

Лекция 2 (24к3). Примеры точных решений задач гидродинамики.
Понятия гидродинамического и теплового пограничных слоев.

В лекции 1 (24к3) была изложена логика и даны физические основы вывода *полной системы уравнений вынужденной и свободной конвекции несжимаемой жидкости*, которая для *вынужденной конвекции* в компактной векторной форме выглядит так:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} \quad \text{- уравнение движения}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{w} \nabla T = a \Delta T \quad \text{- уравнение энергии}$$

$$\operatorname{div} \vec{w} \equiv \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \text{- уравнение неразрывности}$$

$\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T)$ - зависимость плотности жидкости от температуры
можно рассматривать как вариант уравнения состояния.

Связь с уравнением состояния (для одного киломоля) газа $PV = RT$ достаточно наглядна, если вспомнить, что $\rho = m/V$ (а для произвольной массы M газа: $PV = (M/\mu) \times RT$). Здесь μ - молекулярный вес газа, R - газовая постоянная.

Полная система уравнений вынужденной конвекции в развернутой форме для каждой из компонент скорости:

$$\rho \frac{dw_x}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{dw_y}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{dw_z}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho c_p}$$

$$\operatorname{div} \vec{w} \equiv \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

В уравнениях движения полная производная в левой части уравнений для каждой из компонент скорости раскрывается аналогично примеру для x – компоненты скорости:

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}$$

Для свободной конвекции уравнение движения:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = -\vec{g}\beta\Delta T - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{w}$$

принципиальное отличие от случая вынужденного течения состоит в том, что *порождающим членом* в уравнении движения, определяющим причину возникновения и поддержки (энергетической подпитки течения неізотермической вязкой и теплопроводной жидкости, находящейся в поле тяжести), является сила плавучести, действующая на элементарный объем жидкости dV : $-\mathbf{g}\Delta\rho \times dV = -\mathbf{g}\rho\beta \times \Delta T \times dV$.

Сила плавучести возникает в неізотермических системах, находящихся в поле сил тяжести, из-за неоднородности пространственного распределения температуры или температуры и концентрации примесей и зависимости плотности от температуры или температуры T и концентрации примесей C , т.е. когда $\rho = \rho_0(1 - \beta_T\Delta T + \beta_C\Delta C)$. Здесь $-\beta_T = -(\partial\rho/\partial T)/\rho_0$, $\beta_C = (\partial\rho/\partial C)/\rho_0$.

В случае вынужденных течений в каналах различной формы, трубах и при внешнем обтекании тел источник движения (порождающая причина) – градиент давления. При стекании жидкости по наклонной стенке действует сил тяжести $\rho\mathbf{g}$ (здесь \mathbf{g} вектор, как и в силе плавучести).

Уравнения энергии и неразрывности имеют универсальный вид для вынужденной и свободной конвекции.

Основное отличие свободной конвекции от вынужденной состоит в том, что уравнения движения и уравнение энергии жестко связаны и решаться должны обязательно совместно. В режимах вынужденной конвекции, когда влиянием сил плавучести можно пренебречь, вначале решается задача гидродинамическая, а затем при известном (определенном) поле скорости находятся поля

температуры и градиентов температуры, по которым определяются локальные и интегральные тепловые потоки.

Попытки *аналитического решения* полной системы уравнений гидродинамики, описывающей конвективный теплообмен, наталкиваются на серьезные трудности. Есть немногочисленные примеры движений вязкой жидкости, когда можно точно проинтегрировать уравнения приведенной выше системы.

Даже для *изотермических течений* аналитически найдено всего около 10 точных решений. Они могут быть найдены только для простейших геометрий и граничных условий. Все они классические задачи физической гидродинамики. В основном это установившиеся одномерные слоистые (ламинарные) течения, когда в уравнениях движения исчезают инерционные члены и остается одна составляющая скорости. Если этой составляющей является горизонтальная компонента скорости u , а составляющие v и w равны нулю, то из уравнения неразрывности следует, что $\partial u / \partial x = 0$ и, следовательно, u не зависит от продольной координаты x . Т.о. для слоистых *плоскопараллельных течений*

$u = u(y, z)$; $v = w = 0$; $\partial p / \partial y = 0$; $\partial p / \partial z = 0$; $\partial u / \partial x = 0$ (отсюда видно, что p может зависеть только от x) и вместо полной нелинейной системы уравнений для стационарного течения получим линейное дифференциальное уравнение относительно скорости $u = u(y, z)$:

$$dp/dx = \mu(\partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2).$$

Примеры *точных решений уравнений гидромеханики*.

1) Простейшее плоское слоистое течение вязкой жидкости, заключенной между двумя параллельными горизонтальными плоскостями (бесконечными в длину и ширину), одна неподвижна, а вторая движется в направлении оси Ox с постоянной скоростью $U = \text{const}$. В этом случае все гидродинамические величины будут зависеть только от вертикальной координаты z , а скорость всюду направлена вдоль оси Ox . Поэтому уравнения неразрывности и второе уравнение движения (для вертикальной компоненты

скорости v) из системы: $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ и $\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = x_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i$

здесь будут удовлетворяться тождественно, а первое и третье уравнения движения для компонент скорости u и w приобретут вид (в данной форме записи в уравнении движения предполагается суммирование по повторяющемуся индексу $\alpha = 1, 2, 3$, т.е.

соответственно по x, y, z): $\frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad \frac{dP}{dz} = 0$,

где $u(z) = u_1(z)$, единственная, отличная от нуля компонента скорости потока. Следовательно, здесь $P = \text{const}$ и $u = az + b$, учитывая граничные условия $u = 0$ при $z = 0$, $u = U$ при $z = H$,

получим $u(z) = \frac{U}{H} z$, т.е. поток характеризуется линейным профилем скорости. Средняя скорость $u_{cp} = U/2$.

Сила трения, действующая на каждую единицу площади стенки $z =$

0 и $z = H$ равна $\tau = \mu \left| \frac{du}{dz} \right| = \frac{\mu U}{H}$. На плоскости $z = 0$ эта сила направлена вдоль оси Ox , а на плоскости $z = H$ – противоположно.

Если положить $\tau = \frac{1}{2} \rho u_{cp}^2 \cdot C_f$, где C_f – коэффициент

сопротивления трения, то $C_f = \frac{4\nu}{u_{cp} H} = \frac{4}{\text{Re}}$ где $\text{Re} = \frac{u_{cp} H}{\nu}$.

Это идеализированное течение – плоское течение Куэтта (рис.2.1). (Физически более адекватное обозначение локального трения на стенке τ_{xz})

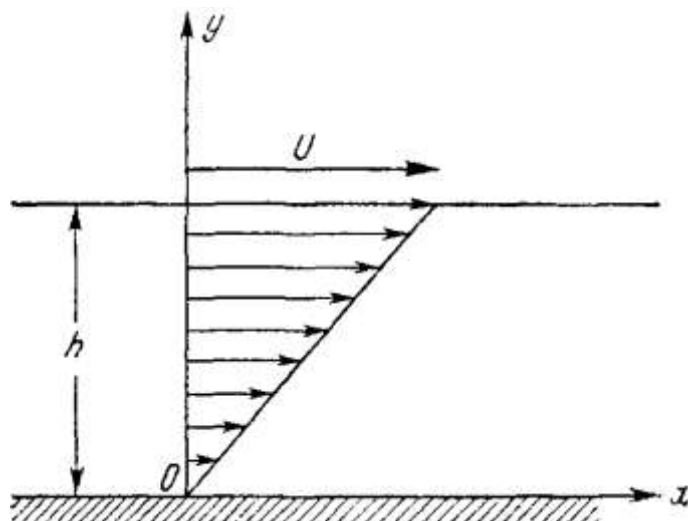


Рис. 2.1. Профиль скорости при плоском течении Куэтта

2) Стационарное течение между двумя параллельными стенками за счет градиента давления в направлении оси Ох. Слой горизонтальный и бесконечно длинный. Здесь $u(z) = u_1(z)$.

Уравнение неразрывности и второе уравнение движения (для вертикальной компоненты скорости v) удовлетворяются тождественно, а первое и третье уравнения движения будут иметь

вид: $\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{d^2 u}{dz^2}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, т.е. давление не зависит от z .

Следовательно $\frac{\partial P}{\partial x} = \text{const} = -\frac{\Delta_\ell P}{\ell}$. Находим частное решение

уравнения $\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$; при $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $u(z) = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\Delta_\ell P}{\ell} z^2 + az + b$,

$\Delta_\ell P$ – перепад давления между плоскостями (поперечными сечениями) $x = x_0$ и $x = x_0 + l$. Учитывая, что $u = 0$ при $z = 0$ и $z = H$, находим значения произвольных постоянных a и b и получаем

профиль скорости: $u(z) = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\Delta_\ell P}{\ell} \left[(z - H/2)^2 - H^2/4 \right]$

т.е. профиль скорости – парабола.

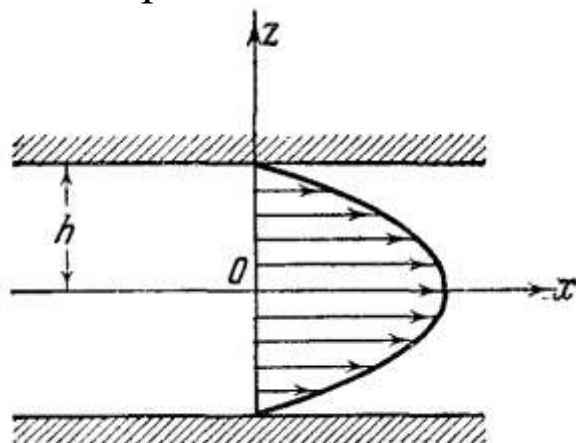


Рис. 2.2. Профиль скорости течения Пуазейля (Хагена-Пуазейля)

Сила трения на обеих стенках $\tau = \mu \left| \frac{du}{dz} \right| = \frac{H}{2} \frac{\Delta_\ell P}{\ell}$ и безразмерный коэффициент трения

$$C_f = \frac{12\nu}{Hu_{cp}} = 12 / \text{Re} ; \quad \text{Re} = \frac{u_{cp} H}{\nu} \quad u_{cp} = \frac{1}{H} \int_0^H u(z) dz = \frac{H^2}{12} \cdot \frac{\Delta_\ell P}{\ell} = \frac{2}{3} u_{\max} .$$

Интеграл определяет количество жидкости протекающей в единицу

времени через призму, ограниченную горизонтальными стенками и двумя плоскостями $y = 0$ и $y = 1$. Это *течение Пуазейля* (Хагена-Пуазейля).

3) Для стационарного течения в трубе аналогично можно найти:

$$u(r) = \frac{\Delta_\ell P}{4\mu\ell} (R^2 - r^2) \quad \tau = \mu \left| \frac{du}{dr} \right| = \frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta_\ell P}{\ell} \quad C_f = \frac{8\nu}{Ru_{cp}} = \frac{16}{Re} \quad Re = \frac{u_{cp} D}{\nu}, \quad D = 2R$$

$2R$ – диаметр трубы, $\Delta_\ell P$ – падение давления на участке трубы длиной ℓ .

4. Стеkanie жидкости по наклонной стенке.

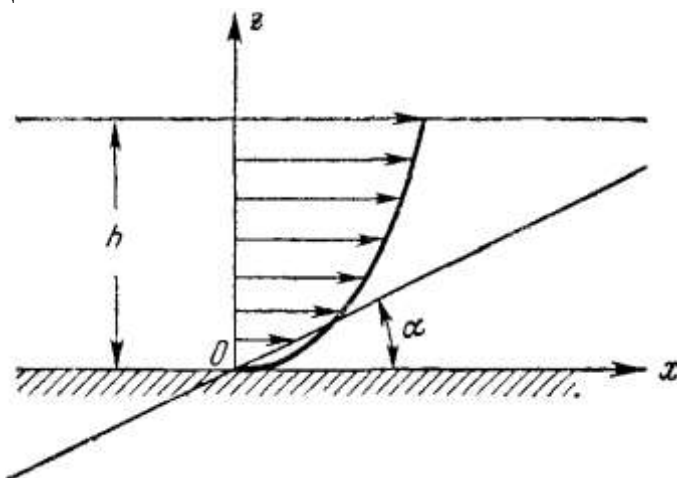


Рис.2.3. Профиль скорости в тонком слое жидкости, стекающей по наклонной стенке

5. Стационарное течение жидкости между двумя цилиндрами (цилиндрическое течение Куэтта).

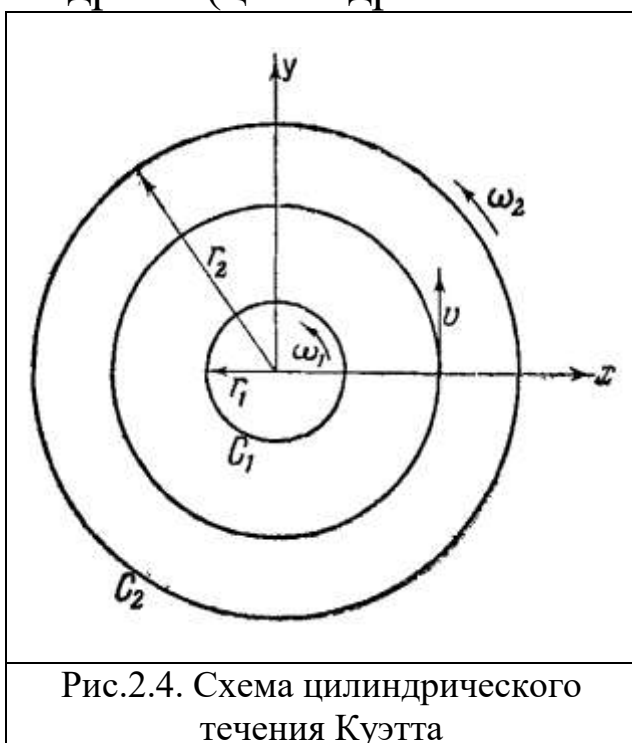


Рис.2.4. Схема цилиндрического течения Куэтта

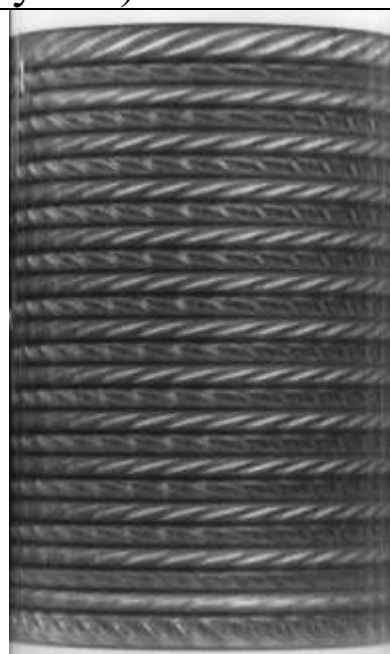


Рис.2.5. Вихри Тейлора при $\omega_1 > \omega_2$

При решении прикладных задач, когда было трудно получить аналитическое решение, искали способы найти приближенные решения. Для поиска приближенных решений делаются оценки членов уравнений по порядку величины, оставляются наиболее значимые и решаются упрощенные или идеализированные задачи. Например, в задаче внешнего обтекания вдали от тела или стенки (за пределами пограничного слоя) решается система уравнений Эйлера, в которой пренебрегают эффектами вязкости. Или решаются уравнения Стокса для ползущего течения, когда пренебрегают инерционными эффектами и порождающие течение члены уравнений движения, вернее силы, равны вязкому трению.

Наиболее плодотворным и физически корректным приближением является *приближение пограничного слоя*.

Гидродинамический и тепловой пограничные слои.

Из условия $\vec{y} = 0$ на твердой стенке следуют важные для расчетной практики выводы, облегчающие нахождение поля температуры T и, следовательно, определяющие локальный тепловой поток на стенке q_c и коэффициент теплоотдачи α при решении задач конвективного теплообмена.

Гидродинамический пограничный слой (ПС).

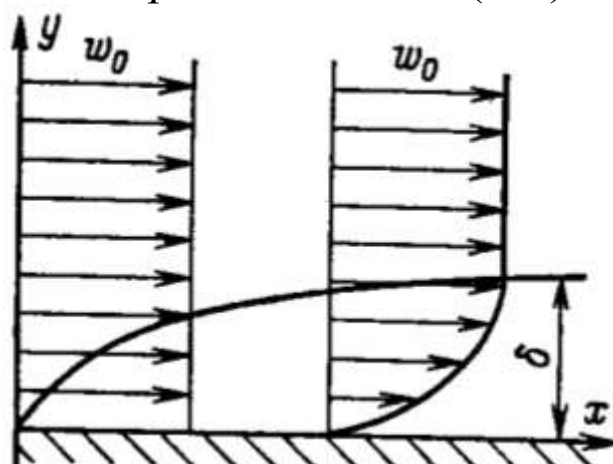


Рис. 2.6. Изменение скорости в гидродинамическом пограничном слое.

Из физического эксперимента с вязкими жидкостями известно, что

$$\text{внутри ПС } \frac{\partial w_x}{\partial y} \neq 0, \text{ вне ПС } \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0, w_x = w_0.$$

И на его внешней границе при $y = \delta$, $w_x = (1 - \varepsilon)w_0$, $\varepsilon \ll 1$,
Например $\varepsilon \approx 1\%$.

Для выяснения физической сути приближения ПС рассмотрим двумерное стационарное (установившееся и ламинарное) обтекание плоской стенки:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Как видно из системы уравнений (1 - 3), рассматривается изотермическое течение. На качественном физическом уровне строгости оценим возможность количественно и физически оправданных упрощений этой системы уравнений. Делаем оценки порядков величин в членах уравнений.

Принимаем для гидродинамического ПС, что его толщина δ – мала. При обтекании плоской поверхности неограниченным потоком во внешнем течении скорость постоянна и равна

$w_0 = const$. Из уравнения Бернулли $p + \frac{\rho w_0^2}{2} = const$ следует, что во внешнем потоке не изменяется и давление, $p = const$, тогда

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ во внешнем потоке. Кроме того из физических соображений давление передается через тонкий ПС на стенку и $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ в ПС. Вывод: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и в ПС (т.е. в рассматриваемом случае имеем пример безградиентного течения).

Т.к. $0 \leq w_x \leq w_0$, то порядок величины оценим как $w_x \approx w_0$. Для продольной координаты x естественно выбрать масштаб – длину обтекаемой стенки l . Если как обычно ввести O – обозначение

порядка данной величины, то $\frac{\partial w_x}{\partial x} = O\left(\frac{w_0}{l}\right)$, т.е. читать надо так, что производная данной компоненты скорости по продольной координате величина порядка w_0/l .

Из уравнения неразрывности (3): $\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = const$

следует, что порядок величин $\frac{\partial w_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial w_y}{\partial y}$ одинаков. Отсюда

$$\text{оценка производной } \frac{\partial w_y}{\partial y} = O\left(\frac{w_0}{l}\right) = O\left(w_0 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\delta}\right)$$

Т.к. порядок поперечной (по нормали к стенке) координаты y для ПС $O(y) = O(\delta)$, то $w_y = O\left(w_0 \frac{\delta}{l}\right)$.

Т.е. так может быть оценен порядок величины нормальной к стенке составляющей вектора скорости w_y . Толщина ПС вниз по потоку растет и следовательно нормальная к обтекаемой поверхности компонента скорости не равна нулю. Но она как видно много меньше горизонтальной (продольной) компоненты скорости.

Оценим порядки членов инерционной (конвективной) и вязкостной частей уравнения движения в проекциях на ось Ox :

$$w_x \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right) = O\left(\frac{w_0^2}{l}\right); w_y \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = O\left(w_0 \frac{\delta}{l} \frac{w_0}{\delta}\right) = O\left(\frac{w_0^2}{l}\right)$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \right) = O\left(\nu \frac{w_0}{l^2}\right); \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) = O\left(\nu \frac{w_0}{\delta^2}\right)$$

Т.о., из оценок следует, что порядок инерционных членов уравнения одинаков и равен $O\left(\frac{w_0^2}{l}\right)$.

$$\text{Отношение вязких членов дает: } \frac{\partial^2 w_x / \partial x^2}{\partial^2 w_x / \partial y^2} = O\left(\frac{w_0 / l^2}{w_0 / \delta^2}\right) = O\left(\frac{\delta^2}{l^2}\right)$$

Для ПС $\delta \ll l$ значит $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$ и членом $\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$ можно пренебречь. Тогда уравнение движения в проекциях на ось Ox может быть записано в виде:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad (4)$$

Порядок левой (инерционной) части $O\left(\frac{w_0^2}{l}\right)$, а правой $O\left(\nu \frac{w_0}{\delta^2}\right)$

Приравнивая левую и правую части, получим

$$O\left(\frac{w_0^2}{l}\right) = O\left(\nu \frac{w_0}{\delta^2}\right) \text{ или } \frac{\delta}{l} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{w_0 l}{\nu}}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right) \quad (5)$$

где безразмерный параметр - число Рейнольдса $Re = w_0 l / \nu$ характеризует отношения сил инерции и сил вязкого трения.

Если $Re \ll 1$, то $\delta/l \gg 1$ $\delta \gg l$ и все пространство охвачено действием сил вязкости, то в этом случае приближение ПС не применимо. Если $Re \gg 1$, то $\delta \ll l$ и упрощения в рамках представления о ПС в первом приближении возможны.

Оценим порядок величины в проекциях на ось Oy , т.е., во втором уравнении движения для вертикальной компоненты скорости w_y .

Учитывая (5), получим, что члены $w_x \frac{\partial w_y}{\partial x}; w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}; \nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}$

имеют значения порядка $O\left(\frac{w_0^2}{l} \cdot \frac{\delta}{l}\right) = O\left(\frac{w_0^2}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$, а член

$$\nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}\right) = O\left(\frac{w_0^2}{l} : \frac{1}{Re \sqrt{Re}}\right)$$

Т.о., члены уравнения движения в проекциях на ось Oy малы по сравнению с членами уравнения (1) и в приближении ПС уравнение (2) можно опустить. Тогда для плоского безградиентного стационарного течения у плоской поверхности можно записать:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Здесь две зависимые переменные: w_x и w_y . Правую часть (6) можно записать в виде $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$, где τ – напряжение трения в плоскости, параллельной плоскости xz .

Тепловой ПС.

Аналогично вводится понятие теплового пограничного слоя (рис.2.7). При натекании потока нагретой жидкости на холодную стенку происходит охлаждение пристеночного слоя. Слой жидкости вблизи стенки, внутри которого температура меняется от её значения T_c на стенке до её значения в набегающем потоке T_0 – это тепловой пограничный слой (ТПС). Внутри ТПС $\frac{\partial T}{\partial y} \neq 0$, а на внешней границе и вне его $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ и $T = T_0$, (при $y = \delta_T$ $T = (1 - \varepsilon)T_0$ $\varepsilon \ll 1$)

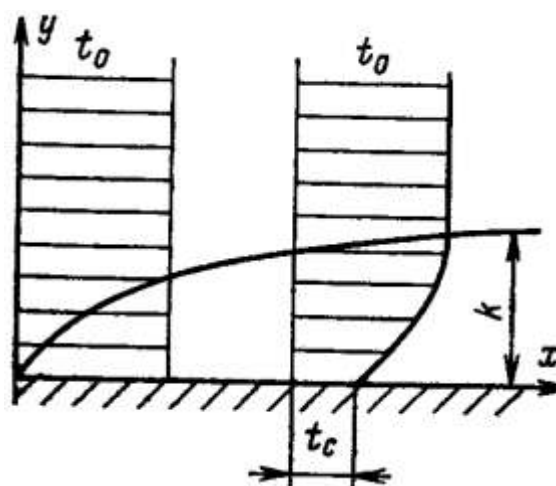


Рис. 2.7. Изменение температуры в тепловом пограничном слое.

Толщины динамического и теплового пограничных слоев δ и δ_T в общем случае различны и зависят от числа Прандтля $Pr = \nu/a$. Два крайних случая – это жидкие высокотеплопроводные расплавы

металлов ($Pr \approx 0,01 \div 0,05$) и высоковязкие низко теплопроводные масла ($Pr \approx 1000 \div 3000$).

Будем полагать, что $\delta_T = O(\delta)$. Ввиду малости δ_T можно пренебречь теплопроводностью вдоль ПС по сравнению с

поперечным переносом тепла, т.е. считать, что $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ поскольку

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$. А это следует из соотношения масштабов в

поперечном и продольном направлениях в ПС $\delta_T^2 \ll l^2$. Тогда уравнение энергии примет вид

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (8)$$

Учитывая, что $q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ и, следовательно, $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\partial q_y}{\partial y}$ правую

часть уравнения можно представить в виде $-\frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial q_y}{\partial y}$.

Чтобы замкнуть задачу к уравнению (8) необходимо добавить уравнение движения (6) и уравнение неразрывности (7). Система уравнений (6-8) получена для стационарного безградиентного обтекания плоской поверхности жидкостью с постоянными физическими свойствами; в жидкости отсутствуют внутренние источники теплоты, выделение теплоты трения мало. Поле скорости не зависит от поля T .

Уравнение теплоотдачи.

Т.к. у поверхности твердого тела имеется тонкий слой неподвижной жидкости, то из выражения для полного потока тепла

$$\vec{q} = \vec{q}_{\text{конв}} + \vec{q}_\lambda = \rho \vec{w} h - \lambda \nabla T \quad \text{следует} \quad q_c = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_c.$$

Т.о., если известно поле температуры T , то можно вычислить локальный тепловой поток на стенке q_c , не обращаясь к закону Ньютона-Рихмана: $q_c = \alpha(T_c - T_m)$.

При необходимости можно вычислить коэффициент теплоотдачи α по известному полю температуры T : $\alpha = -\frac{\lambda}{T_c - T_m} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_c$. Это выражение называют *уравнением теплоотдачи*.

Замечание. Об области применимости таких основных понятий механики сплошной среды как: «условия прилипания», пограничные слои, и т.д.

Всегда ли выполняются условия прилипания на обтекаемой газом стенке и все три компоненты скорости на стенке равны нулю, т.е. $\vec{V}_w = 0$.

Проблемы возникают в разреженных газах, например, при обтекании летательных аппаратов в верхних слоях атмосферы или в технологических задачах, например, при вытягивании монокристаллов из расплавов в вакуумированных ростовых камерах, в которых над расплавом находится разреженная газовая среда.

При числах Кнудсена $K_n = \bar{l} / l_0 > 0,001$ – газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду, для которой выполняется условие прилипания. Здесь \bar{l} – средняя длина свободного пробега молекулы, а l_0 – характерный размер тела, обтекаемого потоком газа. При $\bar{l} / l_0 > 10$ – газ должен рассматриваться как свободный молекулярный поток. Его взаимодействие со стенкой описывается на основе законов кинетической теории газов.

$0,001 \leq \bar{l} / l_0 \leq 10$ – особая зона, свои методы расчета течения и теплообмена.

