№ 4997
51
М 545

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания

НОВОСИБИРСК
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

 № 4997

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания
к лабораторным работам для студентов III курса
направлений 01.03.02 «Прикладная математика
и информатика», 02.03.03 «Математическое обеспечение
и администрирование информационных систем» ФПМИ

НОВОСИБИРСК
2021

УДК 519.852(076.5)
М 545

Составители:
д-р техн. наук, проф. *Б.Ю. Лемешко*,
д-р техн. наук, доцент *С.Н. Постовалов*,
д-р техн. наук, доцент *Е.В. Чимитова*
канд. техн. наук *В.С. Карманов*

Рецензент
д-р техн. наук, проф. *Д.В. Лисицин*

Методические указания являются руководством при выполнении лабораторных занятий, проводимых по курсу «Методы оптимизации» со студентами III курса направлений 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» в терминальном классе. Они охватывают ряд разделов математического программирования и могут быть полезны студентам других специальностей.

Работа подготовлена на кафедре теоретической
и прикладной информатики

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторные работы по курсу «Методы оптимизации» связаны с методами поиска оптимальных решений и охватывают ряд разделов математического программирования. Это одномерные методы поиска, методы минимизации функций многих переменных, метод штрафных функций и статистические методы поиска.

При выполнении лабораторных работ предусмотрены самостоятельная программная реализация конкретных методов и их анализ, что позволяет глубже понять отдельные аспекты алгоритмов.

В зависимости от темы лабораторной работы, доступности соответствующего материала в литературных источниках или полноты его изложения в курсе лекций в тексте указаний могут присутствовать или отсутствовать сведения об алгоритмах используемых методов. В последнем случае предполагается, что студент может ознакомиться с необходимыми сведениями в литературном источнике, ссылка на который предлагается, или воспользоваться конспектом лекций.

При подготовке отчета по каждой лабораторной работе основной упор должен быть сделан не на объем проделанной работы и обилие полученных результатов, а на анализ эффективности методов, сравнение их характеристик, определение области предпочтительного использования, на наглядность результатов, подтверждающих выводы по работе, что особенно важно при решении экономических задач. Отчет может быть представлен в электронном виде, но должен содержать всю необходимую информацию.

Количество баллов, которые можно получить за выполнение лабораторной работы, указано в порядке ее выполнения. Пункты, отмеченные звездочкой, необязательны для выполнения, но студенты, которые желают получить дополнительные баллы за лабораторную работу, могут их выполнить.

Лабораторная работа № 1

МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА

Цель работы

Ознакомиться с методами одномерного поиска [3, 12], используемыми в многомерных методах минимизации функций n переменных. Сравнить различные алгоритмы по эффективности на тестовых примерах.

Методические указания

1. Общая схема методов поиска минимума на отрезке

Пусть функция $f(x)$ унимодальная на отрезке $[a_0, b_0]$. Необходимо найти точку минимума функции на этом отрезке с заданной точностью ε. Все методы одномерного поиска базируются на последовательном уменьшении интервала, содержащего точку минимума.

Возьмем внутри отрезка $[a_0, b_0]$ две точки x_1 и x_2: $a_0 < x_1 < x_2 < b_0$ и вычислим значения функции в этих точках. Из свойства унимодальности функции можно сделать вывод о том, что минимум расположен либо на отрезке $[a_0, x_2]$, либо на отрезке $[x_1, b_0]$. Действительно, если $f(x_1) < f(x_2)$, то минимум не может находиться на отрезке $[x_2, b_0]$, а если $f(x_1) > f(x_2)$, то минимум не может находиться на отрезке $[a_0, x_1]$. Если же $f(x_1) = f(x_2)$, то минимум находится на интервале $[x_1, x_2]$.

Алгоритм заканчивается, когда длина сокращающегося интервала неопределенности, содержащего минимум, становится меньше ε. Различные методы одномерного поиска отличаются выбором точек

x_1, x_2. Об эффективности алгоритмов можно судить по числу вычислений функции, необходимому для достижения заданной точности.

2. *Метод дихотомии* (деления отрезка пополам)

Точки x_1, x_2 выбираются на расстоянии $\delta < \varepsilon$ от середины отрезка:

$$x_1 = (a_i + b_i - \delta) / 2,$$
$$x_2 = (a_i + b_i + \delta) / 2. \qquad (1)$$

За одну итерацию интервал неопределенности уменьшается примерно в два раза (рис. 1). После n итераций длина интервала будет равна примерно $\frac{(b_0 - a_0)}{2^n}$. Для достижения точности ε потребуется $n \geq \frac{\ln\left((b_0 - a_0)/\varepsilon\right)}{\ln 2}$ итераций. На каждой итерации минимизируемая функция вычисляется дважды.

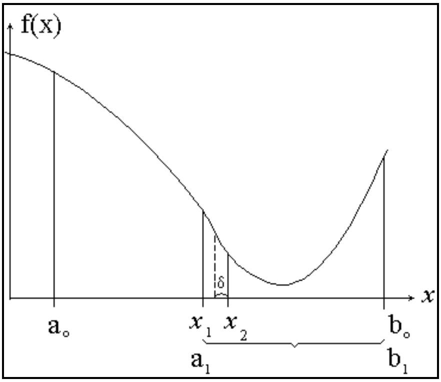

Рис. 1. Метод дихотомии

2. *Метод золотого сечения*

Точки x_1, x_2 находятся симметрично относительно середины отрезка $[a_0, b_0]$ и делят его в пропорции золотого сечения, когда длина всего отрезка относится к длине большей его части так же, как длина большей части относится к длине меньшей части:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - x_1} = \frac{b_0 - x_1}{x_1 - a_0} \quad \text{и} \quad \frac{b_0 - a_0}{x_2 - a_0} = \frac{x_2 - a_0}{b_0 - x_2}.$$

Отсюда

$$x_1 = a_i + \frac{\left(3 - \sqrt{5}\right)}{2}(b_i - a_i) \approx a_i + 0.381966011(b_i - a_i),$$

$$x_2 = a_i + \frac{\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}(b_i - a_i) \approx a_i + 0.618003399(b_i - a_i) = \tag{2}$$

$$= b_i - 0.381966011(b_i - a_i).$$

За одну итерацию интервал неопределенности уменьшается всего в $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618...$ раза, но на следующей итерации мы будем вычислять функцию только один раз, так как по свойству золотого сечения $\frac{x_2 - x_1}{b - x_1} = 0.381...$ и $\frac{b - x_2}{b - x_1} = 0.618...$ (рис. 2). Для достижения точности ε потребуется $n \geq \frac{\ln((b_0 - a_0)/\varepsilon)}{\ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ итераций.

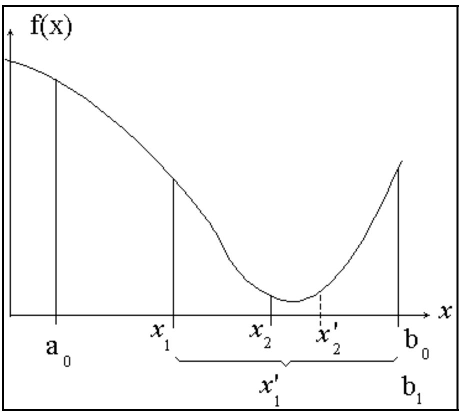

Рис. 2. Метод золотого сечения

Неточное задание величины $\sqrt{5}$ на ЭВМ уже при достаточно небольшом количестве итераций может приводить к погрешностям и потере точки минимума, так как она выпадает из интервала неопределенности. Поэтому, вообще говоря, при реализации алгоритма возможность такой ситуации должна быть предусмотрена.

3. *Метод Фибоначчи*

Числа Фибоначчи определяются соотношениями:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots, \quad F_1 = F_2 = 1 .$$

С помощью индукции можно показать, что n-е число Фибоначчи представимо в виде (*формула Бинэ*)

$$F_n = \left[\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2 \right)^n - \left(\left(1-\sqrt{5}\right)/2 \right)^n \right] \Big/ \sqrt{5}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Из этой формулы видно, что при больших n $F_n \approx \left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2 \right)^n \Big/ \sqrt{5}$, так что числа Фибоначчи с увеличением n растут очень быстро.

На начальном интервале вычисляют точки

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \\ x_2 &= a_0 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \end{aligned} \tag{3}$$

где n выбирается исходя из требуемой точности и начальной длины интервала (см. ниже соотношение (5)).

На k-м шаге метода будет получена тройка чисел a_k, b_k, $\overline{x_k}$, локализирующая минимум $f(x)$, такая, что

$$\Delta_k = b_k - a_k = (b_0 - a_0)\frac{F_{n-k+3}}{F_{n+2}}, \quad 1 \le k \le n, \quad a_1 = a_0, \quad b_1 = b_0,$$

а точка $\overline{x_k}$, $a_k < \overline{x_k} < b_k$, с вычисленным значением

$$f(\overline{x_k}) = \min_{1 \le i \le k} f(x_i)$$

совпадает с одной из точек

$$x_1 = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$
$$x_2 = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \quad (4)$$

расположенных на отрезке $[a_k, b_k]$ симметрично относительно его середины (рис. 3). При $k = n$ процесс заканчивается. В этом случае длина отрезка

$$\Delta_n = b_n - a_n = (b_0 - a_0) / F_{n+2},$$

а точки

$$x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$
$$x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

совпадают и делят отрезок пополам.

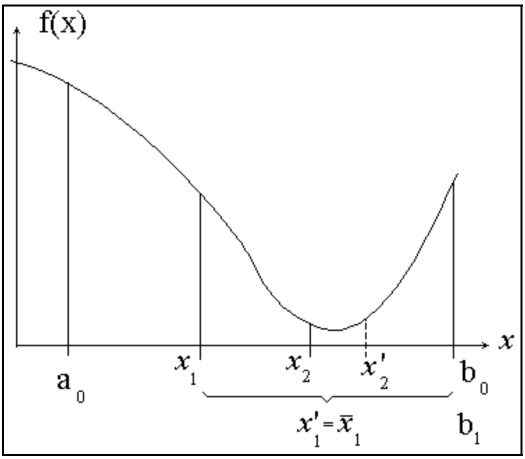

Рис. 3. Метод Фибоначчи

Следовательно,

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon .$$

Отсюда можно выбрать n из условия

$$\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2} . \qquad (5)$$

С ростом n из-за того, что F_n / F_{n+2} – бесконечная десятичная дробь, происходит искажение метода. Поэтому на очередном шаге в качестве новой точки берут из (4) наиболее удаленную от $\overline{x_{k-1}}$ на предыдущем шаге.

4. *Поиск интервала, содержащего минимум функции*

В рассмотренных методах требуется знать начальный отрезок, содержащий точку минимума. Поиск отрезка на прямой заключатся в том, что возрастающие по величине шаги осуществляются до тех пор, пока не будет пройдена точка минимума функции, т. е. убывание функции сменится на возрастание.

Например, интервал может быть выделен с помощью следующего алгоритма. На первом шаге выбираем начальную точку x_0 и определяем направление убывания функции.

Шаг 1. Если $f(x_0) > f(x_0 + \delta)$, то полагаем $k = 1$, $x_1 = x_0 + \delta$, $h = \delta$. Иначе, если $f(x_0) > f(x_0 + \delta)$, то $x_1 = x_0 - \delta$, $h = -\delta$.

Шаг 2. Удваиваем h и вычисляем $x_{k+1} = x_k + h$.

Шаг 3. Если $f(x_k) > f(x_{k+1})$, то полагаем $k = k + 1$ и переходим к шагу 2. Иначе – поиск прекращаем, так как отрезок $[x_{k-1},\ x_{k+1}]$ содержит точку минимума.

5. *Поиск минимума функции n переменных в заданном направлении*

Пусть требуется найти минимум функции *n* переменных $f(\overline{x})$, где $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, в направлении вектора $\overline{s}$. Для этого нужно найти минимум функции $g(\lambda) = f(\overline{x} + \lambda \cdot \overline{s})$ рассмотренными выше методами, λ – величина шага в заданном направлении.

Порядок выполнения работы

№	Вид работы	Баллы
1	Реализовать методы дихотомии, золотого сечения, исследовать их сходимость и провести сравнение по числу вычислений функции для достижения заданной точности ε от 10^{-1} до 10^{-7}. Построить график зависимости количества вычислений минимизируемой функции от десятичного логарифма задаваемой точности ε	6
2	Реализовать алгоритм поиска интервала, содержащего минимум функции	
3*	Реализовать метод Фибоначчи, сравнить его с методами дихотомии и золотого сечения	2

Варианты заданий

1. $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [-2, 20]$.
2. $f(x) = (x-2)^2$, $x \in [-2, 20]$.
3. $f(x) = (x-3)^2$, $x \in [-2, 20]$.
4. $f(x) = (x-4)^2$, $x \in [-2, 20]$.
5. $f(x) = (x-5)^2$, $x \in [-2, 20]$.
6. $f(x) = (x-6)^2$, $x \in [-2, 20]$.
7. $f(x) = (x-7)^2$, $x \in [-2, 20]$.
8. $f(x) = (x-8)^2$, $x \in [-2, 20]$.
9. $f(x) = (x-9)^2$, $x \in [-2, 20]$.
10. $f(x) = (x-10)^2$, $x \in [-2, 20]$.
11. $f(x) = (x-11)^2$, $x \in [-2, 20]$.
12. $f(x) = (x-12)^2$, $x \in [-2, 20]$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- задание;
- таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации, соотношение длины интервала на $i-1$ итерации к длине интервала на i итерации, точки x_1 и x_2 и значения функции в них (**по одной таблице для каждого метода** при точности $\varepsilon = 10^{-7}$):

i	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	a_i	b_i	$b_i - a_i$	$\frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{b_i - a_i}$
1								
2								
3								
...								

- график зависимости **количества вычислений** целевой функции от логарифма задаваемой точности ε (на одном графике построить зависимости для разных методов);
- таблица, показывающая процесс поиска интервала, содержащего минимум:

i	x_i	$f(x_i)$
1		
2		
3		
...		
Интервал, содержащий минимум:		

- выводы по всем пунктам задания.

Контрольные вопросы

1. Метод дихотомии.
2. Метод золотого сечения.
3. Метод Фибоначчи.
4. Метод квадратичной интерполяции (*метод парабол*).
5. Алгоритм поиска интервала, содержащего минимум функции.

Лабораторная работа № 2

МЕТОДЫ СПУСКА (0-го, 1-го и 2-го ПОРЯДКА И ПЕРЕМЕННОЙ МЕТРИКИ)

Цель работы

Ознакомиться с методами поиска минимума функции n переменных в оптимизационных задачах без ограничений [1, 5, 7, 8].

Методические указания

1. *Общая схема методов спуска*

Пусть дана функция $f(\overline{x})$, где $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, и задана начальная точка $\overline{x}_0$. Требуется найти минимум функции $f(\overline{x})$ с точностью ε_f – по функции, ε_i – по переменным x_i, где $i = 1,...,n$.

На k-м шаге $(k > 0)$ определяем вектор $\overline{s}_k$, в направлении которого функция $f(\overline{x})$ уменьшается. В этом направлении делаем шаг величиной λ_k и получаем новую точку $\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k + \lambda_k \overline{s}^k$, в которой $f(\overline{x}^{k+1}) < f(\overline{x}^k)$. Поиск прекращаем, как только $\left| f(\overline{x}^{k+1}) - f(\overline{x}^k) \right| < \varepsilon_f$ или для всех i верно $\left| \overline{x}_i^{k+1} - \overline{x}_i^k \right| < \varepsilon_i$.

Различные методы спуска отличаются выбором направления и величины шага. Как правило, для нахождения λ_k используется процедура одномерного поиска.

2. *Методы 0-го порядка (прямые методы)*

К методам нулевого порядка относятся методы, не использующие производные для выбора направления спуска: метод вращающихся координат; метод деформируемого многогранника; метод Хука и Дживса; метод Гаусса; метод Пауэлла.

3. *Методы 1-го порядка*

К методам первого порядка относятся методы, использующие производные первого порядка для выбора направления спуска: метод наискорейшего спуска; метод сопряженных градиентов в модификации Данилина–Пшеничного (Полака–Рибьера); метод сопряженных градиентов в модификации Флетчера–Ривса.

4. *Методы 2-го порядка*

К методам второго порядка относятся методы, использующие производные первого и второго порядка для выбора направления спуска: метод Ньютона и его модификации.

5. *Методы переменной метрики*

К методам переменной метрики относятся методы первого порядка, в которых при минимизации квадратичных функций аппроксимируется матрица, обратная к матрице вторых частных производных. Как и методы сопряженных градиентов, эти методы имеют квадратичную за n шагов скорость сходимости. К ним относятся метод Бройдена, метод Флетчера, методы Пирсона и др.

Методы поиска для самостоятельной реализации

Метод	Порядок	Уровень сложности
Гаусса	0	1
Хука и Дживса	0	1
Пауэлла	0	2
вращающихся координат (Розенброка)	0	2
деформируемого многогранника	0	3
наискорейшего спуска	1	2
сопряженных градиентов в модификации Данилина–Пшеничного (Полака–Рибьера)	1	3
сопряженных градиентов в модификации Флетчера–Ривса	1	3
Пирсона	переменной метрики	4
Девидона–Флетчера–Пауэлла	переменной метрики	4
Бройдена	переменной метрики	4
Ньютона	2	3

Порядок выполнения работы

<table>
<tr><th>№</th><th>Вид работы</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Реализовать два метода поиска экстремума функции (разного порядка). Включить в реализуемый алгоритм собственную процедуру, реализующую одномерный поиск по направлению. Методы поиска для самостоятельной реализации выбираются студентом в зависимости от уровня сложности. Выбранные методы должны иметь разный порядок (например, метод Гаусса (нулевого порядка) и метод Ньютона (второго порядка)</td><td rowspan="2">5 + сложность методов
(в сумме
от 7 до 12)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>С использованием разработанного программного обеспечения исследовать алгоритмы на квадратичной функции $f(\overline{x}) = 100(x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2$, функции Розенброка $f(\overline{x}) = 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + (1 - x_1)^2$ и на заданной в соответствии с вариантом тестовой функции, осуществляя спуск из различных исходных точек (не менее двух). Исследовать сходимость алгоритма, фиксируя точность определения минимума/максимума, количество итераций метода и количество вычислений функции в зависимости от задаваемой точности поиска. Результатом выполнения данного пункта должны быть выводы об объеме вычислений в зависимости от задаваемой точности и начального приближения</td></tr>
<tr><td>3*</td><td>Построить траекторию спуска различных алгоритмов из одной и той же исходной точки с одинаковой точностью. В отчете наложить эту траекторию на рисунок с линиями равного уровня заданной функции</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4*</td><td>Реализовать метод квадратичной интерполяции (метод парабол) для приближенного нахождения экстремума при одномерном поиске. Исследовать влияние точности одномерного поиска на общее количество итераций и вычислений функции при разных методах одномерного поиска</td><td>2</td></tr>
</table>

Варианты заданий

Условие задачи: найти **максимум** заданной функции:
для нечетных вариантов целевая функция имеет вид

$$f(x,y)=A_1\exp\left\{-\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2-\left(\frac{y-c_1}{d_1}\right)^2\right\}+$$

$$+A_2\exp\left\{-\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2-\left(\frac{y-c_2}{d_2}\right)^2\right\},$$

для четных вариантов целевая функция имеет вид

$$f(x,y)=\frac{A_1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2+\left(\frac{y-c_1}{d_1}\right)^2}+\frac{A_2}{1+\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2+\left(\frac{y-c_2}{d_2}\right)^2}.$$

Варианты

№ варианта	A_1	A_2	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2
1	2	3	1	2	2	3	1	3	1	2
2	1	3	2	1	3	1	2	1	3	2
3	1	2	3	2	1	2	1	2	3	1
4	2	1	1	3	2	3	2	1	1	3
5	3	1	2	1	1	2	3	1	2	1
6	2	1	2	3	3	1	2	1	1	3
7	2	3	1	1	2	3	1	3	2	3
8	3	2	2	2	1	3	2	3	2	1
9	2	3	3	1	1	1	2	1	1	3
10	1	2	3	2	1	2	2	2	1	1
11	2	1	1	2	2	2	1	1	3	2
12	3	1	3	3	2	1	2	1	1	3

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- задание;
- таблицы с результатами проведенных исследований, где должны быть отражены начальное приближение $\bar{x}_0$, задаваемая точность по функции и переменным (ε от 10^{-3} до 10^{-7}), количество итераций, число вычислений целевой функции, найденная точка и значение функции в ней;
- для каждой целевой функции при точности поиска по переменным и функции $\varepsilon = 0,001$ и одной начальной точке составить следующую таблицу.

i	$(x_i\,,\; y_i)$	$f(x_i, y_i)$	Направление поиска $(s_1\,,\; s_2)$	Экстремум одномерного поиска λ	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$ $\lvert y_i - y_{i-1}\rvert$ $\lvert f_i - f_{i-1}\rvert$	Угол*** между $(x_i\,,\; y_i)$ и $(s_1\,,\; s_2)$	Градиент функции*, матрица вторых производных**
1							
2							
3							

* Для методов первого и второго порядка и переменной метрики.

** Для методов второго порядка. Для методов переменной метрики – аппроксимация матрицы вторых производных.

*** Угол между векторами $(x_i\,,\; y_i)$ и $(s_1\,,\; s_2)$ можно найти по формуле $\arccos \dfrac{x_i s_1 + y_i s_2}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$.

- выводы о сходимости алгоритмов в зависимости от точности и начального приближения с указанием преимуществ и недостатков.

В отчет необходимо включить текст разработанной программы поиска, результаты ее тестирования.

Контрольные вопросы

1. Метод Гаусса.
2. Метод Хука и Дживса.
3. Метод Розенброка (вращающихся координат).
4. Метод Пауэлла.
5. Метод деформируемого многогранника.
6. Метод наискорейшего спуска.
7. Метод сопряженных градиентов и его модификации.
8. Метод Ньютона и его модификации.
9. Методы переменной метрики.

Лабораторная работа № 3
МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Цель работы

Ознакомиться с методами штрафных функций при решении задач нелинейного программирования. Изучить типы штрафных и барьерных функций, их особенности, способы и области применения, влияние штрафных функций на сходимость алгоритмов, зависимость точности решения задачи нелинейного программирования от величины коэффициента штрафа.

Методические указания

С помощью методов штрафных функций и барьеров (их еще называют *методы внешней и внутренней штрафной точки*) задача нелинейного программирования решается путем исследования *последовательности задач* без ограничений. Вследствие того, что методы штрафных функций и барьеров не оперируют ограничениями в явном виде, они оказываются эффективными в вычислительном отношении для задач нелинейного программирования.

Методы штрафных функций и барьеров аппроксимируют исходную задачу нелинейного программирования последовательностью связанных с ней задач без ограничений, каждая из которых может быть решена с помощью имеющихся алгоритмов оптимизации.

В **методе штрафных функций** исходную задачу

$$\min f(\overline{x})$$

при ограничениях

$$h_j(\bar{x}) = 0, \;\; j = \overline{1,m};$$

$$q_j(\bar{x}) \le 0, \;\; j = \overline{1,k},$$

сводят к задаче без ограничений

$$\min Q(x) = \min\left\{ f(\bar{x}) + r_0 \left[\sum_{j=1}^{m} r_j \Phi_j\left(h_j(\bar{x})\right) + \sum_{l=1}^{k} r_l S_l\left(q_l(\bar{x})\right) \right] \right\},$$

где $\Phi(\cdot)$, $S(\cdot)$ – функции штрафа, которые накладываются при нарушении ограничений. Обычно функция штрафа выбирается такой, чтобы штраф был равен нулю, если ограничение выполняется, и больше нуля, если нарушено.

Барьерные функции отличаются от штрафных тем, что в допустимой области они всегда не равны нулю и, кроме того, резко возрастают, стремясь к бесконечности, при приближении к границе допустимой области. В отличие от штрафных барьерные функции требуют специальной адаптации алгоритмов оптимизации, так как при случайном нарушении ограничений в процессе поиска может произойти переполнение разрядной сетки.

Стратегия выбора коэффициентов штрафа. Эффективность применения метода штрафных функций существенно зависит от выбора функции штрафа и правильно подобранной стратегии корректировки коэффициентов штрафа r_j. Как правило, алгоритм подбора коэффициентов штрафа заключается в следующем. На начальном этапе фиксируем точку $\bar{x}_0$, а также начальные значения коэффициентов штрафа и находим минимум функции $Q(x)$ в точке $\bar{x}_1$. Далее проверяем величину штрафа: если штраф больше заданной точности ε, то изменяем величину штрафа (для штрафных функций коэффициенты штрафа увеличиваются, а для барьерных функций – уменьшаются). Далее повторяем поиск из точки $\bar{x}_1$. Так продолжаем до тех пор, пока величина штрафа не станет меньше ε.

Порядок выполнения работы

№	Вид работы	Баллы
1	Применяя методы поиска минимума 0-го порядка, реализовать программу для решения задачи нелинейного программирования с использованием **метода штрафных функций**	7
2	Исследовать сходимость **метода штрафных функций** в зависимости – от выбора штрафных функций, – начальной величины коэффициента штрафа, – стратегии изменения коэффициента штрафа, – начальной точки, – задаваемой точности ε. Сформулировать выводы	
3*	Применяя методы поиска минимума 0-го порядка, реализовать программу для решения задачи нелинейного программирования с ограничением типа неравенства (**только задача *а***) с использованием **метода барьерных функций**	3
4*	Исследовать сходимость **метода барьерных функций** (**только задача *а***) в зависимости – от выбора барьерных функций, – начальной величины коэффициента штрафа, – стратегии изменения коэффициента штрафа, – начального приближения, – задаваемой точности ε. Сформулировать выводы	

Варианты заданий

№ п/п	Первая задача (*а*)	Вторая задача (*б*)
1	$f(x,y)=5(x-y)^2+(x-2)^2\to\min$ $x+y\le 1$	$f(x,y)=5(x-y)^2+(x-2)^2\to\min$ $x=-y$
2	$f(x,y)=10(y-x)^2+y^2\to\min$ $x+y\ge 1$	$f(x,y)=10(y-x)^2+y^2\to\min$ $x=2-y$
3	$f(x,y)=(x-y)^2+10(x+5)^2\to\min$ $x+y\ge 0$	$f(x,y)=(x-y)^2+10(x+5)^2\to\min$ $x=1-y$

Окончание таблицы

№ п/п	Первая задача (*а*)	Вторая задача (*б*)
4	$f(x, y) = 2(x-y)^2 + 14(y-3)^2 \to \min$ $y - x \ge 1$	$f(x, y) = 2(x-y)^2 + 14(y-3)^2 \to \min$ $x = -y$
5	$f(x, y) = 4(y-x)^2 + 3(x-1)^2 \to \min$ $x + y \le -1$	$f(x, y) = 4(y-x)^2 + 3(x-1)^2 \to \min$ $y = x + 1$
6	$f(x, y) = 7(x-y)^2 + (y-6)^2 \to \min$ $y - x \ge 2$	$f(x, y) = 7(x-y)^2 + (y-6)^2 \to \min$ $x = -y$
7	$f(x, y) = (x+y)^2 + 4y^2 \to \min$ $x + y \ge 5$	$f(x, y) = (x+y)^2 + 4y^2 \to \min$ $y = x + 2$
8	$f(x, y) = 5(x+y)^2 + (x-2)^2 \to \min$ $x + y \ge 1$	$f(x, y) = 5(x+y)^2 + (x-2)^2 \to \min$ $x = y$
9	$f(x, y) = 4(x+y)^2 + x^2 \to \min$ $y - x \ge 5$	$f(x, y) = 4(x+y)^2 + x^2 \to \min$ $x = 2 - y$
10	$f(x, y) = (x+y)^2 + 10(y-2)^2 \to \min$ $y \le x$	$f(x, y) = (x+y)^2 + 10(y-2)^2 \to \min$ $y = x - 1$
11	$f(x, y) = 10(x+y)^2 + (y+2)^2 \to \min$ $y - x \ge 1$	$f(x, y) = 10(x+y)^2 + (y+2)^2 \to \min$ $x = y$
12	$f(x, y) = 8(x+y)^2 + (x+2)^2 \to \min$ $x + y \ge 5$	$f(x,y) = 8(x+y)^2 + (x+2)^2 \to \min$ $x = y$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- задание;
- таблицы с результатами проведенных исследований, где должны быть отражены используемая штрафная / барьерная функция, начальная величина коэффициента штрафа, стратегия изменения коэффициента штрафа, начальное приближение $\overline{x}_0$, задаваемая точность, коли-

чество итераций, число вычислений целевой функции, найденная точка и значение функции в ней;

- выводы об эффективности метода штрафных функций, рекомендации о выборе функций штрафа и стратегии выбора коэффициентов штрафа с указанием преимуществ и недостатков.

В отчет необходимо включить текст разработанной программы поиска, результаты ее тестирования.

Контрольные вопросы

1. Метод штрафных функций.
2. Метод барьерных функций.
3. Стратегии изменения коэффициентов штрафа.
4. Виды штрафных функций для ограничений равенств.
5. Виды штрафных функций для ограничений неравенств.
6. Виды барьерных функций.

Лабораторная работа № 4

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА

Цель работы

Ознакомиться со статистическими методами поиска при решении задач нелинейного программирования. Изучить методы случайного поиска при определении глобального экстремума функции.

Методические указания

Статистические методы поиска иногда делят на 2 вида: ненаправленный и направленный поиск. Ненаправленный случайный поиск используется чаще всего для определения глобального экстремума задачи нелинейного программирования. В этом случае последующие испытания проводятся совершенно независимо от результатов предыдущих. В допустимой области генерируются случайные точки, в которых вычисляются значения целевой функции. В простейшем случае генерация осуществляется по равномерному закону в n-мерном гиперпрямоугольнике. Если задача с ограничениями, то допустимая область вписывается в гиперпрямоугольник и оставляются только те точки, которые попадают в допустимую область. В направленном случайном поиске отдельные испытания связаны между собой. Результаты уже проведенных испытаний используются для проведения последующих. Сходимость таких методов значительно выше, но приводят они только к локальным решениям. Примерами таких методов являются алгоритм с парной пробой, алгоритм наилучшей пробы, в котором генерируются случайные точки на сфере и спуск осуществляется в «наилучшем» направлении, алгоритм статистического градиента, алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом.

При тестировании реализованных алгоритмов желательно фиксировать начальное значение генератора случайных чисел (ГСЧ). Это позволит повторить работу алгоритма при повторном запуске программы. Очевидно, что при повторном запуске при другом начальном значении ГСЧ может получиться другой результат.

Простой случайный поиск

Пусть нам необходимо решить задачу минимизации функции $f(\overline{x})$ на заданной области D.

В заданной области по равномерному закону выбираем случайную точку $\overline{x}_1$ и вычисляем в ней значение функции $y_1 = f(\overline{x}_1)$. Затем выбираем таким же образом случайную точку $\overline{x}_2$ и вычисляем $y_2 = f(\overline{x}_2)$. Запоминаем минимальное из этих значений и точку, в которой значение функции минимально. Далее генерируем новую точку. Делаем N экспериментов, после чего лучшую точку берем в качестве решения задачи (точку, в которой функция имеет минимальное значение среди всех «случайно» сгенерированных).

Оценим число экспериментов, необходимое для определения решения (точки минимума) с заданной точностью в n-мерном прямоугольнике, $\overline{x} \in \left[\overline{A}, \overline{B}\right]$. Пусть n – размерность вектора переменных. Объем n-мерного прямоугольника, в котором ведется поиск минимума:

$$V = \prod_{i=1}^{n} (B_i - A_i) .$$

Если необходимо найти решение с точностью ε_i, $i = \overline{1,n}$, по каждой из переменных, то мы должны попасть в окрестность оптимальной точки с объемом

$$V_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i .$$

Вероятность попадания в эту окрестность при одном испытании равна $P_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V}$. Вероятность непопадания равна $1 - P_\varepsilon$. Испытания независимы, поэтому вероятность непопадания за N экспериментов равна $(1 - P_\varepsilon)^N$.

Вероятность того, что мы найдем решение за N испытаний:

$$P = 1 - (1 - P_{\varepsilon})^{N} .$$

Отсюда нетрудно получить оценку необходимого числа испытаний N для определения минимума с требуемой точностью:

$$N \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - P_{\varepsilon})} .$$

Данный алгоритм позволяет найти глобальный экстремум в заданной области. Рассмотрим другие подходы к поиску глобального экстремума.

Алгоритмы глобального поиска

Алгоритм 1. В допустимой области D случайным образом выбирают точку $\overline{x}_1 \in D$. Приняв эту точку за исходную и используя некоторый детерминированный метод или алгоритм направленного случайного поиска, осуществляется спуск в точку локального минимума $\overline{x}_1^* \in D$, в области притяжения которого оказалась точка $\overline{x}_1$.

Затем выбирается новая случайная точка $\overline{x}_2 \in D$ и по той же схеме осуществляется спуск в точку локального минимума $\overline{x}_2^* \in D$ и т. д.

Поиск прекращается, как только некоторое заданное число m раз не удается найти точку локального экстремума со значением функции, меньшим предыдущих.

Алгоритм 2. Пусть получена некоторая точка локального экстремума $\overline{x}_1^* \in D$. После этого переходим к *ненаправленному случайному* поиску до получения точки $\overline{x}_2$ такой, что $f(\overline{x}_2) < f\left(\overline{x}_1^*\right)$.

Из точки $\overline{x}_2$ с помощью детерминированного алгоритма или направленного случайного поиска получаем точку локального экстремума $\overline{x}_2^*$, в которой заведомо выполняется неравенство $f(\overline{x}_2^*) < f\left(\overline{x}_1^*\right)$.

Далее с помощью случайного поиска определяем новую точку $\overline{x}_3$, для которой справедливо неравенство $f(\overline{x}_3) < f\left(\overline{x}_2^*\right)$, и снова спуск в точку локального экстремума $\overline{x}_3^*$ и т. д.

Поиск прекращается, если при генерации некоторого предельного числа новых случайных точек m не удается найти лучшей, чем предыдущий локальный экстремум, который тогда и принимается в качестве решения.

Алгоритм 3. Пусть $\overline{x}_1^0$ – некоторая исходная точка поиска в области D, из которой осуществляется спуск в точку локального экстремума $\overline{x}_1^*$ со значением $f\left(\overline{x}_1^*\right)$. Далее из точки $\overline{x}_1^*$ движемся либо в случайном направлении, либо в направлении $\overline{x}_1^* - \overline{x}_1^0$ до тех пор, пока функция снова не станет убывать (выходим из области притяжения $\overline{x}_1^*$).

Полученная точка $\overline{x}_2^0$ принимается за начало следующего спуска. В результате находим новый локальный экстремум $\overline{x}_2^*$ со значением функции $f\left(\overline{x}_2^*\right)$.

Если $f\left(\overline{x}_2^*\right) < f\left(\overline{x}_1^*\right)$, точка $\overline{x}_1^*$ забывается и ее место занимает точка $\overline{x}_2^*$. Если $f\left(\overline{x}_2^*\right) \geq f\left(\overline{x}_1^*\right)$, то возвращаемся в точку $\overline{x}_1^*$ и движемся из нее в новом случайном направлении.

Процесс прекращается, если не удается найти лучший локальный минимум после заданного числа попыток m или не удается найти «случайное» направление, в котором функция снова начинает убывать.

Такой подход позволяет найти глобальный экстремум в случае многосвязных допустимых областей.

Порядок выполнения работы

№ п/п	Вид работы	Баллы
1	1.1. Разработать программу для решения задачи поиска глобального экстремума с использованием **метода простого случайного поиска и трех алгоритмов глобального поиска**. 1.2. Исследовать метод простого случайного поиска глобального экстремума при различных ε и P. Результат представить в таблице:	7

Окончание таблица

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Вид работы</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>ε</td><td>P</td><td>N</td><td>(x^*, y^*)</td><td>$f(x^*, y^*)$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
1.3. Исследовать алгоритмы поиска глобального экстремума. Сравнить результаты поиска по количеству вычислений функции и найденной точке экстремума. Исследование провести при различных значениях числа попыток m</td><td></td></tr>
<tr><td>2*</td><td>П.1.3 повторить при пяти разных начальных значениях ГСЧ. Сделать выводы об устойчивости различных алгоритмов</td><td>3</td></tr>
</table>

Варианты заданий

Условие задачи: найти **максимум** заданной функции:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{6} \frac{C_i}{1 + (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

на области $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$.

Варианты

№ варианта	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
1	5	5	3	6	2	3	–9	–10	8	–6	–9	1	–3	–1	8	–5	–3	5
2	2	4	2	6	2	3	–3	–6	2	6	–3	8	6	–8	–8	8	–4	–1
3	6	2	4	2	8	8	–3	4	–8	–6	3	–6	9	–7	3	–9	–2	–8
4	4	9	1	7	5	6	7	–9	6	–8	–10	–2	9	–1	5	–2	–8	–4
5	1	2	10	5	7	9	0	0	3	–7	6	6	–1	–4	–2	–6	–10	1
6	7	9	10	6	5	7	–6	–7	8	–9	9	0	9	7	–8	3	8	7
7	2	3	8	3	2	8	3	–5	0	3	–4	6	–4	–6	–1	7	0	5
8	2	1	7	2	8	4	5	2	–9	0	–3	–3	4	0	–6	–3	7	3
9	10	9	7	9	3	10	–5	8	–8	0	–10	5	–1	–9	–4	3	1	0
10	9	2	2	1	9	5	–6	–7	–8	6	6	9	7	5	0	4	–9	–2
11	4	9	8	4	8	8	–9	9	–10	–3	–2	–9	4	8	–2	–2	–7	0
12	10	2	10	4	5	3	3	6	–10	6	–6	–1	4	5	–1	8	–2	–1

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- задание;
- таблицы с результатами проведенных исследований;
- выводы об эффективности реализованных алгоритмов глобального поиска, их трудоемкости.

Контрольные вопросы

1. Алгоритм простого случайного поиска.
2. Алгоритм с парной пробой.
3. Алгоритм статистического градиента.
4. Алгоритм наилучшей пробы с направляющим гиперквадратом.
5. Алгоритмы глобального поиска.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васильев В. П.* Численные методы решения экстремальных задач / В. П. Васильев. – Москва : Наука, 1980. – 518 с.
2. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища школа, 1975. – 320 с.
3. *Карманов В. П.* Математическое программирование / В. П. Карманов. – Москва : Наука, 1975. – 272 с.
4. *Кюнци Г. П*. Нелинейное программирование / Г. П. Кюнци, В. Крелле. – Москва : Советское радио, 1965.
5. *Моисеев Н. Н.* Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – Москва : Наука, 1978. – 352 с.
6. *Растригин Л. А.* Статистические методы поиска / Л. А. Растригин. – Москва : Наука, 1968. – С. 82–121.
7. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – Москва : Мир, 1975. – 534 с.
8. *Лемешко Б. Ю.* Методы оптимизации: конспект лекций / Б. Ю. Лемешко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 156 с.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 22.03.2021. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 50 экз. Уч.-изд. л. 1,86. Печ. л. 2,0. Изд. № 272/20. Заказ № 336
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20