

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий



Вопрос по выбору

Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Автор:
Григорьев Даниил
Б01-407

1 Введение

Закон всемирного тяготения, открытый Исааком Ньютоном, описывает силу притяжения между телами, которая зависит от их масс и расстояния между ними. Этот закон лег в основу понимания движения планет и других небесных тел. Одним из важных результатов применения этого закона стало открытие точек Лагранжа — особых позиций в гравитационном поле двух крупных объектов, где маленькие тела могут находиться в стабильном положении.

2 Законы Кеплера

В результате длительной обработки многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге (1546-1601) Кеплер (1571-1630) эмпирически установил три закона планетных движений. Эти законы формулируются следующим образом:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;
2. Радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади;
3. Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

Первые два закона были опубликованы Кеплером в 1609 г., последний в 1619 г. Законы Кеплера естественным путем привели Ньютона к открытию закона всемирного тяготения. Рассмотрим этот вопрос.

3 Закон всемирного тяготения

3.1 Вывод Ньютона

Из первого закона Кеплера следует, что траектория планеты плоская кривая. С учетом этого обстоятельства¹, из второго закона Кеплера следует, что сила, заставляющая планету двигаться по замкнутым орбитам, направлена к Солнцу. Определим теперь, как эта сила изменяется с изменением расстояния от Солнца и как она зависит от массы планеты. Для упрощения расчетов можно допустить, что планета движется не по эллипсу, а по кругу, в центре которого находится Солнце. Но я рассмотрю задачу сразу более строго, не прибегая к такому упрощению.

Третий закон Кеплера для гиперболических и параболических движений, теряет смысл. Однако для вычисления ускорения планеты или кометы он и не нужен. Приведем это элементарное вычисление.

Введём полярную систему координат с полюсом в фокусе F_1 , где находится Солнце, и полярной осью PA , направленной вдоль большой оси эллипса или гиперболы.

Ускорение движущегося тела разложим на радиальную составляющую a_r , направленную вдоль радиуса r , и азимутальную составляющую a_ϕ , перпендикулярную к радиусу. Они определяются выражениями

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\phi}^2 r, \quad a_\phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) \quad (3.1.1)$$

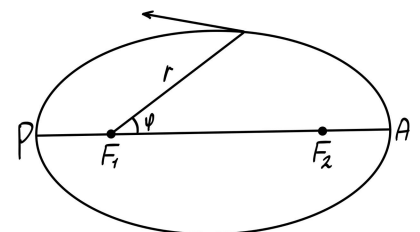


Рис. 1: Полярная система координат

¹Это требуется для теоремы: если траектория материальной точки - плоская кривая и радиус-вектор, проведенный из неподвижного полюса O , в равные времена описывает одинаковые площади, то направление действующей силы все время проходит через полюс O .

Величина

$$\sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} \quad (3.1.2)$$

есть секториальная скорость, т. е. площадь, описываемая радиусом-вектором планеты или кометы в единицу времени. По второму закону Кеплера она постоянна, а потому $a_\phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(2\sigma)$. Значит, ускорение рассматриваемого небесного тела не имеет азимутальной составляющей, т.е. направлено к Солнцу. Производная $\dot{\phi}$ определяется формулой (3.1.2). Для вычисления производной \ddot{r} воспользуемся уравнением конического сечения в полярной системе координат

$$r(1 - \epsilon \cos \phi) = p, \quad (3.1.3)$$

где p - параметр эллипса и ϵ - эксцентриситет. Для эллипса $\epsilon < 1$, для параболы $\epsilon = 1$, для гиперболы $\epsilon > 1$. В предельных случаях: $\epsilon = 0$ и $\epsilon = \infty$ получаются круг и прямая линия. Дифференцируя уравнение (3.1.3) по времени, получим

$$\dot{r}(1 - \epsilon \cos \phi) + \epsilon r \dot{\phi} \sin \phi = 0,$$

или после умножения на r с учетом соотношений (3.1.2) и (3.1.3)

$$p\dot{r} + 2\epsilon\sigma \sin \phi$$

Вторичное дифференцирование даёт

$$p\ddot{r} + 2\sigma\epsilon \cos \phi \dot{\phi}$$

Подставляя сюда $\dot{\phi} = \frac{2\sigma}{r^2}$, $\epsilon \cos \phi = 1 - \frac{p}{r}$, получим

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \dot{\phi}^2 r$$

Из первой формулы (3.1.1) находим

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{pr^2}. \quad (3.1.4)$$

Таким образом, ускорение тела обратно пропорционально квадрату её расстояния от Солнца.

Докажем, что коэффициент $\frac{4\sigma^2}{p}$ один и тот же для всех планет. Площадь эллипса πab , где a и b - длины большой и малой полуосей его. σ - постоянна, тогда $\sigma = \frac{\pi ab}{T}$, где T - период обращения планеты по её орбите. Из аналитической геометрии известно, что $p = \frac{b^2}{a}$. Тогда из (3.1.4)

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}. \quad (3.1.5)$$

Ввод постоянную Кеплера $K = \frac{a^3}{T^2}$, получим

$$a_r = -\frac{4\pi^2 K}{r^2}. \quad (3.1.6)$$

Сила, действующая на планету, равна

$$F = -\frac{4\pi^2 K m}{r^2}. \quad (3.1.7)$$

Коэффициент пропорциональности $4\pi^2 K$, входящий в формулы (3.1.6) и (3.1.7), один и тот же для всех планет, а потому он не может зависеть от массы планеты. Но Солнце и планета в

их взаимодействия выступают как равноправные тела. Они отличаются друг от друга массами. И если сила взаимодействия F пропорциональна массе планеты m , то она должна быть пропорциональна также и массе Солнца M . Для этой силы можно поэтому написать

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}. \quad (3.1.8)$$

где γ - новая постоянная, уже не зависящая ни от массы Солнца, ни от массы планеты.

Солнце и планеты отличаются друг от друга и от других тел также только количественно величинами масс. Поэтому естественно предположить, что притяжение существует не только между Солнцем и планетой, но и между планетами, а также между любыми другими телами, и что сила притяжения определяется формулой (3.1.8), в которой под M и m следует понимать массы взаимодействующих тел. Это предположение было введено Ньютоном и подтвердилось на опыте. Он сформулировал закон всемирного тяготения, согласно которому *любые два тела (материальные точки) притягиваются друг к другу с силами, пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними*. Такие силы называются гравитационными или силами всемирного тяготения. Коэффициент пропорциональности γ , входящий в формулу (3.1.4), один и тот же для всех тел. В этом смысле он является универсальной постоянной. Это — одна из важнейших мировых постоянных, называемая гравитационной постоянной. Измерения γ современными методами привели к результату

$$\gamma = (6,6732 \pm 0,0031) \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-2} = (6,6732 \pm 0,0031) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

Гравитационная постоянная, как мы видим, весьма мала. Поэтому и гравитационные взаимодействия между обычными телами, даже считающимися большими с общежитейской точки зрения, ничтожно малы.

3.2 Точки Лагранжа

3.2.1 Необходимые условия существования точек Лагранжа

Для существования точек Лагранжа в системе из двух тел (например, Земля и Луна) необходимо выполнение нескольких условий:

1. *Гравитационное взаимодействие:* Точки Лагранжа возникают в результате взаимодействия гравитационных сил двух крупных тел. Это означает, что оба объекта должны обладать массой, достаточной для создания значительного гравитационного поля.
2. *Наличие орбитального движения:* Точки Лагранжа существуют в динамических системах, где оба тела находятся на орбитах, двигаясь по круговым или эллиптическим траекториям. Обычно это относится к системам, где оба объекта движутся вокруг общего центра масс.
3. *Устойчивость системы:* Для существования стабильных точек Лагранжа важным условием является наличие баланса между силами гравитационного притяжения и центробежной силой, возникающей из-за движения тел. В случае неустойчивых точек Лагранжа небольшие возмущения могут вывести объект из равновесия.
4. *Малые массы третьих тел:* Точки Лагранжа предназначены для малых объектов, масса которых значительно меньше масс двух основных тел. Эти объекты могут быть спутниками или искусственными спутниками, которые находятся в устойчивом или условно устойчивом положении относительно двух крупных тел.

Таким образом, существование точек Лагранжа возможно в двухтельных системах, где имеется динамическое равновесие между гравитационными силами и орбитальными движениями объектов.

3.2.2 Определение точек Лагранжа

Точки Лагранжа — это особые положения в системе двух массивных тел, движущихся под действием взаимного тяготения (например, планета и её спутник, звезда и планета), где третье, существенно менее массивное тело может находиться в равновесии относительно них. Эти точки являются решениями уравнений движения в системе отсчёта, связанной с массивными телами, и определяются как положения, где силы притяжения двух тел и центробежная сила, действующая на третье тело, уравновешивают друг друга. Точки Лагранжа названы в честь французского математика Жозефа-Луи Лагранжа, который исследовал их в XVIII веке в контексте задач небесной механики. В рамках классической механики существует пять таких точек, обозначаемых L_1 , L_2 , L_3 , L_4 и L_5 .

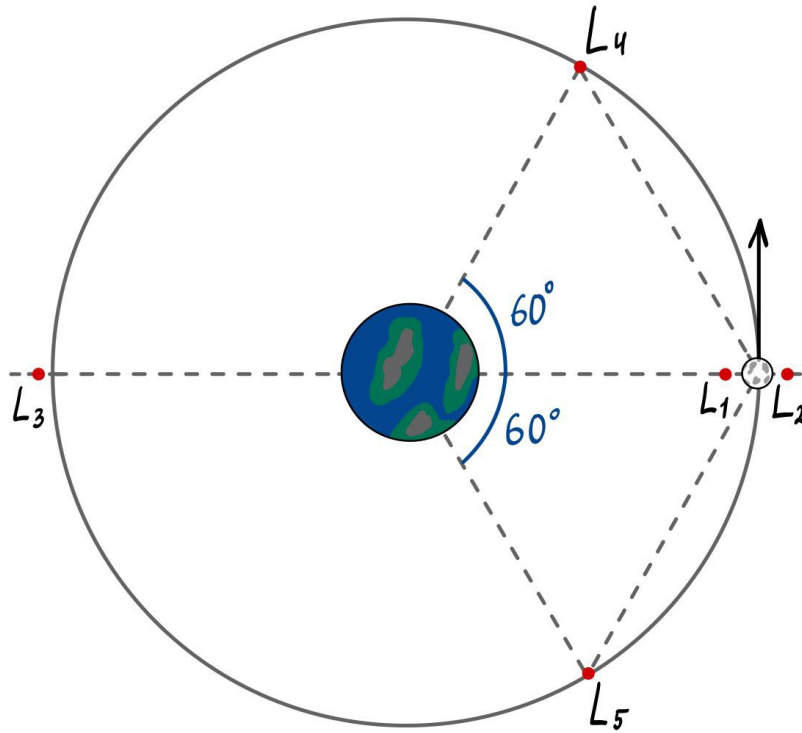


Рис. 2: Точки Лагранжа

L_1 : Расположена между двумя массивными телами. Здесь центробежная сила и гравитация уравновешиваются, позволяя менее массивному телу оставаться в этой точке.

L_2 : Находится за меньшим телом (например, за планетой), с внешней стороны относительно большего тела (например, Солнца). В этой точке силы также компенсируют друг друга.

L_3 : Расположена за большим телом на продолжении линии, соединяющей два массивных тела.

L_4 : Формирует вершину равностороннего треугольника с двумя массивными телами, находясь на 60° впереди по орбите меньшего тела.

L_5 : Аналогично L_4 , но расположена на 60° позади меньшего тела по его орбите.

3.2.3 Точки L_1 и L_2

Рассмотрим случай, когда $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$, то есть все три массы лежат на одной прямой. Пусть пробное тело находится между массивными телами. Предполагаем, что $l \ll L = r_1 + r_2$, тогда введем обозначение: $l = L\alpha$ где $\alpha \ll 1$ Также скажем что $\frac{m_2}{m_1} = \eta$, причем $m_2 \ll m_1$, в ином случае получится уравнение 5 степени, которое не имеет аналитического решения.

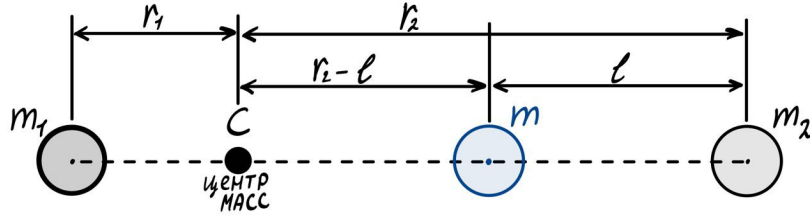


Рис. 3: Картина тел при $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$ (Точка L_1)

Из определения центра масс

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

Тогда

$$\begin{aligned} r_1 &= \eta r_2 \\ L - r_2 &= \eta r_2 \\ r_2 &= \frac{L}{1 + \eta} \\ r_1 &= L - r_2 = \frac{\eta L}{1 + \eta} \end{aligned}$$

Таким образом проекции сил, действующих на пробное тело выражаются как

$$F_1 = -\frac{\gamma m_1 m}{(r_1 + r_2 - l)^2} \quad F_2 = \frac{\gamma m_2 m}{l^2} \quad F_\omega = \frac{\gamma(m_1 + m_2)m}{L^3}(r_2 - l)$$

По определению точек Лагранжа

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_\omega &= 0 \\ -\frac{\gamma m_1 m}{(r_1 + r_2 - l)^2} + \frac{\gamma m_2 m}{l^2} + \frac{\gamma(m_1 + m_2)m}{L^3}(r_2 - l) &= 0 \end{aligned}$$

Пользуясь заменами и сокращая, получаем

$$-\frac{1}{(1 - \alpha^2)} + \frac{\eta}{\alpha^2} + \frac{(1 + \eta)(1 - \alpha - \eta)}{(1 + \eta)} = 0$$

Пользуясь тем, что величины малые, а также тем, что $(1 + x)^\alpha \approx 1 + x\alpha$, $x \rightarrow 0$

$$(1 + 2\alpha)\alpha^2 + \eta + \alpha^2 - \alpha^3 - \eta\alpha^3 = 0$$

$$\alpha^3(3 + \eta) = \eta$$

$$\alpha^3 = \frac{\eta}{3 + \eta} \approx \frac{\eta}{3}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\eta}{3}}$$

Окончательно получаем

$$l = \alpha \cdot L = \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}} L$$

Данная точка - точка L_1 . Аналогичным образом выводится L_2 , которая находится справа от тела m_2 . Формула для неё будет такая же.

3.2.4 Точка L_3

Теперь рассмотрим ситуацию если пробное тело находится слева от обоих тел

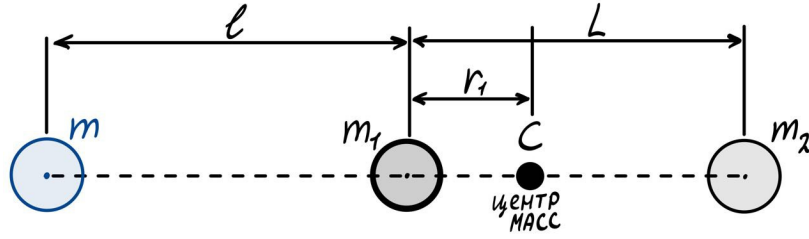


Рис. 4: Картина тел при $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$ (Точка L_3)

Тогда уравнение на ускорения примет вид

$$-\frac{\gamma m_1}{l^2} + \frac{\gamma m_2}{(L+l)^2} + \frac{\gamma(m_1+m_2)}{L^3}(r_1+l) = 0$$

Введем обозначения

$$l = (1+\beta)L \quad \frac{m_2}{m_1} = \eta$$

Тогда получаем

$$r_1 = L - \frac{L}{1+\eta} = \frac{\eta L}{1+\eta}$$

$$l + r_1 = (1+\beta)L + r_1 = \left(1+\beta + \frac{\eta}{1+\eta}\right)L = \frac{1+\beta\eta + \beta + 2\eta}{1+\eta}L$$

Тогда

$$\frac{1}{(1+\beta)^2 L^2} + \frac{\eta}{(2+\beta)^2 L^2} - \frac{(1+\eta)(1+\beta\eta + \beta + 2\eta)L}{L^3(1+\eta)} = 0$$

$$\frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{\eta}{(2+\beta)^2} - (1+\beta\eta + \beta + 2\eta) = 0$$

Воспользуемся малостью β и получим

$$1 - 2\beta + \frac{\eta}{4}(1-\beta) - (1+\beta\eta + \beta + 2\eta) = 0$$

$$\beta = -\frac{7}{12}\eta$$

Таким образом, точка L_3

$$l = (1+\beta)L = \left(1 - \frac{7}{12}\eta\right)L$$

$$l_0 = l + r_1 = \left(1 + \frac{5}{12}\eta\right)L$$

3.2.5 Точки L_4 и L_5

Теперь рассмотрим случай, в котором $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$, то есть рассмотрим более общий случай. m_1, m_2 - рассматриваемые тела, О - положение пробного тела с пренебрежимо малой массой. С - положение центра масс тел m_1 и m_2 . Фиксируем линию 1-2, переходя в соответствующую ей вращающуюся систему отсчета

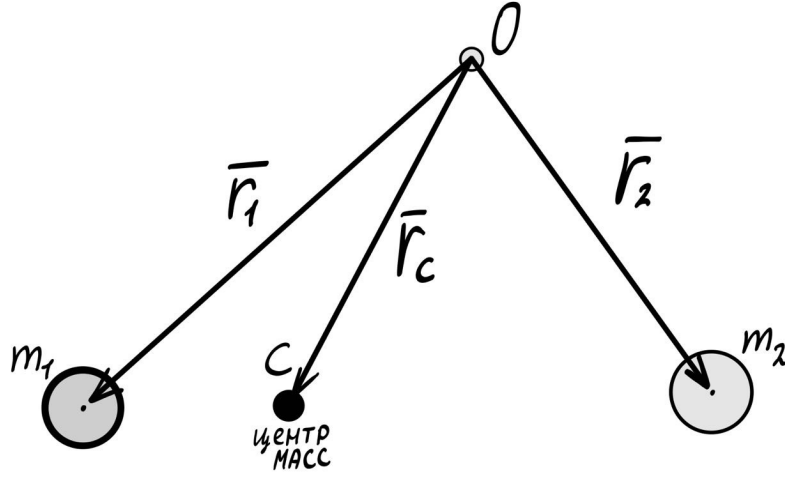


Рис. 5: Картина тел при $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$ (Точки L_4 и L_5)

Ускорение пробного тела

$$\vec{a} = \frac{\gamma m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{\gamma m_2}{r_2^3} \vec{r}_2 - \omega^2 \vec{r}_c$$

С учётом $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2)}{l^3}$, где $l = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ - расстояние между 1 и 2, приобретает вид:

$$\vec{a} = \gamma m_1 \vec{r}_1 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{l^3} \right) + \gamma m_2 \vec{r}_2 \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{l^3} \right)$$

Сделав замену, получаем

$$\vec{a} = \gamma m_1 \vec{r}_1 \cdot \xi(r_1) + \gamma m_2 \vec{r}_2 \cdot \xi(r_2)$$

Из определения искомых точек Лагранжа мы знаем что пробное тело должно быть неподвижным в это СО, а значит его ускорение $\vec{a} = \vec{0}$, тогда:

$$\vec{a} = \gamma m_1 \vec{r}_1 \cdot \xi(r_1) + \gamma m_2 \vec{r}_2 \cdot \xi(r_2) = \vec{0} \iff \begin{cases} \xi(r_1) = 0 \\ \xi(r_2) = 0 \end{cases}$$

Так как $\xi(r) = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{l^3}$, получаем

$$r_1 = r_2 = l$$

Этому условию могут удовлетворять только 2 точки, находящиеся в вершинах двух равносторонних треугольниках. Таким образом мы получили точки Лагранжа - L_4 и L_5 .

3.2.6 Устойчивость точек Лагранжа

Дело в том, что с точками Лагранжа все-таки есть проблема: L_1 , L_2 и L_3 неустойчивы. Для космического аппарата, помещенного в точку Лагранжа, причин для нарушений точного баланса положения, скорости и сил притяжения – хоть отбавляй (притяжение других тел в Солнечной системе оказывает воздействие, орбиты отличаются от круговых, скорость оказывается не идеально точной для пребывания в точке Лагранжа и т. д.). В результате аппарат начинает «сползать» – удаляться от математически определенной точки Лагранжа. Неустойчивость означает, что по мере сползания на космический аппарат действуют силы, уводящие его только дальше. Поэтому начавшееся по любой причине сползание не исправится само; если там оказался астероид, то он со временем сдвинется куда-то прочь, а если мы желаем, чтобы там оставалось какое-то устройство, то потребуются включения корректирующего двигателя. Да, некоторое количество топлива тратится, но очень небольшое – именно из-за того, что дело происходит вблизи точки равновесия с достаточно вяло проявляющей себя неустойчивостью.

Космический аппарат, который время от времени заботится о своем положении, может поэтому описывать вокруг точки Лагранжа что-то вроде орбиты, но это орбита не в кеплеровском смысле, поскольку в сторону самой точки Лагранжа нет силы притяжения, а скорее контролируемый дрейф – сначала сползание в одну сторону, затем короткое включение двигателя для изменения направления движения, последующее сползание в несколько иную сторону и так далее. Китайский ретрансляционный спутник летал вокруг L_2 по такой орбите, чтобы Луна не загораживала ему вид на Землю. При взгляде с Земли эта орбита проходит снаружи от лунного диска, нигде не заходя за него, – как «гало» вокруг Луны. Поэтому такие орбиты иногда называют гало-орбитами.

В точках L_4 и L_5 собираются астероиды, потому что там иная картина с устойчивостью, чем в трех других точках Лагранжа. С первого взгляда, правда, ситуация даже хуже, потому что баланс сил притяжения таков, что при выходе из точки Лагранжа в любом направлении возникает сила, которая побуждает уходить дальше. Но это только если смотреть на то, как работают силы притяжения. Кроме притяжения, в дело вступает движение. Сама точка Лагранжа движется по окружности, а в этом случае есть вот такая новость: при движении относительно вращающейся системы тело испытывает действие силы Кориолиса. По мере удаления от L_4 уходящее тело набирает скорость относительно этой точки Лагранжа. Но, поскольку все происходит во вращающейся системе, движущееся тело испытывает дополнительное воздействие по мере набора скорости. Результат оказывается приятным сюрпризом: баланс всех факторов в окрестности L_4 таков, что при развитии сползания тело не уходит прочь, а, набрав некоторую скорость, отправляется по орбите вокруг точки L_4 . Все то же самое происходит и в окрестности L_5 . Точки L_4 и L_5 оказываются устойчивыми, если, как показывает математика, более массивное из двух больших тел тяжелее другого в $\frac{25+3\sqrt{69}}{2} = 24.95993\dots$ раза или больше (с доказательством этого факта можно ознакомиться из ... ссылки, я его не рассматриваю из-за большого объема). Это условие выполнено для пары Земля – Луна и с большим запасом выполнено для всех пар Солнце – планета.

4 Явления, связанные с точками Лагранжа

4.1 Полость Роша

Полость Роша — область вокруг звезды в двойной системе, границей которой служит эквипотенциальная поверхность, содержащая первую точку Лагранжа L_1 . В системе координат, вращающейся вместе с двойной звездой, для пробного тела, находящегося в этой области, притяжение звезды, находящейся в полости Роша, преобладает и над притяжением звезды-компаньона, и над центробежной силой.

В точке Лагранжа L_1 полости Роша компонентов двойной системы соприкасаются: равнодействующая притяжений обеих звёзд обращается в ней в нуль. Это приводит к возможности перетекания вещества от одной звезды к другой при заполнении одной из них полости Роша в ходе её эволюции. Такие перетекания играют важную роль при эволюции тесных двойных звёздных систем.

Питером Эгглтоном предложена эмпирическая формула для эффективного радиуса полости Роша (радиус шара, объём которого равен объёму соответствующей полости Роша), дающая результаты с точностью лучше 1% во всём диапазоне отношения масс:

$$r_L = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})}, \quad 0 < q < \infty,$$

где r_L — эффективный радиус полости Роша, отнесённый к расстоянию между компонентами, $q = \frac{M_2}{M_1}$ — отношение масс компонент (M_2 — масса звезды, для которой рассчитывается эффективный радиус полости Роша).

4.2 Сфера Хилла

Сфера Хилла — в первом приближении — пространство вокруг астрономического объекта (например, планеты), в котором он способен удерживать свой спутник, несмотря на притяжение объекта, вокруг которого обращается сам (например, звезды). В свою очередь, у спутника есть собственная сфера Хилла, и любой объект в её пределах будет стремиться стать спутником спутника, а не планеты. Таким образом, сфера Хилла описывает сферу гравитационного влияния тела на более мелкие тела с учётом пертурбаций, возникающих под воздействием более массивного тела. Сфера Хилла располагается между точками Лагранжа L_1 и L_2 , лежащими на прямой, соединяющей центры двух тел. В этом направлении область гравитационного влияния подчинённого тела меньше всего, и это ограничивает размер сферы Хилла. За пределами этого расстояния орбита любого третьего тела, обращающегося вокруг подчинённого тела, будет частично пролегать за пределами сферы Хилла, и поэтому будет всё больше и больше подвергаться возмущению приливными силами центрального тела. В конечном итоге подчинённый объект перейдёт на орбиту центрального тела. Для двух тел массами m и M ($m \ll M$) радиус сферы Хилла рассчитывается следующим образом:

$$r \approx a \sqrt[3]{\frac{m}{3(M + m)}},$$

где a - большая полуось орбиты менее массивного тела.

5 Заключение

В работе выведен закон всемирного тяготения и точки Лагранжа. В рамках исследования была разработана модель, демонстрирующая использование точек Лагранжа для расположения искусственных спутников. Проведённые модельные эксперименты подтвердили теоретические предсказания и показали практическое значение этих точек для современных космических миссий и исследований.