Лекция 5_24к3. Устойчивость конвективного движения в вертикальном слое жидкости, заключенном между стенками, нагретыми до разных температур.

В лекции 4 был рассмотрен особый случай, когда в неизотермической системе, находящейся в поле тяжести, сохраняется состояние *механического равновесия*. В этом случае при равномерном по площади подогреве снизу горизонтального слоя жидкости только при критическом значении перепада температуры нарушается устойчивость механического равновесия и возникает ячеистая конвекция. Это исключительный случай, потому что практически всегда в неизотермических системах присутствуют градиенты температуры с составляющими, направленными по нормали к вектору силы тяжести. В этом случае гидродинамические системы абсолютно неустойчивы (в смысле невозможности сохранения механического равновесия при малых перепадах температуры).

Еще одной классической задачей физической гидродинамики является конвективное течение в вертикальном слое жидкости, заключенном между стенками, нагретыми до разных температур. Для бесконечного по вертикали слоя при небольших перепадах температуры между стенками было получено точное решение, устойчивость которого рассматривалась в рамках линейной теории устойчивости. Проводились численные исследования нелинейной стадии развития вторичных течений. До настоящего времени широким фронтом исследуются процессы ламинарно-турбулентного перехода и турбулентные режимы течения и теплообмена. Результаты исследований имеют практическое значение для многих технологических и технических задач, но уже в случаях ограниченных по высоте вертикальных слоях и полостях.

Рассмотрим, следуя [1, 2], процедуру получения точного решения и исследований устойчивости стационарного конвективного движения в вертикальном слое жидкости, подогреваемом сбоку, когда равновесие невозможно. Слой при идеализированной постановке задачи имеет бесконечную длину, но как бы замкнут сверху и снизу. Поэтому жидкость циркулирует по контуру: поднимается у нагретой стенки и опускается у холодной стенки. Стенки имеют высокую теплопроводность, существенно превосходящую теплопроводность жидкости.

Конвективное течение в вертикальном слое описывается полной системой уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\bar{V}\nabla)\bar{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\bar{V}+g\beta T\vec{\gamma}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V\nabla T=a\Delta T \qquad (1)$$

$$div\bar{V}=0$$

p – конвективная добавка к гидростатическому давлению, соответствующему средним значениям плотности и температуры: $\bar{\rho}$ и $\bar{T}$. Уравнение состояния: $\rho=\bar{\rho}(1-\beta T)$ и ρ мало отклоняется от $\bar{\rho}$, т.е. $\beta\theta \ll 1$.

При плоскопараллельном течении в бесконечно длинном слое отлична от нуля лишь вертикальная компонента скорости w. Из уравнения неразрывности следует тогда что $w = V_0(x)$. При предположении о том, что температура также зависит лишь от поперечной координаты, т.е. $T = T_0(x)$, из системы уравнений (1) получаются уравнения для V_0, T и p в стационарном плоскопараллельном течении [1, 2]:

$$\frac{\partial P_0}{\partial x}=0; \quad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P_0}{\partial z}=\nu V_0''+g\beta T_0=c \quad T_0''=0 \qquad (2)$$

c – постоянная разделения переменных. На твердых вертикальных поверхностях ставятся условия прилипания и изотермичности:

при $x=\mp h$ $V_0 = 0$; $T_0 = \pm\theta$,

2θ – полная разность температуры между вертикальными стенками. Условие замкнутости течения – равенство нулю расхода в любом поперечном сечении: $\int_{-h}^{h}V_0dx=0$.

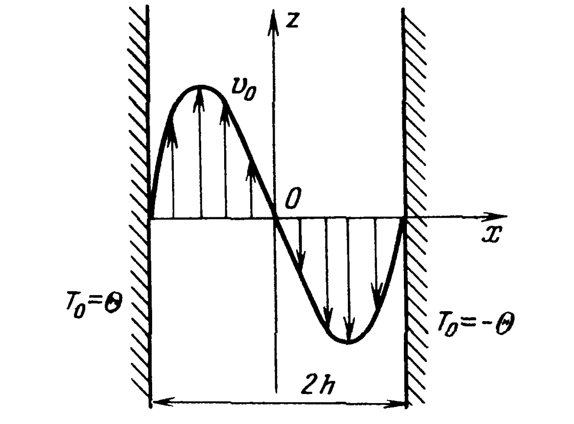


Рис.1. Плоский вертикальный слой с нагретыми до разных температур границами. Оси координат и профиль вертикальной компоненты скорости стационарного течения

Интегрируя уравнения (2) при этих граничных условиях, найдены распределения T, V и p:

$$T_0 = -\theta \frac{x}{h}; \quad \mathrm{V}_0 = \frac{g\beta\theta h^2}{6\nu}\left[\left(\frac{x}{h}\right)^3 - \frac{x}{h}\right]; \quad P_0 = const$$

c = 0. Таким образом, температура меняется линейно, поперечный перенос тепла между стенками происходит чисто теплопроводным путем; распределение скорости V_0 – кубическое и интенсивность течения прямо пропорциональна перепаду температуры, обратно пропорциональна вязкости ν и *не зависит от теплопроводности текучей среды*.

Экстремальные значения скорости $V_m = \frac{\sqrt{3}}{27} g\beta\theta \frac{h^2}{\nu}$ достигаются в точках: $x = \pm h/\sqrt{3}$. Конвективный перенос тепла вдоль слоя – *на единицу длины вдоль оси y (т.е. слой единичной толщины по трансверсальной координате или по нормали к плоскости рис.1*) [1]:

$$Q = \rho C_p \int_{-h}^{h} V_0 T_0 dx = \frac{2\rho C_p g\beta\theta^2 h^3}{45\nu}$$

Для ограниченных по длине слоев решение будет пригодно в средней части слоя, высота которого H >> 2h, т.е. его толщины, равной 2h. (И относительно малых перепадах температуры между вертикальными стенками слоя).

Особенность замкнутых плоскопараллельных течений – нечетность профилей скорости U и температуры T_0. Это приводит к появлению характерных свойств спектра нарастающих возмущений и к тому, что при малых и умеренных значениях числа Прандтля неустойчивость развивается в ядре слоя в виде системы вихрей на границе встречных подъемного и опускного потоков.

Уравнения возмущений.

Для исследования устойчивости стационарного плоскопараллельного конвективного течения применим метод малых возмущений. Рассматривается возмущенное течение: $V_0+\boldsymbol{V}$; T_0+T; P_0+p, где $\mathbf{V}, T, p$ – малое нестационарное возмущение, наложенное на найденное точное решение. Подставляя возмущенные поля в исходную систему (1) и, линеаризуя по $\vec{V}, T, p$, получим систему уравнений для возмущений:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}_0 + (\vec{V}_0\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{V} + g\beta T\vec{\gamma}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\nabla T_0 + \vec{V}_0\nabla T = a\Delta T$$

$$div\vec{V} = 0$$

Члены уравнения, входящие в уравнение (2) и уравновешивающие правую и левую части в уравнении движения опускаются. Введем безразмерные переменные, используя масштабы: длины – h; времени – h^2/ν; скорости – $g\beta\theta h^2/\nu$; температуры – θ; давления – ρgβθh.

Профили основного течения в безразмерных переменных запишутся: $V_0 = \frac{1}{6}(x^3 - x)$, $T_0 = -x$, а система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + Gr\left[(\vec{V}\nabla)\vec{V}_0 + (\vec{V}_0\nabla)\vec{V}\right] = -\nabla p + \Delta\vec{V} + T\vec{\gamma}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr\left[\vec{V}\nabla T_0 + \vec{V}_0\nabla T\right] = \frac{1}{\Pr}\Delta T$$

$$div\vec{V} = 0$$

Стенки считаем идеально теплопроводными, тогда при x = ±1: $\vec{V}=0$; T = 0. Исчезают возмущения скорости и температуры T на твердых границах. Задача содержит два безразмерных параметра, определяющих подобие конвективных течений: $Gr = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu^2}$; $\Pr = \frac{\nu}{a}$.

Возмущения считаем плоскими, т.е. v = 0, а компоненты вектора ***V*** u , w , T и P не зависят от трансверсальной координаты y.

Определим функцию тока плоских возмущений соотношениями $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$; $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Исключая p (записывая уравнения движения и дифференцируя уравнения для продольной и горизонтальной компонент скорости по *x* и *z* соответственно и вычитая одно уравнение из другого) и вводя функцию тока ψ, получим систему уравнений для ψ и T:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + Gr\left(V_0\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z} - V_0''\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \Delta\Delta\psi + \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr\left(V_0\frac{\partial T}{\partial z} - T_0'\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = \frac{1}{\Pr}\Delta T \qquad (3)$$

Здесь Δ – лапласиан в переменных *x*, *z*, штрих означает дифференцирование по *x*.

Граничные условия: на границах исчезают обе компоненты возмущения скорости и возмущение T: x = ±1: $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$, T = 0. Задача имеет решения в виде нормальных возмущений:

$$\psi(x,z,t) = \varphi(x)\exp(-\lambda t + i\kappa z)$$

$$T(x,z,t) = \theta(x)\exp(-\lambda t + i\kappa z)$$

λ – декремент; κ – вещественное волновое число. Подставляя эти решения в систему уравнений (3), получим систему уравнений для амплитуд возмущений:

$$\Delta^2\varphi + i\kappa Gr\left(V_0''\varphi - V_0\Delta\varphi\right) + \theta' = -\lambda\Delta\varphi$$

$$\frac{1}{\Pr}\Delta\theta + i\kappa Gr\left(T_0'\varphi - V_0\theta\right) = -\lambda\theta \qquad (*)$$

$$(\Delta = d^2/dx^2 - \kappa^2)$$

с граничными условиями: при x = ±1: $\varphi = \varphi' = 0$, θ = 0.

В развернутой форме записи эти уравнения выглядят так:

$$\left(\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi\right) + ikGr\left[V_0''\varphi - V_0(\varphi'' - k^2\varphi)\right] + \theta' = -\lambda(\varphi'' - k^2\varphi)$$

$$\frac{1}{\Pr}(\theta'' - k^2\theta) + ikGr(T_0'\varphi - V_0\theta) = -\lambda\theta$$

Таким образом, сформулированная краевая задача является характеристической: нетривиальное решение существует лишь при определенных значениях спектрального параметра λ. Декременты λ находятся как собственные числа краевой задачи; соответствующие собственные функции φ и θ определяют структуру характеристических возмущений скорости и температуры. Собственные значения λ зависят от чисел Gr и Pr, а так же от волнового числа k. Зависимость нормальных возмущений от времени t заключена в экспоненциальном множителе $\exp(-\lambda t)$.

Поставленная краевая задача является несамосопряженной и поэтому ее собственные числа λ могут быть как вещественными, так и комплексными $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$. Если λ вещественно, то возмущение изменяется по температуре монотонно; при $\lambda > 0$ возмущение затухает; при $\lambda < 0$ – растет. Условие $\lambda(Gr, Pr, \kappa) = 0$ определяет границу устойчивости основного течения относительно монотонных возмущений.

Если декремент оказывается комплексным, то его можно представить в виде $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$. В этом случае возмущение осциллирует с частотой λ_i. Эти возмущения распространяются в потоке в виде волн с фазовой скоростью $c = \lambda_i/\kappa$. Затухание или нарастание возмущений определяется знаком вещественной части λ_r. Граница устойчивости относительно колебательных возмущений находится из условия $\lambda_r (Gr, Pr, \kappa) = 0$.

Таким образом, исследование спектра нормальных возмущений стационарного плоскопараллельного конвективного течения сводится к нахождению собственных чисел и собственных функций краевой задачи (*).

Эта задача является обобщением классической задачи теории гидродинамической устойчивости. Обобщение связано с учетом двух факторов: дополнительной силы плавучести в уравнениях движения и неизотермичности основного движения и возмущений. Если в (*) положить $\theta = 0$, то получается известное *уравнение Орра-Зоммерфельда*, определяющее плоские возмущения в изотермическом плоскопараллельном потоке.

Полная задача слишком сложна. Поэтому рассматриваются асимптотические подходы. Во-первых, рассматривается задача в чисто гидродинамической постановке, когда полностью пренебрегают влиянием тепловых факторов на развитие возмущений. При малых Pr (характерных для жидких металлов) – это оправдано быстрой релаксацией возмущений температуры T. Тогда следует пренебречь членом с подъемной силой в (*) и не рассматривать уравнение переноса тепла. При $Pr \to 0$ его решением служит $\theta \to 0$. Тогда получается уравнение Орра-Зоммерфельда с заданным конвективным профилем скорости $V_0(x)$ и граничными условиями:

$$\Delta^2\varphi + i\kappa Gr(V_0''\varphi - V_0\Delta\varphi) = -\lambda\Delta\varphi$$
$$x = \pm 1 : \varphi = \varphi' = 0 \qquad (4)$$

Или в развернутой форме записи:

$$\left(\varphi^{IV} - 2\kappa^2\varphi' + \kappa^4\varphi\right) + i\kappa Gr\left[V_0''\varphi - V_0(\varphi'' - \kappa^2\varphi)\right] = -\lambda(\varphi'' - \kappa^2\varphi)$$

Поставленная задача устойчивости относится к однородному по z основному плоскопараллельному течению. Если рассматривать течение в ограниченном по высоте слое, то если толщина пограничного слоя в восходящем на горячей стенке потоке и во встречном холодном потоке растет по закону: $\delta \sim z^{1/4}$, то на некотором расстоянии от передних кромок стенок произойдет смыкание пограничных слоев в среднем по толщине сечении. Это означает появление плоскопараллельного течения. Необходимым условием реализации такого течения является неравенство $\delta > 2h;\ \delta = \left(\dfrac{\varphi vaL}{g\beta\theta}\right)^{1/4}\xi_\delta$, где $\xi_\delta = f(\mathrm{Pr})$, отсюда следует, что отношение половины высоты слоя к его полуширине должно определяться соотношением $\dfrac{L}{h} >> \dfrac{4}{\xi^4{}_\delta} Gr\,\mathrm{Pr}$.

Дальше решаются задачи исследования спектров возмущений и определение границ устойчивости течения. Основные результаты этих исследований сводятся к нахождению нейтральной кривой монотонной неустойчивости (рис. 2). Т.е., определены зависимости критических значений числа Грасгофа от волновых чисел возмущений k. Нейтральная кривая имеет асимптоту при значении волнового числа $k_0 \approx 2$. Это значит, что коротковолновые возмущения с $k > k_0$ затухают при всех значениях числа Грасгофа. Исследования выполнены в широком диапазоне чисел Прандтля и обнаружено, что критическое значение волнового числа $k_{кр} \approx 1{,}4$ практически на меняется в диапазоне $0{,}01 < \mathrm{Pr} < 15$.

Минимальное значение числа Грасгофа также слабо зависит от числа Pr (рис.3). При Pr << 1 минимальное значение числа Грасгофа не зависит от Pr и равно $Gr_{кр} = 495$ Это значение $Gr_{кр}$ соответствует критическому числу Рейнольдса, полученному при исследовании устойчивости изотермического течения с кубическим профилем. Числа Рейнольдса и Грасгофа связаны соотношением Re = Gr/6

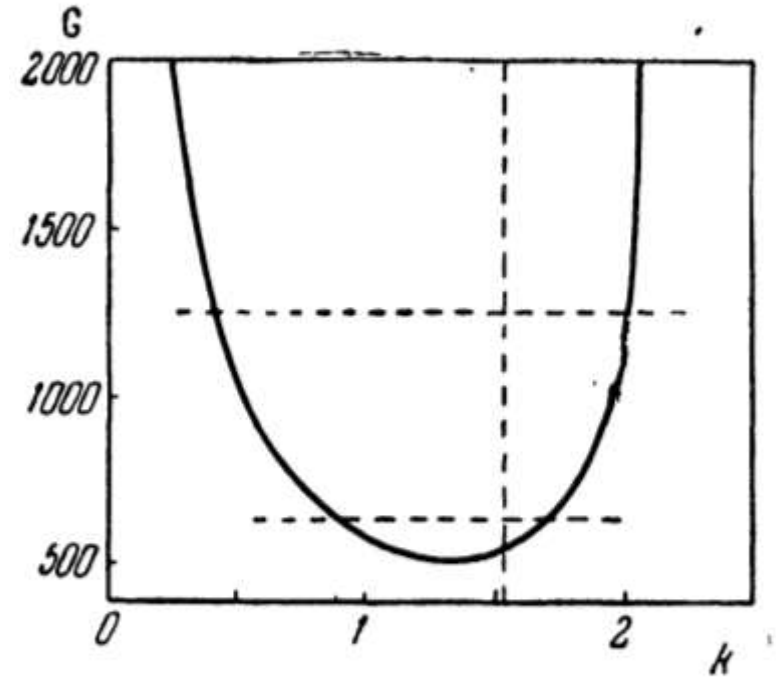


Рис. 2 – Нейтральная кривая монотонной неустойчивости конвективного течения между нагретыми до разных температур вертикальными стенками при Pr =1

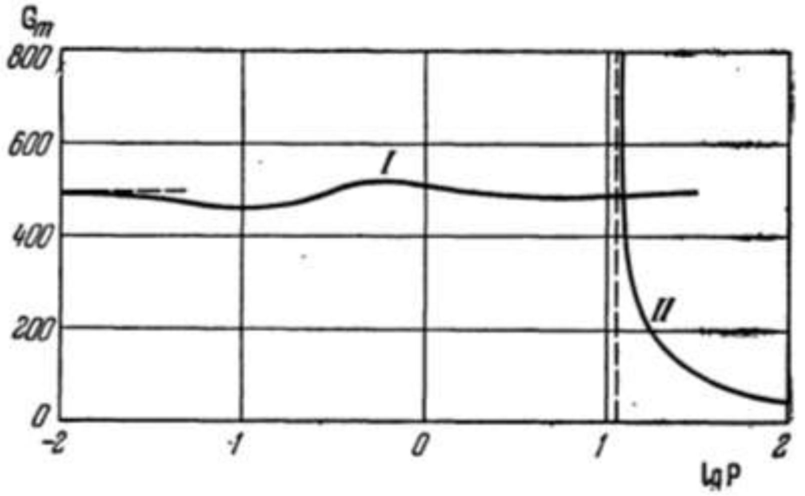


Рис. 3 – Минимальное критическое число Грасгофа в зависимости от числа Прандтля: I – монотонная неустойчивость, II – колебательная неустойчивость

Т.о., при изменении числа Прандтля в широких пределах граница монотонной неустойчивости изменяется слабо. Это говорит о гидродинамической природе перехода от стационарного ламинарного течения с выше определенным профилем скорости к режиму с потерей устойчивости относительно монотонных возмущений. Пространственная форма конечно амплитудных вторичных течений, развивающихся из этих возмущений, показана на рис. 4а. Появление вторичного течения на фоне течения с профилем в виде кубической параболы (рис. 5а) приводит к локальным возмущениям поля температуры (рис. 4а, рис. 5б). Вторичное течение, как видно на рис.4а, представляет из себя периодическую систему вихрей с локальными потоками по нормали к стенке. Суперпозиция этих возмущений и основного потока дает систему вихрей на границе встречных потоков – восходящего на стенке с более высокой температурой и нисходящего на противоположной стенке (рис. 5а). Экспериментальные данные (рис. 6) получены в средней части достаточно высокого слоя воздуха с дымовой визуализацией при Gr = 540 ± 10% . Возникают как видно на рис.6 вторичные вихри с волновым числом $k_{кр}$ = 1,37, что согласуется с результатами расчетов.

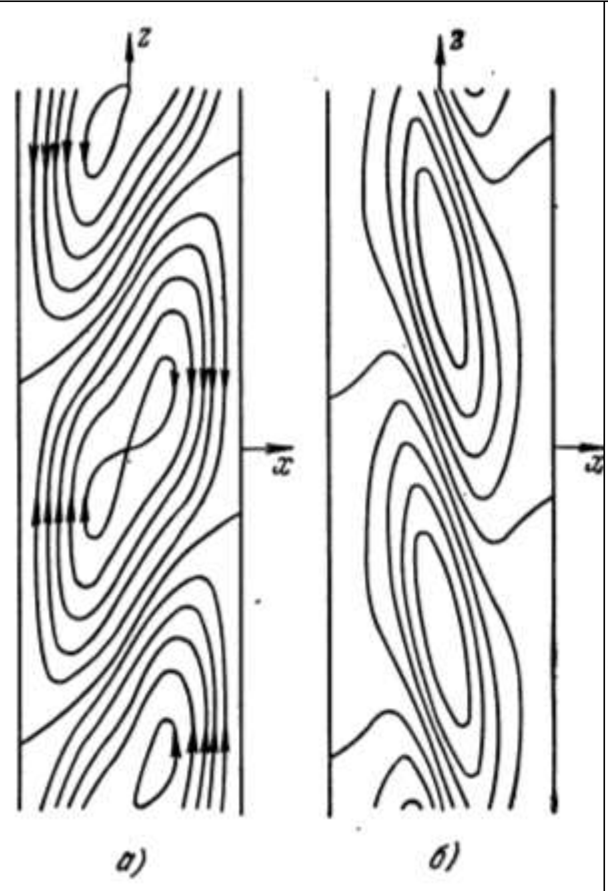


Рис. 4 – Форма монотонно растущего возмущения: а – линии тока, б – изотермы

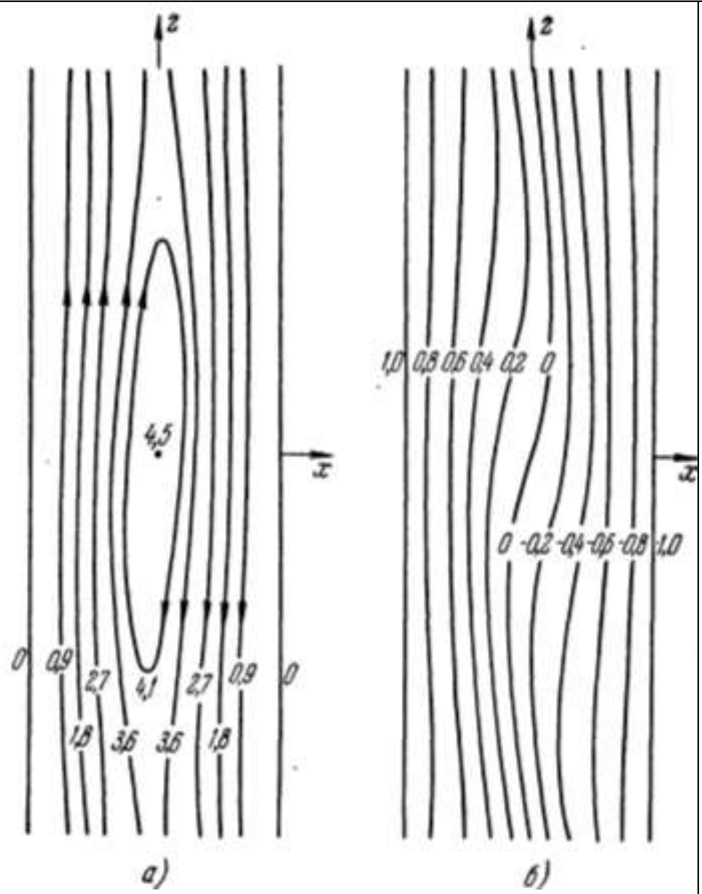


Рис. 5 – Линии функции тока ψ (а) и изотермы (б) суммарного течения. Значения ψ увеличены в 100 раз.

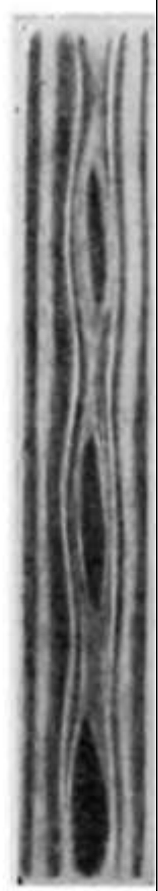


Рис. 6 – Эксперимент

Исследования показали, что при Pr < 12 начало перехода вызывается монотонными возмущения ми типа неподвижных вихрей на границе встречных потоков. При Pr > 12 развиваются колебательные возмущения в виде бегущих тепловых волн. Были получены нейтральные кривые и показано, что при увеличении числа

Pr растет критическое волновое число, стремясь к предельному значению $k_{кр}$ = 1,25. Минимальное значение $Gr_{кр}$ с ростом Pr уменьшается и при больших Pr определена асимптотическая зависимость $Gr_{кр} = 470 \cdot Pr^{-1/2}$. Тепловые волны распространяются как вверх, так и вниз. Фазовая скорость бегущих нейтральных возмущений близка к максимальной скорости невозмущенного потока.

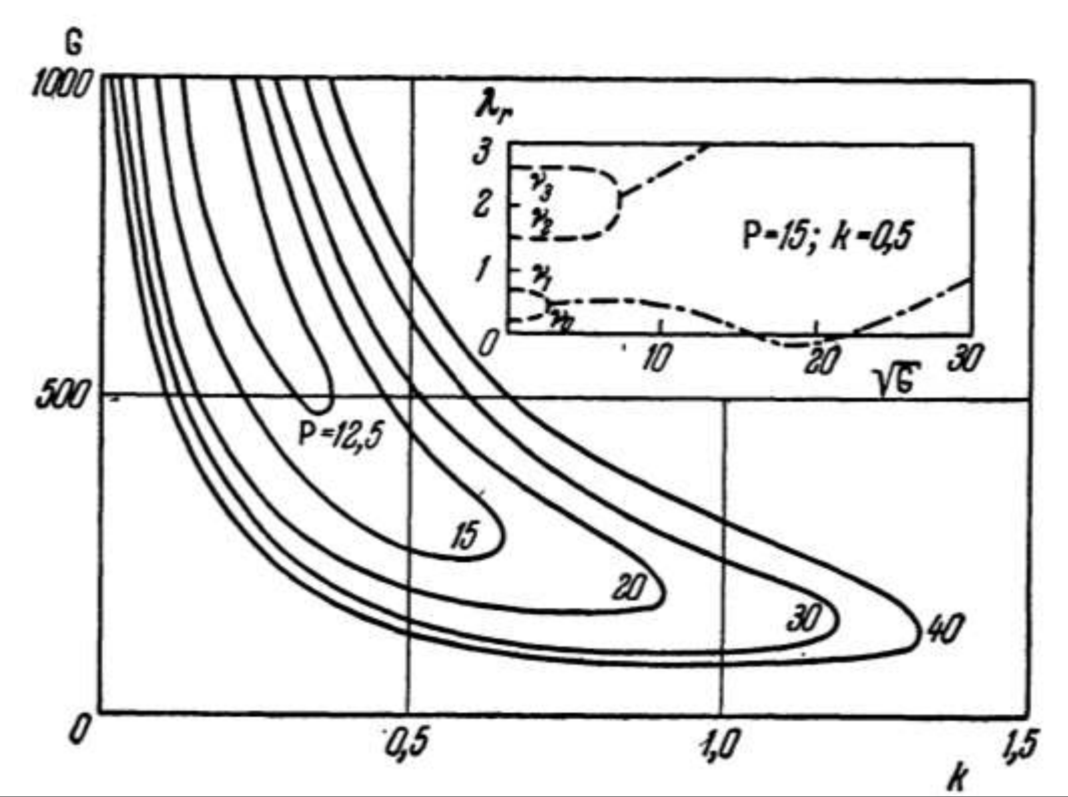


Рис. 7 – Нейтральные кривые колебательной неустойчивости и декременты нижних тепловых уровней (на вставке)

Колебательная неустойчивость существенно связана с неизотермичностью течения. Она вызывается нижними тепловыми модами, т.е. порождается нарастающими в потоке тепловыми волнами и их взаимодействием с гидродинамическими возмущениями.

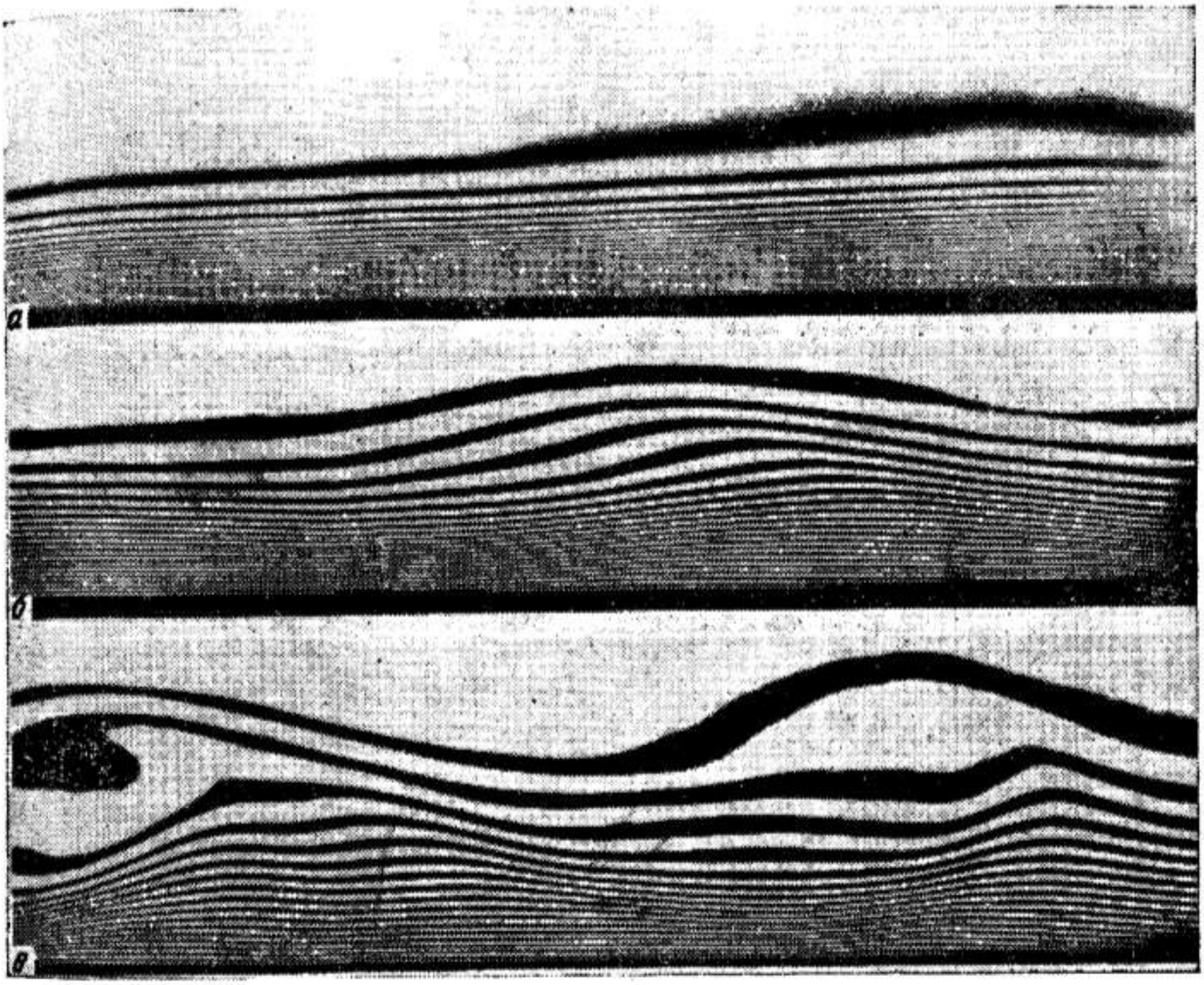
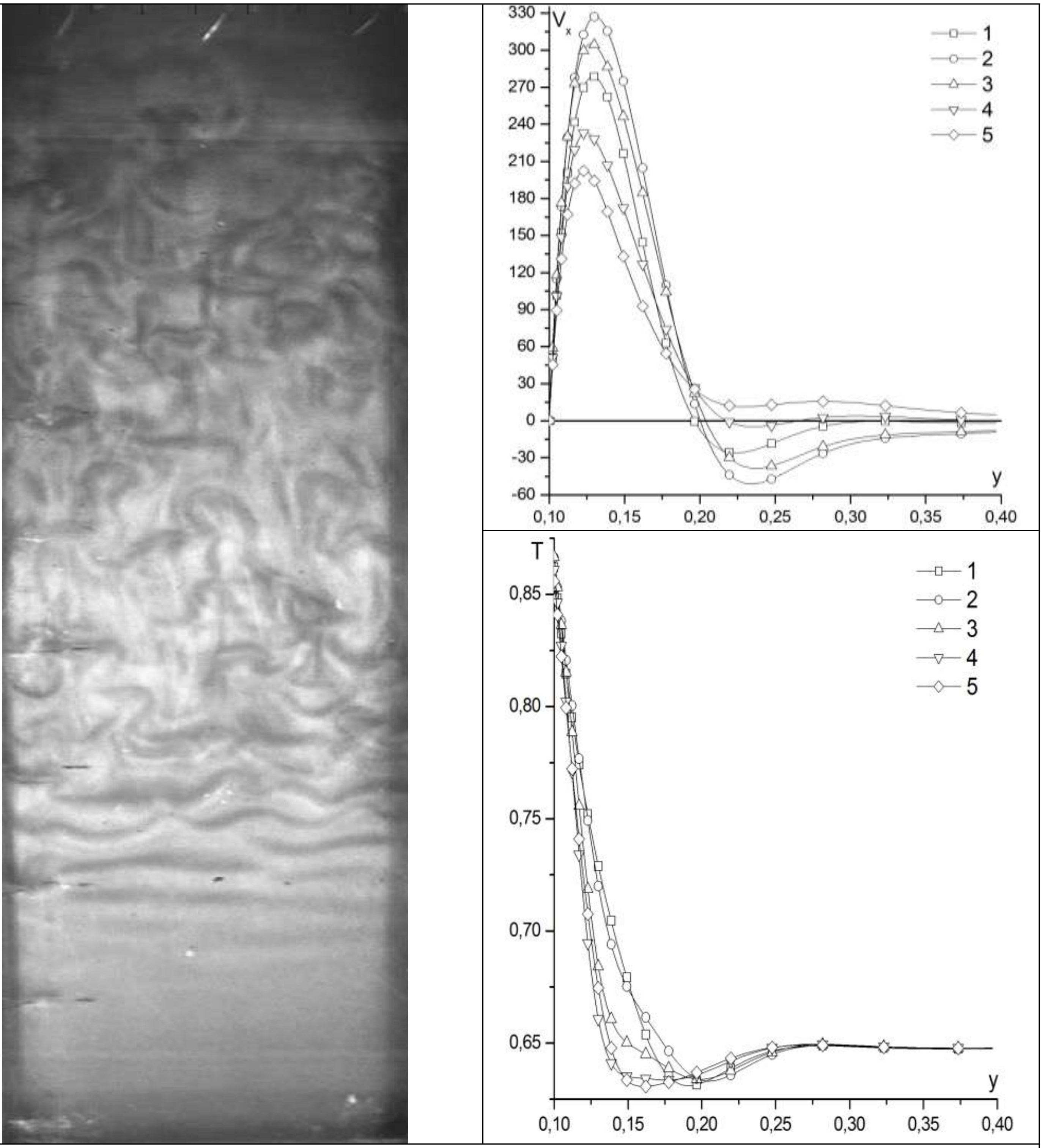


Рис. 41. Снимки пограничного слоя на вертикальной пластинке при свободном конвективном течении. По Эккерту, Зёнгену и Шнейдеру (см. примечание 2 на стр. 94). Снимки получены по методу интерференционных полос и показывают, как возникает турбулентность. Интерференционные полосы представляют собой линии равной температуры. Начиная с определенного места, возникают синусоидальные волны, амплитуда которых по мере продвижения вниз по течению возрастает (снимки *а* и *б*), что в конце концов приводит к крутому подъему волн и их опрокидыванию (снимок *в*).

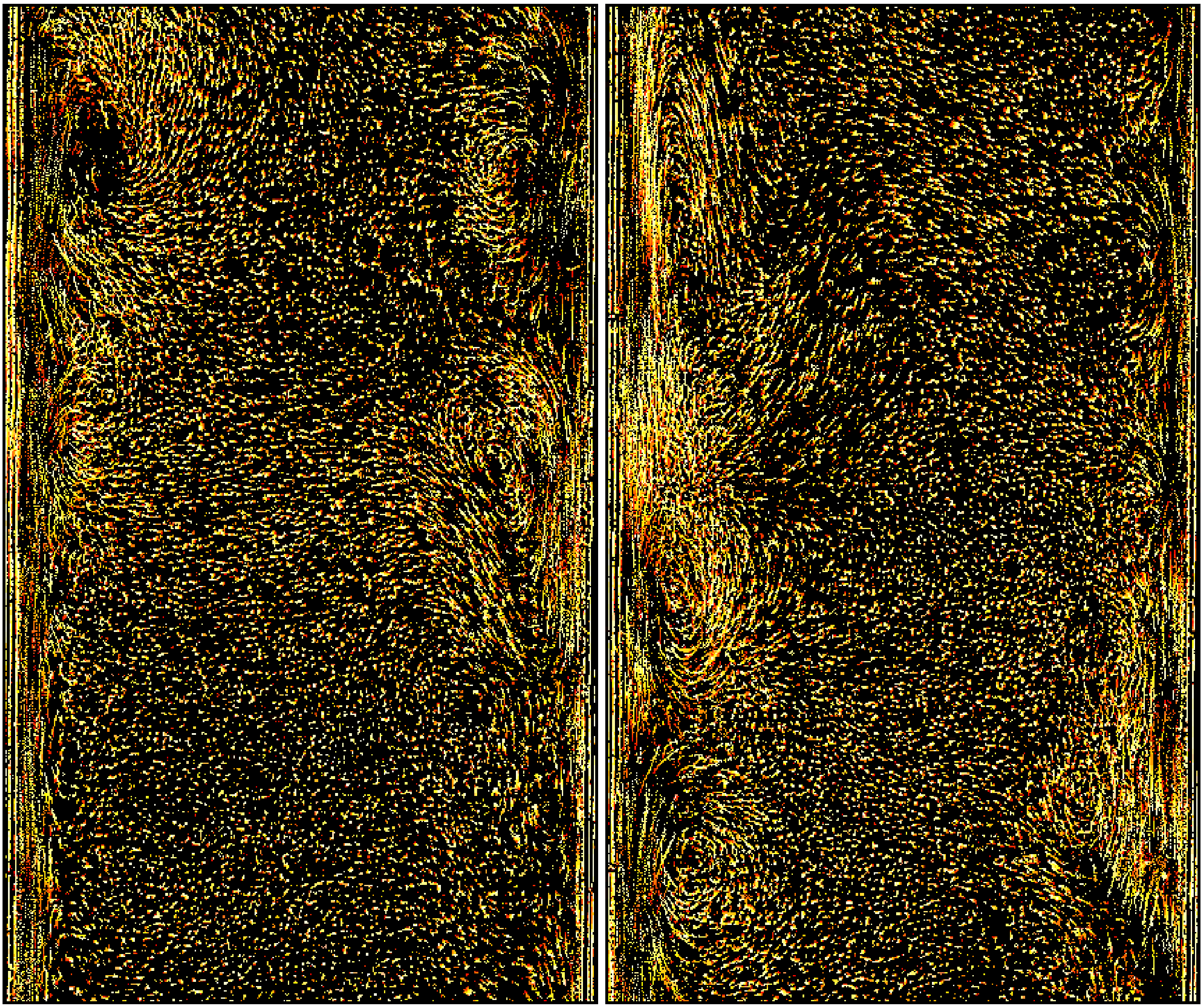
Шлихтинг Г с.93

Литература

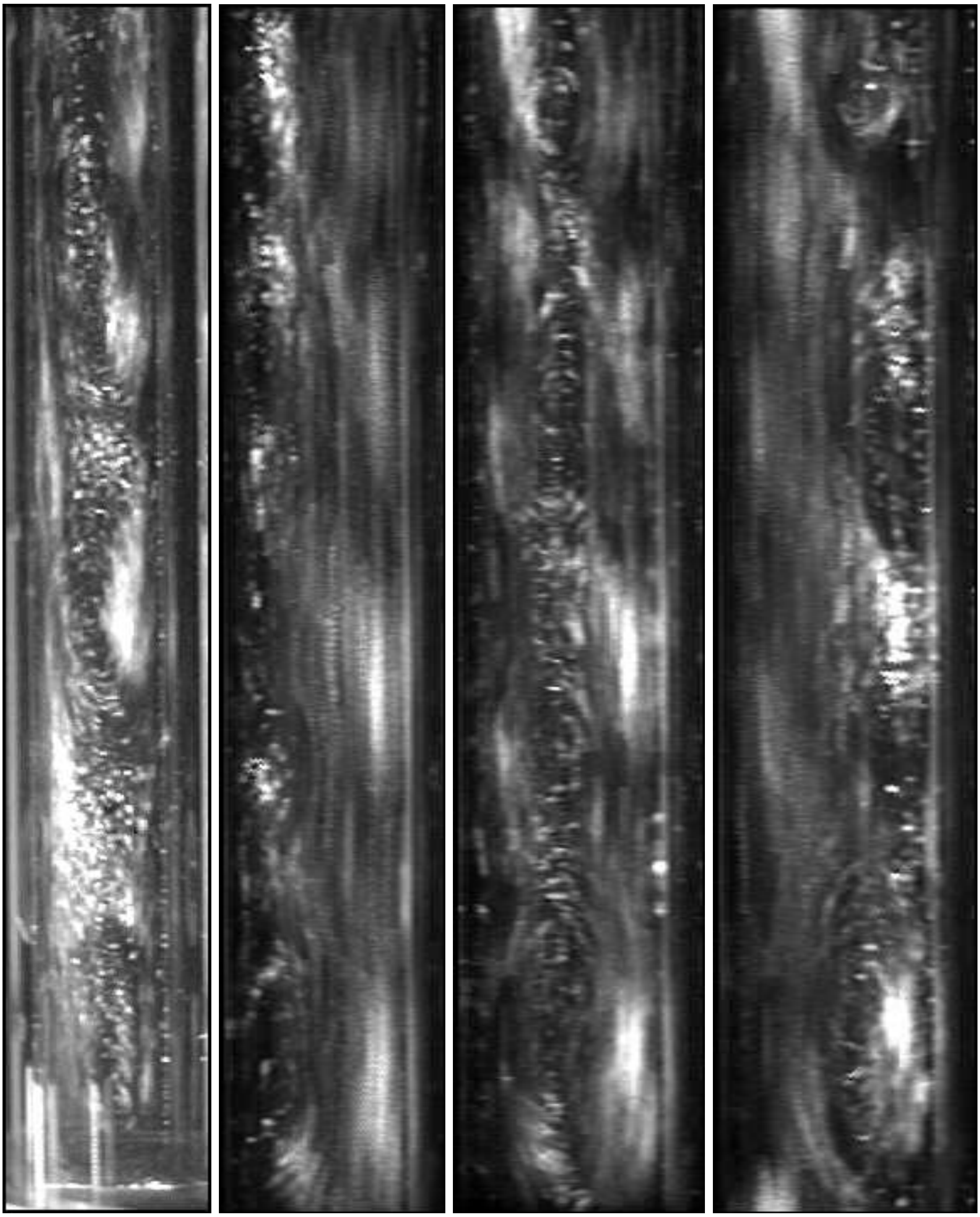
1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
4. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М.:ИЛ, 1962.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука. Глав. Ред. Физ.-мат. лит. 1987.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.Е. Теоретическая гидромеханика. М.: Физ-мат. лит. 1963. Т.1, 2.



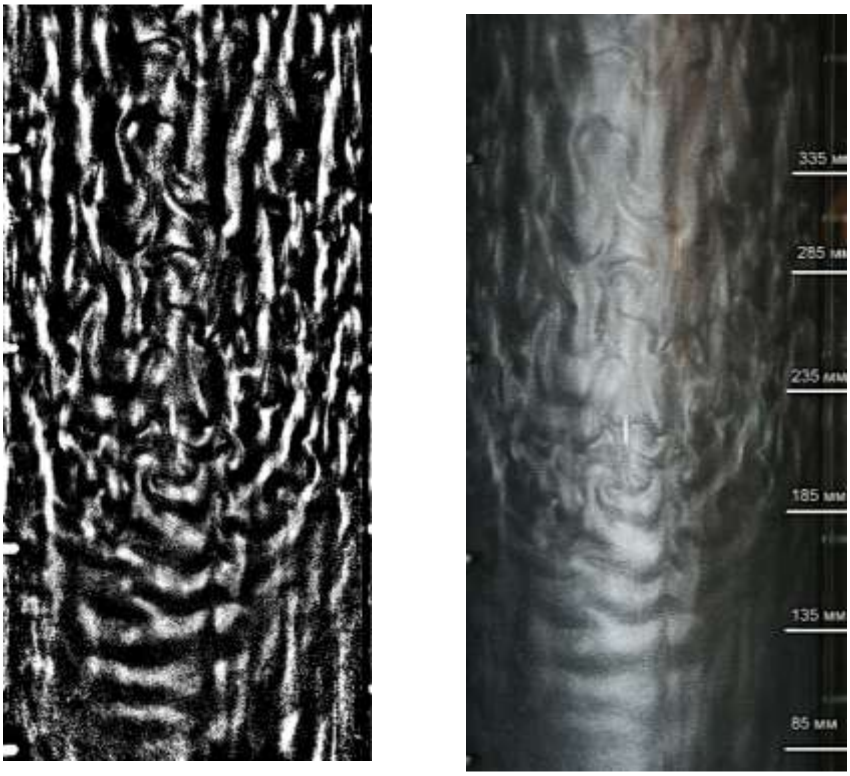
Поток на нагретой вертикальной стенке при Pr = 16 и мгновенные профили вертикальной компоненты скорости и распределения температуры по нормали с стенке при прохождении вихря через заданное сечение по высоте слоя



Вихри (вторичные течения) в сечении по номали к вертикальным стенкам на различных расстояниях от дна слоя жидкости



Система вторичных вихрей на границе встречных потоков в кольцевом вертикальном слое жидкости с $Pr = 16$



Пространственная форма течения в плоскости нагретой стенки при температурах стенок: T_1 = 16,7°C и T_2 = 19,95°C и перепаде температуры ΔT = 2,35°C. Соответствующее значение числа Рэлея, построенное по высоте слоя: $Ra_H = 5{,}63\times10^{11}$. Рабочая среда - этиловый спирт с Pr = 16.