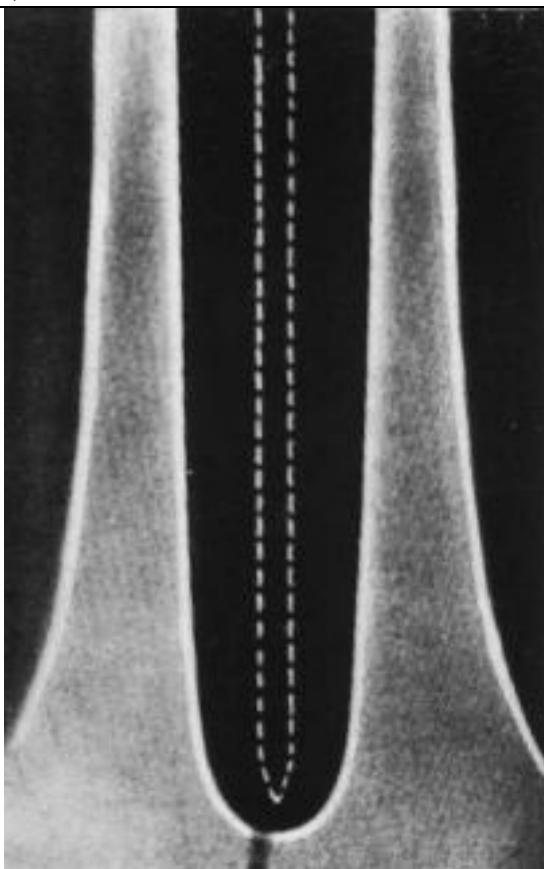


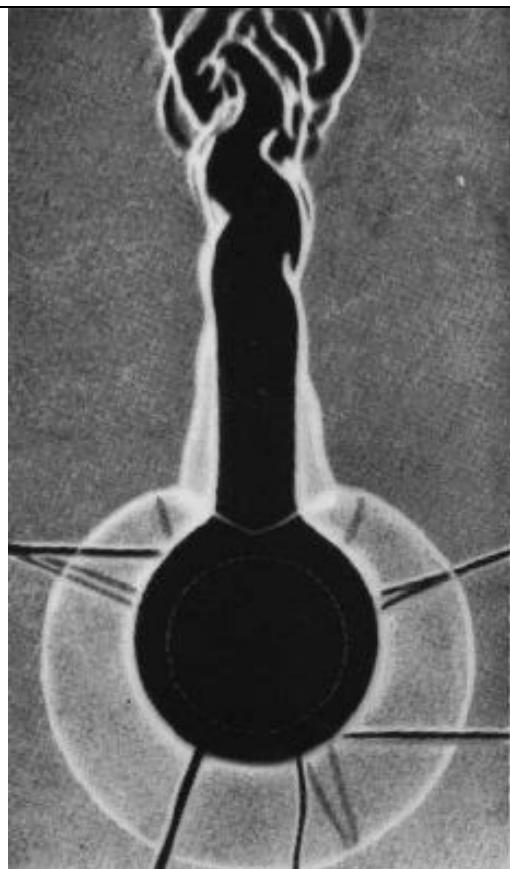
## Лекция 4\_24к3. Термогравитационная конвекция (ТГК).

Конвекция, возникающая в системах с неоднородным пространственным распределением температуры и находящихся в поле тяжести, является самым распространенным видом течений жидкостей и газов на Земле и даже во Вселенной. Практически во всех технических устройствах и технологических установках, содержащих полости с текучими средами процессы тепло- и массообмена происходят при подавляющем или существенном влиянии сил плавучести (сил Архимеда). Теплоотдача от нагретых тел, например, в воздушной среде происходит в режимах *сопряженного свободноконвективного теплообмена*. Т.е., при взаимосвязанных полях температуры в обтекаемом теле и в жидкости (или в газе) при граничных условиях 4-го рода.

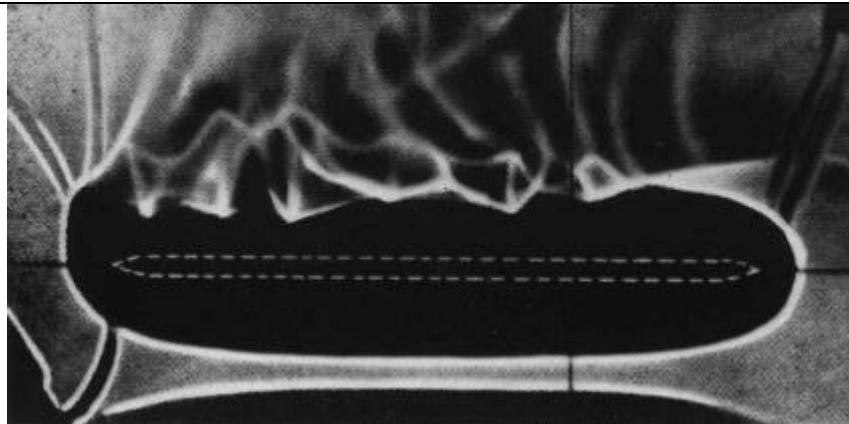
Конвекция термогравитационной природы делится на два класса. *Свободная конвекция* течение, возникающее вблизи нагретых (или холодных) тел, находящихся в больших объемах жидкости:



Течение в режиме термогравитационной  
конвекции  
Вертикальная пластина



Течение в режиме термогравитационной  
конвекции  
Нагретый горизонтальный цилиндр



Течение в режиме термогравитационной конвекции  
Горизонтальная пластина ограниченного размера

**Естественная конвекция** – течения в замкнутых полостях с неоднородным распределением температуры на стенках.

Одна из классических задач физической гидродинамики – это течения в равномерно подогреваемых снизу горизонтальных слоях различных жидкостей и газов. Можно даже сказать различных текучих сред, в том числе широкого класса неньютоновских жидкостей.

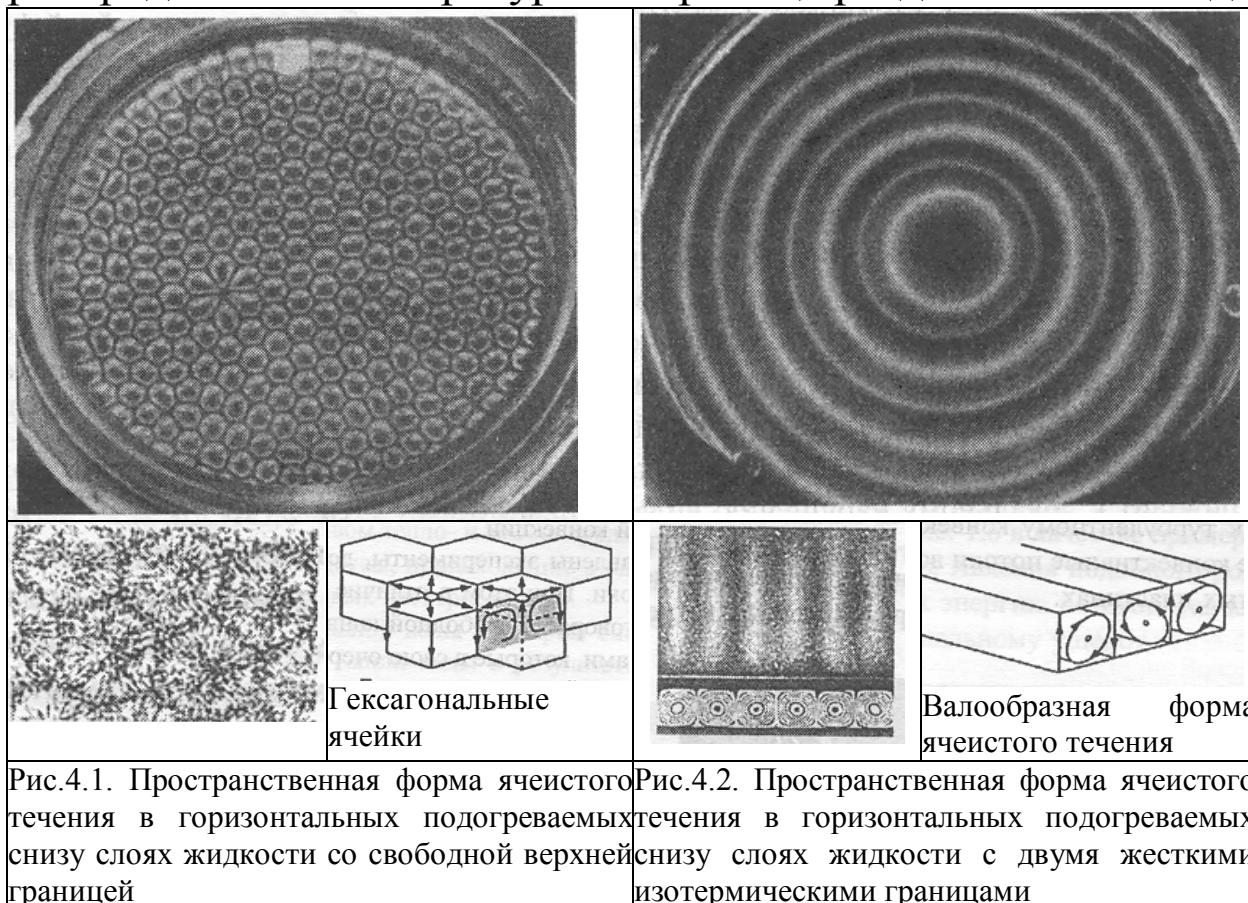
Конвекцию в плоском горизонтальном слое жидкости (или газа), подогреваемом снизу, принято называть *конвекцией Рэлея-Бенара*. Систематическое изучение этого типа конвекции было начато экспериментально Бенаром, со слоями жидкости со свободной верхней границей. Как было выяснено в более поздние времена, в его экспериментах в нарушение устойчивости механического равновесия слоя и в формирование пространственной формы течения существенный вклад вносила зависимость поверхностного натяжения от температуры. Течение в тонких слоях имеет термокапиллярную природу. Рэлей рассматривал теоретически конвекцию, вызванную силами плавучести, возникающими из-за зависимости плотности жидкости от температуры, т.е. термогравитационной природы.

*Конвекция Рэлея-Бенара* до настоящего времени привлекает внимание, как пример самоорганизующейся нелинейной системы, как классическая гидродинамическая система, имеющая порог устойчивости и характеризующаяся возможностью развития различных типов неустойчивости в зависимости от параметров задачи, начальных и граничных условий [1, 2]. На ее примере изучаются различные сценарии перехода к турбулентности в

средах с различными теплофизическими свойствами [3]. Результаты исследований имеют неограниченный диапазон применений для объяснения процессов в природе, в технике и в технологиях.

**Задача Рэлея – задача об устойчивости механического равновесия в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу.**

Пространственная форма ячеистой конвекции Рэлея-Бенара, наблюдалась экспериментально в горизонтальном слое жидкости, равномерно подогреваемом снизу, в зависимости от граничных условий, показана на рис.4.1, 4.2. На рис.4.1 показана форма течения, возникающего при свободной верхней границе, которая охлаждается за счет теплоотдачи в окружающую газовую среду. В этом случае граница может быть не изотермической (практически она всегда будет неизотермической). На рис.4.2 верхняя граница слоя жесткая прозрачная, она может охлаждаться водой прокачиваемой в зазоре между двумя параллельными стеклянными стенками (иногда стенки сапфировые – т.е. из материала с более высокой теплопроводностью и с большей степенью однородности распределения температуры на границе раздела стенка-жидкость).



Примечательной особенностью этого типа конвективного течения на рис. 4.1, 4.2 является высокая степень периодичности (пространственной когерентности, т.е. ячейки имеют одинаковую и практически правильную шестиугольную (рис. 4.1) или валообразную (рис. 4.2) форму с почти одинаковым размером – длиной волны во всех фрагментах слоя жидкости). Как видно из сравнения рисунков, пространственная форма ячеистого течения зависит от граничных условий на верхней границе слоя и от геометрии рабочего участка установке в плане (т.е. от вида сверху).

Рэлеем для объяснения наличия критического значения перепада температуры между горизонтальными границами слоя и смены режима теплопроводности (как исходного состояния системы) конвективным течением была сформулирована и решена задача об устойчивости подогреваемого снизу горизонтального слоя.

Постановка задачи была сильно идеализирована: горизонтальные границы считались свободными (отсутствует вязкое трение:  $\tau = \mu(\partial u / \partial z) = 0$ ), изотермическими и недеформируемыми (плоскими). Это граничные условия в постановке Рэлея. Возмущения при критическом значении перепада температуры развиваются в этом случае только за счет действия сил плавучести.

Если рассматривать задачу без идеализации Рэлея, то необходимо учитывать, что в тонких слоях жидкости со свободной верхней границей кроме сил плавучести действует термокапиллярный эффект, обусловленный зависимостью поверхностного натяжения от температуры  $\sigma(T)$ . На свободной границе выполняются динамические условия  $(-\partial\sigma/\partial T)/(\partial T/\partial x) = \mu(\partial u / \partial z)$ , т.е. тангенциальное напряжение, возникающее за счет термокапиллярного эффекта, приводит к возникновению термокапиллярной конвекции. Развитию течения препятствует вязкое трение и теплообмен с выше лежащим слоем газа и ниже лежащим слоем жидкости. Эти условия характерны для течения на рис.4.1. Для большинства жидкостей поверхностное натяжение  $\sigma$  снижается с ростом температуры и возникает течение от нагретого участка поверхности к холодному. Безразмерный параметр, характеризующий интенсивность термокапиллярной конвекции – число Марангони  $Ma = (-\partial\sigma/\partial T) \times \Delta T \times h / \mu a$ . Его можно трактовать как аналог числа Рэлея.

Из общей системы уравнений, описывающей течение и конвективный теплообмен, была получена система размерных уравнений свободной конвекции (по физической природе – термогравитационной конвекции) *в приближении Буссинеска*:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \bar{V} - g \beta T \bar{\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V} \nabla T = a \Delta T \quad (2)$$

$$div \bar{V} = 0 \quad (3)$$

В данном случае (*в приближении Буссинеска*) считаются постоянными все теплофизические свойства жидкости, кроме плотности и только в одном члене уравнения движения, отвечающего за массовые силы (в анализируемом случае это силы плавучести, в старой терминологии – силы Архимеда).

Первое уравнение для ясного понимания физического смысла лучше представить так (чтобы был виден баланс сил):

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = -\nabla P + \mu \Delta \bar{V} - \rho g \beta T \bar{\gamma} \quad (4)$$

а уравнение неразрывности как:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Уравнение движения для режимов свободной конвекции получено из общего уравнения гидродинамики

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = -\nabla P + \mu \Delta \bar{V} + \rho \bar{g} \quad (6)$$

после подстановки только в порождающий конвекцию член уравнения движения  $\rho \bar{g}$  зависимости плотности от температуры по формуле:  $\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T)$

тогда  $\rho g = \rho_0 g - \rho_0 \beta g \Delta T$ , а

$$\rho_0 g = \nabla(\rho \bar{g} z), \quad (8)$$

т.е. (8) – это градиент гидростатического давления в слое жидкости.

В левой части уравнения (6) зависимость плотности от температуры не учитывается вследствие малости ускорения в конвективном потоке в сравнении с  $\mathbf{g}$ . Вектор ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}$  представляется как  $\bar{\mathbf{g}} = (0, 0, g)$  или в виде произведения абсолютной величины вектора ускорения силы тяжести на единичный вектор:  $g\bar{\gamma}$ , где  $\bar{\gamma} = (0, 0, 1)$ .

Градиент гидростатического давления учитывается в уравнении (6) в члене, отвечающем за градиент динамического давления  $P$ . И тогда имеем:

$$\nabla(P + \rho \bar{g} z) = \nabla P_1 \quad (9)$$

А затем “забываем” об индексе «1», но не забываем, что добавили гидростатическую часть давления, и сумму обозначаем, как обычно,  $P$ . Все воспринимается относительно просто, если понимать, что уравнение (6) написано, когда учитывается вес  $(\rho \bar{g})$ , потому что жидкость находится в гравитационном поле. Уравнение (6) описывает в этом случае течение жидкости из поднятого на высоту  $h$  бака (или любой емкости), или стекание по наклонной плоскости (принцип работы гидроэлектростанции, а в природе сток рек). Или же оно описывает течение вынужденной природы, когда силы плавучести в объеме (тяжелой) жидкости несущественны. Т.е. если течение высокоскоростное и роль сил плавучести (и ТГК – термогравитационная конвекция) на его фоне слабо ощутима. Тогда при решении задач конвективного теплообмена можно рассчитывать вначале гидродинамику, т.е. определить поле скорости  $\bar{V} = \bar{V}(\bar{x}, t)$  и затем решать уравнение (2), подставляя в него известную скорость.

Частные предельные формы уравнений движения (в общей гидродинамике!):

Во-первых, уравнения Эйлера – нет учета вязкости, уравнения идеальной жидкости; они пригодны за пределами пограничного слоя.

Во-вторых, уравнения Стокса, вязкость оказывает настолько значительное влияние, что можно пренебречь инерционными членами уравнений – вынуждающая сила уравновешивается силами вязкого трения – реализуется режим низкоскоростного ползущего течения. При свободной конвекции уравнение Стокса используется для анализа пристеночного течения, где сила плавучести уравновешена силами вязкого трения, например, в вязком подслое свободноконвективного пограничного слоя на вертикальной стенке (*в вязком пристеночном подслое*).

Для анализа течений тяжелой (невязкой и нетеплопроводной) жидкости полезно помнить уравнение Бернуlli:

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho g z + P = P_0 \text{ для линии тока (или } \frac{V^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} = c \text{)} [4, 5].$$

*Логическая цепочка задач в гидродинамике* в целом и в теории свободной конвекции в частности в упрощенном виде: нахождение решения заданной краевой задачи, анализ решения, исследования его устойчивости относительно наложенных возмущений, исследования ламинарно-турбулентного перехода, исследования развитых турбулентных режимов течения. Эту логику, отражающую реальное развитие течений с ростом сил порождающих течение, наиболее просто и доходчиво можно продемонстрировать на примере задачи Рэлея.

**Неустойчивость горизонтального слоя жидкости, равномерно подогреваемой снизу. Задача Рэлея и ее развитие на другие граничные условия.**

В случае горизонтального слоя жидкости, равномерно подогреваемого снизу, исходное состояние – *механическое равновесие* (жидкость неподвижна, передача тепла на верхнюю охлаждаемую стенку от нижней нагретой стенки происходит в режиме молекулярной теплопроводности). Это состояние теряет устойчивость при критическом значении перепада температуры между границами. Или при критическом значении параметра

подобия – числа Рэлея  $Ra_{kp}$ . После этого возникает ламинарное ячеистое конвективное течение, показанное на рис.4.1 или 4.2.

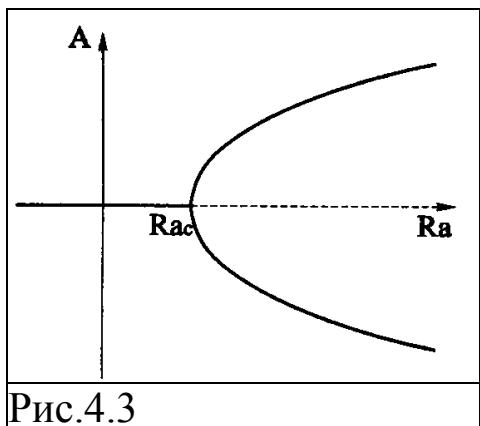


Рис.4.3

С ростом надкритичности ( $Ra - Ra_{kp}$ ) растет интенсивность конвективного течения. Эти стадии эволюции системы можно представить *бифуркационной диаграммой* (рис.4.3).

На рис.4.3 по вертикали отложена амплитуда конвективного течения, левая ветвь с  $A = 0$  соответствует *режиму теплопроводности* (состоянию *механического равновесия*), но при подогреве слоя жидкости снизу. До достижения критического значения числа Рэлея  $Ra_{kp}$  (за счет увеличения перепада температуры между горизонтальными границами слоя) жидкость неподвижна. Т.е. состояние механического равновесия устойчиво до критического значения числа Рэлея.

При  $Ra \geq Ra_{kp}$  происходит бифуркация (ветвление) решения – потеря устойчивости механического равновесия относительно бесконечно малых возмущений. В результате появляется поле скорости и деформация исходного поля температуры, как следствие развития ячеистой конвекции с различным направлением движения в двух соседних «валах», образующих отдельную ячейку. Появляется периодическая (когерентная) структура полей скорости и температуры.

Следующая бифуркация – неустойчивость ячеистого течения, зависящая от величины числа Прандтля (см. рис.4.7 и рис.4.8). С ростом числа Рэлея процесс имеет каскадный или стадийный характер – наблюдается серия бифуркаций все более сложных решений и переход к все более сложной пространственно-временной структуре течения. Как следствие происходит усложнение полей скорости и температуры (переход к пространственно-временной форме течения).

Соответственно возникают задачи:

- 1) определение условий существования равновесия (механического) подогреваемого слоя;
- 2) определение порога потери устойчивости механического равновесия – здесь важна сама суть, идеология, как это делается, из

каких физических соображений, и что такое устойчивость решений;

3) вывод системы уравнений Лоренца; ее решение - пример порождения хаоса в динамической системе;

4) исследования устойчивости ячеистых течений;

5) изучение процессов ламинарно-турбулентного перехода;

6) исследования развитых турбулентных течений.

В этой цепочке задач первый шаг – обезразмеривание системы уравнений свободной (а по физической природе термогравитационной) конвекции для придания решаемой задаче предельной общности.

Уравнение движения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta V - g \beta T \bar{\gamma}$$

рассмотрим как пример перехода к безразмерной форме.

Из условий задачи имеем независимые параметры, из которых формируем масштабы: естественный масштаб температуры – перепад температуры между границами  $T_1 - T_2 = \Delta T$ ; задана геометрия – бесконечный горизонтальный слой жидкости с единственным параметром – высотой слоя равной  $h$ , отсюда масштаб длины –  $h$ ; масштаб времени –  $h^2/\nu$ , масштаб скорости –  $a/h$ , масштаб давления –  $\rho_0 v a / h^2$ . Здесь использовано обозначение для температуропроводности:  $a = \lambda / \rho C_P$ .

При таком выборе масштабов размерная скорость  $V = V' \cdot (a/h)$ , а размерное давление  $P = P' \cdot (\rho_0 v a / h^2)$ . Аналогично преобразуем остальные величины в уравнении движения.

Дальше по правилу преобразований  $\varphi_i = \mu_i \bar{\varphi}_i$  или  $\mu_i \varphi'_i$  делаем замену размерных переменных на безразмерные. Подставляем таким образом записанные переменные:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(V' \cdot a / h)}{\partial(t' \cdot h^2 / \nu)} + \left( V' \cdot a / h \cdot \frac{\partial}{x' \cdot h} \right) \cdot V' \cdot a / h = \\ &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x' \cdot h} P' \cdot \rho_0 v a / h^2 + \nu \frac{\partial^2}{x'^2 \cdot h^2} \cdot V' \cdot a / h - g \beta T' \cdot \Delta T \cdot \bar{\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\chi / h}{h^2 / \nu} \cdot \frac{\partial V'}{\partial t'} + \frac{(a / h)^2}{h} (V' \cdot \nabla) V' = \\
& = -\frac{1}{\rho_0 h} \cdot \left( \frac{\rho_0 \nu a}{h^2} \right) \cdot \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\nu}{h^2} \cdot \frac{a}{h} \left( \frac{\partial^2 V'}{\partial x'} \right) - (g \beta \Delta T) \cdot T' \bar{\gamma} \\
& \frac{a \nu}{h^3} \cdot \frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{a^2}{h^3} (V' \nabla) V' = -\frac{a \nu}{h^3} \cdot \nabla P' + \frac{\nu a}{h^3} \Delta V' - (g \beta \Delta T) \cdot T' \bar{\gamma}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} + \frac{a}{\nu} (V' \nabla) V' = -\nabla P' + \Delta V' - \frac{g \beta \Delta T \cdot h^3}{a \nu} \cdot T' \bar{\gamma}$$

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{1}{Pr} (V' \nabla) V' = -\nabla P' + \Delta V' - Ra T' \gamma$$

А теперь опустим “штрихи”, но будем помнить, что все величины и члены в уравнении движения уже безразмерные.

Здесь появились безразмерные комплексы:  $Pr = \nu/a$  и  $Ra = g\beta\Delta T \cdot h^3 / a\nu$ . Из них можно получить связь с ранее введенным числом Грасгофа:  $Gr \cdot Pr = Ra$ .

Если в задаче вынужденной или смешанной конвекции есть характерная скорость, то появляется безразмерный критерий подобия – число Рейнольдса:  $Re = V \cdot \ell / \nu$ .

Особенностью свободной конвекции является то, что в постановке задачи нет характерной скорости – она результат генерации течения, возникающего вследствие приложенного перепада температуры  $\Delta T$ . Но и в свободной конвекции можно ввести параметр с размерностью скорости через независимые величины:  $V \approx \sqrt{g\beta\vartheta \cdot h}$  (размерность  $[V] = (\frac{m}{c^2} \frac{1}{K} K \cdot m)^{1/2} = m/c$ ).

Т.е. за единицу скорости можно выбрать скорость  $V$ , приобретаемую жидкой частицей, перегретой на  $\vartheta$  относительно окружающей среды и ускоряющейся на расстоянии  $h$  под действием силы тяжести. А в бесконечном горизонтальном слое единственный геометрический параметр – высота слоя  $h$ . Из условия пропорциональности кинетической энергии,

приобретаемой единичным объемом всплывающей жидкости, потенциальной энергии, возобновляемой в системе за счет поддерживаемого перепада температуры:  $\rho V^2 \sim \Delta \rho g h$ . И т.к.  $\Delta \rho = \rho_0 \beta \Delta T$  (при перепаде температуры  $\Delta T = T_1 - T_2$ ), получаем масштаб скорости  $V \approx \sqrt{g \beta \theta h}$ . В таком виде масштаб скорости удобно использовать для оценки относительной роли вынужденной и свободной конвекции в режимах смешанной конвекции.

Таким же образом преобразуются и представляются в безразмерном виде все остальные уравнения.

Возможны различные варианты представления уравнений свободной конвекции в безразмерной форме, при выборе других наборов единиц измерения (масштабов). Если, например: для координат и геометрических параметров системы выбрать характерный размер –  $L$ ; для температуры – характерную разность  $\Delta T$  или  $\theta$ ; масштаб для скорости –  $v/L$ ; времени –  $L^2/v$ ; давления –  $\rho_0 v^2/L^2$ ; и если ввести обозначения

$$\bar{g} = -g \bar{e}_z, \quad a = \lambda / \rho C_p, \quad \text{то будем иметь уравнения в виде:}$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\nabla P + \Delta \bar{V} - Gr T \bar{e}_z;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) T = Pr^{-1} \Delta T; \quad div \bar{V} = 0; \quad \text{где } Gr = \frac{g \beta \theta L^3}{v^2}; \quad Pr = v/a;$$

таким образом, не меня физической сути переобозначили число Прандтля (Pr), тогда:  $Ra = Pr \cdot Gr = g \beta \theta L^3 / va$ .

Если за масштаб скорости взять  $a/L$  и оставить без изменения остальные единицы, то получим безразмерные уравнения:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\nabla P + \Delta \bar{V} - Ra T \bar{e}_2$$

$$Pr \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) T = \Delta T$$

Если за единицу скорости можно выбрать  $V \approx \sqrt{g \beta \theta L}$ , а за единицу времени принять  $L/V$ , то тогда:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\nabla P + \text{Re}^{-1} \Delta V + T e_z;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) T = (\text{Pr Re})^{-1} \Delta T; \quad \operatorname{div} \bar{\nabla} = 0.$$

Здесь введено обозначение  $\text{Re} = VL / v = \sqrt{g\beta\theta L} \cdot L / v = \sqrt{Gr}$  - число Рейнольдса.

Для вынужденных течений задана характерная скорость  $V$ , тогда естественно получается  $\text{Re} = VL / v$ .

Проблема выбора масштабов возникает, в частности, из-за того что числа Прандтля для различных текучих сред находятся примерно в диапазоне  $0,02 \leq \text{Pr} \leq 3000$ . Поэтому порядок членов в безразмерных уравнениях может сильно меняться в зависимости от того где появился параметр подобия, в числителе или в знаменателе. Это с математической точки зрения, а еще необходимо учитывать физическое содержание задач.

Найдем *необходимое условие механического равновесия жидкости* при наличии неоднородности температуры.

Механическое равновесие подразумевает стационарное состояние системы и отсутствие движения:  $\bar{V} = 0; \partial / \partial t = 0$ .

В этом случае из уравнений свободной конвекции в *приближении*

*Буссинеска* остается:  $-\frac{1}{\rho_0} \nabla P + g\beta T \bar{e} = 0$ , здесь  $\bar{e}$  - единичный

вектор;  $\Delta T = 0$

На первое уравнение (полученное из уравнения движения) подействуем оператором  $\operatorname{rot}$ . А т.к.  $\operatorname{rot} \nabla = 0$ , то

$\operatorname{rot}(T \bar{e}) = T \operatorname{rot} \bar{e} + \nabla T \times \bar{e} = 0$ ; а  $\operatorname{rot} \bar{e} = 0$ , т.о. *условие равновесия жидкости сводится к требованию*  $\nabla T \times \bar{e} = 0$ , т.е. *градиент температуры  $T$  должен быть параллельным вертикальной оси (или вектору  $\bar{g}$ ) и температура может меняться только по вертикали  $T = T(z)$ .* Значит любой *самый малый горизонтальный градиент температуры  $\partial T / \partial x$  приведет к возникновению конвективного движения.*

Из второго уравнения (уравнения энергии):  $\Delta T = \partial^2 T / \partial z^2 = 0$  следует, что температура Т может быть только линейной функцией высоты:  $T = Az + B$ .

Экспериментально установлено, что для случая двух жестких границ горизонтального слоя, равномерно (пространственно однородно) подогреваемого снизу при критическом перепаде температуры между границами возникает ячеистая конвекция. Критическое значение числа Рэлея:  $Ra_{kp} = 1708 \pm 50$ . Можно сделать оценки условий нарушения устойчивости механического равновесия при подогреве снизу:

$$\Delta T = Ra_{kp} \cdot \frac{\nu a}{g \beta h^3} \approx \frac{10^{-7}}{h^3} \frac{\text{град}}{\text{м}} \quad \text{для слоя воды это}$$

$$\approx \frac{1708 \cdot 10^{-6} (\text{м}^2 / \text{с}) \cdot 1,4 \cdot 10^{-7} (\text{м}^2 / \text{с})}{10 (\text{м} / \text{с}^2) \cdot 2 \cdot 10^{-4} (1 / \text{К}) \cdot h^3 (\text{м}^3)}$$

Если  $h = 1\text{м}$ , то  $\Delta T \sim 10^{-7} \text{ }^{\circ}\text{C}$ ; если  $h = 1\text{см}$ , то  $\Delta T \sim 0,1 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ; при  $h = 1\text{мм}$   $\Delta T \sim 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Т.е. слой воды толщиной  $h \sim 1\text{мм}$  абсолютно устойчивый. Или быстрая оценка порядка величины:

$$\Delta T \Rightarrow \sim \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 1,4 \cdot 10^{-7}}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot h^3}.$$

Для  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  при  $20^{\circ}\text{C}$  комплекс  $\frac{\beta g}{a \nu} \sim 80 \text{ } \text{мм}^3/\text{К}$  и можно делать оценки  $h$  при заданном  $\Delta T$  или наоборот оценки  $\Delta T$  при заданном  $h$  из соотношения:  $\frac{1700}{80 \cdot h^3} = (\Delta T)_{kp}$ .

**Задача Рэлея.** Бесконечный в горизонтальных направлениях горизонтальный слой жидкости глубиной  $h$ , однородно подогревается снизу, обе горизонтальные границы считаются свободными (отсутствует трение), недеформируемыми и изотермическими (рис.4.4).

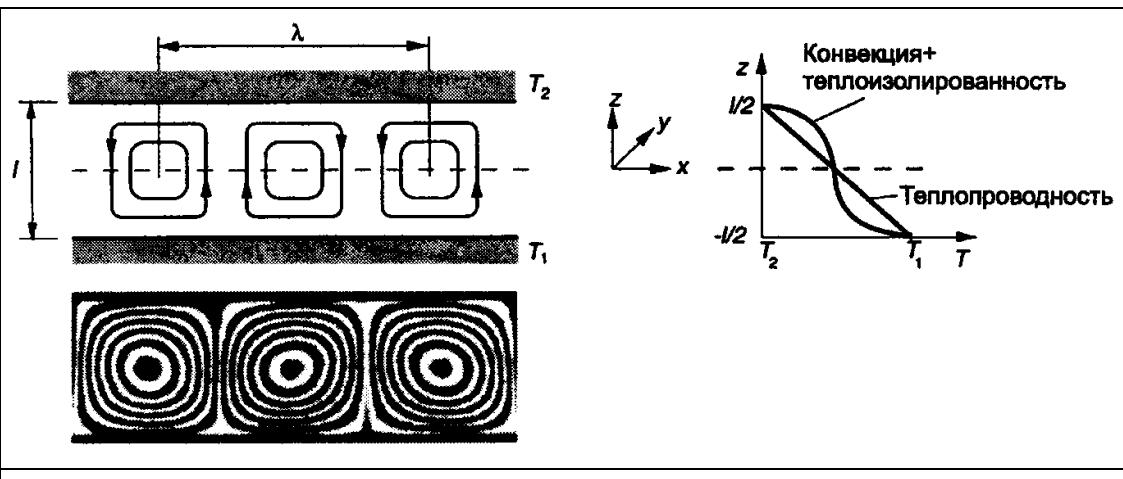


Рис.4.4. Постановка задачи – схема конвективного течения

Выберем в качестве масштабов: длины – высоту слоя  $h$ ; для  $T$  – перепад температуры между нижней и верхней границами ( $T_1 > T_2$ )  $T_1 - T_2 = \Delta T$ ; для времени –  $h^2/v$ ; для скорости –  $a/h$ . Тогда уравнения для возмущений:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{Pr}^{-1} (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\text{Pr}^{-1} \nabla P + \Delta \bar{V} + Ra T \bar{e}_z, \quad \bar{V} = (u, w)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) T = \Delta T, \quad \operatorname{div} \bar{V} = 0$$

Решается двухмерная задача для развивающихся возмущений в плоскости  $(x, z)$ , валы ориентированы вдоль  $y$ . Граничные условия:

$$z = 0 : \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad w = 0; \quad T = 1$$

$$z = 1 : \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad w = 0; \quad T = 0$$

Температура задается в виде  $T = \theta - z$ , так что  $\theta$  описывает отклонения от равновесного линейного распределения.

Задача решается в рамках линейной теории устойчивости, т.е. из уравнений выбрасываются все члены, квадратичные по скорости и возмущениям равновесного профиля температуры. В результате получаются линейные уравнения. Дальше:

1. Расписываем уравнения движения для компонент вектора скорости  $u$  и  $w$ , вводим понятие *функция тока*  $\psi$ , которая связана с компонентами скорости:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

В задаче Рэлея рассматриваются только плоские движения – конвективные волны. Тогда вектор скорости  $\bar{V} = (u, 0, w)$  и исходная система уравнений в приближении Буссинеска для компонент скорости и температуры, уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + v \Delta w + g \beta T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \Delta T$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

После введения функции тока получаем систему уравнений:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - v \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + v \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} + g \beta T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = a \Delta T$$

Первое уравнение дифференцируем по  $z$ , второе по  $x$ , вычитаем первое из второго, тем самым исключаем давление и получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} = v \Delta \Delta \psi + g \beta \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \{\psi, T\} = a \Delta T$$

Здесь для сокращения записи использованы скобки Пуассона

$$\{A, B\} = \frac{\partial}{\partial x} A \cdot \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} A \cdot \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Учитывая линейность распределения температуры по высоте слоя в состоянии механического равновесия, температура  $T$  представляется в виде суммы:  $T = \theta - \frac{\Delta T z}{h}$ , где

$\theta$  – отклонение температуры  $T$  от линейного профиля.

Тогда:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \{\psi, \Delta \psi\} = v \Delta \Delta \psi + g \beta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \{\psi, \theta\} - h^{-1} \Delta T \frac{\partial \psi}{\partial x} = a \Delta \theta$$

На изотермических и недеформируемых границах без трения:

$$\psi = \Delta \psi = \theta = 0.$$

2. После того как первое уравнение продифференцировали по  $z$ , а второе по  $x$  и вычли из второго уравнения первое, из уравнений выбрасываются все члены, квадратичные по скорости и возмущениям равновесного профиля температуры. И уже в безразмерном виде имеем систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = \Delta \Delta \psi + Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$Pr \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Последнее слагаемое во втором уравнении это остаток от нелинейного слагаемого, т.к.

$$(\bar{V} \nabla) T = (\bar{V} \nabla) \theta - w \quad (\text{вспомним, что } T = \theta - z)$$

Граничные условия на верхней и нижней границах имеют одинаковый вид:  $\psi = \Delta \psi = \theta = 0$ . Они являются следствием отсутствия трения и деформации в условиях для компонент скорости, изотермичности в условиях для температуры – стенки считаются высокотеплопроводными и на них гаснут возмущения.

Следующий шаг состоит в использовании нормальных возмущений, которые задаются в форме периодических возмущений с экспоненциальной зависимостью амплитуды от

времени (используется априорная экспериментальная информация о периодичности возникающего течения):

$$\psi(x, z, t) = \psi_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \sin(\pi k x)$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \cos(\pi k x)$$

Учитывая, что

$$\Delta \psi = -\pi^2 (n^2 + k^2) \psi$$

$$\Delta \Delta \psi = \pi^4 (n^4 + 2k^2 n^2 + k^4) \psi$$

Получаем уравнения

$$\lambda \pi^2 (n^2 + k^2) \psi_0 = \pi^4 (n^4 + 2k^2 n^2 + k^4) \psi_0 - k \pi R a \theta_0$$

$$-\lambda \Pr \theta_0 = -\pi^2 (n^2 + k^2) \theta_0 + \pi k \psi_0$$

Т.е. получили систему линейных однородных уравнений для амплитуд  $\psi_0$  и  $\theta_0$ :

$$\pi^2 (k^2 + n^2) [\lambda - \pi^2 (n^2 + k^2)] \psi_0 + k \pi R a \theta_0 = 0,$$

$$\pi k \psi_0 + [\lambda \Pr - \pi^2 (n^2 + k^2)] \theta_0 = 0$$

Система имеет решение, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \pi (k^2 + n^2) [\lambda - \pi^2 (n^2 + k^2)] & Ra \\ \pi k & \lambda \Pr - \pi^2 (n^2 + k^2) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение:

$$\pi(k^2 + n^2) \left[ \lambda^2 \Pr - \lambda\gamma - \Pr \lambda\gamma + \pi^4 (n^2 + k^2)^2 \right] - \pi k^2 Ra = 0$$

Здесь  $\gamma =$

Решение дает значения для декремента  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\pi^2 (1 + \Pr)(n^2 + k^2)}{2 \Pr} \pm \sqrt{\left( \frac{\pi^4 (n^2 + k^2)^2 (1 - \Pr)^2}{4 \Pr^2} + \frac{k^2 Ra}{\Pr(n^2 + k^2)} \right)}$$

По виду решения можно сделать качественные выводы:

1) при подогреве снизу  $Ra > 0$  и подкоренное выражение  $> 0$  всегда. Значит оба корня вещественны и возмущения эволюционируют монотонно. Один корень всегда положителен, а второй меняет знак при некотором  $Ra = Ra_c$  (рис.4.5);



Рис.4.5. Зависимость вещественной части декремента затухания от Ra

2) при  $Ra < 0$  (подогрев сверху) вещественная часть обоих корней всегда положительна.

Следовательно, все возмущения затухают. В то же время с ростом величин подогрева возникает ситуация, когда выражение под корнем становится  $< 0$ . Т.е. возникает два комплексно-сопряженных

корня, описывающих затухающие, но колебательные режимы. Это происходит при  $Ra^* = \pi^4 (4 \Pr k^2)^{-1} (n^2 + k^2)^3 (1 - \Pr)^2$  (рис. 4.5):

На рис.4.5 показан график зависимости вещественной части декремента затухания от числа Рэлея Ra. Здесь I – область затухания колебательных возмущений; II – область монотонно затухающих возмущений; III -- область монотонно нарастающих возмущений. Найдем критическое значение Ra, при достижении

которого начинается нарастание возмущений. Из условия нейтрального состояния  $\lambda = 0$  получаем:

$$Ra_c = \pi^4 k^{-2} (k^2 + n^2)^3.$$

Т. к. требуется определить возмущения, нарастающие при наименьших значениях  $Ra_c$ , то нужно определить соответствующие  $k$  и  $n$ . Дифференцирование по  $k$  дает:

$$\frac{\partial Ra}{\partial k} = 2\pi^4 k^{-3} (k^2 + n^2)^2 (2k^2 - n^2) = 0 \quad (*)$$

$$\text{и } k_c = n / \sqrt{2} \quad Ra_c = \left( \frac{27}{4} \right) \pi^4 n^4$$

Самые малые критические значения  $Ra_c$  появляются при  $n=1$ , что соответствует одному слою конвективных валов (см. рис.4.6б). Следовательно:

$$k_c = 1 / \sqrt{2} \quad Ra_c = \left( \frac{27}{4} \right) \pi^4 = 657,5.$$

Критическое число  $Ra_c$ , при котором возникает неустойчивость по отношению к возмущению с заданным  $n$  и  $a$ , определяется из условия  $\lambda_n^{(-)} = 0$ . С помощью

---


$$\lambda_n = \frac{\Pr+1}{2\Pr} (n^2 \pi^2 + k^2) \pm \sqrt{\left( \frac{\Pr-1}{2\Pr} \right)^2 (n^2 \pi^2 + k^2)^2 + \frac{Rak^2}{\Pr(n^2 \pi^2 + k^2)}}$$

находим  $Ra = \frac{(n^2 \pi^2 + k^2)^3}{k^2}$  это выражение дает нейтральную

кривую на плоскости число Рэлея – волновое число ( $Ra, k$ ), разграничитывающую область устойчивости и неустойчивости, заштрихованную на рис.4.6а. При любом  $n$  нейтральная кривая  $Ra(k)$  имеет минимум. В области коротковолновых возмущений ( $k \gg 1$ , длина волны возмущений много меньше толщины слоя  $h$ ) критическое число  $Ra$  растет с ростом  $a$  по закону  $Ra \approx k^4$ . При  $k$

$\ll 1$   $Ra \approx \frac{n^6 \pi^6}{k^2}$ . При всех  $k$  наименьшее значение имеет число  $Ra$

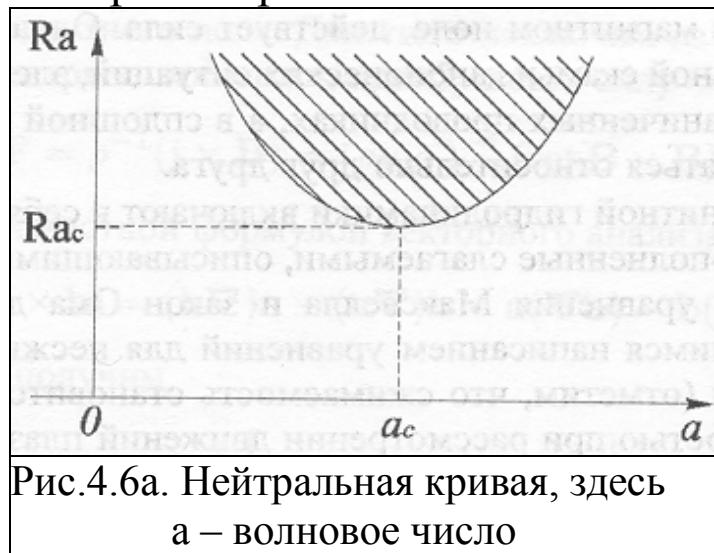
для основной моды  $n = 1$ . Минимальное значение  $Ra_m$  легко найти

из (\*):  $\frac{\partial^2 Ra}{\partial k^2} = 0 \quad Ra_m = \frac{27}{4} n^4 \pi^4$ . Оно достигается при  $k_m = \frac{n\pi}{\sqrt{2}}$ .

Для основного возмущения ( $n = 1$ ) имеем  $Ra_m = 657,511$ ,  $k_m = 2,221$ .

С увеличением  $n$  критические числа быстро растут и минимум на нейтральной кривой смещается в сторону коротких длин волн возмущений. Если обозначить волновое число как обычно принято через  $k$ , то:  $k^2 = k_1^2 + k_2^2 \rightarrow v_z(x, y, z) = v(z) \cos k_1 x \cos k_2 y$

Вид нейтральной кривой: рис.4.6



Ячейки прямоугольной формы со сторонами  $\ell_1 = \frac{2\pi}{k_1}$   $\ell_2 = \frac{2\pi}{k_2}$

получаются в случае наложения двух систем валов по осям  $x$  и  $y$ .

Гексагоны - шестиугольные ячейки появляются при наложении трех систем валов одинаковой длины волны под углами 120 градусов.

$$w(x, y, z) = w(z) \left[ 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kx \cdot \cos \frac{1}{2} ky + \cos ky \right] \text{ сторона } \ell = 4\pi / 3k \text{ между центрами } d = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}$$

Из анализа рис.4.6 становятся ясны понятия *бифуркация и точка бифуркации*: с ростом Ra качественно меняется характер решения. При  $Ra < Ra_c$  единственное решение – устойчивая неподвижная точка – конвекция отсутствует.

На рис.4.3 в плоскости  $Ra-A$ , где A – амплитуда (скорость вращения) конвективных валов, в точке  $Ra = Ra_c$  рождается дополнительная пара решений (это также устойчивые точки), каждое из которых соответствует вращению валов в ту или иную сторону. Прежнее решение становится неустойчивым. В этой точке происходит бифуркация, называемая «вилкой» (ответвление пары решений в виде притягивающих точек). Т.о. точкой бифуркации называется точка в пространстве параметров, в которой происходит ветвление решений.

Таким образом, если Ra выше некоторого критического значения, теряет устойчивость состояния покоя слоя жидкости и в нем возникает конвективное движение. На рис. 4.6в приведены графики нейтральных кривых, определяющих возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемой снизу, для различных граничных условий (по [1]).

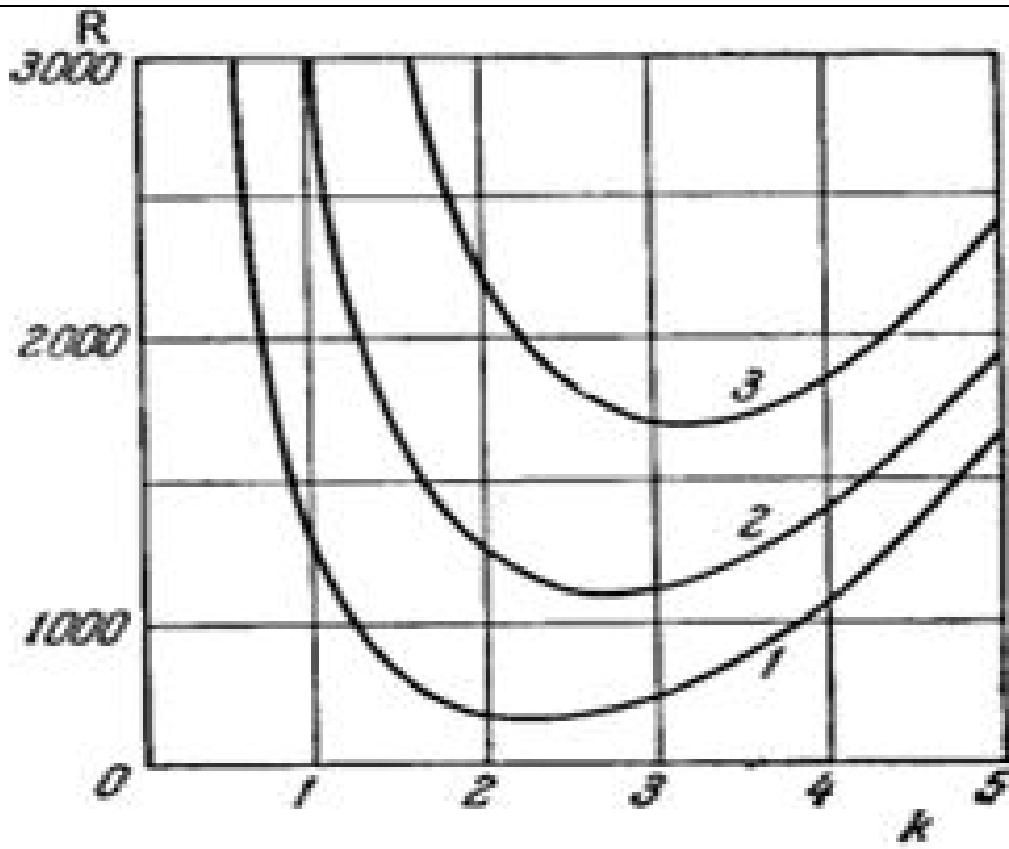


Рис. 4.6в. Нейтральные кривые: 1 – обе свободные границы:  $R_a_c = 657,511$ ;  $k_c = 2,221$ ; 2 – твердая и свободная:  $R_a_c = 1100,657$ ;  $k_c = 2,682$ ; 3 – обе твёрдые:  $R_a_c = 1707,762$ ;  $k_c = 3,117$

Линейная теория устойчивости позволяет сопоставить возмущения лишь по скорости их нарастания, не позволяя определять форму и масштаб конечного возмущения. Поэтому для определения стационарных движений определенного типа в области надкритичности используется метод мод – представление нестационарного движения в надкритической области в виде суперпозиции некоторых первичных мод с амплитудами, зависящими от времени. Процесс нелинейного взаимодействия приводит к определенной селекции. Затем были проведены исследования устойчивости конечно амплитудных ячеистых валообразных конвективных течений. Были определены границы устойчивости конвективных валов (рис.4.7).

Результаты исследований устойчивости конечно амплитудных ячеистых валообразных конвективных течений, относительно малых трехмерных возмущений, представлены на рис. 4.7. Здесь представлены результаты исследований в слоях с двумя жесткими

границами. При малых значениях чисел Прандтля развивается колебательная неустойчивость OS, которая ведет к развитию синусоидальных волнобразных возмущений, бегущих вдоль образующих валов. При  $Pr = 7$  развивается зигзаговая неустойчивость ZZ, которая приводит к синусоидальному изгибу валов. Поперечно-валиковая qr – неустойчивость формирует систему валов, перпендикулярных исходным. Узелковая неустойчивость KN является дополнительной ветвью поперечно-валиковой неустойчивости. Косоварикозная SV- неустойчивость деформирует валы в продольном направлении.

Все эти типы неустойчивости наблюдаются экспериментально.

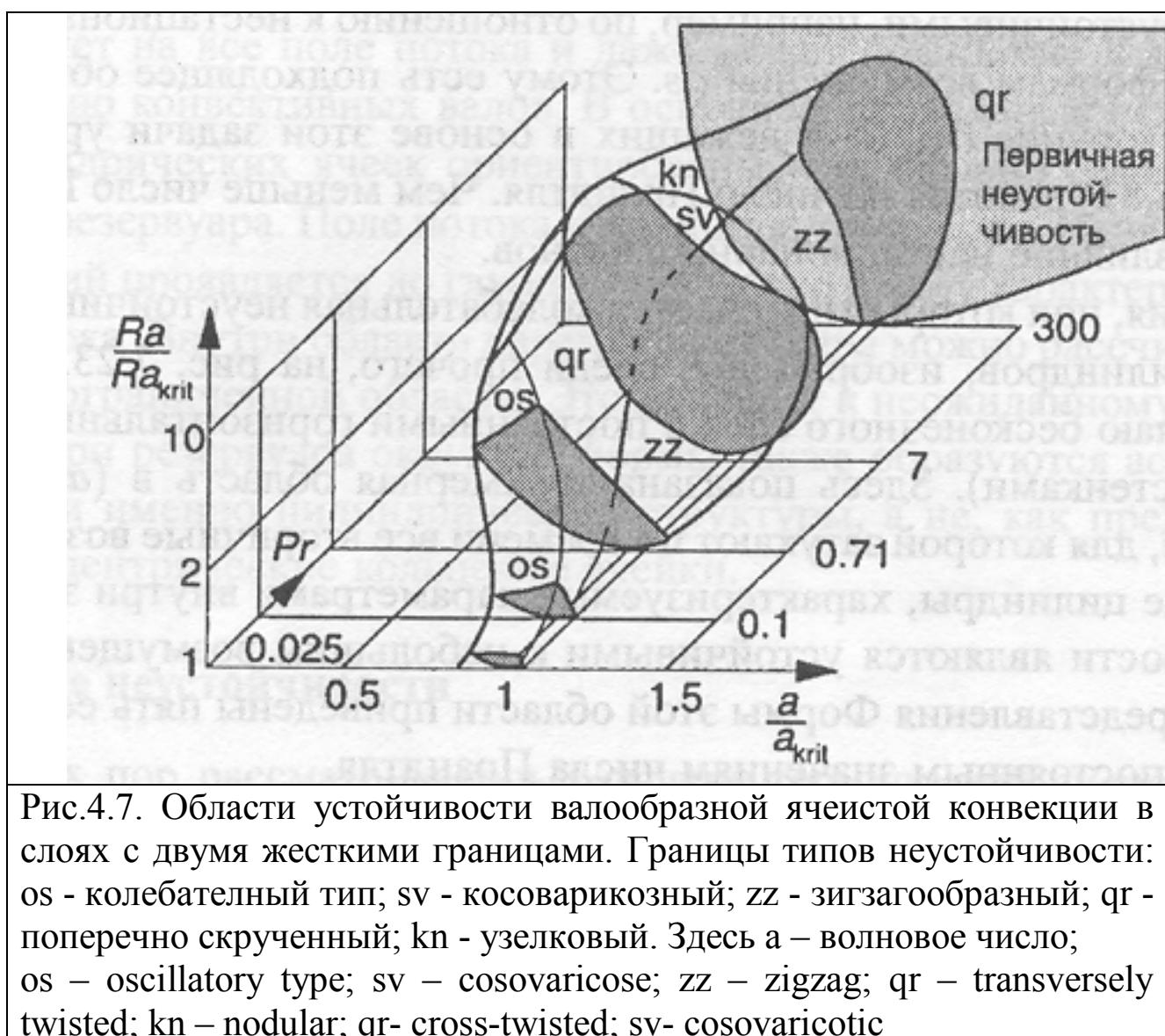
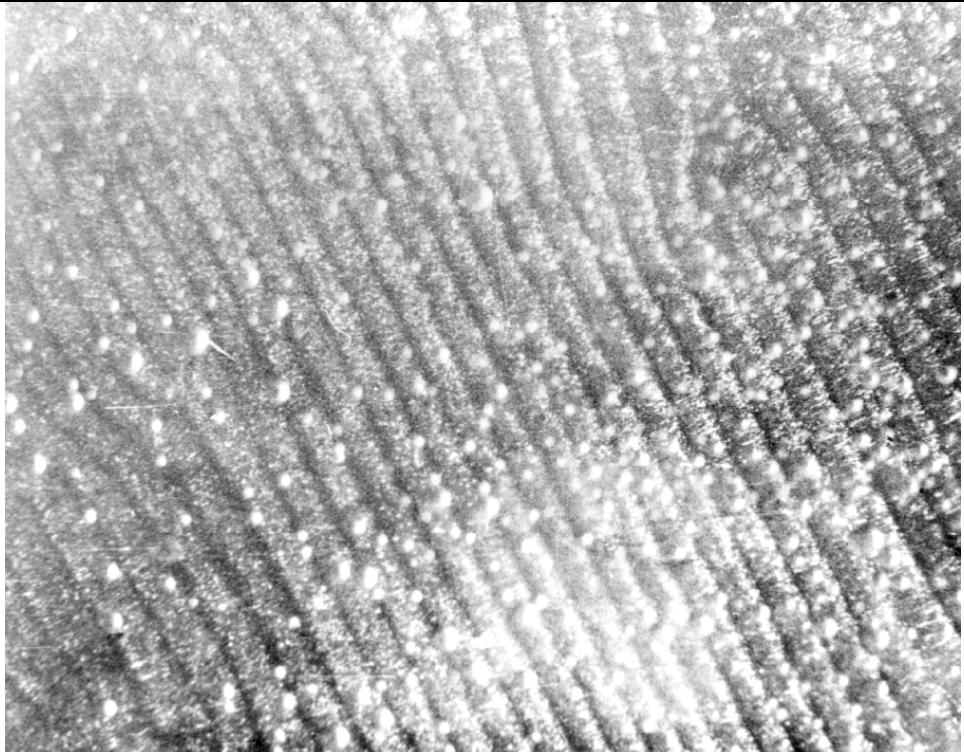
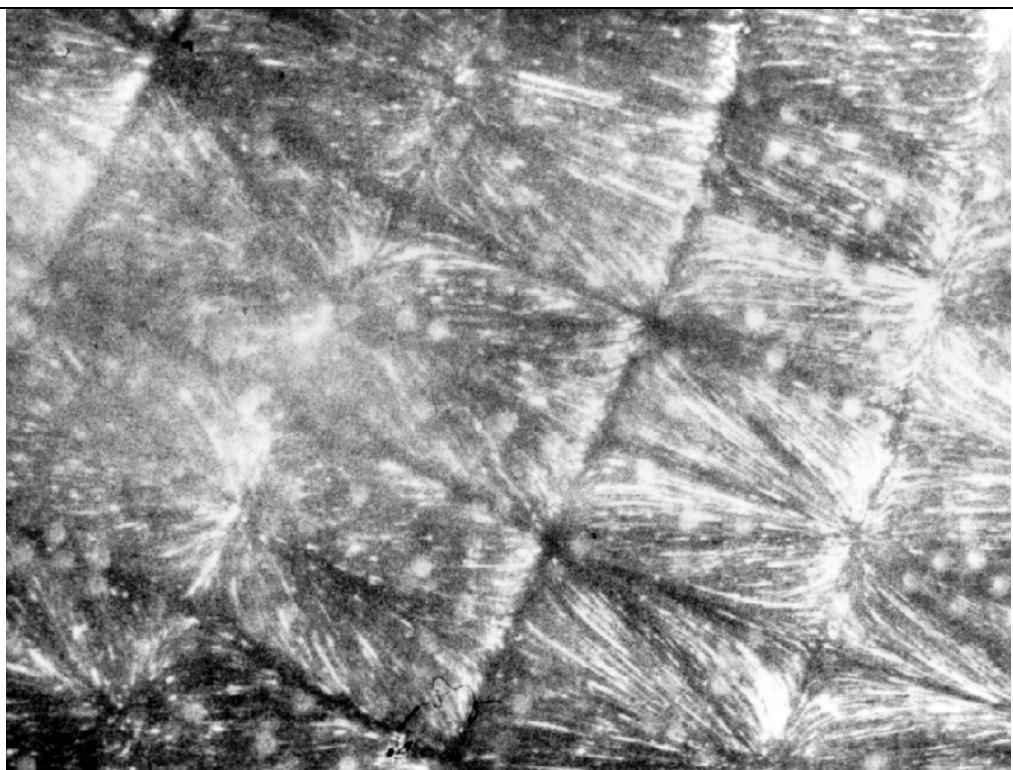


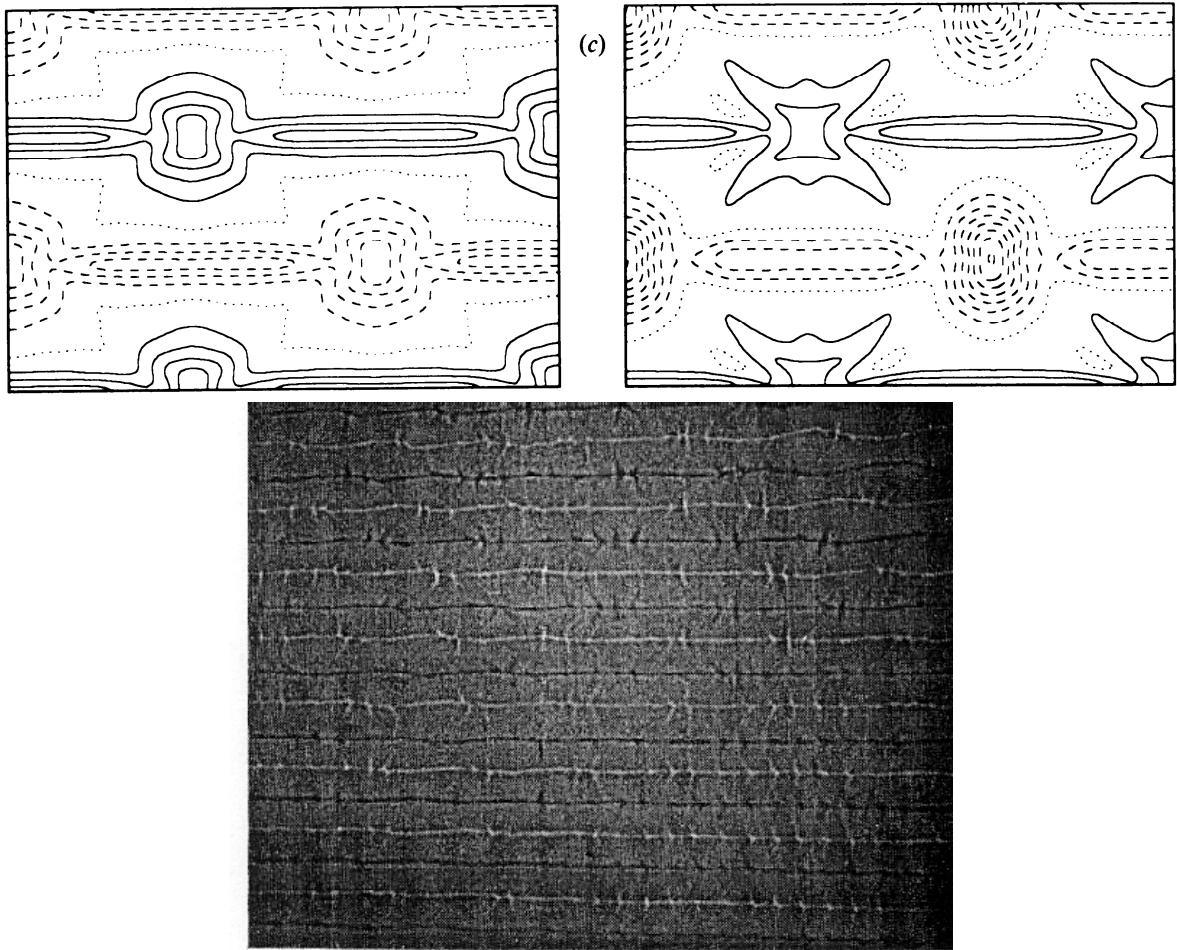
Рис.4.7. Области устойчивости валообразной ячеистой конвекции в слоях с двумя жесткими границами. Границы типов неустойчивости: os - колебательный тип; sv - косоварикозный; zz - зигзагообразный; qr - поперечно скрученный; kn - узелковый. Здесь  $a$  – волновое число; os – oscillatory type; sv – cosovaricose; zz – zigzag; qr – transversely twisted; kn – nodular; qr- cross-twisted; sv- cosovaricotic



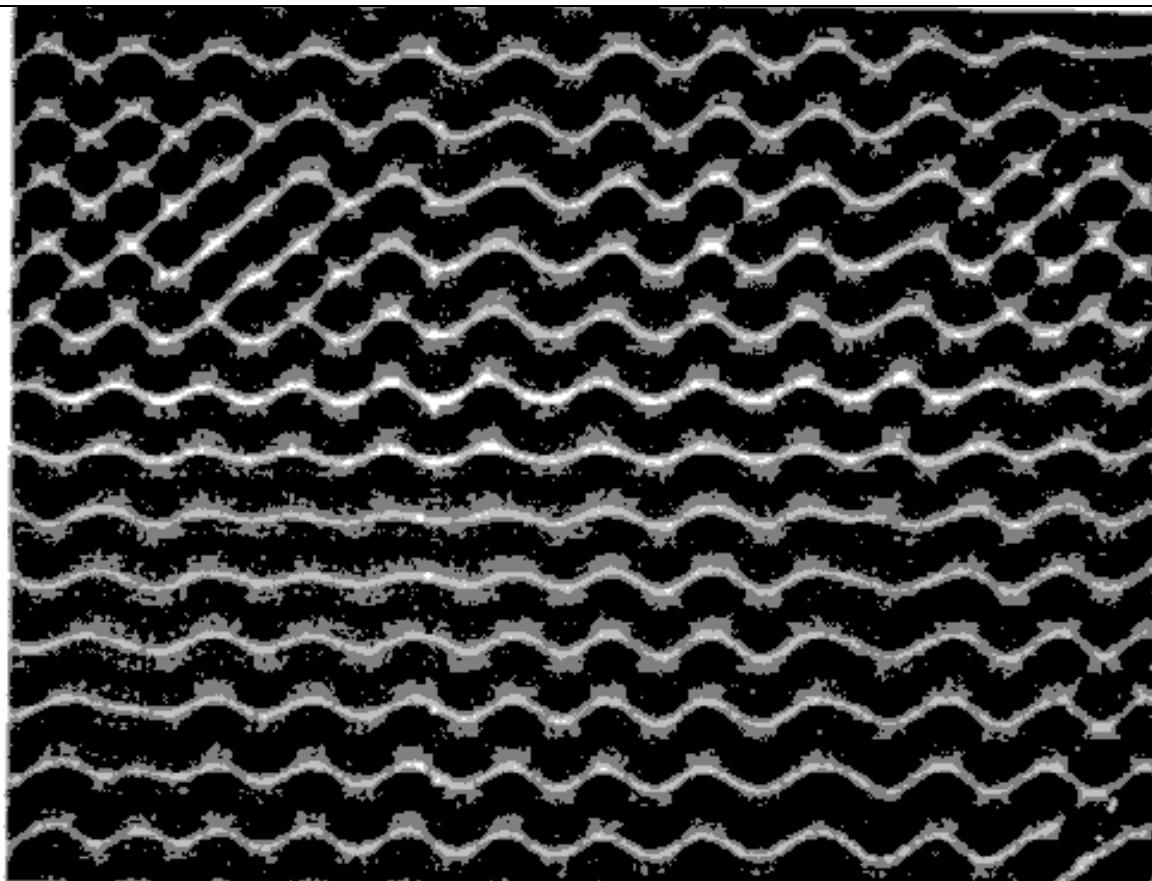
Квазидвумерные конвективные волны (convection rolls) - к рис.4.7



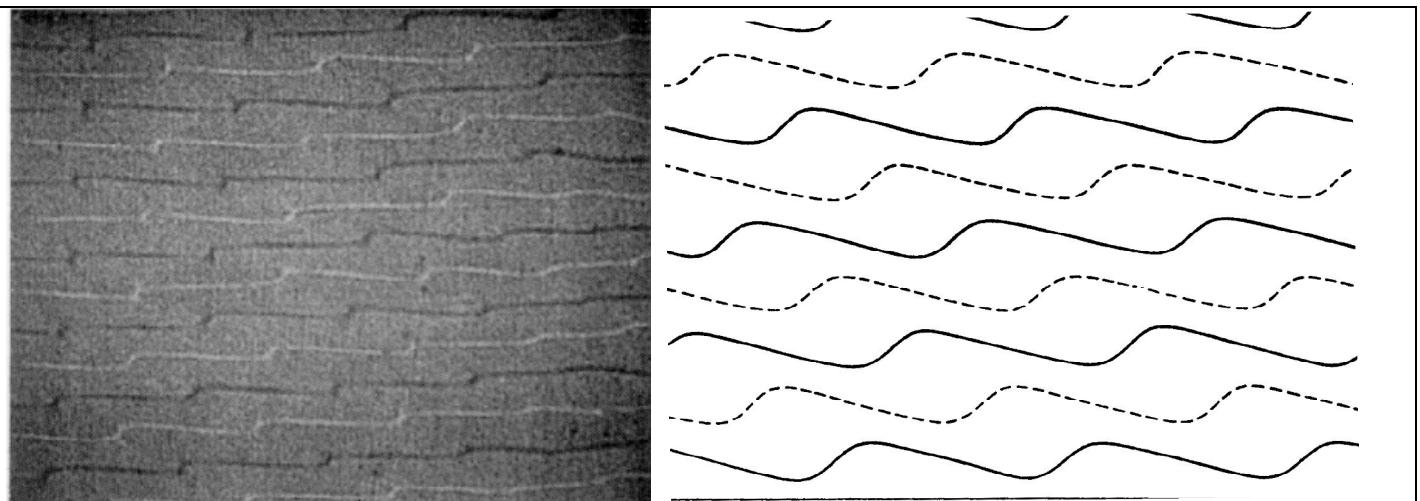
Двухмодовая (bimodal) конвекция — продукт поперечно-валиковой (cross-roll) неустойчивости - к рис.4.7



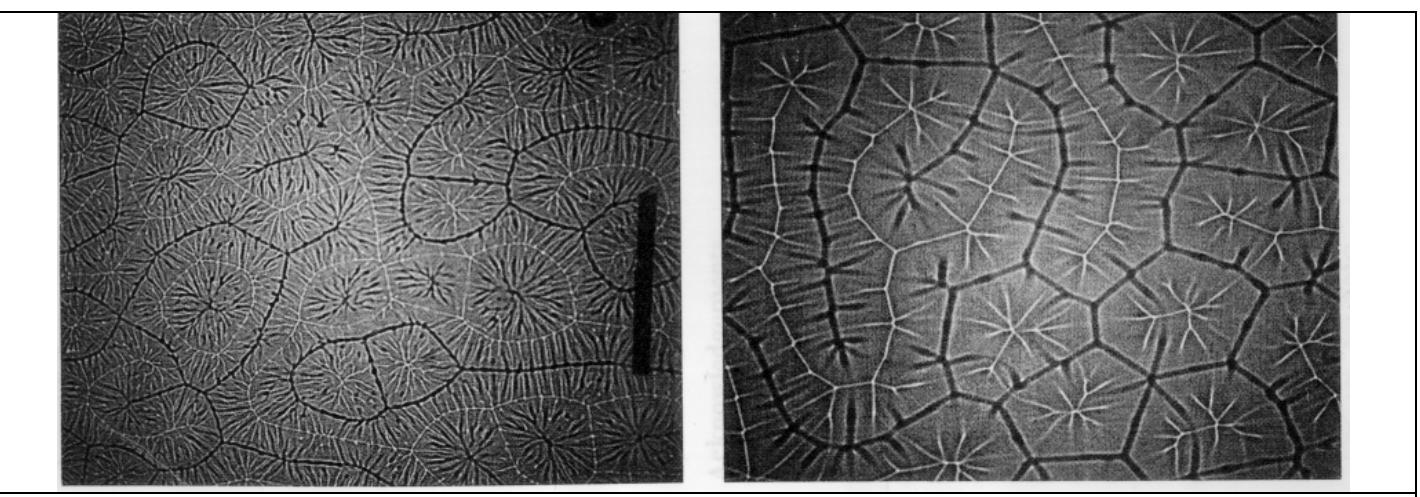
Узелковая (knot) неустойчивость — ветвь поперечно-валиковой - к рис.4.7



Зигзаговая (zigzag) неустойчивость валов - к рис.4.7



Косоварикозная (skewed-varicose) неустойчивость валов - к рис.4.7



Спицевидная (spoke) конвекция — полностью развитая узелковая неустойчивость валов - к рис.4.7

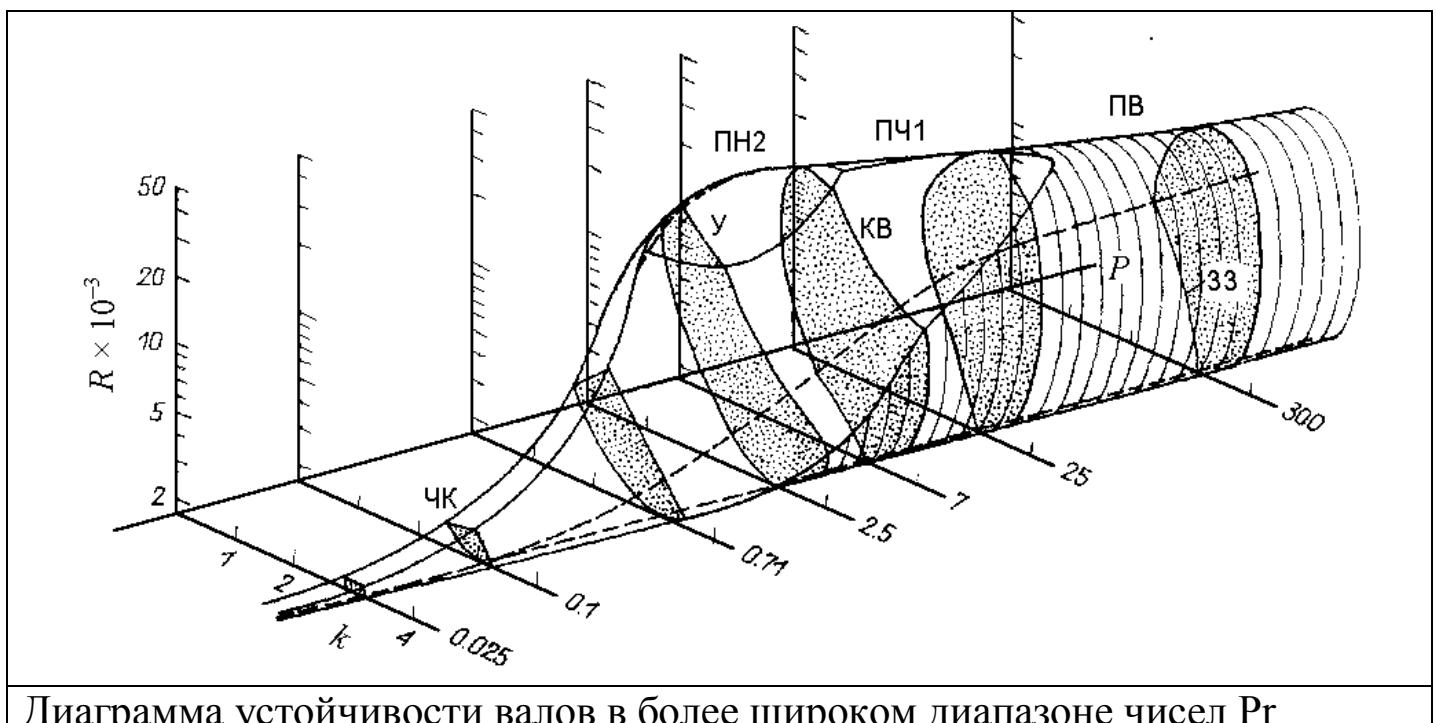


Диаграмма устойчивости валов в более широком диапазоне чисел  $Pr$

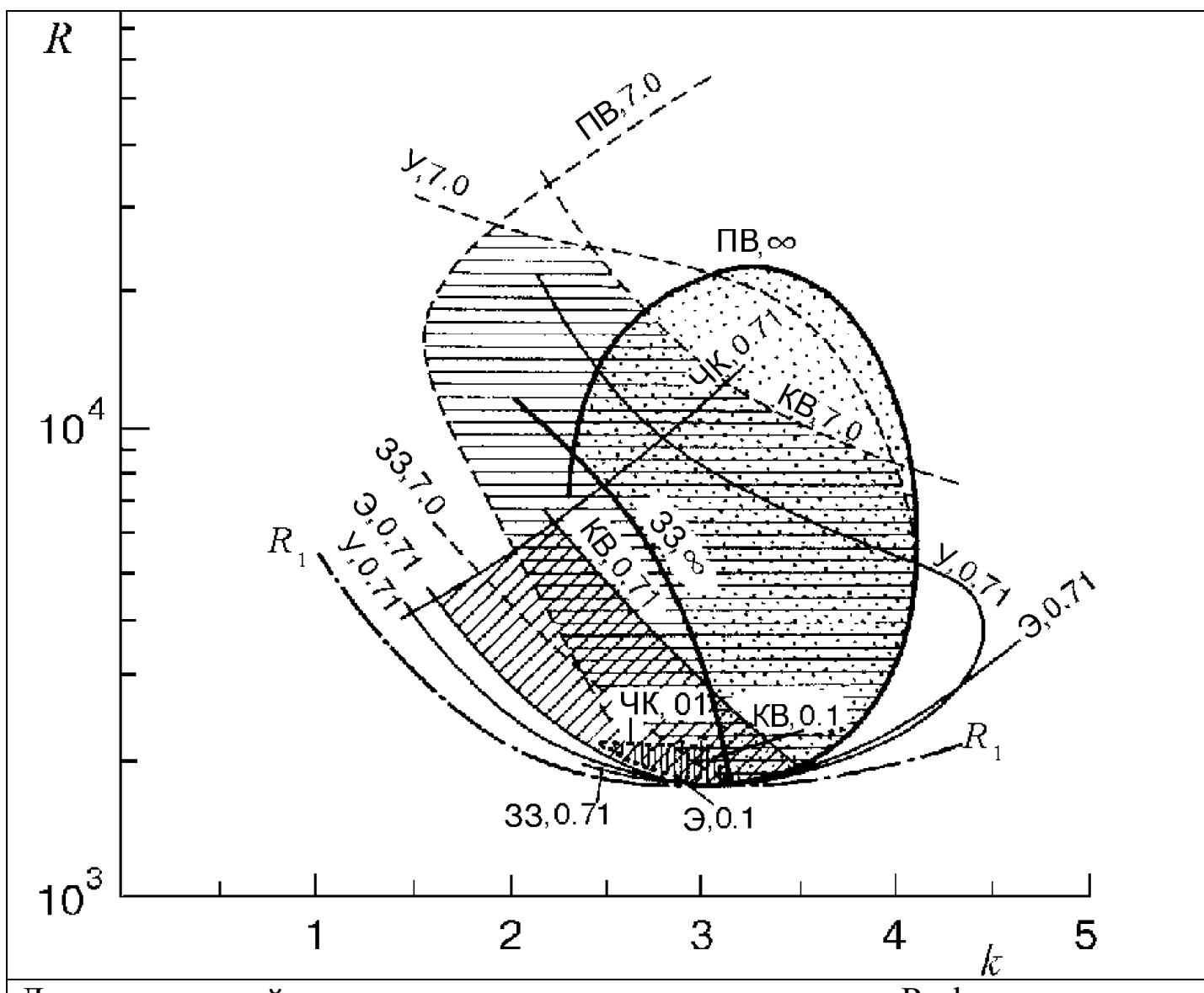


Диаграмма устойчивости валов в проекции на плоскость  $R$ - $k$

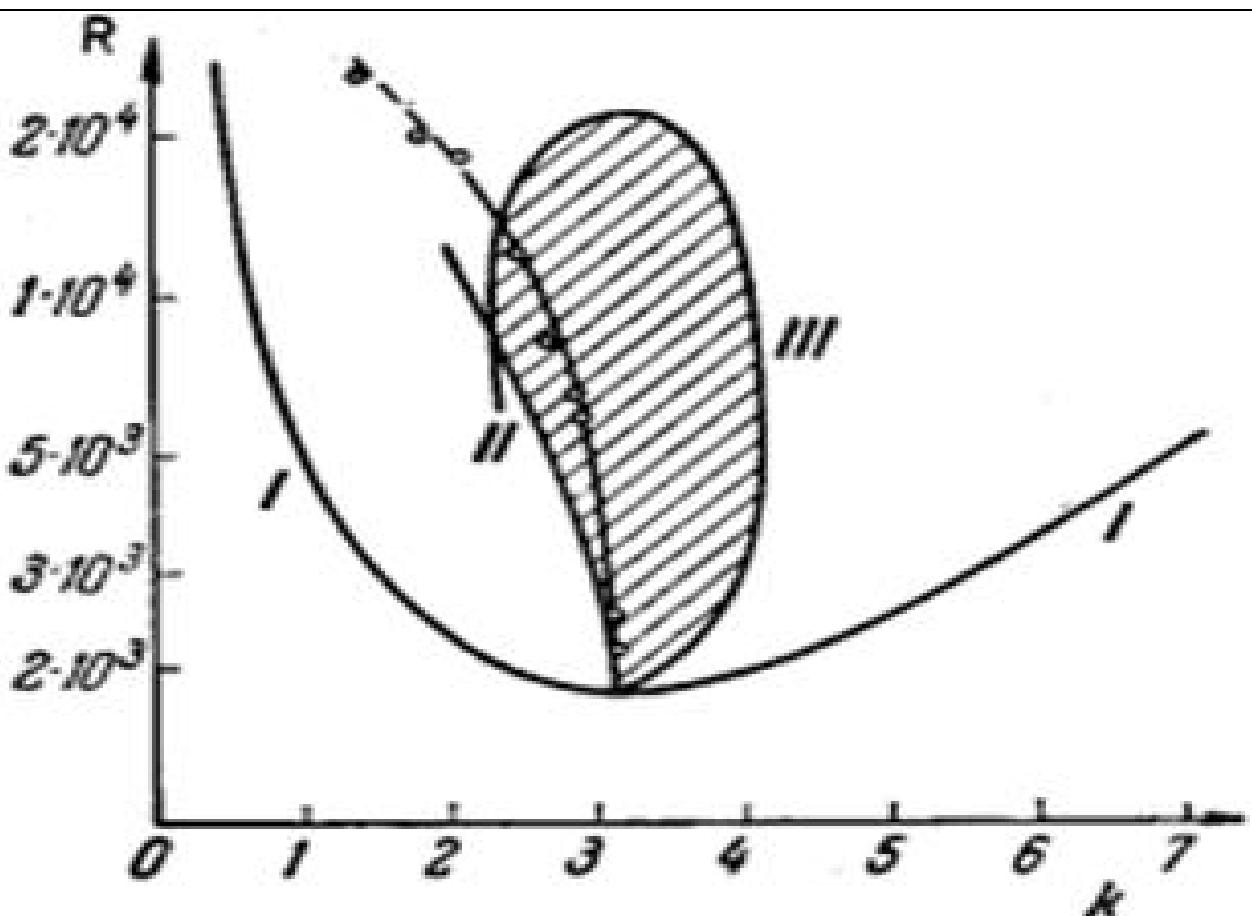


Рис. Д1. Диаграмма устойчивости конвективных валов. I – нейтральная кривая устойчивости равновесия, II и III – нейтральные кривые, ограничивающие области устойчивости конвективных валов. Экспериментальные точки и сплошная кривая соответствуют валим, штриховая – пространственным ячейкам. Эксперименты на воде с  $\text{Pr} = 6,7$  при высоте слоя  $h = 12\text{мм}$

Дополнительные данные представлены на рис.4.8.

Теоретические исследования структуры и пространственной формы конвективного течения для подогреваемого снизу горизонтального слоя с жёсткими границами проводились в основном в приближении бесконечного слоя по горизонтали. Для такого случая режим конвекции определяется числами  $\text{Ra}$  и  $\text{Pr}$ , а переходы между режимами могут быть описаны диаграммой, представленной на рис.4.8. Она обобщает экспериментальные данные ряда авторов.

На рис.4.8 ниже линии I ( $\text{Ra} = \text{Ra}_{\text{кр}} = 1708$ ) расположена область устойчивости неподвижного состояния жидкости. Выше – область устойчивости стационарной валообразной конвекции, верхняя граница которой сильно зависит от числа  $\text{Pr}$ . При этом её нижняя граница – линия перехода от режима теплопроводности к режиму конвекции – не зависит от числа  $\text{Pr}$ . Кривая II – порог, выше которого поперечно-валиковая неустойчивость приводит к стационарной двухмодовой конвекции, выше неё – кривая III – переход к нестационарной конвекции. Расщепление

кривой III на две ветви связано с тем, что возникновение колебаний сильно зависит от наличия неоднородностей картины. Над кривой V находится область полностью турбулентной конвекции.

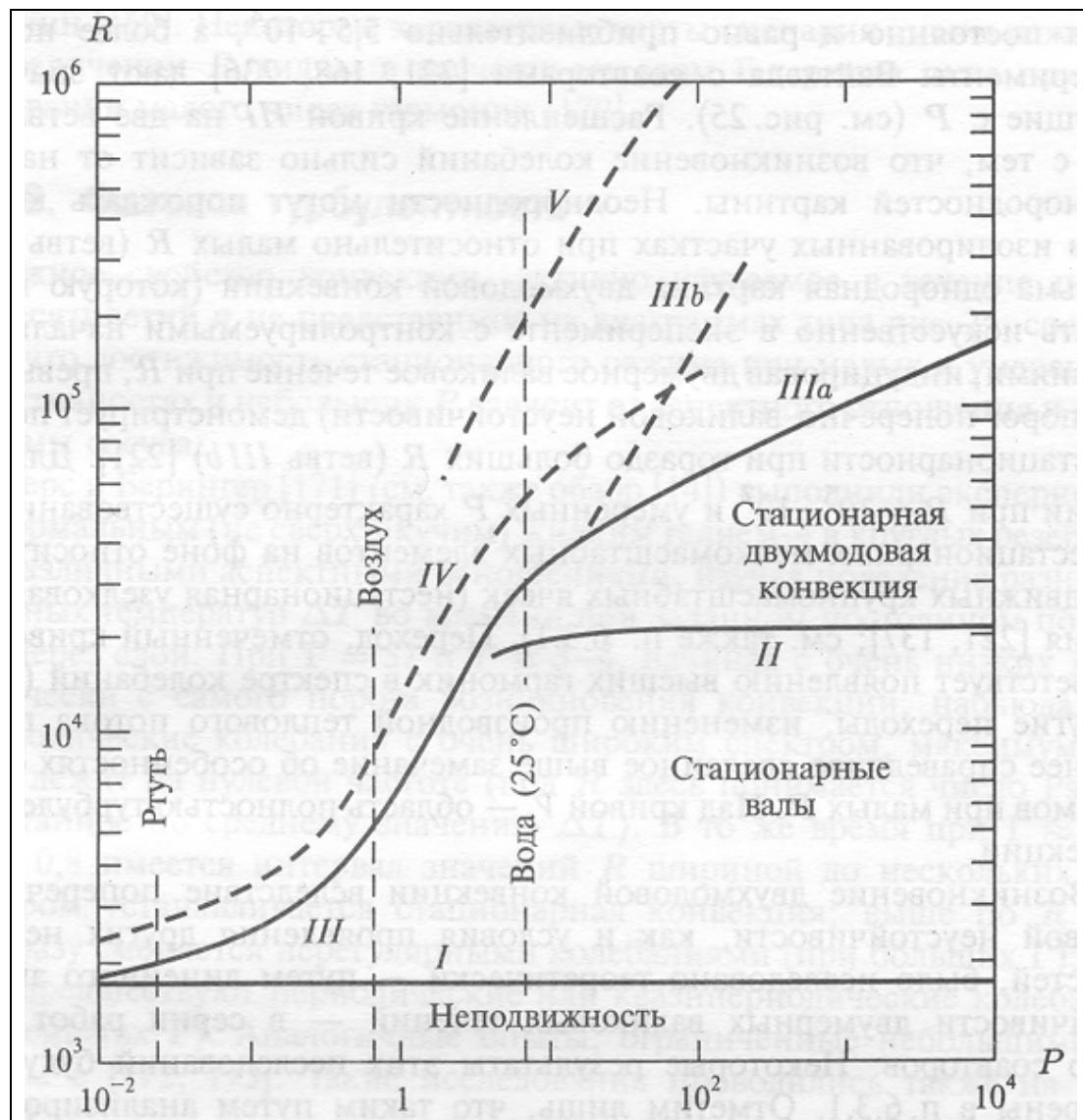
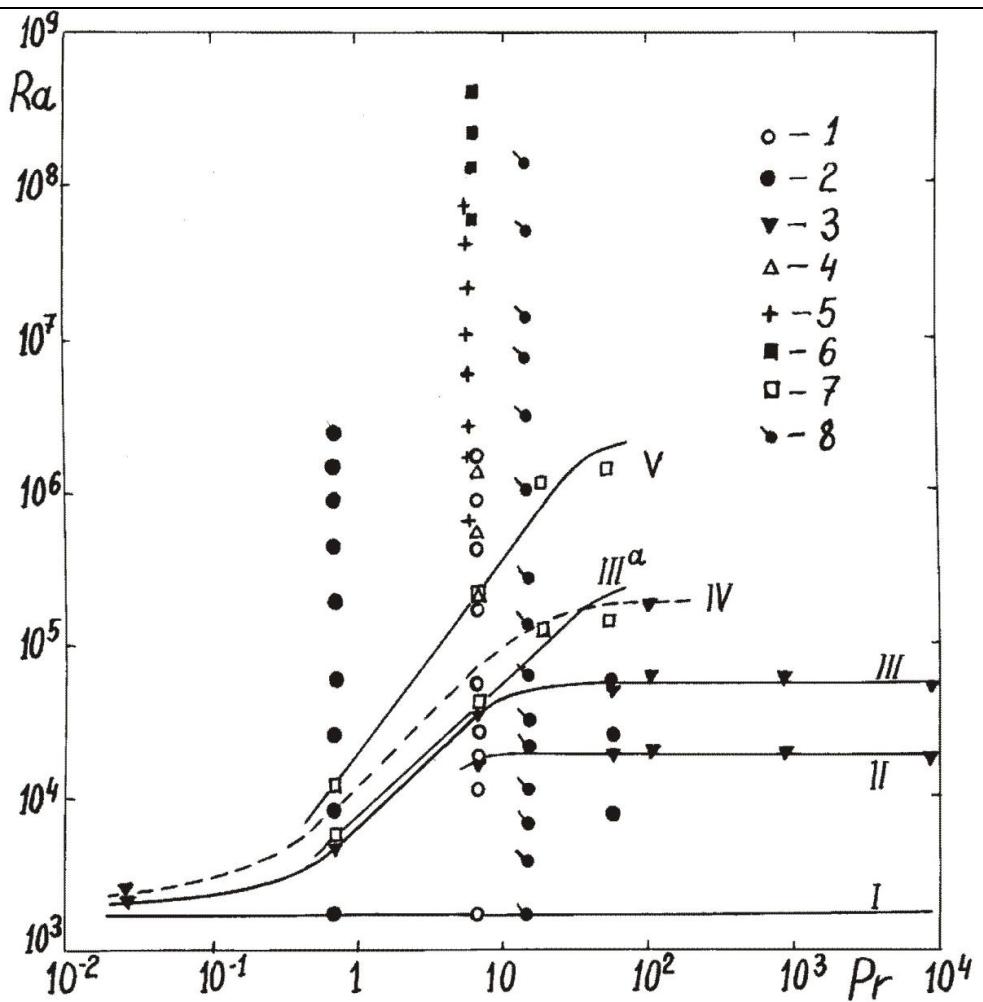
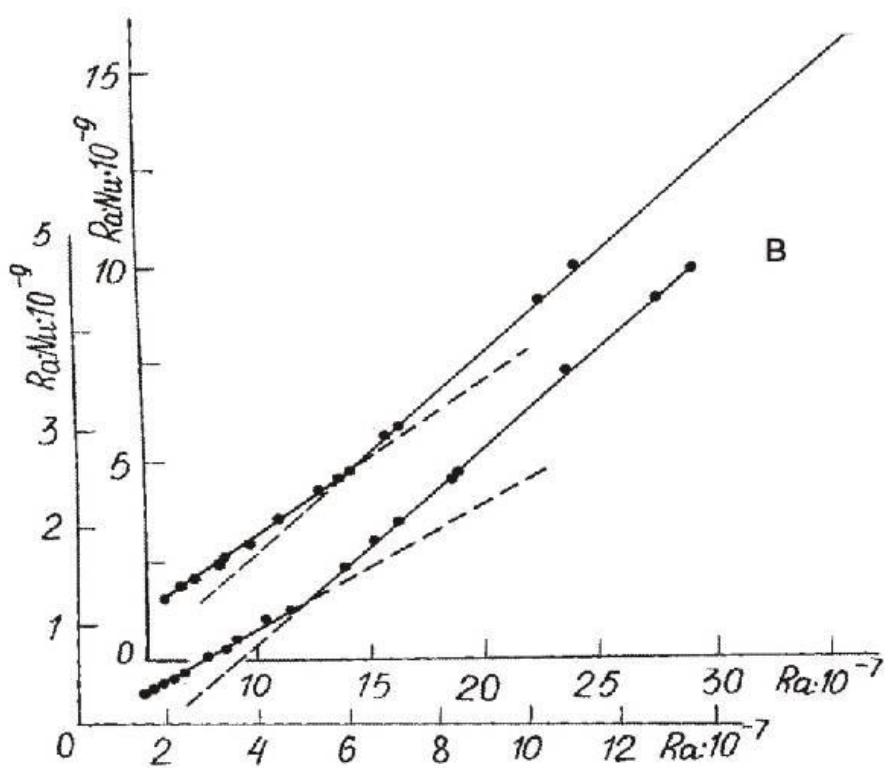


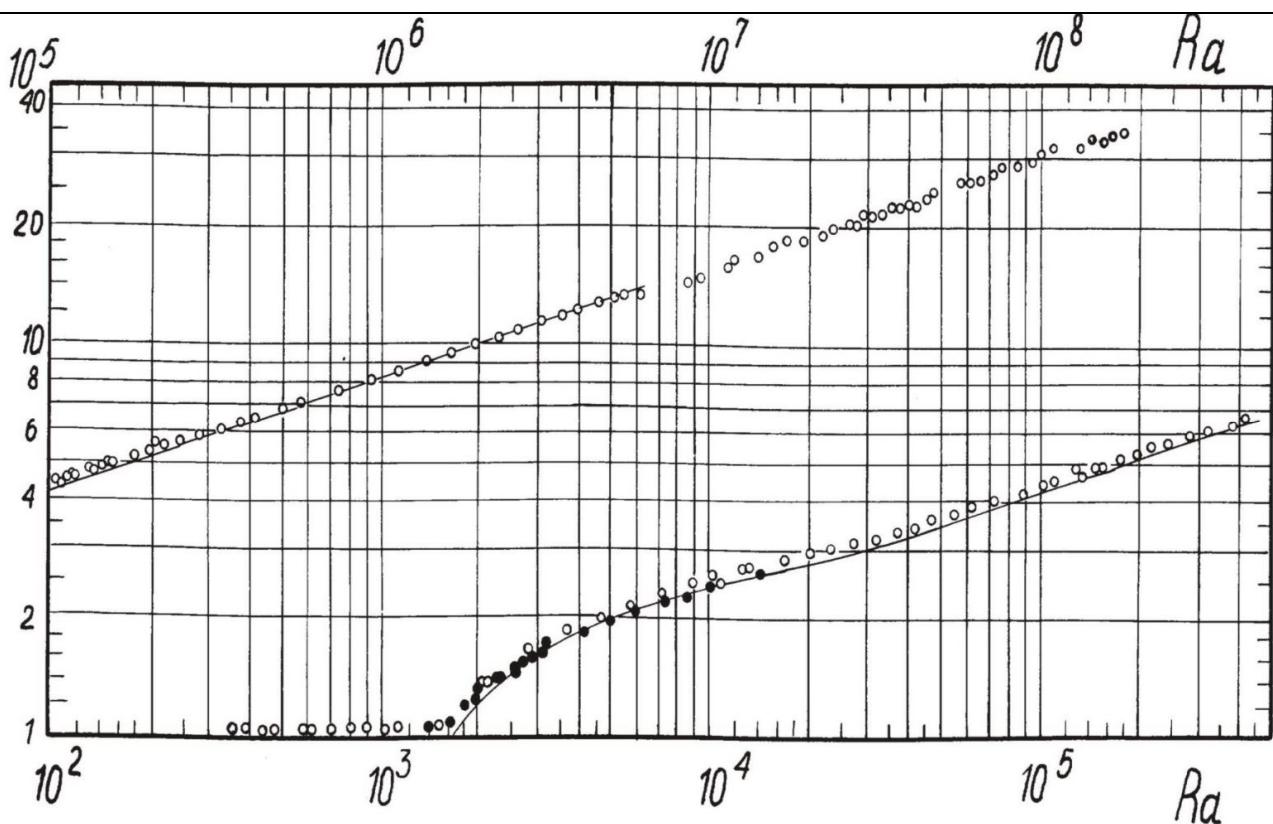
Рис.4.8. Диаграмма экспериментально определенных режимов конвекции на плоскости число Рэлея-число Прандтля



Дискретные переходы Малкуса - к рис.4.8



Зависимости безразмерного теплового потока от  $\text{Ra}$ :  $\text{Nu} \times \text{Ra} = f(\text{Ra})$ .  
Кусочно-линейные зависимости с изломами при критических значениях  $\text{Ra}_i$ .



Зависимость безразмерного коэффициента теплопередачи - числа Nu от числа Рэлея:  
 $Nu = Q \times h / (\Delta T \times \lambda) = 0,0185 \times Ra^{0,276}$  при  $Ra$  в диапазоне  $5 \times 10^3 \leq Ra \leq 2 \times 10^8$

Влияние ограниченности слоев в горизонтальной плоскости также исследовалось. На рис.4.9 представлена зависимость критического значения числа Рэлея от относительного размера слоя.

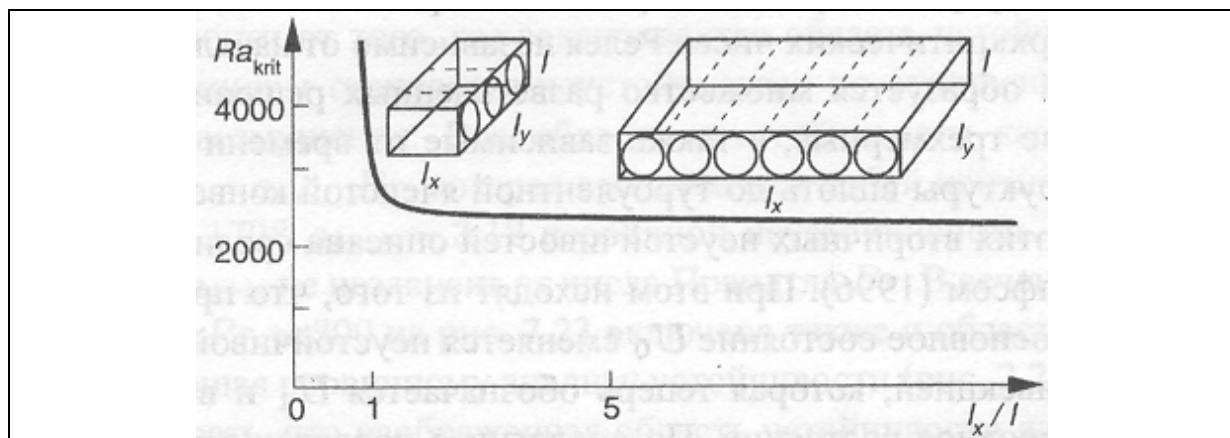
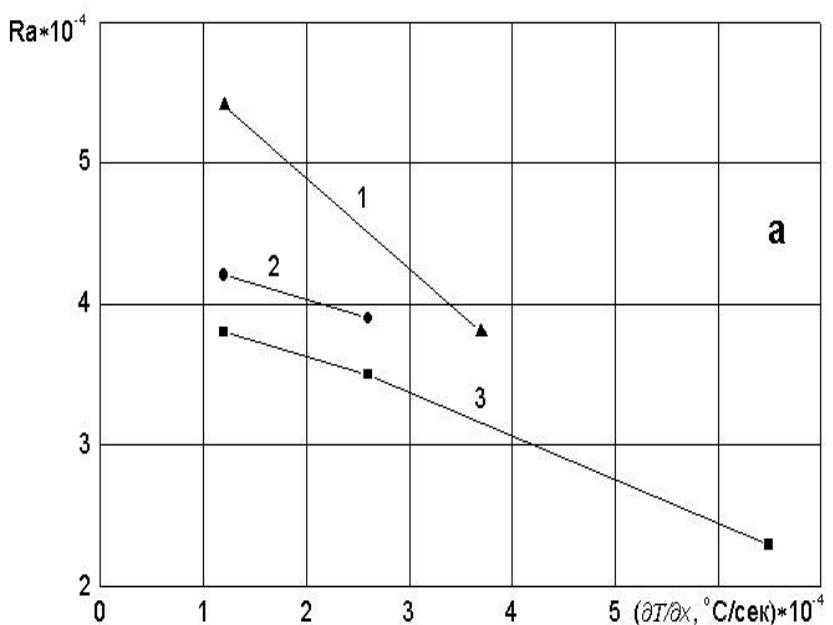
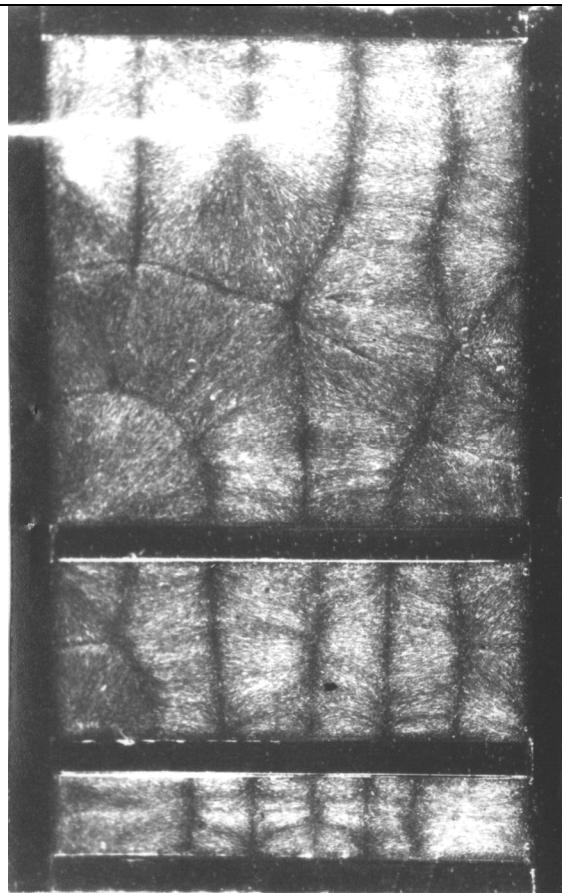


Рис.4.9. Зависимость критического числа Рэлея от относительных размеров полости: размер по оси у остается постоянным  $l_y/l = 4$



Формы течения в ограниченных полостях и смещение границ дискретного перехода для разных скоростей разогрева при разных  $\Gamma = L/H$

### Литература

1. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”. 1972. – 392 с. (с.7 – 66, с. 285- 293)
2. А.В. Гетлинг Конвекция Рэлея-Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.
3. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Пер. с англ. / Под ред. Х.Суинни, Дж. Голлаба. – М.: Мир. 1984. – 344 с. (с. 124 - 168 Ф.Г. Буссе Переход к турбулентности в конвекции Рэлея-Бенара).
4. Л. Прандтль Гидроаэромеханика. М.: ИЛ. 1949. – 520 с.
5. Дж. Бэтчелор Введение в динамику жидкости. М.: Мир. 1973. – 760 с.
6. Pearson, J. On convection cells induced by surface tension / J. Pearson // J. Fluid Mech.. – 1958. – V. 4. – C. 489-500.
7. Nield, D.A. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection / D.A. Nield // J. Fluid Mech.. – 1964. – V. 19, №3. – C. 341-352.
8. Nield, D.A. Streamlines in Benard convection cells induced by surface tension and buoyancy / D.A. Nield // ZAMP. – 1966. – V. 17, № 2. – C. 226-226.
9. Scriven, L.E. On cellular convection driven by surface tension gradients effects of mean surface tension and surface viscosity / L.E. Scriven // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 19, №3. – C. 321-340.

10. Smith, K.A. On convection instability induced by surface tension gradients / K.A. Smith // J. Fluid Mech. – 1966. – V. 24, № 2. – C. 401-414.
11. Davis, H. Convection in a box: linear theory / H. Davis // J. Fluid Mech. – 1967. – vol. 30, part 3. – C. 465-478.
12. Буссе, Ф.Г. Переход к турбулентности в конвекции Рэлея-Бенара / Ф.Г. Буссе // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.. – 1984. – Т. 1. – С. 128-168.
13. Busse, F. H. Non-linear properties of thermal convection / F. H. Busse // Rep Prog Phys. – 1978. – No. 41. – C. 1929-1967.

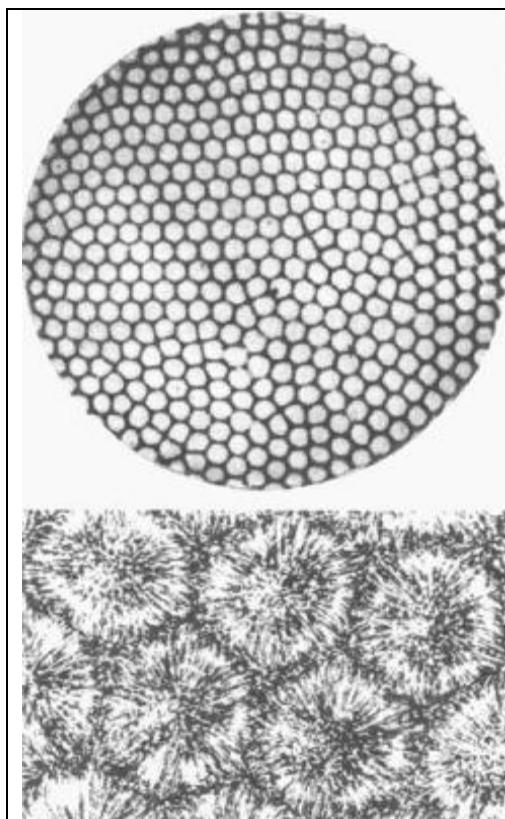


Рис.4.1в – ПФТ в слое со свободной верхней границей

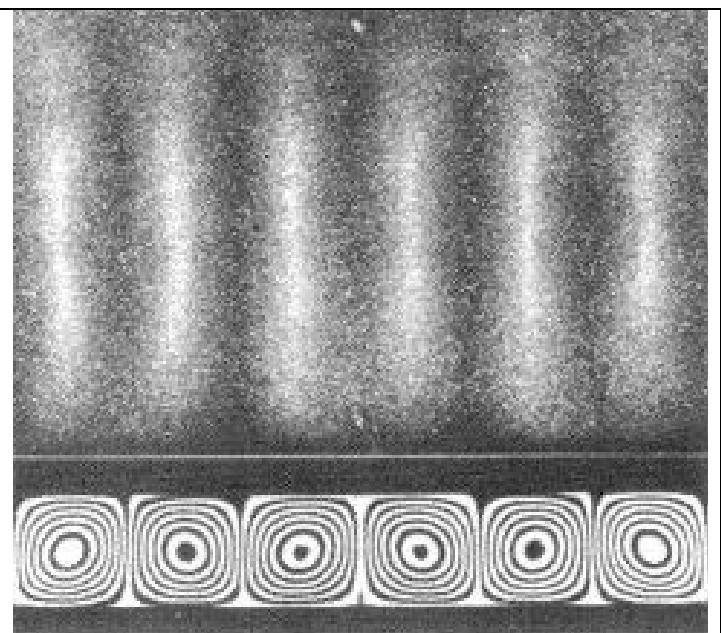


Рис.4.2в – ПФТ в слое с жесткими горизонтальными границами

В случае рис.4.1в на самом деле действуют два механизма потери устойчивости, которые описываются двумя параметрами: числами Рэлея  $Ra = g\beta\Delta TH^3 / \nu\chi$  и Марангони  $Ma$ , так как верхняя граница свободная и есть зависимость поверхностного натяжения от температуры. В случае рис. 4.2 обе границы жесткие, действуют только силы плавучести.

Число Марангони появляется как параметр подобия из граничных условий на свободной поверхности слоя жидкости:  $(-\frac{\partial\sigma}{\partial T}) \times \frac{\partial T}{\partial x} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$ , после приведения их к безразмерному виду.

В [1], следуя [1] число Марангони записано в виде  $B = A\sigma_t h^2/\mu a$ , где  $A$  – градиент температуры по высоте слоя жидкости,  $\sigma_t$  – температурный коэффициент поверхностного натяжения  $\alpha$ :

$$\alpha(T) = \alpha_0 - \sigma_t T, \quad \sigma_t = (\alpha(T) - \alpha_0)/T.$$

Более наглядное определение при заданном характерном перепаде температуры между границами:  $Ma = (-\partial\sigma/\partial T) \times \Delta T \times h/\mu a$ , здесь  $\sigma$  – поверхностное натяжение.

Смысл этого граничного условия: если на свободной поверхности жидкости появляется градиент температуры, то из-за зависимости поверхностного натяжения жидкости от температуры возникает тангенциальное напряжение, вызывающее движение жидкости вдоль поверхности от нагретого участка в сторону холодного при нормальном

термокапиллярном эффекте, т.е. когда  $\sigma = \sigma_0 \left[ 1 - \left( -\frac{\partial\sigma}{\partial T} \right) \times \Delta T \right]$  и поверхностное натяжение уменьшается с ростом температуры. Бывают исключения.

Наряду с механизмом, связанным с силой плавучести, причиной неустойчивости равновесия подогреваемой жидкости может быть и только термокапиллярный эффект (ТКЭ). Неустойчивость равновесия жидкости возникает при всплытии нагретого участка жидкости с нижней подогреваемой границы. При этом возникающие термокапиллярные силы, будут направлены от всплывающего элемента и вызовут радиальное растекание нагретой жидкости, это приведет в силу неразрывности к подъему из глубины новых нагретых участков жидкости. Что приводит к развитию начального возмущения.

На рисунке Д1 показано как смещается граница устойчивости горизонтального слоя, когда кроме сил плавучести дополнительно действует ТКЭ [6 -10]. Здесь  $B_m = (-\frac{\partial\sigma}{\partial T}) \frac{\Delta TH}{\mu a}$  - число Марангони (отношение работы тангенциальных сил к энергии, теряемой на преодоление вязкого трения и на теплоотдачу в нижележащие слои жидкости), где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\mu$ ,  $a$  – коэффициенты динамической вязкости и температуропроводности. Коэффициенты теплоотдачи от верхней границы  $b = 0$  – соответствует адиабатической (теплоизолированной) поверхности и влияние ТКЭ проявляется максимально сильно, а  $b = \infty$  – соответствует поверхности изотермической и отсутствию влияния ТКЭ. Кривые с  $b = 0$  и  $b = \infty$  - это геометрические места точек, соответствующих положениям носикам нейтральных кривых, т.е. критическим значениям чисел Рэлея и Марангони. Точки пресечения кривой  $b = 0$  с осями координат дают значения критических чисел Рэлея

$R_m = 669$  и Марангони  $B_m = 79,6$  соответственно для случаев, когда неустойчивость обусловлена только силами плавучести или только ТКЭ. Критическое значение волнового числа  $k_m$  вдоль кривой практически не меняется и остается равным  $k_m \approx 2$ .

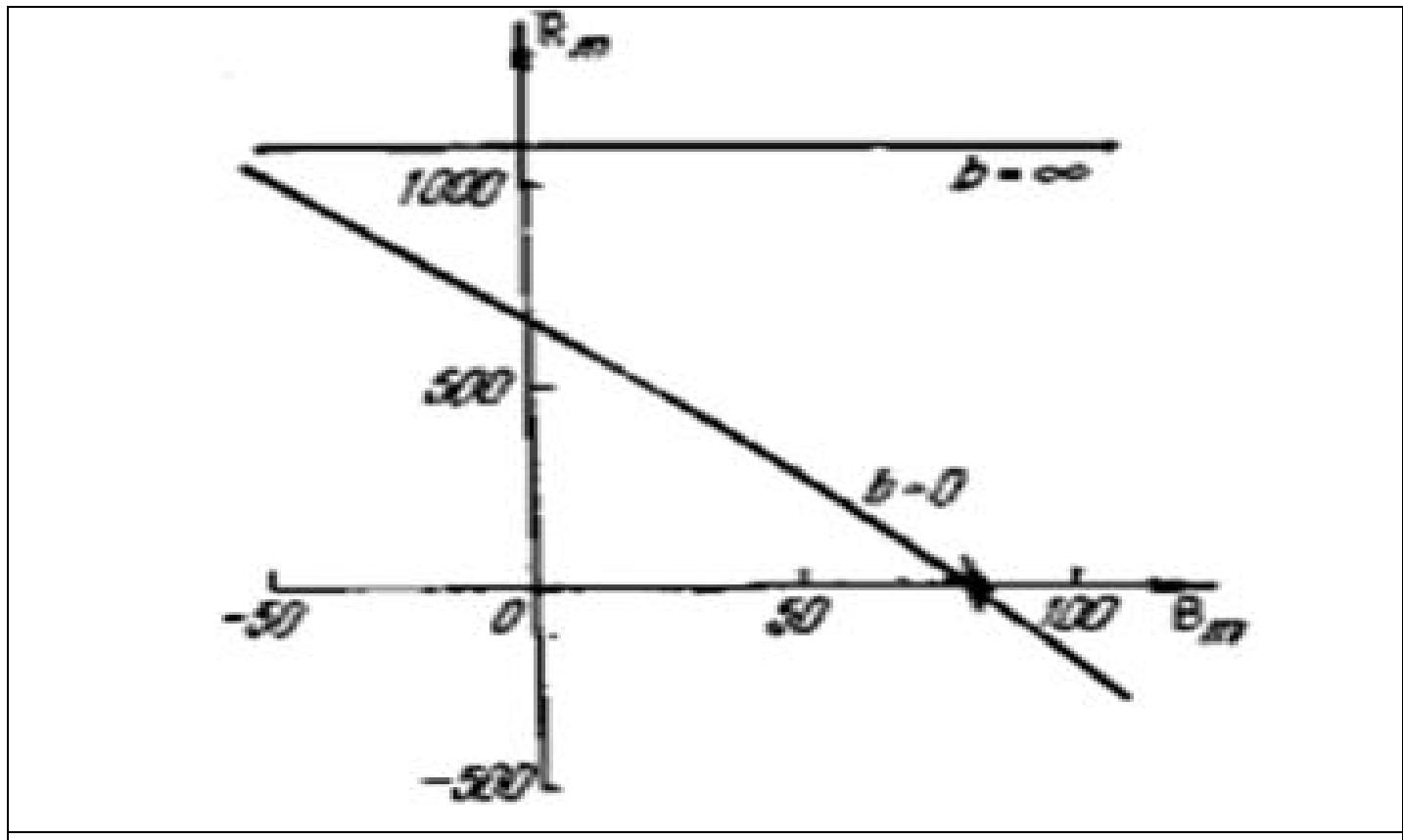
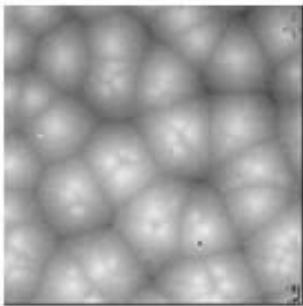
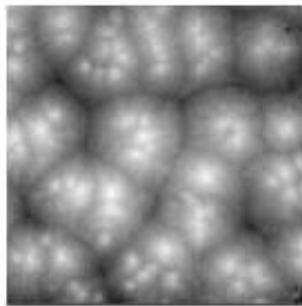


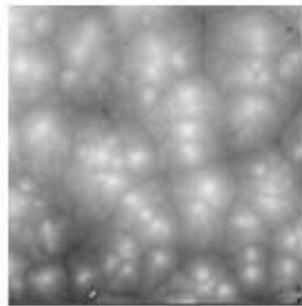
Рисунок Д1 - Граница устойчивости горизонтального слоя при наличии термокапиллярного и термогравитационного механизмов неустойчивости



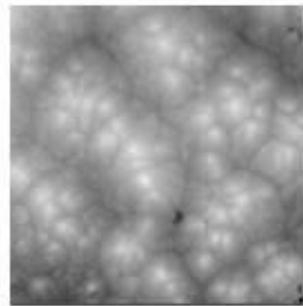
а)  $H=3,8\text{MM}$



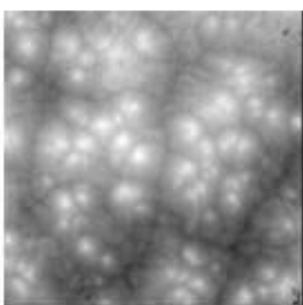
б)  $H=4,8\text{MM}$



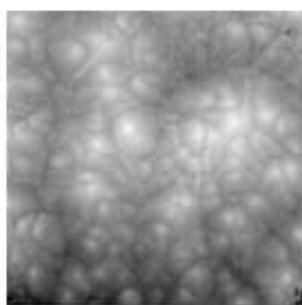
в)  $H=5,5\text{MM}$



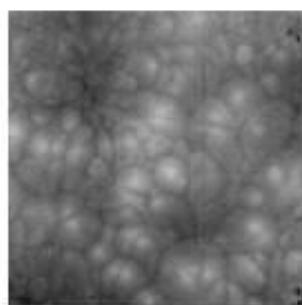
г)  $H=6\text{MM}$



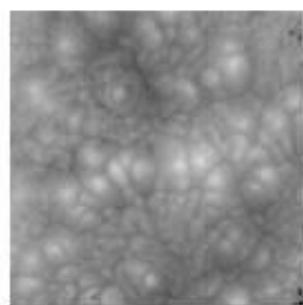
д)  $H=7\text{MM}$



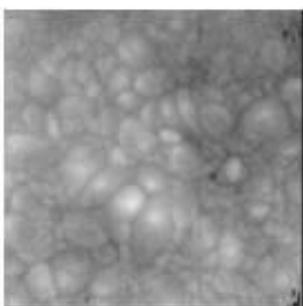
е)  $H=8\text{MM}$



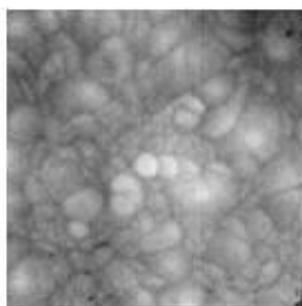
ж)  $H=9\text{MM}$



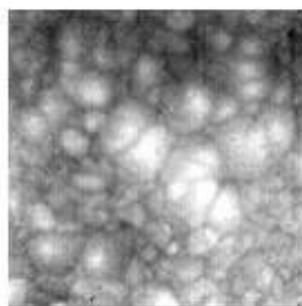
з)  $H=11\text{MM}$



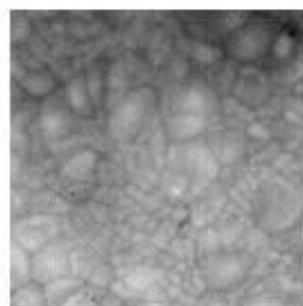
и)  $H=13\text{MM}$



к)  $H=15\text{MM}$

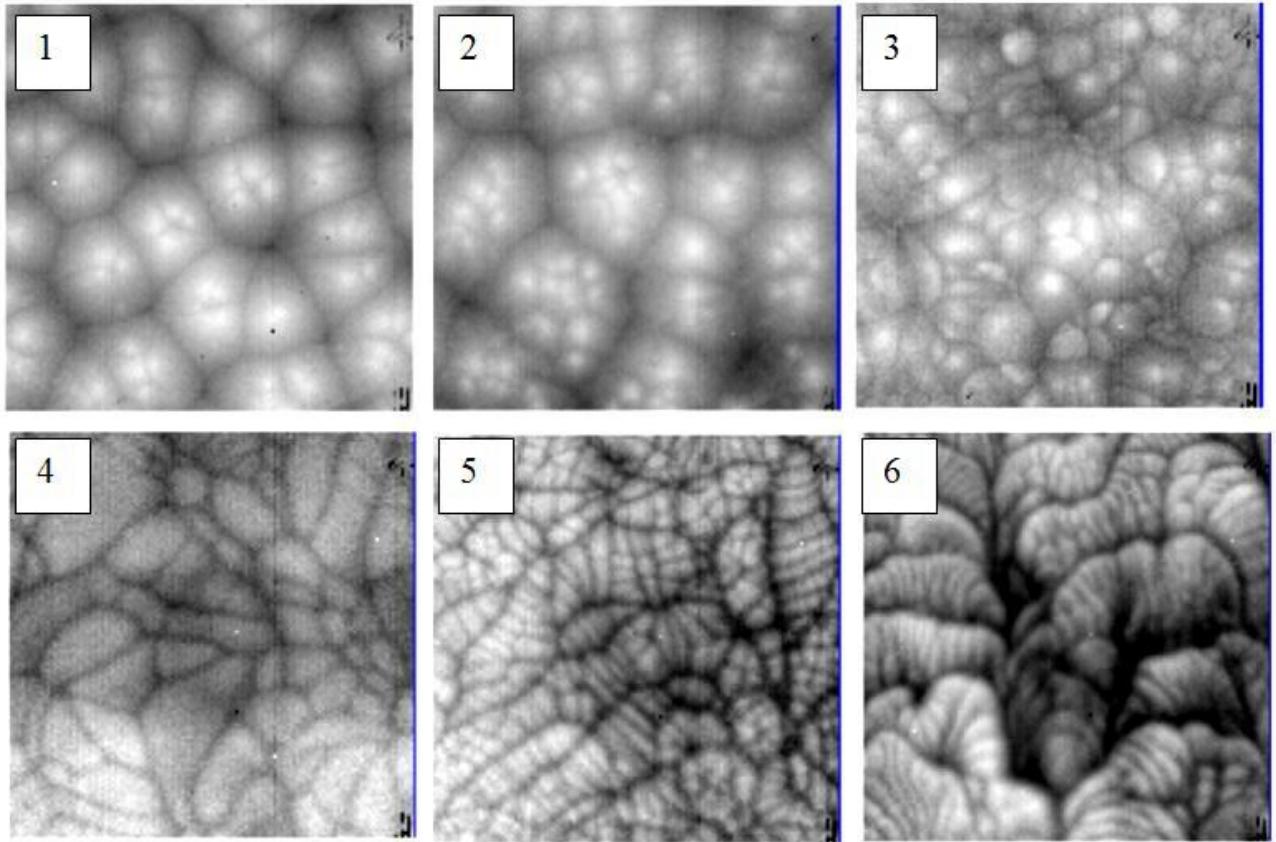


л)  $H=18\text{MM}$



м)  $H=22\text{MM}$

Поле температуры на свободной поверхности жидкости  $\text{Pr} = 16$



Поле температуры на поверхности жидкости: 1 –  $H = 3,8\text{мм}$ ; 2 –  $H = 4,8\text{мм}$ ; 3 –  $H = 11\text{мм}$ ; 4 –  $H = 25\text{мм}$ ; 5 –  $H = 25\text{мм}$ ; 6 –  $H = 25\text{мм}$ ; 5 – слабый обдув; 6 – сильный обдув.  $\Delta T = (0,51 \div 3,26)^\circ\text{C}$

Таким образом, при теоретических исследованиях рассматривается бесконечный в горизонтальной плоскости слой с поворотной и трансляционной симметрией, а в экспериментах исследуются ограниченные боковыми стенками прослойки жидкости. Геометрия прямоугольной полости описывается её относительными размерами по горизонтальным осям  $G_x = L/H$  и  $G_y = D/H$ , где  $L$  и  $D$  - линейные размеры полости по двум горизонтальным осям. Границные условия требуют обращения в нуль трёх компонент скорости на шести стенах, а также обращения в нуль  $T'$  (возмущений температуры) на стенах в случае идеально проводящих стенок. В случае адиабатических боковых стенок на них обращается в нуль нормальный градиент  $T$ . Относительные размеры  $G_x$  и  $G_y$  естественным образом входят в граничные условия. Следовательно, кроме управляющего параметра  $Ra$ , смена режимов течения зависит также от  $Pr$ , относительных размеров и тепловых граничных условий на боковых стенах. Изучение влияния этих параметров является центральным вопросом при

исследованиях неустойчивостей и бифуркаций при свободной конвекции в полостях. Работ, посвящённых исследованию влияния боковых стенок и геометрии полости на структуру конвективного течения сравнительно мало, особенно это касается экспериментальной части.

Исследование характера влияния относительных размеров полости на процессы возникновения и постепенного усложнения зависящей от времени конвекции с ростом числа Рэлея при стационарных температурных граничных условиях было проведено в работах ИТ СО РАН. Было показано, что уменьшение относительных размеров слоёв жидкости при небольших надкритичностях приводит к повышению степени детерминированности пространственной организации конвективного течения. Наблюдаемые ячейки стремились выстроиться параллельно короткой стороне полости. Кроме того, были получены спектры мощности температурных пульсаций, и был сделан вывод, что при переходе к течению, зависящему от времени, на более жёстко заданных и упорядоченных пространственных структурах возникают колебания с дискретным спектром. Повышение  $Ra$  и  $\Gamma$  приводит к разупорядочиванию и переходу к сплошному спектру. Также были обнаружены пространственная и временная локализации колебательных мод.

Численное моделирование конвективного течения в замкнутых трёхмерных прямоугольных полостях с двумя жёсткими границами в линейном приближении проводилось в работе [11]. На рис. Д3 представлена полученная в данной работе диаграмма порогов устойчивости механического равновесия для прямоугольного параллелепипеда, которые представляют собой целое семейство кривых, зависящих от относительных размеров слоя  $H_1$  и  $H_2$  в отличие от идеализированного случая бесконечного по горизонтали слоя, для которого существует не зависящее от свойств жидкости строго заданное значение критического числа Рэлея, равное 1708. С увеличением размеров полости  $Ra_{kp}$  стремится к значению 1708.

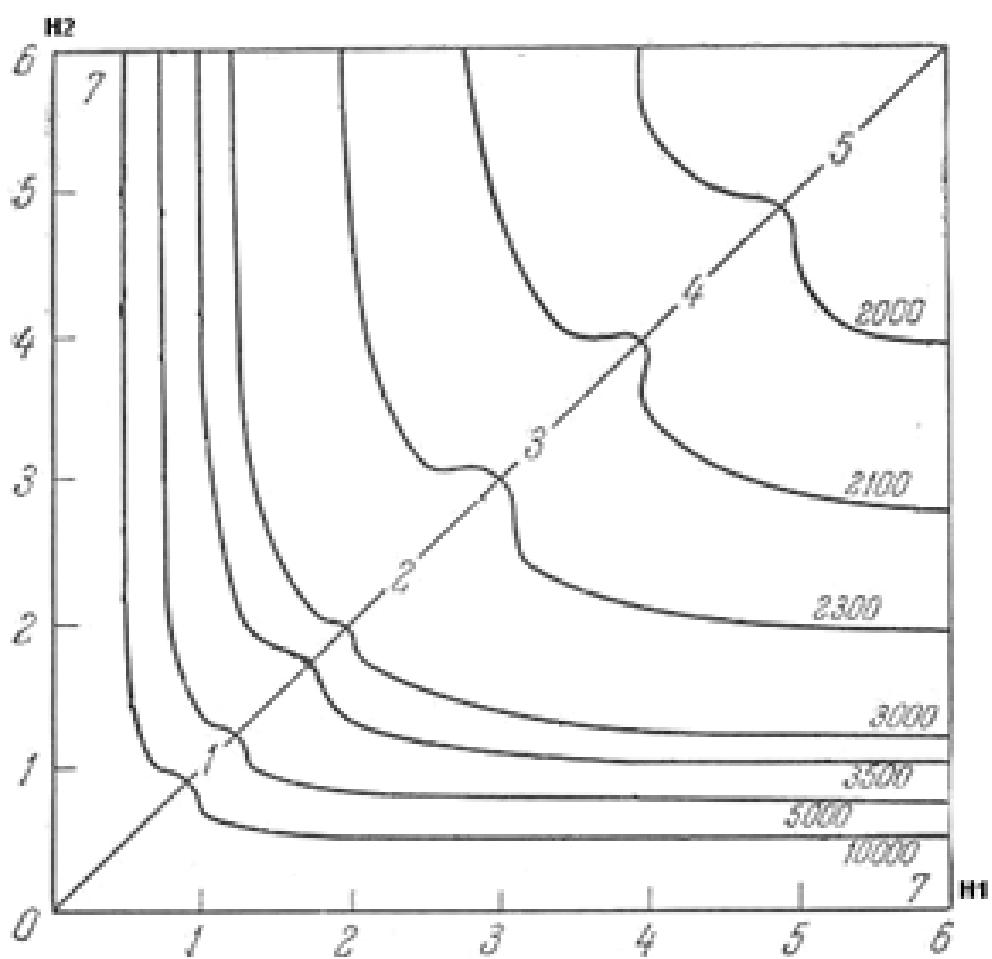
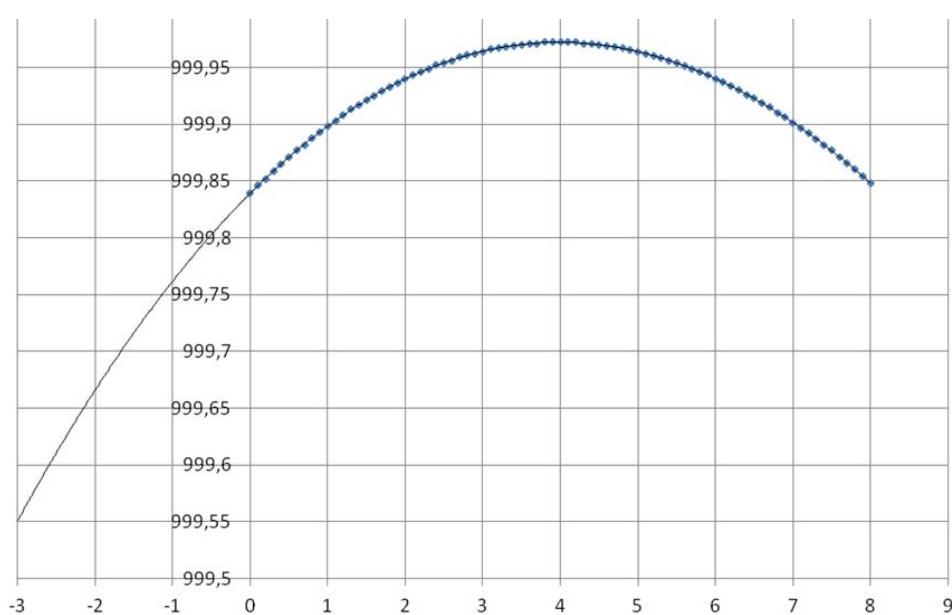
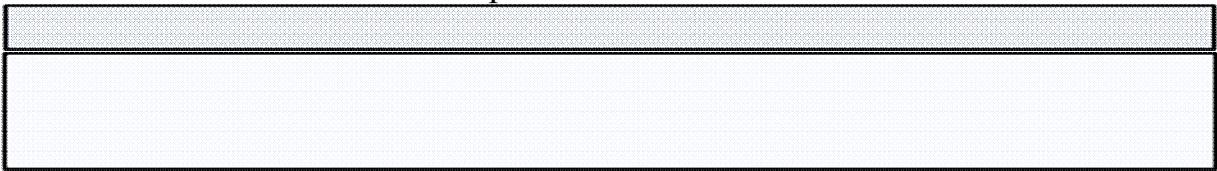


Рис.Д3 Диаграмма устойчивости для прямоугольного параллелепипеда

Зависимость плотности воды от температуры [кг/м<sup>3</sup>]

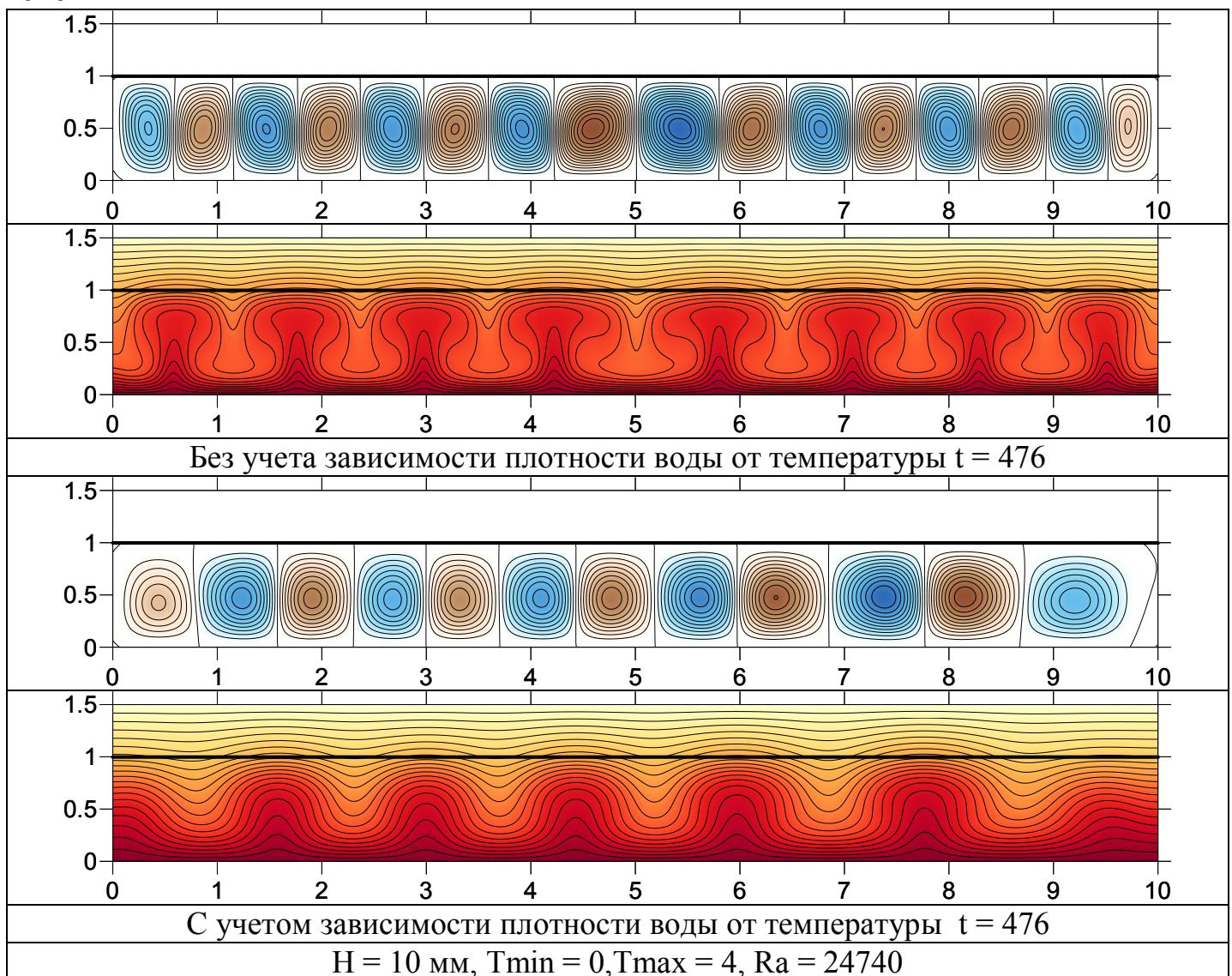


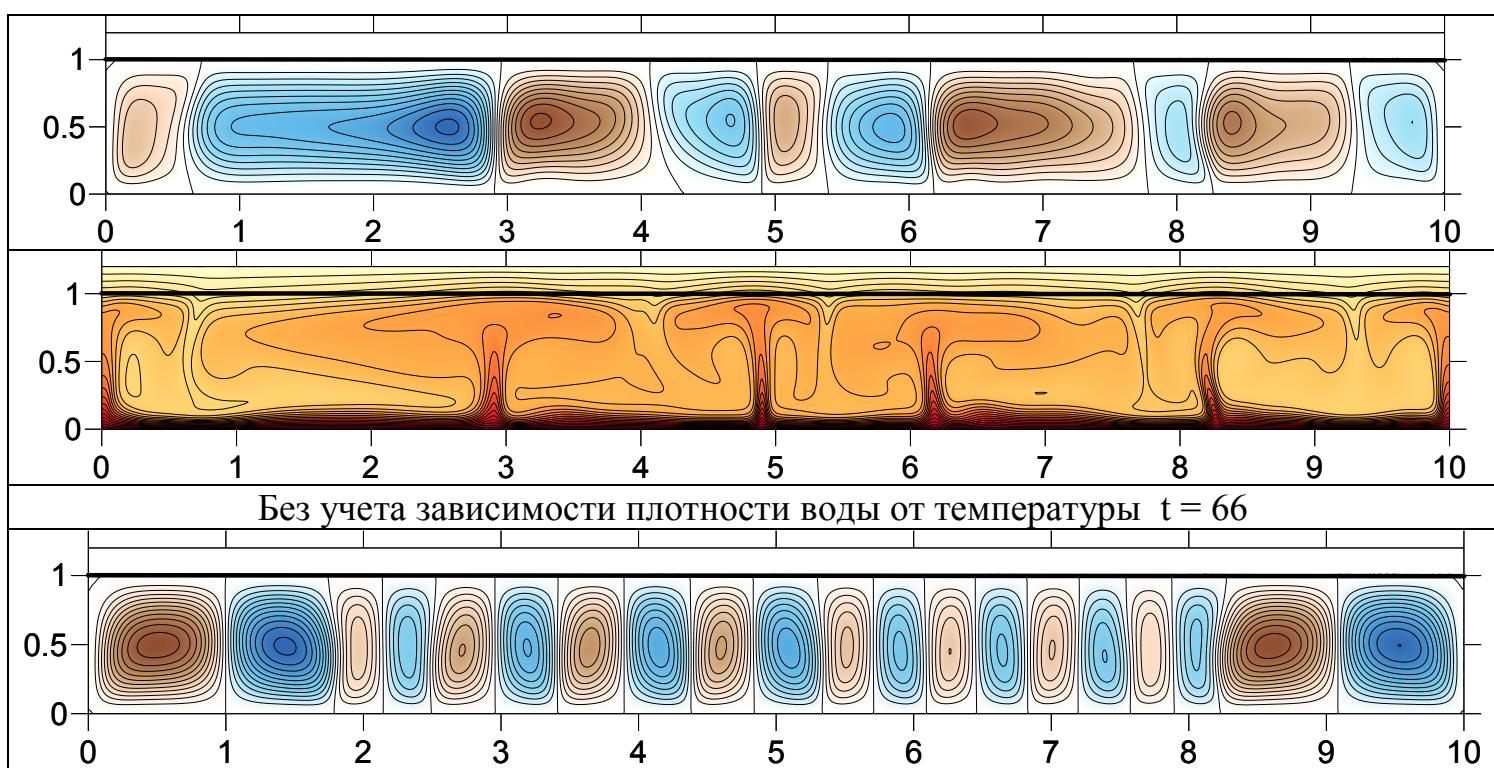
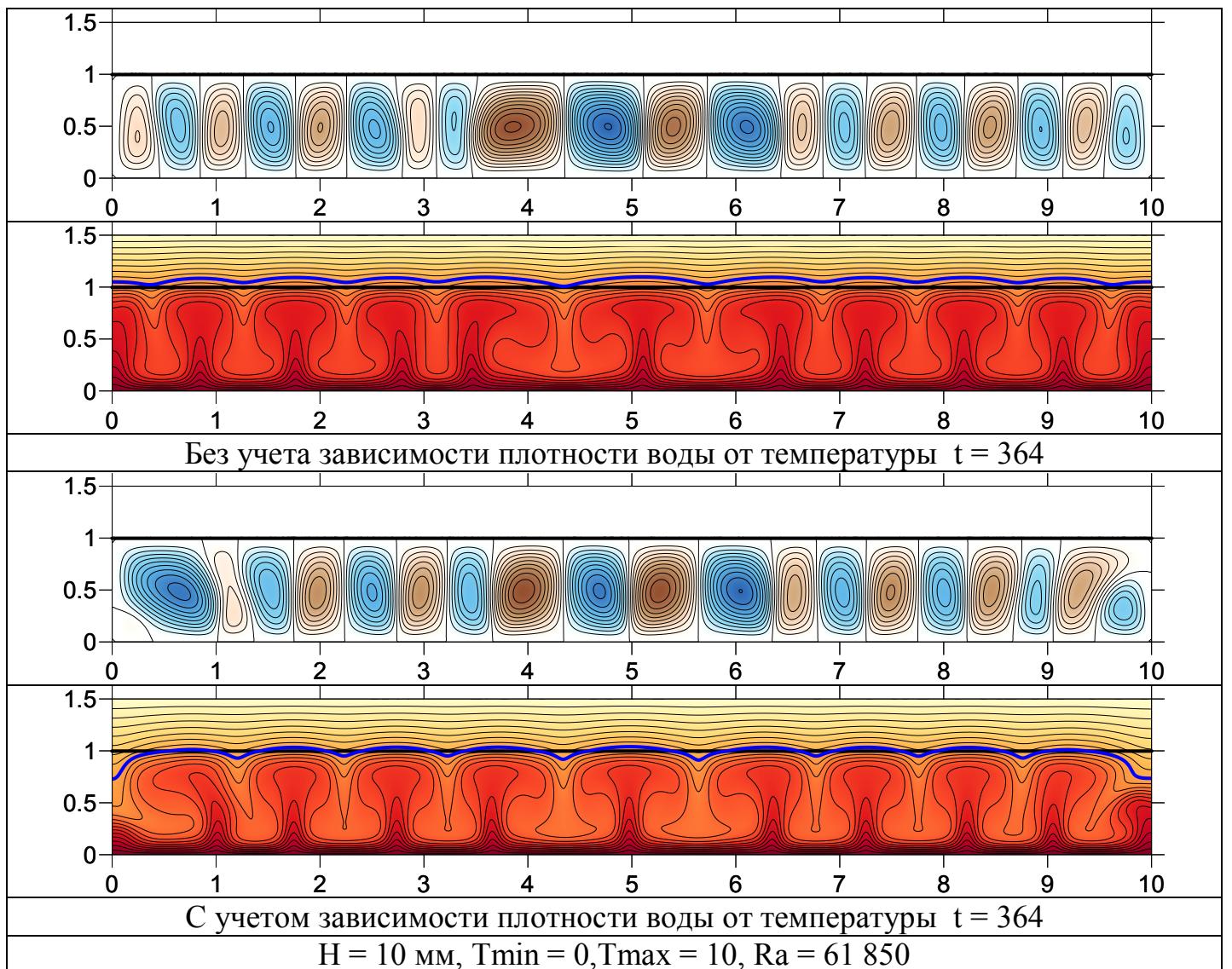
### Схема расчетной области

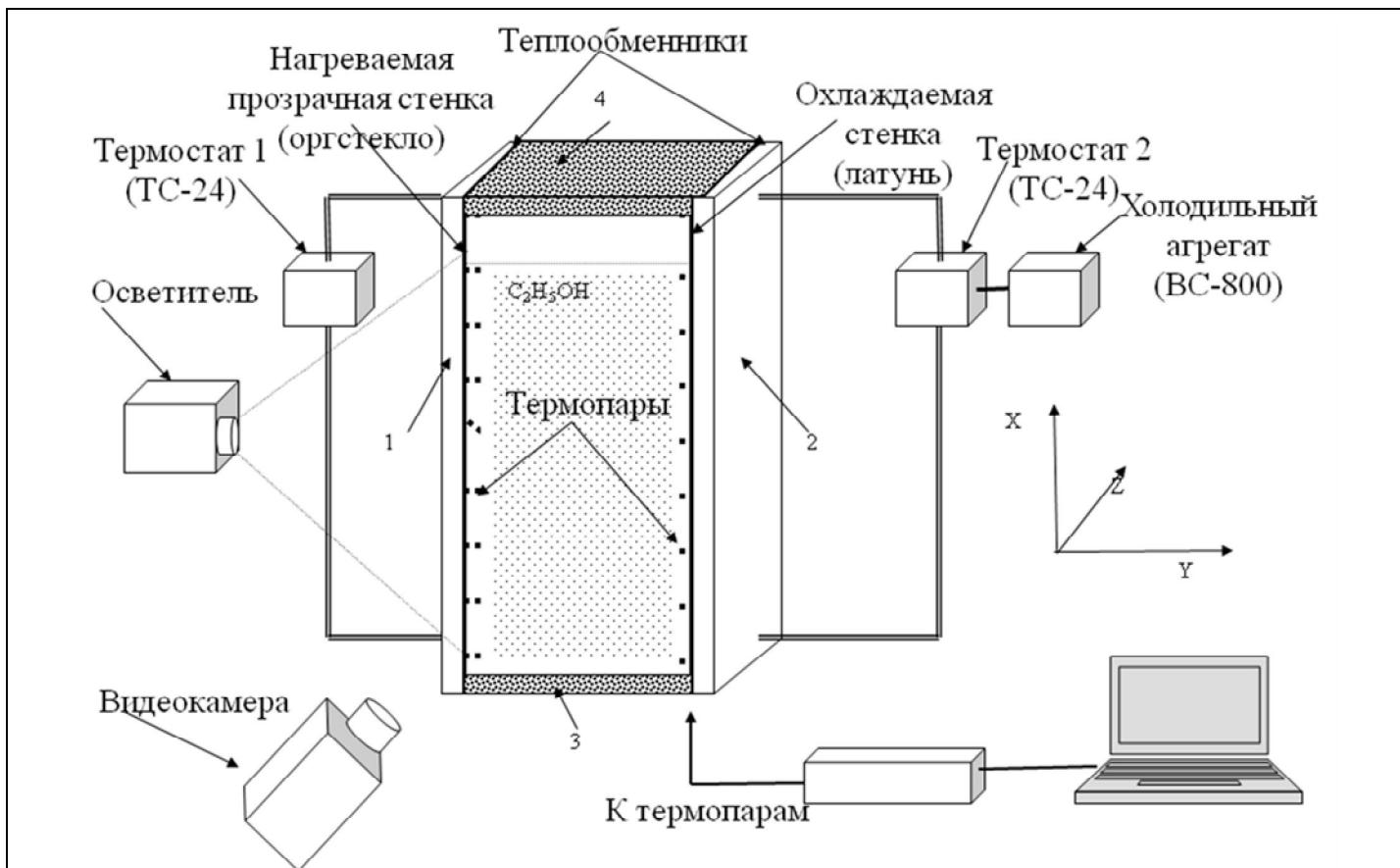
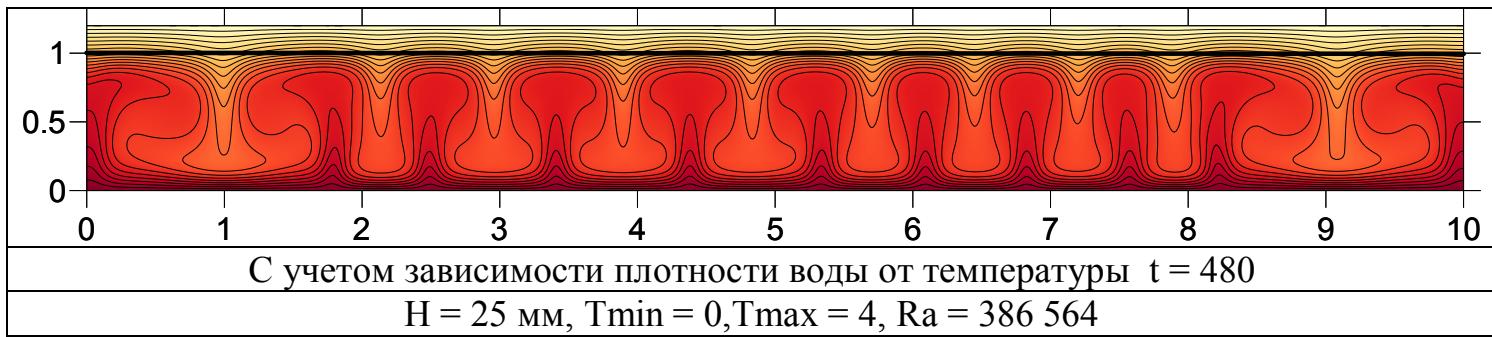


$H_f = 10 \div 50$  мм – высота слоя жидкости;  $H_s = 5$  мм – толщина твердой стенки;  $L = 10 \cdot H_f$  – длина области

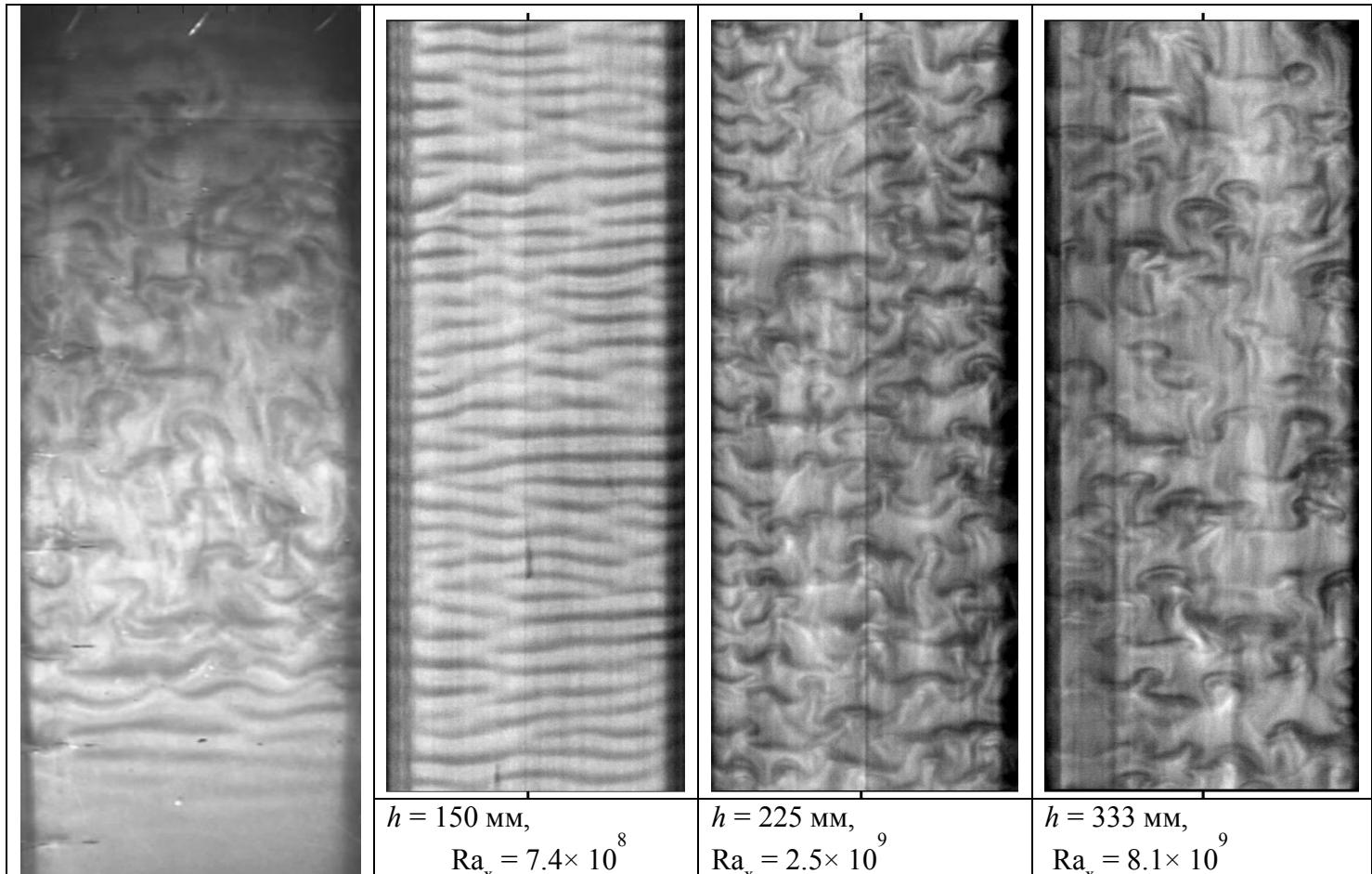
$\beta_f = 1.5 \cdot 10^{-4}$  1/K – коэффициент объемного теплового расширения жидкости;  $v_f = 1.787 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с – кинематическая вязкость;  $\alpha_f = 1.33 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с – температуропроводность жидкости;  $\lambda_f = 0.569$  Вт/(м · К) – теплопроводность жидкости;  $\lambda_s = 0.814$  Вт/(м · К) – теплопроводность стенки







Принципиальная схема экспериментального стенда ‘‘плоский вертикальный слой’’

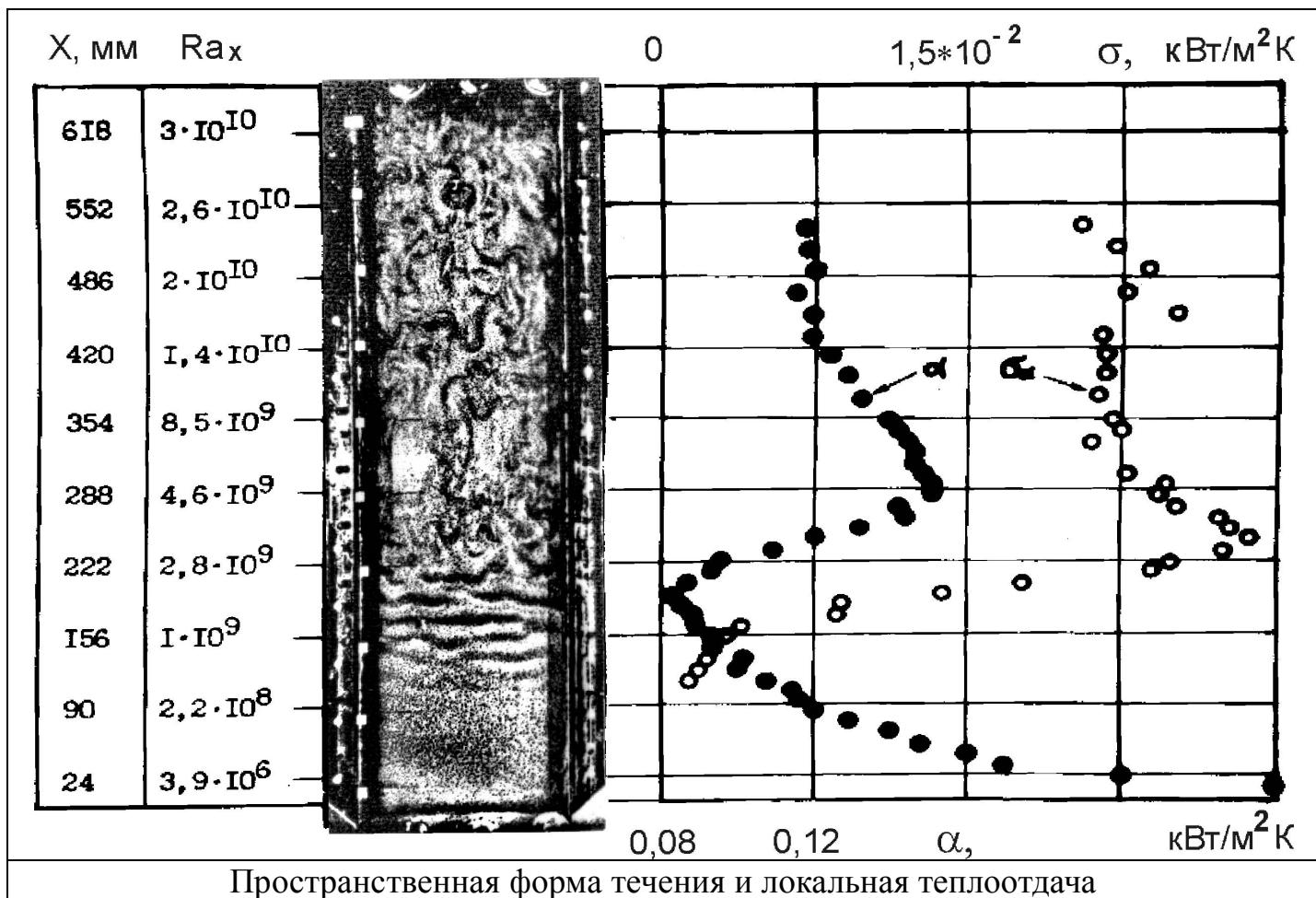


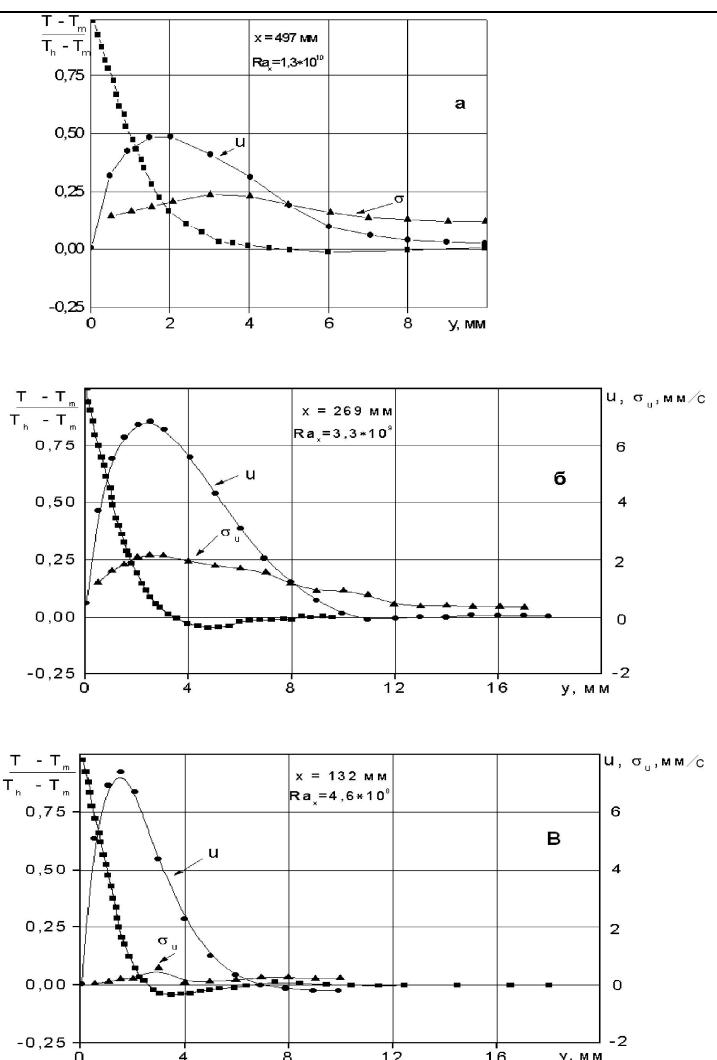
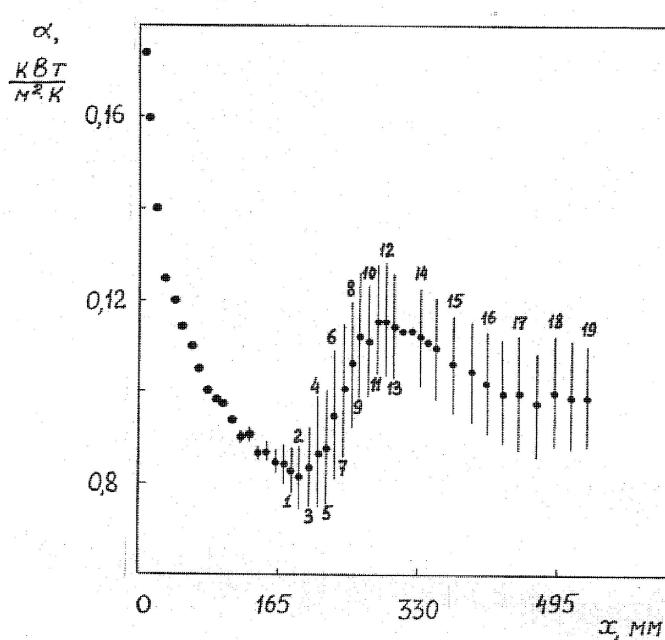
$h = 150 \text{ мм},$   
 $\text{Ra}_x = 7.4 \times 10^8$

$h = 225 \text{ мм},$   
 $\text{Ra}_x = 2.5 \times 10^9$

$h = 333 \text{ мм},$   
 $\text{Ra}_x = 8.1 \times 10^9$

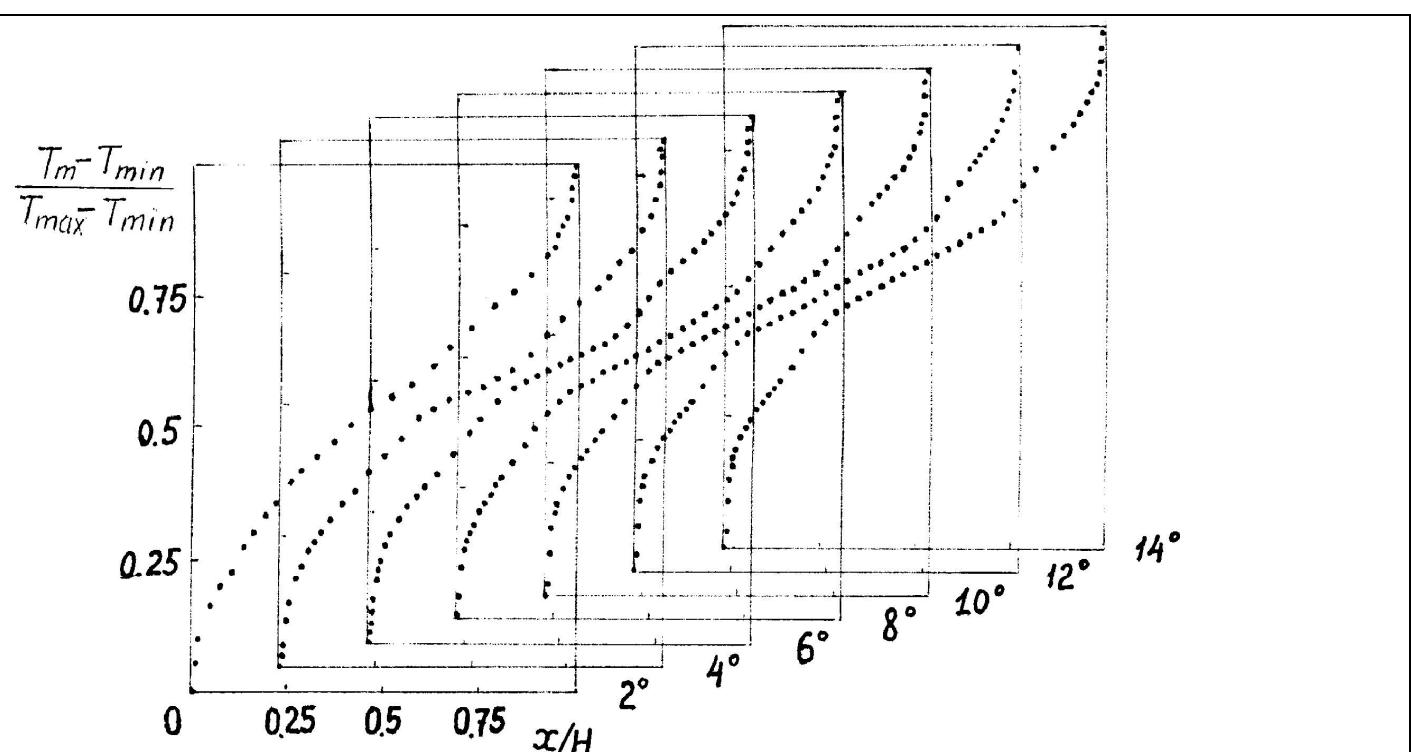
Развертки во времени сигнала одной строки матрицы видеокамеры в трех различных сечениях по высоте слоя:  $\Delta T = 3,6 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , высота слоя жидкости  $H = 635 \text{ мм}$ , толщина слоя  $58\text{мм}$ ,  $\text{Ra}_H = 5,6 \times 10^{10}$  ( $\text{Ra}_x = (\beta g / av) \cdot \Delta T_m^3 \cdot x$ ). Слева – зона когерентных вторичных вихрей, в центре – зона развала когеррентных вихрей, справа зона развитого турбулентного пограничного слоя.



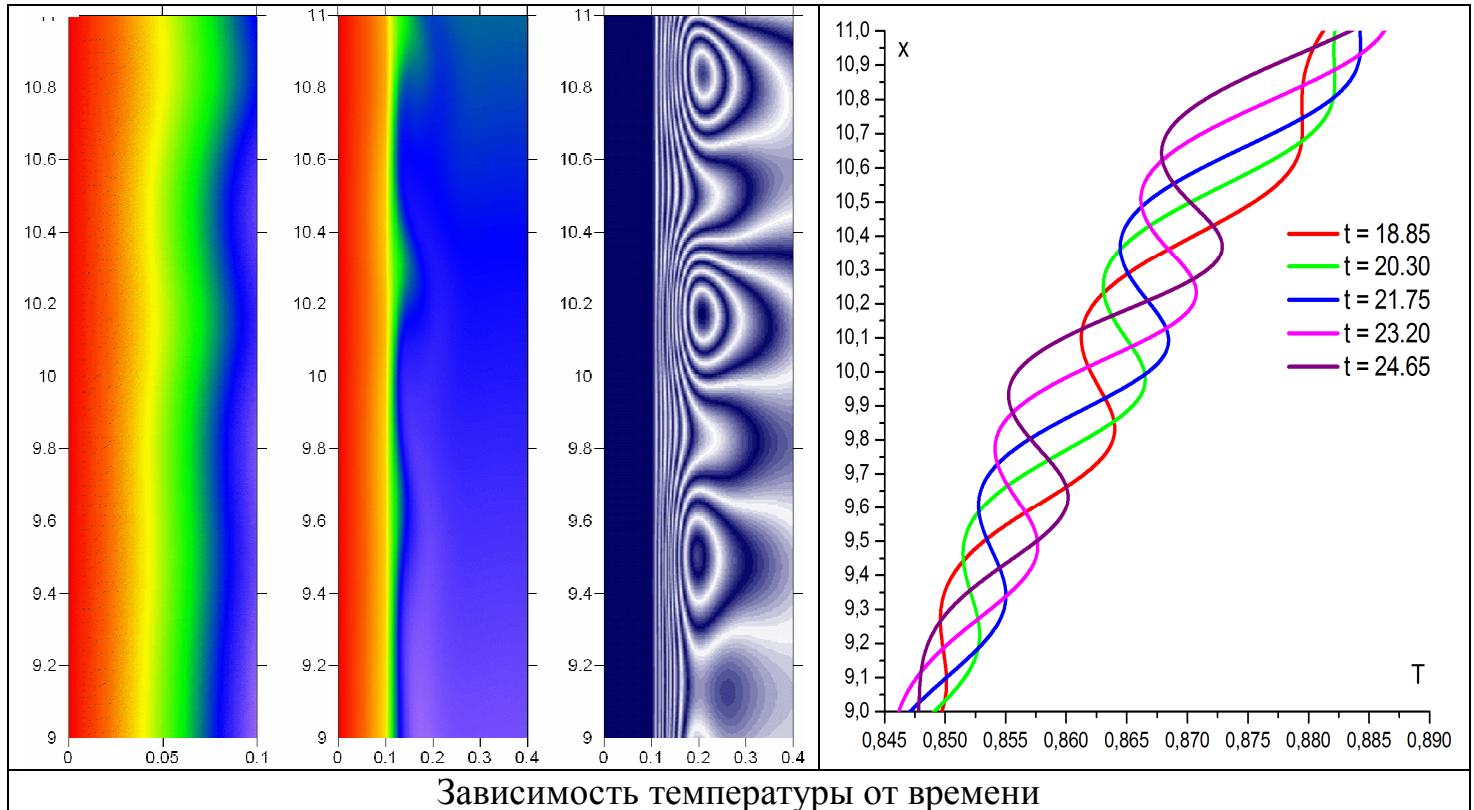
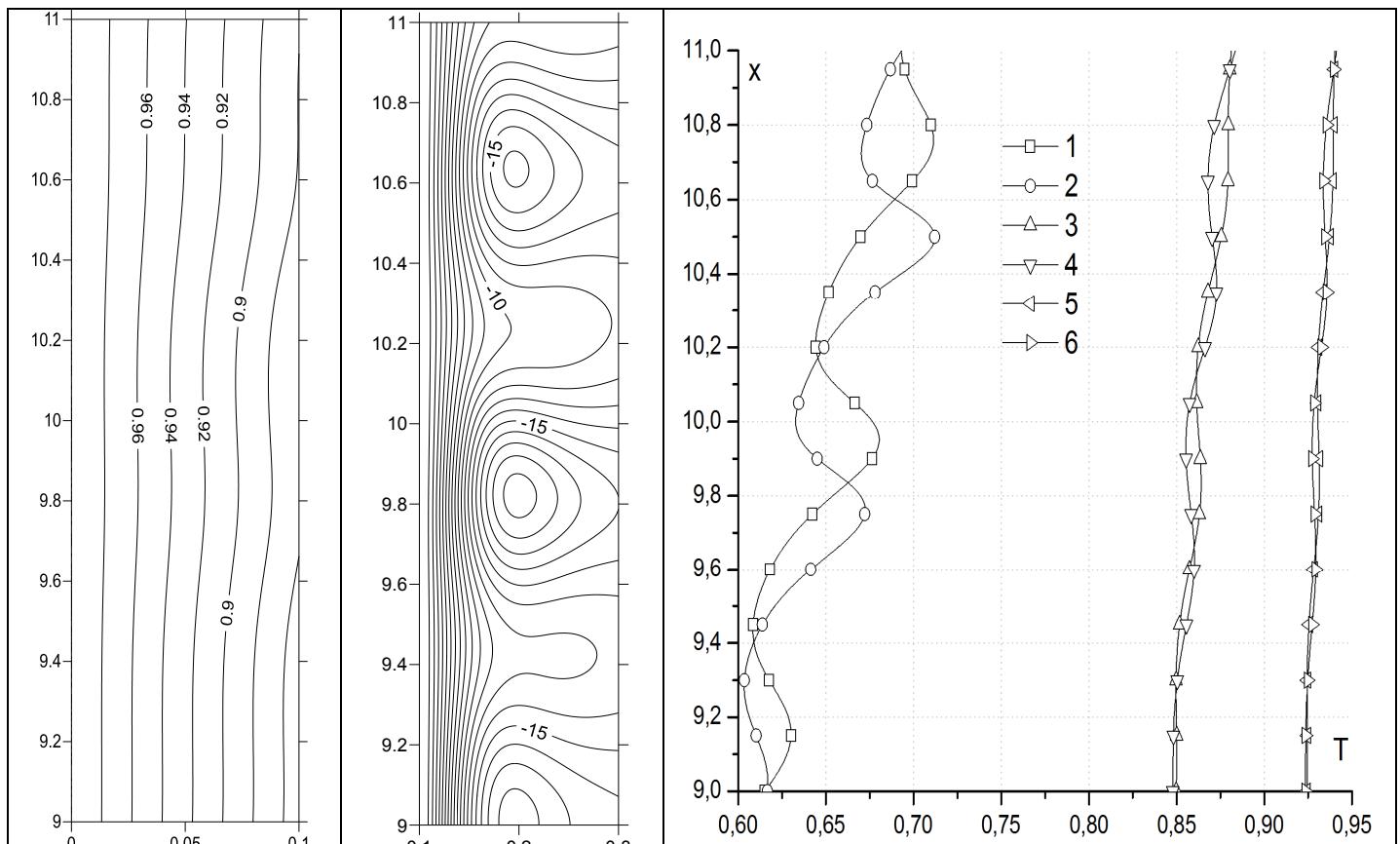


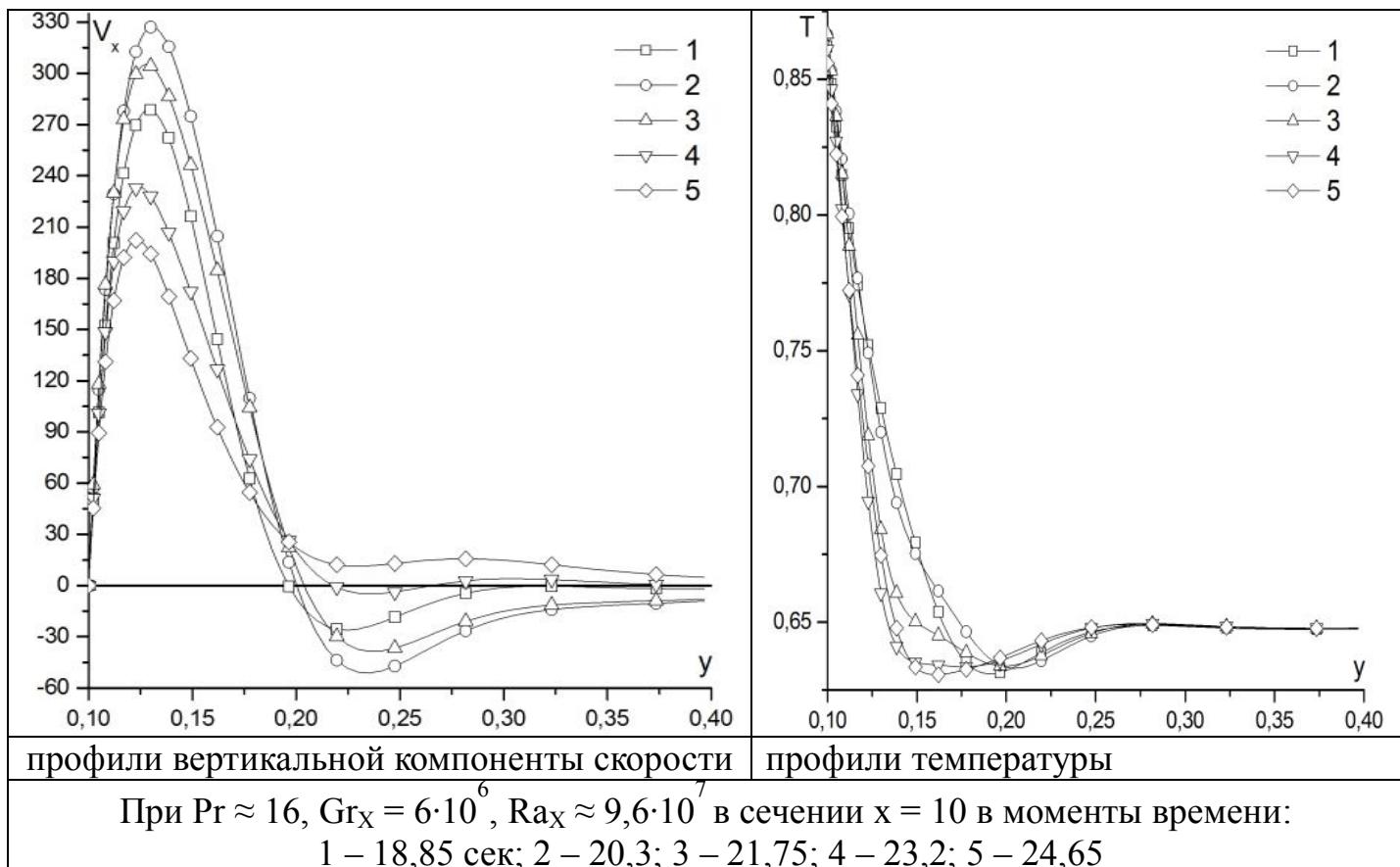
Распределение средней по времени локальной теплоотдачи и её СКО по высоте стенки

Профили температуры и скорости в ПС



Распределения температуры по высоте в центральном сечении слоя при перепадах температуры между стенками слоя от 2 до 14 К





## Примеры ЛТП при вынужденном течении



Fig. 4.59. Propagation of a turbulent Perturbation

## Fully Developed Turbulence

Many technical flows are turbulent. According to the Reynolds ansatz (4.63), this means that the time-average primary motion is overlaid with turbulent fluctuations. By way of illustration, Figure 4.60 shows some shots of turbulent flow in a water channel, velocity of the moving camera

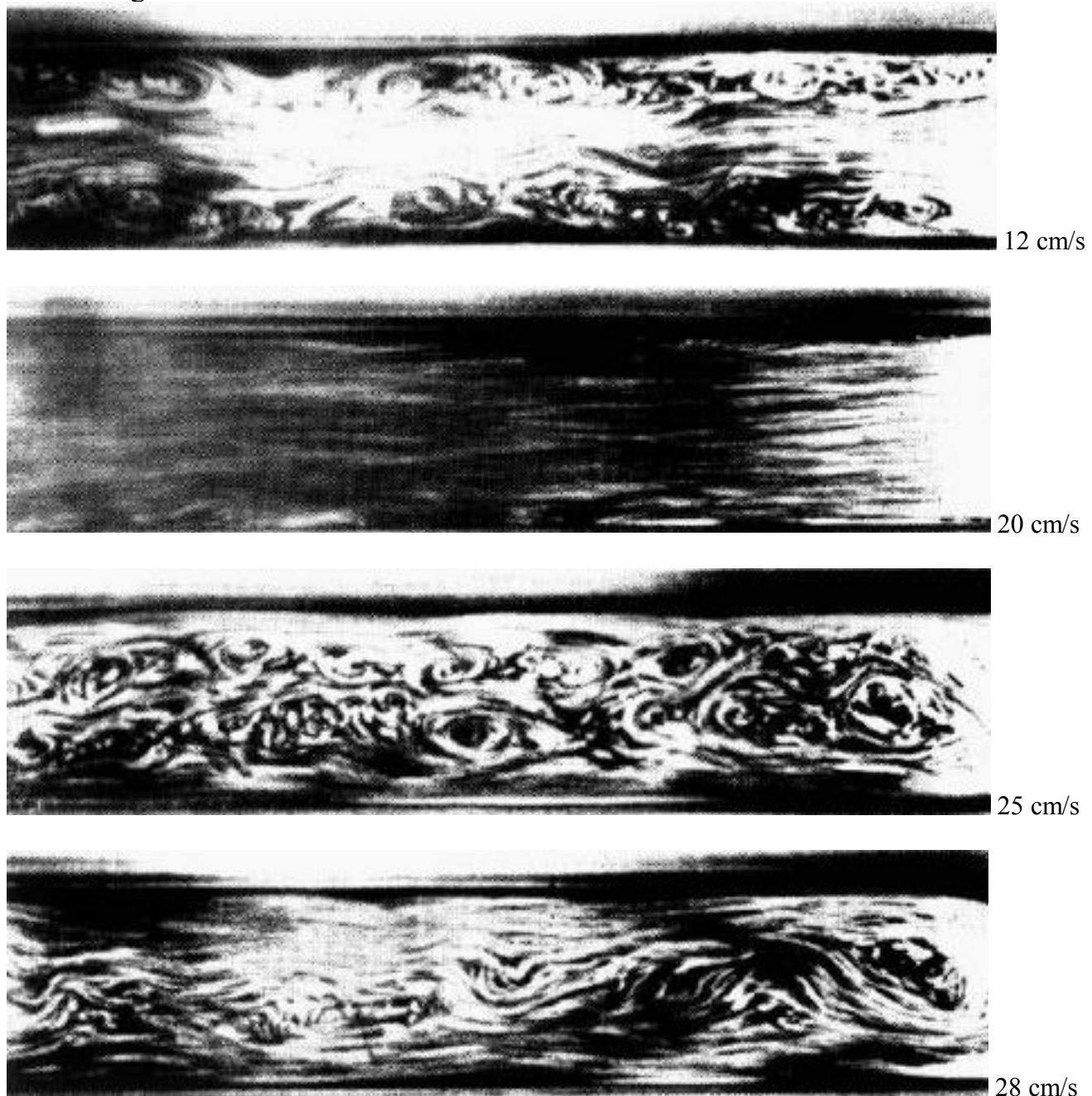


Fig. 4.60. Turbulent flow in a water channel, moving camera. Shots taken by J. Nikuradse (1929), published by W. Tollmien (1931)