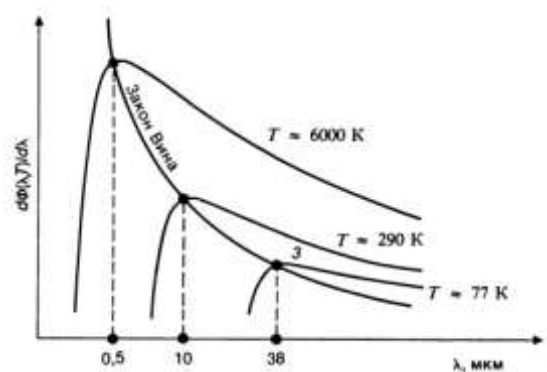
Для больших длин волн: $E_{\lambda} \approx 2\pi c k T \lambda^{-4}$ – закон Релея-Джинса.

Закон Стефана – Больцмана получается интегрированием (a) по всем длинам волн и выражает полную плотность потока излучения черного тела при температуре T : $E_T = \sigma T^4$. Где постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 c^2 h^3 = 5,67 \times 10^{-8}$ Вт/(м²×К⁴).

Если графически изобразить закон Планка в виде разных изотерм, каждая изотерма будет иметь максимум (рис.а). Закон смещения Вина описывает их положение. Аналитическое выражение этого закона можно получить путем дифференцирования закона Планка: $T\lambda_{\text{макс}} = 2,898 \times 10^{-3}$ м×К. Соответствующее $\lambda_{\text{макс}}$ значение спектральной плотности потока: $E_{\lambda}(\lambda_{\text{макс}}, T) = 1,286 \times 10^{-5} T^5$.



а - Закон Планка: верхняя изотерма температура $T = 1200$ К, нижней – 700 К.



б - Зависимости излучательной способности черного тела от длины волны излучения при разных температурах

Закон смещения Вина: кривая проходит через максимальные значения изотерм

Рис. Закономерности излучения абсолютно черного тела

Обычные тела в общем случае не являются абсолютно черными. Тела, поглощающие только часть падающего на них излучения, называются серыми. В связи с этим, законы излучения применимы для них только с учетом поправок. От падающего излучения серые тела поглощают только часть $A(\lambda)$, отражают часть $R(\lambda)$ и пропускают часть $T(\lambda)$. Эти коэффициенты зависят от длины волны. Если система находится в состоянии термодинамического равновесия, то в связи с законом сохранения энергии, тело будет излучать энергию, накапливаемую

поглощением. В связи с этим вводится спектральный коэффициент излучения $\varepsilon(\lambda)$, компенсирующий $A(\lambda)$.

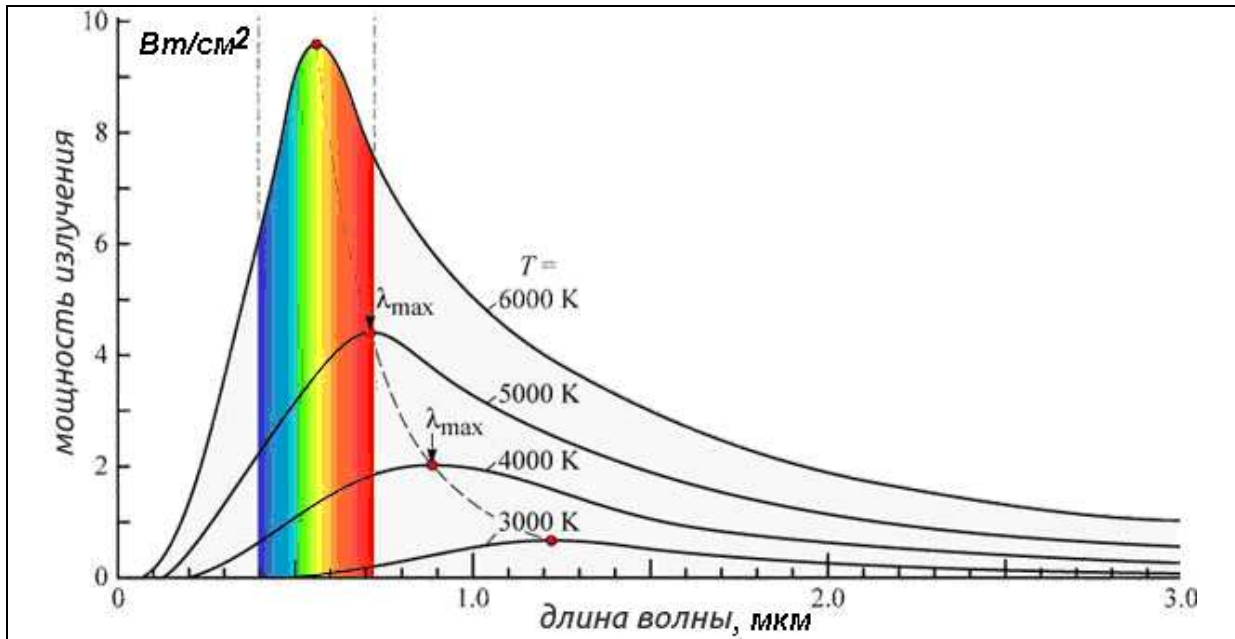


Рис. Спектр излучения абсолютно чёрного тела

Спектральная плотность потока излучения от любого тела связана со спектральной плотностью потока излучения черного тела: $E_\lambda = \varepsilon(\lambda)E_\lambda^{\text{ч. т.}}$. Здесь $E_\lambda^{\text{ч. т.}}$ – спектральная плотность излучения абсолютно черного тела, определяемая законом Планка.

Электромагнитное излучение любой длины волны обусловлено колебаниями заряженных частиц в веществе. Оно всегда сопровождается потерей энергии. Чтобы поддерживать излучение неизменным, можно компенсировать эти потери нагреванием. При такой компенсации излучение называют тепловым. Тепловое излучение испускается всеми объектами, чья температура выше абсолютного нуля.

Изучение проблемы излучения твердого тела опирается на понятие (абсолютно) черного тела. Так называют объект, способный поглотить все падающее на него излучение независимо от своей температуры и длины волны излучения. Такое тело по закону Кирхгофа является идеальным излучателем, а его спектр излучения описывается законом Планка:

$$\frac{d\Phi(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (1.1)$$

Здесь $d\Phi(\lambda, T)/d\lambda$ – спектральная поверхностная плотность потока излучения, $h = 6.6256 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка, $k = 1.38054 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана, $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света, T – абсолютная температура черного тела. Кривая $d\Phi(\lambda, T)/d\lambda$ при фиксированном значении T проходит через максимум.

Смещение этого максимума при изменении температуры описывается законом Вина, полученного дифференцированием (1.1). После несложных расчетов получается: $\lambda_{\text{макс}} = 2898/T$ мкм.

Большинство окружающих нас объектов излучают преимущественно в инфракрасном диапазоне (область инфракрасного излучения: ближняя область 0.75 – 1.5 мкм, средняя 1.5 – 20 мкм, дальняя 20 – 1000 мкм). Так диапазон термографии примерно от -50°C и до более 2000°C .

Полный поток излучения, описываемый законом Стефана – Больцмана, получается интегрированием (1.1) по λ в пределах от нуля до бесконечности:

$$\Phi(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 = 5.67 \cdot 10^{-12} \cdot T^4 \text{ Вт/см}^2 \cdot \text{К} \quad (1.2)$$

Также стоит отметить, что поток, приходящийся на длину волны большую, чем $\lambda_{\text{макс}}$ составляет 75% всего потока.

Можно заключить, что, измеряя поток излучения тела, можно определить его температуру. На практике для регистрации инфракрасного излучения чаще всего применяются КМОП-матрицы, работающие в инфракрасном диапазоне с длиной волны 0.9 – 14 мкм. (CMOS (Complementary Metal-Oxide-Semiconductor) матрица – это светочувствительная матрица, изготовленная по технологии комплементарной металл-оксид-полупроводник структуры (КМОП)) В этом случае поток будет представляться интегралом (1.1) по некоторому рабочему интервалу $\Delta\lambda$:

$$\Phi_{\Delta\lambda}(T) = \int_{\Delta\lambda} \frac{d\Phi(T, \lambda)}{d\lambda} d\lambda.$$

Понятия «теплоотдача» и «теплопередача».

Теплоотдача – процесс теплообмена между средами, разделенными отчетливой границей: твердая стенка – текучая среда; поверхность раздела жидкость – газ или двух несмешивающихся жидкостей.

Теплопередача – процесс теплообмена между нагретыми до разных температур средами, разделенными некоторой перегородкой: две текучие среды, разделенные твердой стенкой. Или две стенки, разделенные прослойкой текучей среды.

Теплопроводность. В основу изучения процесса теплопроводности положен феноменологический метод, игнорирующий микроскопическую структуру вещества и рассматривающий его как сплошную среду (континуум). Роль конкретной среды учитывается коэффициентами, определяемыми непосредственно из опыта. Получение макроскопических характеристик по заданным микроскопическим свойствам среды – задача

статистического метода. Конечные расчетные соотношения возможно получить лишь для простейших физических моделей вещества. Реализация метода требует знания ряда параметров, определение которых является предметом исследования специальных разделов физики.

Поле температуры. Исследование теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного изменения температуры T в макроскопически неподвижной среде, т.е. к нахождению уравнения

$$T=f(x,y,z,t) \quad (6)$$

Уравнение (6) – математическое описание температурного поля, т.е. совокупности значений T во всех точках изучаемого пространства для каждого момента времени.

Стационарное и нестационарное поле T . Если тепловой режим установился, то T в каждой точке поля не меняется во времени – поле стационарное. В этом случае: $T = f(x,y,z)$; $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (7)

Отсюда очень просто представимы понятия: пространственное, одномерное, двумерное поле T .

Градиент температуры. Если соединить точки тела, имеющие одинаковые значения температуры T , получим поверхности равных T – *изотермические поверхности*. Т.к. одна и та же точка тела не может иметь одновременно разные T , то *изотермические поверхности не пересекаются*. Они либо оканчиваются на поверхности тела, либо целиком располагаются внутри тела. Пересечение изотермических поверхностей плоскостью дает на этой плоскости семейство *изотерм*. Они так же не пересекаются и не обрываются. Примеры приведены на рис.1.5.

Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Наибольший перепад температуры на единицу длины существует в направлении нормали к изотермической поверхности. Возрастание температуры в направлении нормали к изотермической поверхности характеризуется *градиентом температуры* – *вектором, нормальным к изотермической поверхности и направленным в сторону возрастания* температуры T и численно равным производной от T

по этому направлению: $gradT = \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n}$ (8)

\vec{n}_0 – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности.

Примеры распределений векторов локальных тепловых потоков (обратных по направлениям градиентам температуры) показаны на рис.1.6. Значения $\frac{\partial T}{\partial n}$ не одинаковы для различных точек изотермической

поверхности – они больше там, где расстояние между изотермами меньше. Скаляр $\frac{\partial T}{\partial n}$ также называют градиентом T .

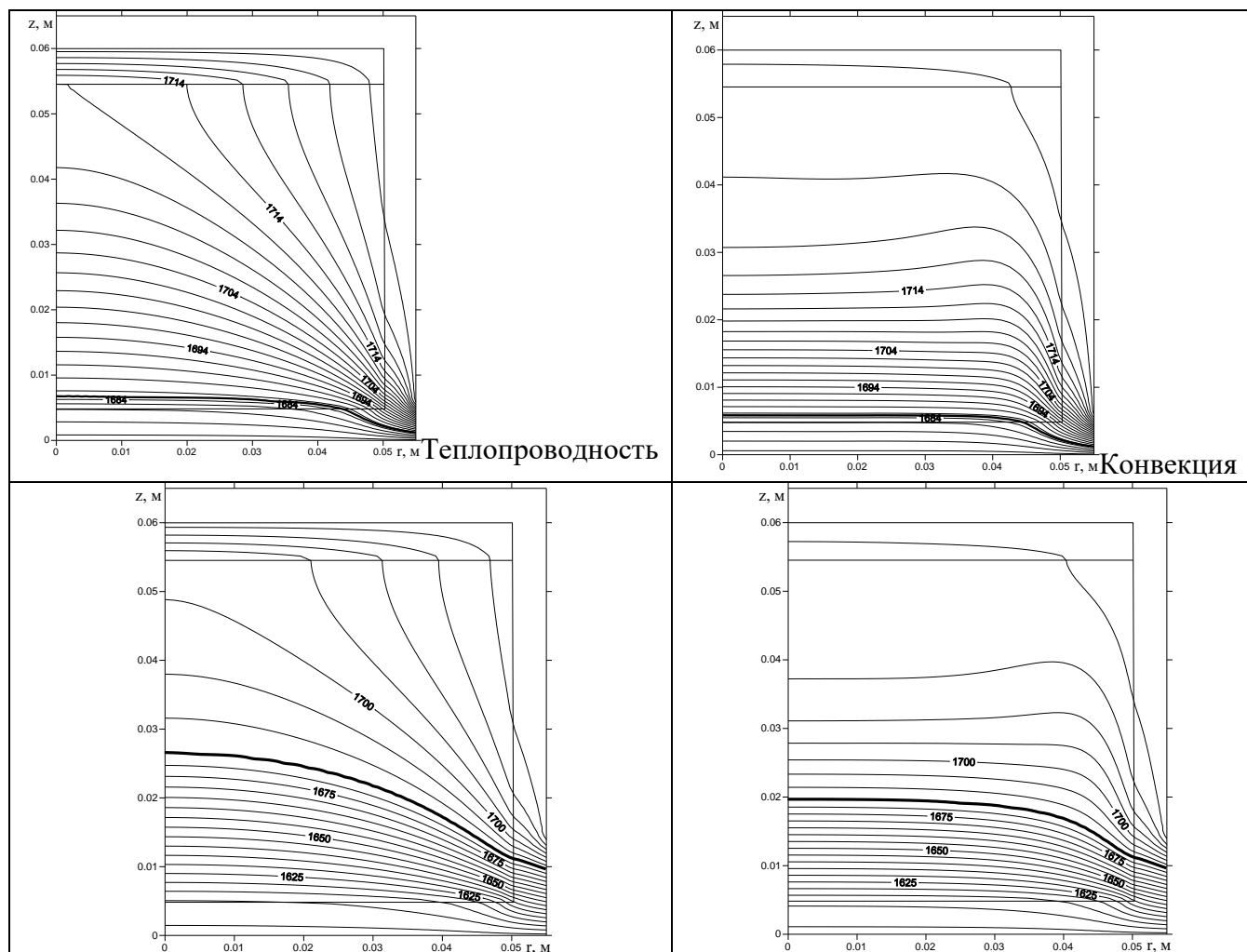


Рис.1.5. Примеры рассчитанных сопряженных полей температуры (семейства изотерм) в стенках графитового контейнера в расплаве кремния и в затвердевшем массиве кремния в придонной охлаждаемой области в режимах теплопроводности (колонка слева) и термогравитационной конвекции (справа). Слева ось симметрии. Фронт кристаллизации в разные моменты времени (ряд сверху – момент выхода изотермы $T_{кр}$ к границе раздела дно тигля - расплав) показан жирной изотермой.

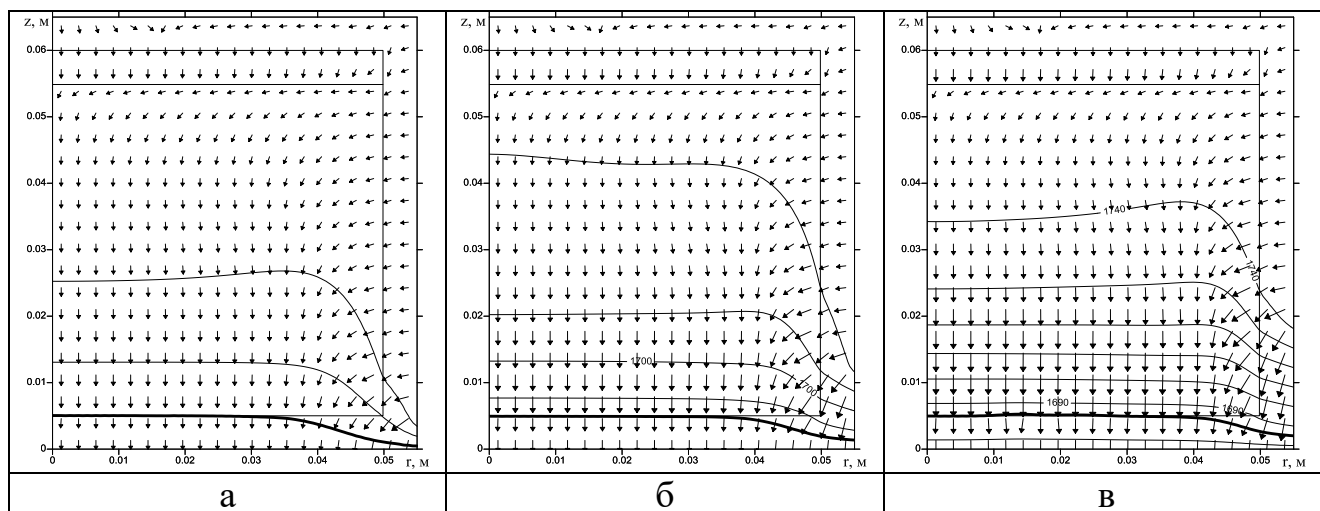


Рис.1.6. Примеры рассчитанных полей температуры (семейства изотерм) в режимах термогравитационной конвекции. Показаны направления тепловых потоков в момент зарождения кристалла: 18,5 мин (а), 53,5 мин (б), 87,5 мин (в). Начальный перегрев расплава $\Delta T_H \approx 15K$ (а), $\Delta T_H \approx 40K$ (б), $\Delta T_H \approx 75K$ (в).

Тепловой поток. Закон Фурье. Для возникновения процесса передачи теплоты теплопроводностью необходимо неравенство нулю $gradT$ в различных точках тела. Согласно гипотезе Фурье количество теплоты dQ_t [Дж], проходящее через элемент изотермической поверхности dF за промежуток времени dt , пропорционально $gradT$:

$$dQ_t = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt \quad (9)$$

Экспериментально установлено, что коэффициент пропорциональности в уравнении (9) – λ – физический параметр вещества. Он характеризует способность вещества проводить теплоту и называется *коэффициентом теплопроводности*. Количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности, \vec{q} , [Вт/м²] называется *плотностью теплового потока*:

$$\vec{q} = \frac{dQ_t}{dF dt} = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (10)$$

положительное направление q совпадает с направлением убывания температуры T .

Т.о., векторы \vec{q} и $gradT$ лежат на одной прямой, но направлены в противоположные стороны. Линии теплового потока ортогональны к изотермам – это линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора \vec{q} (рис.1.5). Опыты подтверждают гипотезу Фурье. Поэтому уравнение (9) так же, как и уравнение (10) являются математической записью *основного закона теплопроводности*: *плотность теплового потока пропорциональна $gradT$* . Количество теплоты, проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность F , называется *тепловым потоком*. Если $gradT$ для различных точек изотермической поверхности различен, то

$$Q = \int_F q dF = - \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF, \quad [\text{Вт}] \quad (11)$$

Полное количество теплоты Q_t , [Дж], прошедшее за время t через изотермическую поверхность F , равно:

$$Q_{\tau} = - \int_0^t \int_F \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF dt \quad (12)$$

Количество теплоты, проходящее через элементарную площадку dF_l , расположенную под углом φ к плоскости, касательной к изотермической поверхности, определяется той же формулой (12), если учесть, что

$$q_l = q \cos \varphi = \frac{dQ_t}{dt} \frac{1}{dF} \cos \varphi = \frac{dQ_t}{dt} \frac{1}{dF_l} \quad (13)$$

Т.к. $df = dF_l \cos \varphi$ – проекция dF_l на изотермическую поверхность, то количество теплоты через элементарную площадку dF_l за dt :

$$dQ_t = q_l dF_l dt = q (dF_l \cos \varphi) dt = q dF dt$$

Из (13) следует, что самой большой плотностью теплового потока будет та, которая рассчитана вдоль нормали к изотермической поверхности. Если такой поток спроектировать на оси Ox, Oy, Oz то, согласно уравнению (12), получим:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} ; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} ; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (14)$$

Тепловые потоки, выраженные уравнениями (14), являются составляющими вектора плотности теплового потока:

$$\vec{q} = \vec{i}q_x + \vec{j}q_y + \vec{k}q_z \quad (15)$$

Т.о., для нахождения количества теплоты, проходящего через какую-либо поверхность тела, необходимо знать поле температуры внутри рассматриваемого тела.

Коэффициент теплопроводности λ является физическим параметром вещества и в общем случае может быть функцией давления P , температуры T и рода вещества. Методы измерения λ основаны на измерении теплового потока и градиента температуры T в исследуемом веществе. Коэффициент λ [Вт/м·К] при этом определяется из соотношения:

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|\text{grad}T|} \quad (16)$$

Из (16) следует, что коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени, через единицу изотермической поверхности при температурном градиенте, равном единице.

Значения λ (порядки величин):

для газов $0,006 \leq \lambda \leq 0,6$ [Вт/м·К];

для капельных жидкостей $0,07 \leq \lambda \leq 0,7$ [Вт/м·К];

для металлов: титан $\lambda = 15,1$ [Вт/м·К], серебро $\lambda = 419$ [Вт/м·К].

Опыты показывают, что для многих материалов с достаточной для практики точностью зависимость коэффициента теплопроводности от температуры можно принять линейной:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(T - T_0)] \quad (17)$$

$\lambda_0 = \lambda(T_0)$; $b = const$, определяется только экспериментально.

С ростом температуры у жидкостей λ снижается, кроме воды и глицерина. Для газов из кинетической теории, если \bar{v} – средняя скорость перемещения молекул; l – средняя длина свободного пробега между соударениями; c_v – теплоемкость при $V = const$; ρ – плотность, то $\lambda = i\bar{v}l\rho c_v/3$. Для одноатомного газа $i = 5/2$; $c'_v = 3/2R'$. Для многоатомных $i = (9K - 5)/4$; $K = c'_p/c'_v$ – отношение молярных теплоемкостей для одноатомного газа $\lambda = \left(\frac{5}{2}\right)\mu\left(\frac{3}{2}\right)R' = \frac{15}{4}R'\mu$, где μ – вязкость; R' – универсальная молярная газовая постоянная.

С увеличением давления произведение $\bar{l}\rho$ остается практически постоянным (ρ – увеличивается, а l – уменьшается), поэтому λ заметно не меняется с изменением P , за исключением $P < 2,66 \cdot 10^3 \text{ Па}$ и $P > 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$.

$$\bar{w} = \sqrt{\frac{3R'_\mu T'}{\mu}}; \quad R'_\mu = 8314,2 \frac{\text{Дж}}{\text{к} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}; \text{здесь } \mu - \text{молекулярная масса газа.}$$

C_v газа растет с ростом T , поэтому λ газа растет с T . У гелия и водорода λ выше в 5-10 раз, $\lambda_{\text{H}_2} \leq 0,15$ при $-180 \leq T \leq 100$ чем у других газов: молекулярная масса μ – ниже, а \bar{w} больше;

$$\text{Для жидкостей: } \lambda = AC_p \rho \frac{4}{3} / \mu^{\frac{1}{3}}.$$

Коэффициент A пропорционален скорости распространения упругих волн в жидкости, но зависит от температуры T , $AC_p \approx const$, $\rho(T)$ убывает с T , следовательно и λ убывает с T .

У металлов λ с ростом T – падает, как и электропроводность, уменьшается теплопроводность и при наличии примесей: например, у чистой меди $\lambda = 396 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$, а со следами мышьяка $\lambda = 142 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$.

В диэлектриках λ растет с ростом T . Пористые вещества и порошки:

Асбест $\rho = 400 - 800 \text{ кг/м}^3 \rightarrow \lambda (0,105 \div 0,248 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$; сухой кирпич $\lambda = 0,35 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$; вода $\lambda = 0,60 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$; для влажных кирпичей $\lambda = 1,0 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$

Строительные и теплоизоляционные материалы $\lambda < 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$

Дифференциальное уравнение теплопроводности.

При выводе уравнения теплопроводности выделяется в объеме среды контрольный объем (КО – рис.1.7) $dV = dxdydz$.

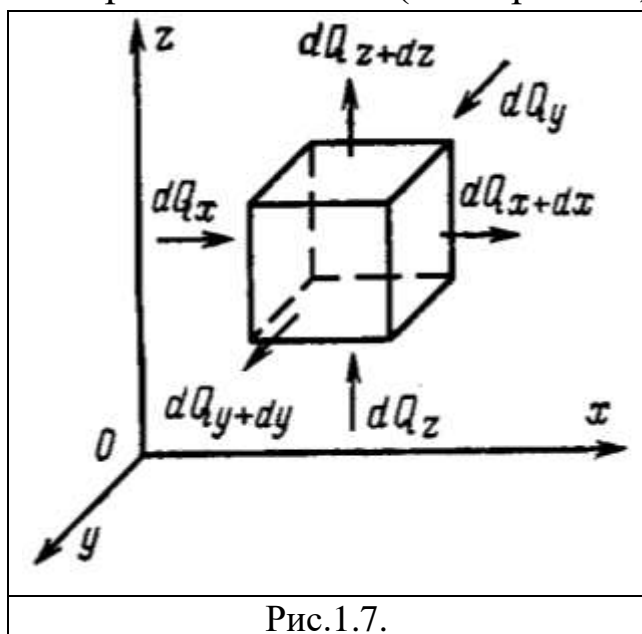


Рис.1.7.

При выводе предполагаем, что: 1- тело однородно и изотропно; 2 - физические параметры среды постоянны; 3 - деформация, связанная с изменением T , мала по сравнению с самим объемом; 4 - внутренние источники теплоты (при их наличии) распределены равномерно $q_v = f(x, y, z, t)$.

В основе вывода – закон сохранения энергии: количество теплоты dQ , введенное в объем dV извне за время dt вследствие теплопроводности и от

внутренних источников (в зависимости от рода процесса: изохорного или изобарного) равно изменению внутренней энергии (при $V = const$) или энтальпии (теплосодержания) вещества (при $P = const$), содержащегося в dV : $dQ_1 + dQ_2 = dQ$; dQ_1 – за счет теплопроводности; dQ_2 – внутренние источники.

Количество теплоты, подводимое к граням dV за dt в направлениях Ox, Oy, Oz обозначим как dQ_x, dQ_y, dQ_z , а $dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}$,

соответственно, отводится через противоположные грани, если q_x – проекция плотности теплового потока на направление нормали к грани

$dydz$ (по оси x), то к этой грани подводится $dQ_x = q_x dydzdt$, а $dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt$ отводится через противоположную грань. Разница между количеством теплоты, подведенным и отведенным за время dt в направлении Ox : $dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x dydzdt - q_{x+dx} dydzdt$

функция q_{x+dx} является непрерывной в интервале dx и может быть

разложена в ряд Тэйлора: $q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \dots$

если ограничимся двумя первыми членами ряда, то

$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydzdt$. Аналогично по двум другим направлениям. В

результате имеем, что количество теплоты, подведенное к dV в результате теплопроводности

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dydzdt$$

При рассмотрении изобарного процесса вся теплота, подведенная к КО, уйдет на изменение энтальпии (теплосодержания) вещества, заключенного в этом объеме, тогда:

$$dQ = dH = dQ_1 + dQ_2$$

$$dH = C_p \frac{\partial T}{\partial t} dt dV = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dV = \rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dV$$

отсюда получили: $\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\text{div} \vec{q} + q_v,$

или $\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v$

Это уравнение является самым общим дифференциальным уравнением энергии для изобарного процесса переноса теплоты.

Если $q_{x_i} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$, проекции вектора плотности теплового потока на

координатные оси Ox, Oy, Oz , то отсюда элементарно получаем уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c_p \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c_p \rho}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_p} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{q_v}{\rho c_p}$$

Если $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c \rho} \quad (18)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Коэффициент температуропроводности $a \left[\text{м}^2 / \text{с} \right]$ – физический параметр вещества, он существенен для нестационарных тепловых процессов и характеризует скорость изменения температуры T . Если коэффициент теплопроводности λ характеризует способность проводить теплоту, то a является мерой теплоинерционных свойств тела. Из уравнения (18) следует, что изменение $T(t)$, т.е. $\frac{\partial T}{\partial t}$ для любой точки пространства пропорционально a .

Если $q_v = 0$, то уравнение (18) принимает форму уравнения Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T,$$

если есть q_v , но состояние стационарное, то получаем уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

При стационарной теплопроводности и $q_v = 0$, получаем уравнение Лапласа: $\Delta T = \nabla^2 T = 0$.

Условия однозначности для процессов теплопроводности.

Т.к. дифференциальное уравнение теплопроводности выведено из общих законов физики, то оно описывает явление теплопроводности в самом общем виде, т.е. целый класс явлений теплопроводности. Чтобы

выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются условиями однозначности или краевыми условиями.

Эти условия включают в себя:

1) геометрические условия, характеризующие форму и размеры тела, в которых протекает процесс; этими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором протекает процесс.

2) физические условия, характеризующие физические свойства среды и тела; этими условиями задаются физические параметры тела (λ, c, ρ и др.) и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

3) временные (начальные) условия, характеризующие распределение T в изучаемом теле в начальный момент времени. Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения T внутри тела в начальный момент. В общем виде начальные условия аналитически могут быть записаны следующим образом: при $t = 0$; $T = f(x, y, z)$. При равномерном распределении T в теле начальное условие упрощается: при $t = 0$, $T = T_0 = const$.

4) граничные условия, характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой. Они могут быть заданы несколькими способами.

Граничные условия первого рода. Задаются распределение T на поверхности

тела для каждого момента времени $T_c = f(x, y, z, t)$, где T_c – температура на поверхности тела; x, y, z – координаты поверхности.

Частный случай $T_c = const$.

Граничные условия второго рода. Задаются значения теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени

$q_n = f(x, y, z, t)$; q_n – плотность теплового потока на поверхности тела.

Частный случай $q_n = q_0 = const$.

Граничные условия третьего рода. Задаются T окружающей среды T_∞ и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Граничные условия третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения и нагревания тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью и средой используется закон Ньютона-Рихмана.

Процесс сложный, многопараметрический. Согласно закону Ньютона-Рихмана количество теплоты, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела

t_c и окружающей среды $t_{жс}$:

$$(t_c > t_{жс}) \quad q = \alpha(t_c - t_{жс}) \quad (19)$$

α – коэффициент теплоотдачи, [Вт/м²К] (коэффициент пропорциональности), характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно равен количеству теплоты, отдаваемому единицей поверхности в единицу времени при

$$\Delta T = 1K; \quad \langle \alpha = q / (t_c - t_{жс}) \rangle.$$

Согласно закону сохранения энергии количество теплоты, которое отводится с единицы поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела.

$$\alpha(T_c - T_{жс}) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_c \quad (20)$$

n – нормаль к поверхности тела; индекс «с» указывает, что T и $gradT$ относятся к поверхности тела. Окончательно граничные условия третьего рода

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_c - T_{жс}) \quad (21)$$

по существу это частное выражение закона сохранения энергии для поверхности тела.

Встречаются случаи, когда ни одно из перечисленных граничных условий задать невозможно. Тогда для определения теплового взаимодействия приходится решать сопряженную задачу. При решении таких задач должны выполняться условия равенства T и q по обе стороны от границы раздела сред. В общем случае условия сопряженности:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\Gamma = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\Gamma + q_v(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t) \quad (22)$$

$$T_1(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t) = T_2(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t)$$

q_v – источник теплоты на поверхности границы.

При $q_v = 0$

$$\lambda_1 \left(-\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\Gamma = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\Gamma \quad (23)$$

$$T_1(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t) = T_2(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, t)$$

Т.е. решение сопряженных задач связано с нахождением полей T по обе стороны границы раздела при условии неразрывности температуры и тепловых потоков на границе раздела стенка-жидкость.

Дифференциальное уравнение (18) с заданными условиями однозначности дает полную математическую формулировку краевой задачи теплопроводности.

Конвективный теплообмен. Основные понятия и вывод уравнения энергии.

Под *конвекцией теплоты* понимается перенос теплоты при перемещении макрочастиц жидкости или газа в пространстве из области с высокой температурой в область с низкой температурой или наоборот. Например, от нагретой стенки через достаточно большой объем текучей среды в область с низкой температурой или к холодной стенке, или в каналах и трубах при течениях в системах, аналогичных водяному обогреву. Конвекция возможна только в текучей среде, в которой перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Физические свойства жидкости, влияющие на процесс теплообмена: λ , C_p , ρ , α . И свойства, характеризующие течение жидкости или газа – вязкость динамическая и кинематическая, объемная в случае сжимаемой среды.

Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена.

Если в единицу времени через единицу контрольной поверхности нормально к ней проходит масса жидкости $\rho \vec{w}$, кг/м²с, то вместе с ней переносится тепло. Плотность конвективного теплового потока в произвольном направлении по определению:

$$\vec{q}_{\text{конв}} = \rho \vec{w} h \quad (24)$$

Конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью.

В результате конвективный теплообмен описывается уравнением:

$$\vec{q} = \vec{q}_\lambda + \vec{q}_{\text{конв}} = -\lambda \nabla T + \rho \vec{w} h \quad (25)$$

Из уравнения (25) следует, что плотность теплового потока в любой точке жидкости для каждого момента времени однозначно определяется, если

известны поля T, \vec{w} и удельной энтальпии h . Связь между T и h определяется из термодинамических соотношений:

$$dH = C_p(\partial T/\partial t)dtdV = c_p\rho (\partial T/\partial t)dtdV = \rho(\partial h/\partial t) dtdV$$

т.е. они позволяют установить связь между полем T и полем h . Чтобы аналитически установить связь между полем T или h и \vec{w} и определить \vec{q} необходимо располагать соответствующими уравнениями.

2. Уравнение энергии.

Выведем дифференциальное уравнение, описывающее поле температуры в движущейся жидкости. Будем полагать, что жидкость *однородна и изотропна*, ее физические параметры постоянны, *энергия деформации* мала по сравнению с изменением *внутренней энергии*. Выделим в потоке жидкости неподвижный относительно системы координат элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz . Через грани параллелепипеда теплота переносится теплопроводностью и конвекцией. В общем случае в объеме dV может выделяться теплота внутренними источниками за счет энергии, внешней по отношению к рассматриваемой жидкости.

Вывод уравнения энергии соответствующего принятым условиям выше уже рассматривался. Для изохорного и изобарного процессов выполняются термодинамические соотношения для *внутренней энергии* U

при изохорном процессе:
$$dU = C_v \frac{\partial T}{\partial t} dtdV = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} dtdV$$

и для энтальпии при изобарном процессе.

Для реальной жидкости *энтальпия* $h = h(T, P)$ и согласно понятию о полном дифференциале $dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T dP$. Из дифференциальных уравнений термодинамики и определения коэффициента теплового расширения $\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \right] = \frac{1}{\rho} [1 - \beta T]_P$,

для многих задач $\rho = const$ и можно принять $\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = 0$, т.е.

$$dh = c_p dT \text{ и } h = \int_T c_p dT.$$

Используя эти соотношения, было получено общее уравнение:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} + q_v \quad (26)$$

$$\operatorname{div} \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (27)$$

Согласно уравнению $\vec{q} = \vec{q}_\lambda + \vec{q}_{\text{конв}} = -\lambda \nabla T + \rho \vec{w} h$, тогда для проекций плотности теплового потока \vec{q} на координатные оси Ox, Oy, Oz можно написать:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w_x h; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w_y h; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \rho w_z h \quad (28)$$

Подставляя выражения для q_x, q_y, q_z в уравнение (26) с учетом (27):

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v \quad (29)$$

можно получить (при $\lambda = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial t} = & \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho \left(w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \\ & - \rho h \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v \end{aligned} \quad (30)$$

Для несжимаемых жидкостей $\rho = \text{const}$

$$\operatorname{div} \vec{w} \equiv \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (31)$$

тогда

$$\frac{\partial h}{\partial t} + w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (32)$$

Или, если $dh = c_p dT$, то:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho c_p} \quad (33)$$

Это уравнение, как и уравнение (32) является искомым уравнением энергии, описывающим поле температуры T внутри движущейся жидкости. Обычная (компактная) форма записи этого уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{w} \nabla T = a \Delta T \quad \text{при } q_v = 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части этого уравнения (33) представляет собой полную производную от температуры по времени. Т.к. $T = T(t, x, y, z)$, то на основании понятия о полной производной имеем:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

где $\frac{dx}{dt} = w_x$, $\frac{dy}{dt} = w_y$, $\frac{dz}{dt} = w_z$ т.е. имеют смысл составляющих скорости.

Здесь $\frac{\partial T}{\partial t}$ характеризует изменение T в какой либо точке жидкости во

времени, т.е. это локальное изменение T ; а член $w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z}$

характеризует изменение температуры T при переходе от точки к точке (при макропереносе молей жидкости), т.е. является конвективным изменением температуры.

Применяя обозначение $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T$ уравнение (33) можно записать в форме:

$$\frac{dT}{dt} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho l_p},$$

если $\vec{w} = 0$, то это уравнение переходит в уравнение теплопроводности.

При стационарных конвективных процессах $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Уравнение (33) еще более упрощается, если T изменяется только по одной или двум координатам. Как следует из уравнения (33), поле T в движущейся жидкости зависит от составляющих скорости w_x, w_y, w_z . Чтобы сделать систему уравнений замкнутой, необходимо добавить уравнения, которые описывали бы изменения \vec{w} во времени и пространстве. Такими уравнениями являются *уравнения движения*.

Свободная конвекция.

Уравнения движения были получены без учета зависимости физических параметров жидкости от температуры T , в частности, не учтена зависимость плотности $\rho(T)$. В общем случае, при $\rho \neq const$

необходимо учитывать и энергию деформации КО (т.е. необходимо вводить диссипативную функцию $F(\partial u_i/\partial x_i)$).

Свободная конвекция возникает в рассматриваемом объеме жидкости за счет неоднородности в нем массовых сил. Причиной может быть, например, неоднородность поля температуры и, как следствие *неоднородность плотности*, что приводит в гравитационном поле к пространственно неоднородному полю сил плавучести (сил Архимеда).

Смешанная конвекция – комбинация свободной и вынужденной конвекции, когда на фоне вынужденного течения ощутимо действие сил плавучести.

Для оценки степени *неоднородности плотности* жидкости важно знать величину *теплового расширения* или сжатия (при охлаждении) жидкости при изменениях температуры. Коэффициент объемного расширения при

постоянном давлении $P = const$ $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$, размерность $[\beta] = 1/K$,

коэффициент β сравнительно мал. Для воды при $0^\circ\text{C} \leq t \leq 4^\circ\text{C}$ β имеет отрицательное значение. Для идеального газа $\beta = \frac{1}{T}$. Оценка порядка

величины β : в качестве примера для спиртов этилового и пропилового – для них плотности при различных температурах имеют следующие значения [14]:

$T = 0^\circ\text{C}$	$\rho_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} = 806,25 \text{ кг/м}^3$	и для пропилового: $819,3 \text{ кг/м}^3$
20°C	$789,5 \text{ кг/м}^3$	$803,5 \text{ кг/м}^3$
40°C	$772,2$	$787,5$

Отсюда оценка $\beta_{10^\circ\text{C}} = -(1/\rho_{\text{cp}}) (\Delta\rho/\Delta T) = (1/803) (6,75/20) (1/K) \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$ для этилового спирта.

В то же время движение жидкости в режиме *свободной конвекции* определяется разностью плотностей холодных и нагретых частиц жидкости. Ограничимся приближенным учетом переменности плотности, используя для этого коэффициент теплового объемного расширения β . Будем полагать, что в заданном интервале температуры T коэффициент β является постоянной величиной, не зависящей от T . Это условие лучше выполняется для газов и хуже для капельных жидкостей.

По определению коэффициента теплового объемного расширения

$$\beta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \Delta T}, \text{ где } \rho_0 = \rho(T_0), \rho = \rho(T), \Delta T = T - T_0, T_0 \text{ — некоторая}$$

фиксированная температура. Отсюда следует, что $\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T)$.

Это выражение представляет собой *частный вид уравнения состояния* для жидкостей. Подставляем это выражение в уравнение движения:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}, \text{ в член, учитывающий действие массовых}$$

$$\text{сил и получаем: } \rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho_0 (1 - \beta \Delta T) \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}.$$

Рассмотрим первый справа член последнего уравнения

$$\rho_0 (1 - \beta \Delta T) \vec{g} = \rho_0 \vec{g} - \rho_0 \vec{g} \beta \Delta T.$$

Его можно трактовать как сумму силы тяжести, взятой при определенной плотности и подъемной силы – силы плавучести $\rho_0 \vec{g} \beta \Delta T$ (для единицы объема). Но можно трактовать и как сумму $\rho_0 \vec{g}$ – градиента гидростатического давления P_0 в покоящейся жидкости с ρ_0 и силы плавучести $\rho_0 \vec{g} \beta \Delta T$. Тогда вместо $-(\nabla p - \rho_0 \vec{g})$ можно написать $-\nabla p_1$, $p_1 = p - P_0$. При замене P на P_1 уравнение движения будет учитывать и член $\rho_0 \vec{g}$. Опуская индекс «0» при ρ и индекс «1» при P_1

$$\text{получаем: } \rho \frac{d\vec{w}}{dt} = -\rho \beta \vec{g} \Delta T - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}.$$

После деления левой и правой частей на ρ получаем следующее уравнение движения:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\vec{g} \beta \Delta T - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w} \quad (34)$$

В уравнения движения помимо w_x, w_y, w_z входит еще неизвестная величина P , система уравнений будет замкнутой, если добавить еще одно уравнение – уравнение неразрывности.

Т.о. имеем полную систему уравнений свободной конвекции:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\vec{g} \beta \Delta T - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{w} \nabla T = a \Delta T$$

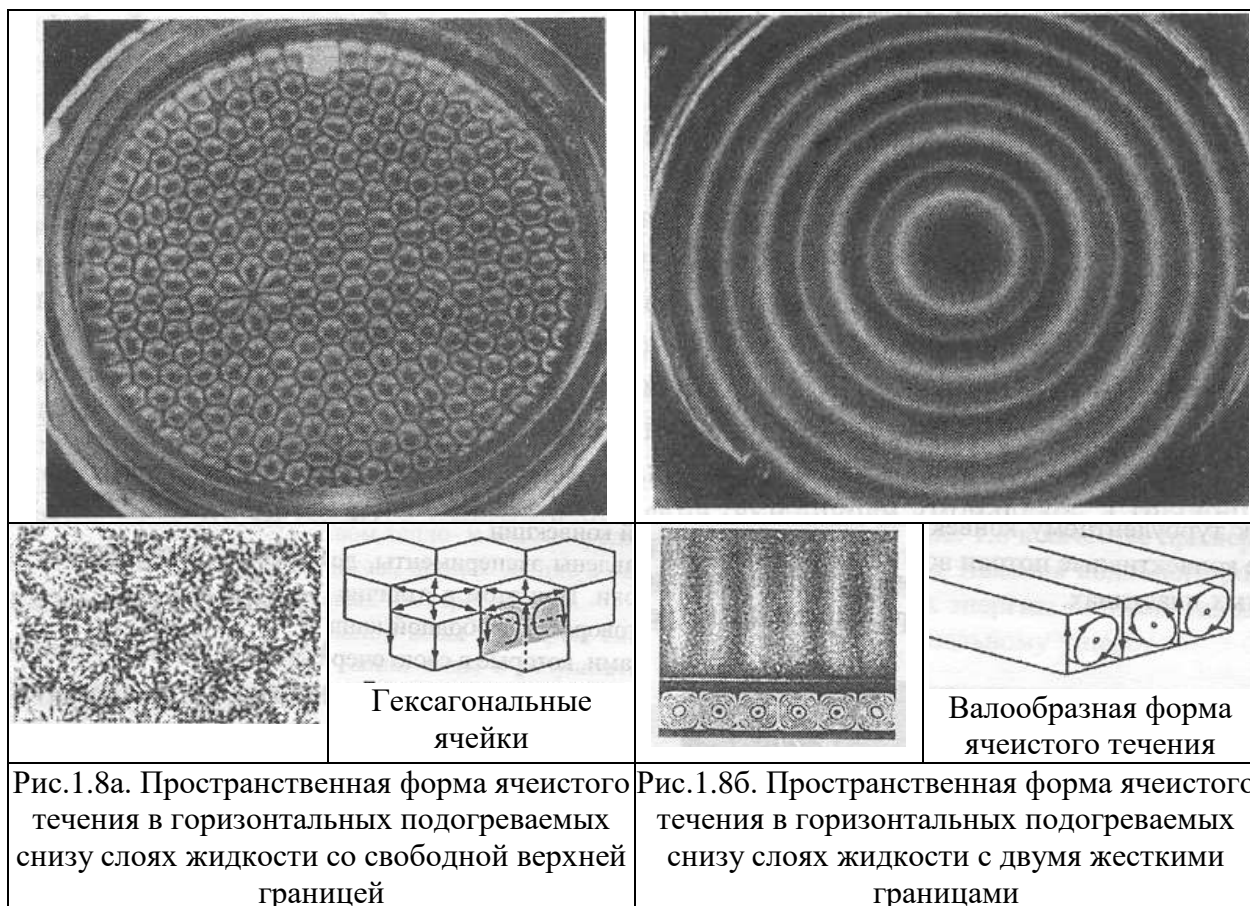
$$\text{div} \vec{w} \equiv \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T)$$

Вначале на качественном уровне рассмотрим основные характеристики процессов переноса тепла, импульса, примеси, в диффузионных и конвективных режимах. Первый пример - Рэлей-Бенаровская конвекция (РБК) в горизонтальных слоях, равномерно подогреваемых снизу. Этот тип конвекции характерен для многих природных объектов: в атмосфере и в океанах, в фотосфере Солнца, в мантии Земли. В технических и технологических системах РБК также встречается очень часто. Вторым примером будет теплообмен в уже рассмотренном выше плоскодонном варианте метода Стокбаргера, который применяется для получения слитков и монокристаллов кремния и многих других материалов. В этом методе при охлаждении дна контейнера фронт кристаллизации продвигается от дна вверх.

При рассмотрении процессов ТМО в технологиях, в различных технических системах и в природных условиях, как правило, рассматривается иерархия моделей – от простой теплопроводности (молекулярной) до режимов сложного сопряженного конвективного теплообмена. Сопряженный теплообмен может включать в себя все механизмы теплопереноса (теплопроводность, конвекцию, тепловое излучение в инфракрасной области длин волн) да еще может быть осложнен наличием фазовых переходов (кристаллизация, кипение, испарение, конденсация, сублимация). В различных физических условиях, таких как скорости течения, расстояния от обтекаемых стенок, теплофизические свойства конкретного газа или жидкости, модели, описывающие свойства текучих сред могут быть относительно простыми, как например, модель идеальной жидкости или вязкие ньютоновские жидкости. Есть среды более сложные, так называемые реологические: например, вязкоупругие и вязкопластичные. Для описания поведения реологических сред существует более 30 основных типов моделей.

В качестве основной модели течений будет рассматриваться РБК – конвекция жидкости или газа в строго горизонтальном слое, равномерно подогреваемом снизу. Задача интересна тем, что до некоторого *критического значения перепада температуры* между горизонтальными границами слоя жидкость в нем неподвижна, несмотря на то, что теплая (и значит более легкая) находится снизу, а холодная сверху. Т.е. наблюдается режим молекулярной *теплопроводности*. Если перепад температуры превышает *критическое значение ΔT (или градиент температуры $\text{grad } T$ превышает критическое значение)*, то возникает ячеистая конвекция, показанная на рис.1.8.



На рис.1.9 режиму молекулярной *теплопроводности* соответствует семейство изотерм, расположенных эквидистантно на расстояниях $\Delta T/n$ (здесь ΔT – перепад температуры между горизонтальными границами слоя жидкости; n – количество уровней температуры, выведенных при построении поля изотерм, включая изотермические границы) и параллельно горизонтальным границам при значении числа Рэлея $Ra = 1000$. Это значение $Ra < Ra_{кр} = 1708$ в случае двух жестких границ слоя. Число Рэлея $Ra = (\beta g \Delta T \cdot h^3) / (a \cdot \nu)$. Теплофизические свойства жидкостей и газов характеризуются числами Прандтля $Pr = \nu / a$.

В определениях *безразмерных критериев подобия - чисел Рэлея и Прандтля* использованы обозначения *размерных параметров*: $\beta = - (1/\rho) \cdot (\partial \rho / \partial T)_p$ – коэффициент объемного теплового расширения жидкости; g – ускорение силы тяжести; ΔT – перепад температуры между границами слоя; h – высота слоя жидкости; ρ – плотность жидкости; λ – коэффициент теплопроводности; C_p – теплоемкость при постоянном давлении; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, $a = \lambda / \rho C_p$ – коэффициент температуропроводности жидкости; $\nu = \mu / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

На рис.1.9 при значениях $Ra = 1708$ и 7600 показано как деформируются изотермы при возникновении конвективного течения и с ростом его интенсивности.

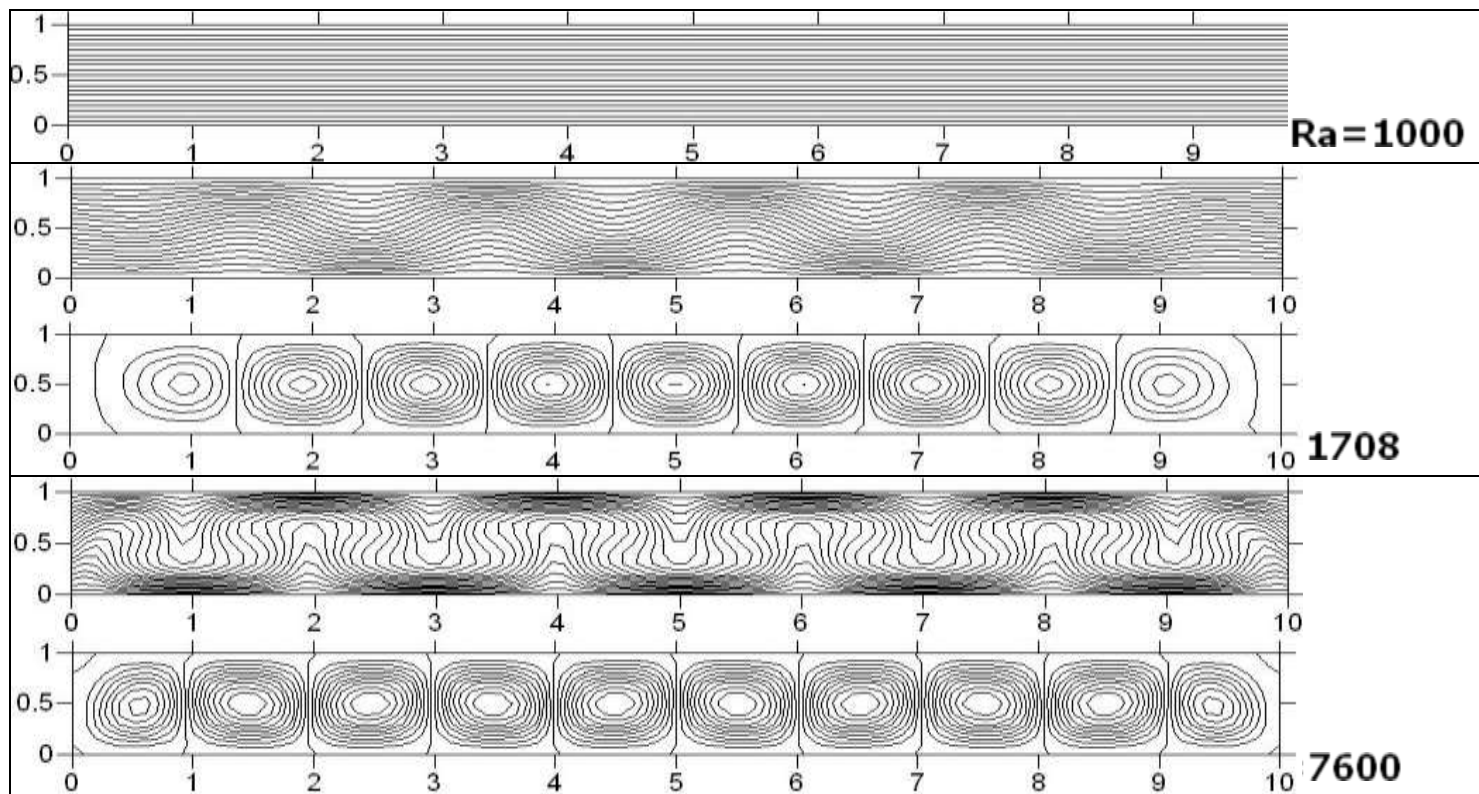


Рис.1.9. Зависимость структуры течения от числа Рэлея в полости $L/H = 10$ при $Pr = 15$: при $Ra = 1708$ и 7600 сверху - изотермы, снизу - изолинии функции тока

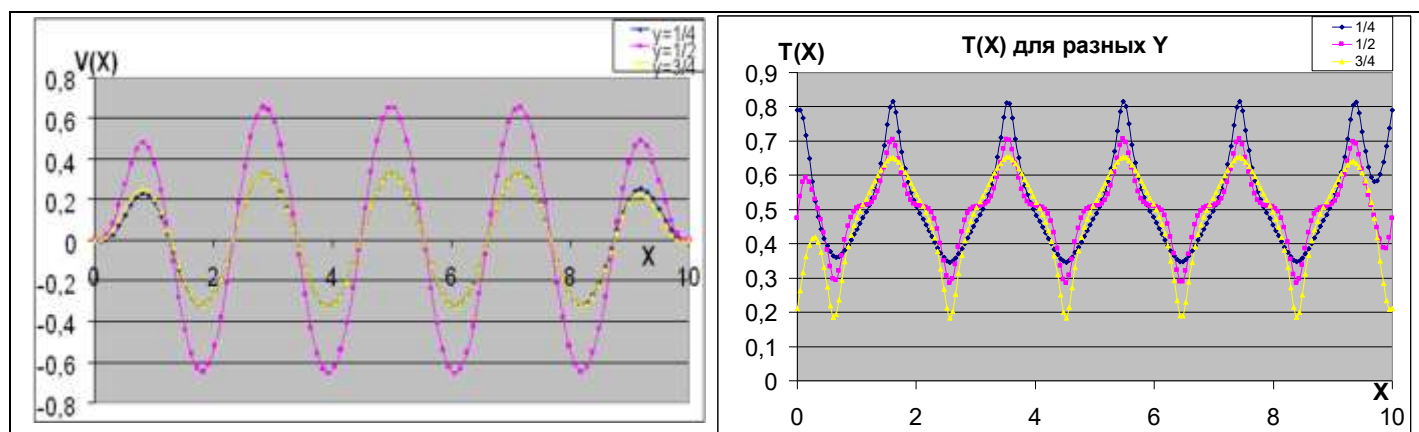
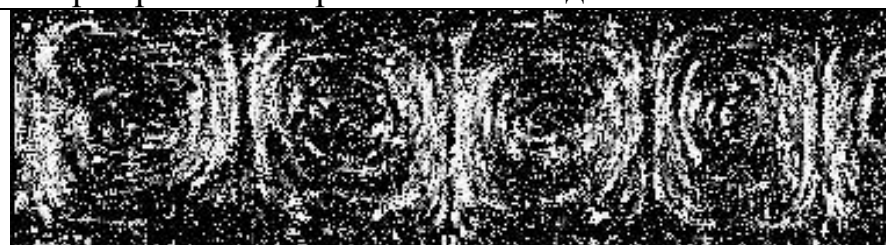


Рис.1.10. Распределения вертикальной компоненты скорости $V(x)$ и температуры $T(x)$ на трех различных расстояниях от дна в полости $L/H = 10$ при $Pr = 15$



$Ra = 47\ 200$

Рис.1.11.Траектории движения жидкости $Pr = 15$ (физический эксперимент)

Пространственная форма двумерного ячеистого течения в режимах стационарного ламинарного течения соответствует распределениям изолиний функции тока, которые при этом совпадают с траекториями движения жидкости.

На рис. 1.10 показаны распределения вертикальной компоненты скорости и температуры в горизонтальном направлении в сечениях по высоте слоя: $y = h/2$, $h/4$ и $3h/4$. Отсюда видно как затягивается вверх горячая жидкость в восходящих потоках и холодная жидкость вниз в нисходящих потоках.

Из сказанного следует постановка задачи об устойчивости механического равновесия (режима теплопроводности) горизонтального слоя, равномерно подогреваемого снизу – задачи Рэлея, с которой начала развиваться теория гидродинамической устойчивости. Эта задача предельно простая демонстрация физической сути постановки задач об устойчивости в гидродинамике.

Рэлеем была решена точно задача об устойчивости механического равновесия слоя относительно бесконечно малых возмущений при действии сил плавучести (сил Архимеда).

Размерные критические значения перепада температуры или градиентов температуры зависят от сорта жидкости, высоты слоя, относительной теплопроводности материала границ и рабочей жидкости, относительных размеров полости.

В безразмерном виде для модели “бесконечный горизонтальный слой” критические значения ΔT или $gradT$ в форме числа Рэлея $Ra = (\beta g \Delta T \cdot h^3) / \alpha \cdot \nu$ имеют универсальные значения. Например, в случае идеально проводящих стенок (с высокой теплопроводностью) число Рэлея не зависит от сорта жидкости: для всех ньютоновских жидкостей в широком диапазоне чисел Прандтля $Pr = \nu / \alpha$ его критическое значение $Ra_{кр} = 1708$. Для случаев слоев с горизонтальными границами низкой теплопроводности значение $Ra_{кр}$ понижается со снижением коэффициента теплопроводности стенок.

Литература

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.Е. Теоретическая гидромеханика. М.: Физ-мат. лит. 1963. Т.1, 2.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука. Глав. Ред. Физ.-мат. лит. 1987.
4. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача, Изд-е 4-е, М.: Энергоиздат, 1981.
5. Юдаев Б.Н. Теплопередача. М.: Высшая школа, 1981 (2-е изд-е).
6. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М.: ИЛ, 1962.
7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
8. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
9. Хант Д. Н. Динамика несжимаемой жидкости. М.: Мир, 1967.
10. Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н. Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. М: Изд-во МГУ, 1986.

11. Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М: Изд-во МГУ, 1989.
12. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Часть I. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.
13. Крейт Ф., Блэк Ч. Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983.
14. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. – 720 с.
15. Госсорг Ж. Инфракрасная термография. Основы, техника, применение: Пер. с франц. М.: Мир, 1988. – 416 с.
16. Спэрроу Э. М, Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. М.: Энергия, 1971. – 294 с.
17. Блох А. Г, Журавлев Ю.А, Рыжков Л.Н. Теплообмен излучением. М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
18. Кухлинг Х. Справочник по физике. М.: Мир
19. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен. М.: Мир, 1964. – 216 с.

Качественное объяснение причины возникновения конвективного течения в подогреваемом снизу слое жидкости.

Неоднородность поля температуры приводит к разнице плотности $\Delta\rho \sim \rho\beta\Delta T$, в результате на элемент с характерным размером d будет действовать подъемная сила (плавучести) $F_{пл} = \Delta\rho gV \sim \rho g\beta\Delta Td^3$.

На всплывающий элемент жидкости при малой скорости возмущения действует сила вязкого трения по Стоксу (как для всплывающего шарика) $W \sim \mu d^2 \mathbf{v}/d = \mu d^2/dt$. Здесь Δt – период времени перемещения элемента на расстояние d со скоростью \mathbf{v} . За этот период времени за счет теплопроводности происходит выравнивание температуры. Убыль запаса энергии $E \sim \rho c_p \Delta T d^3$ в выделенном элементе жидкости за этот интервал времени вследствие теплоотдачи в окружающую среду в режиме теплопроводности $q \sim \lambda \Delta T/d$ через площадь поперечного сечения d^2 . Временной масштаб для этого процесса – $\delta t = E/qd^2 \sim d^2/a$ (здесь $a = \lambda/\rho c_p$). Условием для возникновения неустойчивости в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, является доминирование силы плавучести над вязким сопротивлением $F_{пл} \geq W$ т.е. $\rho g\beta\Delta Td^3 \geq (\mu d^2/a/d^2)C$.

При $d = h$ – высоте слоя жидкости $g\beta\Delta Th^3/av = Ra \geq C = Ra_{кр}$.