

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа радиотехники и компьютерных технологий



## Вопрос по выбору

Закон всемирного тяготения. Точки Лагранжа

Автор:  
Григорьев Даниил  
Б01-407

# 1 Законы Кеплера

В результате длительной обработки многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге (1546-1601) Кеплер (1571-1630) эмпирически установил три закона планетных движений. Эти законы формулируются следующим образом:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;
2. Радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади;
3. Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

Первые два закона были опубликованы Кеплером в 1609 г., последний в 1619 г. Законы Кеплера естественным путем привели Ньютона к открытию закона всемирного тяготения. Рассмотрим этот вопрос.

## 2 Закон всемирного тяготения

### 2.1 Вывод Ньютона

Из первого закона Кеплера следует, что траектория планеты плоская кривая. С учетом этого обстоятельства<sup>1</sup>, из второго закона Кеплера следует, что сила, заставляющая планету двигаться по замкнутым орбитам, направлена к Солнцу. Определим теперь, как эта сила изменяется с изменением расстояния от Солнца и как она зависит от массы планеты. Для упрощения расчетов можно допустить, что планета движется не по эллипсу, а по кругу, в центре которого находится Солнце. Но я рассмотрю задачу сразу более строго, не прибегая к такому упрощению.

Третий закон Кеплера для гиперболических и параболических движений, теряет смысл. Однако для вычисления ускорения планеты или кометы он и не нужен. Приведем это элементарное вычисление.

Введём полярную систему координат полюсом в фокусе  $F_1$ , где находится Солнце, и полярной осью РА, направленной вдоль большой оси эллипса или гиперболы.

Ускорение движущегося тела разложим на радиальную составляющую  $a_r$ , направленную вдоль радиуса  $r$ , и азимутальную составляющую  $a_\phi$ , перпендикулярную к радиусу. Они определяются выражениями

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\phi}^2 r, \quad a_\phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi}) \quad (2.1.1)$$

(мб добавить откуда эти формулы)

Величина

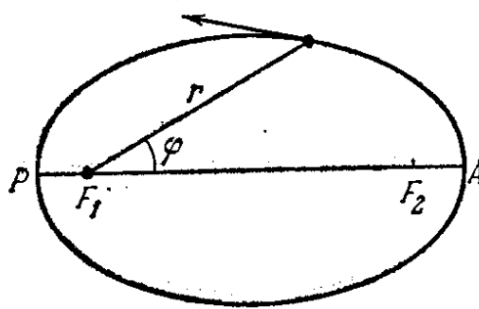
$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} \quad (2.1.2)$$

есть секториальная скорость, т. е. площадь, описываемая

радиусом-вектором планеты или кометы в единицу времени. По второму закону Кеплера она постоянна, а потому  $a_\phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(2\sigma)$ . Значит, ускорение рассматриваемого небесного тела не имеет азимутальной составляющей, т.е. направлено к Солнцу. Производная  $\dot{\phi}$  определяется формулой (2.1.2). Для вычисления производной  $\ddot{r}$  воспользуемся уравнением конического сечения в полярной системе координат

$$r(1 - \epsilon \cos \phi) = p, \quad (2.1.3)$$

<sup>1</sup>Это требуется для теоремы: если траектория материальной точки - плоская кривая и радиус-вектор, проведенный из неподвижного полюса О, в равные времена описывает одинаковые площади, то направление действующей силы все время проходит через полюс О.



где  $p$  - параметр эллипса и  $\epsilon$  - эксцентриситет. Для эллипса  $\epsilon < 1$ , для параболы  $\epsilon = 1$ , для гиперболы  $\epsilon > 1$ . В предельных случаях:  $\epsilon = 0$  и  $\epsilon = \infty$  получаются круг и прямая линия. Дифференцируя уравнение (2.3) по времени, получим

$$\dot{r}(1 - \epsilon \cos \phi) + \epsilon r \dot{\phi} \sin \phi = 0,$$

или после умножения на  $r$  с учетом соотношений (2.1.2) и (2.1.3)

$$p\dot{r} + 2\epsilon\sigma \sin \phi$$

Вторичное дифференцирование даёт

$$p\ddot{r} + 2\sigma\epsilon \cos \phi \dot{\phi}$$

Подставляя сюда  $\dot{\phi} = \frac{2\sigma}{r^2}$ ,  $\epsilon \cos \phi = 1 - \frac{p}{r}$ , получим

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \dot{\phi}^2 r$$

Из первой формулы (2.1.1) находим

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{pr^2}. \quad (2.1.4)$$

Таким образом, ускорение тела обратно пропорционально квадрату её расстояния от Солнца.

Докажем, что коэффициент  $\frac{4\sigma^2}{p}$  один и тот же для всех планет. Площадь эллипса  $\pi ab$ , где  $a$  и  $b$  - длины большой и малой полуосей его.  $\sigma$  - постоянна, тогда  $\sigma = \frac{\pi ab}{T}$ , где  $T$  - период обращения планеты по её орбите. Из аналитической геометрии известно, что  $p = \frac{b^2}{a}$ . Тогда из (2.4)

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}. \quad (2.1.5)$$

Ввод постоянную Кеплера  $K = \frac{a^3}{T^2}$ , получим

$$a_r = -\frac{4\pi^2 K}{r^2}. \quad (2.1.6)$$

Сила, действующая на планету, равна

$$F = -\frac{4\pi^2 K m}{r^2}. \quad (2.1.7)$$

Коэффициент пропорциональности  $4\pi^2 K$ , входящий в формулы (2.1.6) и (2.1.7), один и тот же для всех планет, а потому он не может зависеть от массы планеты. Но Солнце и планета в их взаимодействии выступают как равноправные тела. Они отличаются друг от друга массами. И если сила взаимодействия  $F$  пропорциональна массе планеты  $m$ , то она должна быть пропорциональна также и массе Солнца  $M$ . Для этой силы можно поэтому написать

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}. \quad (2.1.8)$$

где  $\gamma$  - новая постоянная, уже не зависящая ни от массы Солнца, ни от массы планеты.

Солнце и планеты отличаются друг от друга и от других тел также только количественно величинами масс. Поэтому естественно предположить, что притяжение существует не только между Солнцем и планетой, но и между планетами, а также между любыми другими телами, и что сила притяжения определяется формулой (2.1.8), в которой под  $M$  и  $m$  следует понимать массы взаимодействующих тел. Это предположение было введено Ньютоном и подтвердилось на опыте. Он сформулировал закон всемирного тяготения, согласно которому *любые два тела (материальные точки) притягиваются друг к другу с силами, пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними*. Такие силы называются гравитационными или силами всемирного тяготения. Коэффициент пропорциональности  $\gamma$ , входящий в формулу (2.1.4), один и тот же для всех тел. В этом смысле он является универсальной постоянной. Это — одна из важнейших мировых постоянных, называемая гравитационной постоянной.

## 2.2 Гравитационная постоянная

### 2.2.1 Опыт Кавендиша

Впервые непосредственное экспериментальное доказательство этого закона для земных тел, а также численное определение гравитационной постоянной  $\gamma$  были даны английским физиком Г. Кавендишем (1731-1810) в 1798 году. Прибор Кавендиша состоял из легкого горизонтального коромысла, на концах которого укреплялись два одинаковых свинцовых шарика массы  $m$ . Коромысло подвешивалось на тонкой вертикальной нити  $ab$ . Вблизи свинцовых шариков  $m$  и  $m$  помещались два других больших свинцовых шара массы  $M$  каждый, причем  $M \gg m$ . Шары помещались сначала в положении АА, затем переводились в положение ВВ. Благодаря гравитационному взаимодействию шариков  $m$  с шарами  $M$  коромысло поворачивалось из положения равновесия. Угол кручения  $\alpha$  измерялся наблюдением луча света, отражавшегося от зеркала  $S$ . Если расстояние между центрами малого и большого шаров, а  $l$  - длина коромысла, то момент пары гравитационных сил, поворачивающий коромысло, будет  $\gamma \frac{Mm}{r^2} l$ . В положении равновесия этот вращающий момент должен быть уравновешен упругим моментом закрученной нити  $f\alpha$ . Написав условие равновесия для положения свинцовых шаров сначала в АА ( $\alpha = \alpha_1$ ), а затем в ВВ ( $\alpha = \alpha_2$ ), получим два уравнения

$$f\alpha_1 = \gamma \frac{Mm}{r^2} l, \quad f\alpha_2 = \gamma \frac{Mm}{r^2} l$$

Из них находим

$$f(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\gamma \frac{Mm}{r^2} l$$

Модуль кручения  $f$  легко найти, наблюдая период свободных колебаний коромысла

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{2f}}$$

В результате получаем

$$\gamma = \frac{lr^2}{M} \left( \frac{\pi}{T} \right)^2 (\alpha_1 - \alpha_2)$$

### 2.2.2 Опыт Жолли

Другой метод определения гравитационной постоянной был предложен Жолли (1809-1880) в 1878 году. На одном из плеч рычажных весов одна под другой подвешены две чашки, между которыми установлено неподвижно тяжелое свинцовое тело массы  $M$  правильной геометрической формы. В этом теле просверлен вертикальный канал, сквозь который свободно проходит проволока, соединяющая обе чашки. Если на верхнюю чашку положить тело массы  $m$ , то на него будет действовать вниз сила  $Q_1 = mg + F$ , где  $F$  сила гравитационного притяжения между массами  $M$  и  $m$ . Она равна  $F = k\gamma \frac{Mm}{r^2}$ , где  $r$  - расстояние между центрами рассматриваемых масс, а  $k$  - численный коэффициент, зависящий от формы тела  $M$ . Для тел правильной геометрической формы его можно вычислить теоретически. Для шара  $k = 1$ . Если массу  $m$  перенести в нижнее положение, то сила  $F$  изменит направление. Сила, действующая вниз, станет  $Q_2 = mg - F$ . Значения  $Q_1$  и  $Q_2$  определяются по весу гирь, которые надо положить на чашку весов, подвешенную к другому плечу коромысла, чтобы весы находились в равновесии. Таким образом,

$$Q_1 - Q_2 = 2F = 2k\gamma \frac{Mm}{r^2}.$$

Из этого соотношения и можно вычислить  $\gamma$ .

Измерения  $\gamma$  современными методами привели к результату

$$\gamma = (6,6732 \pm 0,0031) \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-2} = (6,6732 \pm 0,0031) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}.$$

Гравитационная постоянная, как мы видим, весьма мала. Поэтому и гравитационные взаимодействия между обычными телами, даже считающимися большими с общежитейской точки зрения, ничтожно малы. Гравитационные силы ничтожны, когда речь идет о взаимодействии элементарных частиц. Здесь эти силы, возможно, не играют роли, так как они пренебрежимо малы по сравнению со всеми остальными фундаментальными силами. Но они являются основными силами, управляющими движением небесных тел, массы которых очень велики. Электрические силы, как и силы всемирного тяготения, являются силами дальнего действия. Они убывают также обратно пропорционально квадрату расстояния. Однако на движение астрономических тел электрические силы не оказывают влияния, так как они могут быть и силами притяжения, и силами отталкивания. Все тела в высокой степени электрически нейтральны, действие положительных зарядов тела компенсируется равным и противоположно направленным действием отрицательных зарядов.

## 2.3 Движение тел в поле тяготения

Момент импульса в центральном поле равен  $L = m[r, v] \Rightarrow L = mr^2\dot{\phi}$

Определим движение одного тела  $m$  в гравитационном поле другого тела  $M$  в условиях отсутствия внешнего взаимодействия. В гравитационном поле, как и во всяком центральном поле, выполняются законы сохранения энергии и момента импульса. Именно ими и описывается траектория движения в поле тяготения.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{Mm}{r} = const, \quad L = mr^2\dot{\phi} = const$$

Решение этой системы уравнения является лишь кропотливым набором СУХИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫКЛАДОК, которые мы с радостью ОПУСТИМ. Гораздо интереснее заглянуть в ответ и понять его физический смысл:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi},$$

где  $p = \frac{L^2}{2Mm^2}$  - параметр,  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 M^2 m^3}}$  - эксцентриситет

В общем случае в центральном гравитационном поле возможны три типа траекторий тел, которые показаны на рисунке.

Эллипс –  $E < 0, (0 \leq \varepsilon < 1)$

Парабола –  $E = 0, (\varepsilon = 1)$

Гипербола –  $E > 0, (\varepsilon > 1)$



$$\begin{cases} E \geq 0 & \text{- движение в неограниченной области - инфинитное} \\ E < 0 & \text{- движение в ограниченной области - финитное} \end{cases}$$

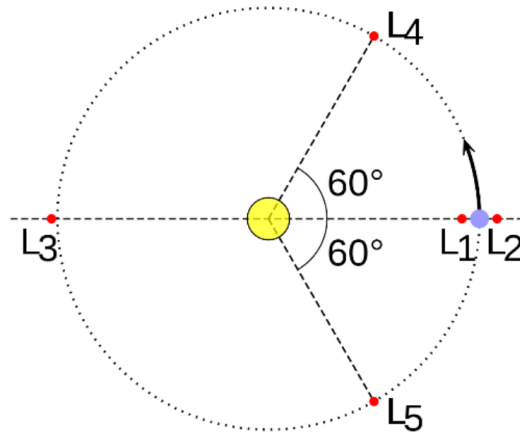
## 2.4 Точки Лагранжа

### 2.4.1 Необходимые условия существования точек Лагранжа

Рассмотрим систему из двух тел в пространстве. Для существования в данной системе точек Лагранжа необходимо, чтобы орбиты двух данных тел вокруг центра масс были круговыми, то есть их угловая скорость вращения была постоянной, это используется при выводе точек Лагранжа

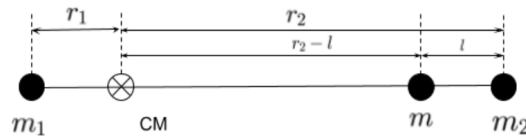
## 2.4.2 Определение точек Лагранжа

При выполнении необходимых условий в пространстве вокруг ранее рассмотренных двух тел существуют пять точек, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействия никаких других сил, кроме гравитационных со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным во вращающейся системе отсчёта, связанной с массивными телами. В этих точках гравитационные силы, действующие на малое тело, уравниваются центробежной силой. Все точки Лагранжа лежат в плоскости орбит массивных тел и обозначаются заглавной латинской буквой  $L$  с числовым индексом от 1 до 5. Первые три точки расположены на линии, проходящей через оба массивных тела. Эти точки Лагранжа называются коллинеарными и обозначаются  $L_1, L_2$  и  $L_3$ . Точки  $L_4$  и  $L_5$  называются треугольными или троянскими. Точки  $L_1, L_2, L_3$  являются точками неустойчивого равновесия, в точках  $L_4$  и  $L_5$  равновесие устойчивое. Фактически, точки Лагранжа представляют собой частный случай при решении так называемой ограниченной задачи трех тел — когда орбиты всех тел являются круговыми и масса одного из них намного меньше массы любого из двух других.



## 2.4.3 Точки $L_1$ и $L_2$

Рассмотрим случай, когда  $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$ , то есть все три массы лежат на одной прямой. Пусть пробное тело находится между массивными телами. Предполагаем, что  $l \ll L = r_1 + r_2$ , тогда введем обозначение:  $l = L\alpha$  где  $\alpha \ll 1$ . Также скажем что  $\frac{m_2}{m_1} = \eta$ , причем  $m_2 \ll m_1$ , в ином случае получится уравнение 5 степени, которое не имеет аналитического решения.



Из определения центра масс

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

Тогда

$$r_1 = \eta r_2$$

$$L - r_2 = \eta r_2$$

$$r_2 = \frac{L}{1 + \eta}$$

$$r_1 = L - r_2 = \frac{\eta L}{1 + \eta}$$

Таким образом проекции сил, действующих на пробное тело выражаются как

$$F_1 = -\frac{\gamma m_1 m}{(r_1 + r_2 - l)^2} \quad F_2 = \frac{\gamma m_2 m}{l^2} \quad F_\omega = \frac{\gamma(m_1 + m_2)m}{L^3}(r_2 - l)$$

По определению точек Лагранжа

$$F_1 + F_2 + F_\omega = 0$$

$$-\frac{\gamma m_1 m}{(r_1 + r_2 - l)^2} + \frac{\gamma m_2 m}{l^2} + \frac{\gamma(m_1 + m_2)m}{L^3}(r_2 - l) = 0$$

Пользуясь заменами и сокращая, получаем

$$-\frac{1}{(1 - \alpha^2)} + \frac{\eta}{\alpha^2} + \frac{(1 + \eta)(1 - \alpha - \eta)}{(1 + \eta)} = 0$$

Пользуясь тем, что величины малые, а также тем, что  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + x\alpha, x \rightarrow 0$

$$(1 + 2\alpha)\alpha^2 + \eta + \alpha^2 - \alpha^3 - \eta\alpha^3 = 0$$

$$\alpha^3(3 + \eta) = \eta$$

$$\alpha^3 = \frac{\eta}{3 + \eta} \approx \frac{\eta}{3}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\eta}{3}}$$

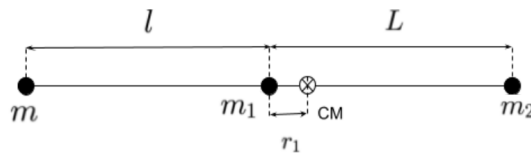
Окончательно получаем

$$l = \alpha \cdot L = \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}$$

Данная точка - точка  $L_1$ . Аналогичным образом выводится  $L_2$ , которая находится справа от тела  $m_2$ . Формула для неё будет такая же.

#### 2.4.4 Точка $L_3$

Теперь рассмотрим ситуацию если пробное тело находится слева от обоих тел



Тогда уравнение на ускорения примет вид

$$-\frac{\gamma m_1}{l^2} + \frac{\gamma m_2}{(L + l)^2} + \frac{\gamma(m_1 + m_2)}{L^3}(r_1 + l) = 0$$

Введем обозначения

$$l = (1 + \beta)L \quad \frac{m_2}{m_1} = \eta$$

Тогда получаем

$$r_1 = L - \frac{L}{1 + \eta} = \frac{\eta L}{1 + \eta}$$

$$l + r_1 = (1 + \beta)L + r_1 = \left(1 + \beta + \frac{\eta}{1 + \eta}\right)L = \frac{1 + \beta\eta + \beta + 2\eta}{1 + \eta}L$$

Тогда

$$\frac{1}{(1+\beta)^2 L^2} + \frac{\eta}{(2+\beta)^2 L^2} - \frac{(1+\eta)(1+\beta\eta+\beta+2\eta)L}{L^3(1+\eta)} = 0$$

$$\frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{\eta}{(2+\beta)^2} - (1+\beta\eta+\beta+2\eta) = 0$$

Воспользуемся малостью  $\beta$  и получим

$$1 - 2\beta + \frac{\eta}{4}(1 - \beta) - (1 + \beta\eta + \beta + 2\eta) = 0$$

$$\beta = -\frac{7}{12}\eta$$

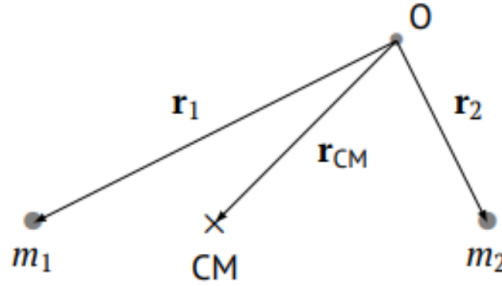
Таким образом, точка  $L_3$

$$l = (1 + \beta)L = \left(1 - \frac{7}{12}\eta\right)L$$

$$l_0 = l + r_1 = \left(1 + \frac{5}{12}\eta\right)L$$

#### 2.4.5 Точки $L_4$ и $L_5$

Теперь рассмотрим случай, в котором  $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$ , то есть рассмотрим более общий случай.  $m_1$ ,  $m_2$  - рассматриваемые тела,  $O$  - положение пробного тела с пренебрежимо малой массой.  $C$  - положение центра масс тел  $m_1$  и  $m_2$ . Фиксируем линию 1-2, переходя в соответствующую ей вращающуюся систему отсчета



Ускорение пробного тела

$$\vec{a} = \frac{\gamma m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{\gamma m_2}{r_2^3} \vec{r}_2 - \omega^2 \vec{r}_c$$

С учётом  $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2)}{l^3}$ , где  $l = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  - расстояние между 1 и 2, приобретает вид:

$$\vec{a} = \gamma m_1 \vec{r}_1 \left( \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{l^3} \right) + \gamma m_2 \vec{r}_2 \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{l^3} \right)$$

Сделав замену, получаем

$$\vec{a} = \gamma m_1 \vec{r}_1 \cdot \xi(r_1) + \gamma m_2 \vec{r}_2 \cdot \xi(r_2)$$

Из определения искомых точек Лагранжа мы знаем что пробное тело должно быть неподвижным в это СО, а значит его ускорение  $\vec{a} = \vec{0}$ , тогда:

$$\vec{a} = \gamma m_1 \vec{r}_1 \cdot \xi(r_1) + \gamma m_2 \vec{r}_2 \cdot \xi(r_2) = \vec{0} \iff \begin{cases} \xi(r_1) = 0 \\ \xi(r_2) = 0 \end{cases}$$

Так как  $\xi(r) = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{l^3}$ , получаем

$$r_1 = r_2 = l$$

Этому условию могут удовлетворять только 2 точки, находящиеся в вершинах двух равносторонних треугольников. Таким образом мы получили точки Лагранжа -  $L_4$  и  $L_5$ .



#### 2.4.6 Устойчивость точек Лагранжа

Дело в том, что с точками Лагранжа все-таки есть проблема:  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  неустойчивы. Для космического аппарата, помещенного в точку Лагранжа, причин для нарушений точного баланса положения, скорости и сил притяжения – хоть отбавляй (притяжение других тел в Солнечной системе оказывает воздействие, орбиты отличаются от круговых, скорость оказывается не идеально точной для пребывания в точке Лагранжа и т. д.). В результате аппарат начинает «сползать» – удаляться от математически определенной точки Лагранжа. Неустойчивость означает, что по мере сползания на космический аппарат действуют силы, уводящие его только дальше. Поэтому начавшееся по любой причине сползание не исправится само; если там оказался астероид, то он со временем сдвинется куда-то прочь, а если мы желаем, чтобы там оставалось какое-то устройство, то потребуются включения корректирующего двигателя. Да, некоторое количество топлива тратится, но очень небольшое – именно из-за того, что дело происходит вблизи точки равновесия с достаточно вяло проявляющей себя неустойчивостью. Космический аппарат, который время от времени заботится о своем положении, может поэтому описывать вокруг точки Лагранжа что-то вроде орбиты, но это орбита не в кеплеровском смысле, поскольку в сторону самой точки Лагранжа нет силы притяжения, а скорее контролируемый дрейф – сначала сползание в одну сторону, затем короткое включение двигателя для изменения направления движения, последующее сползание в несколько иную сторону и так далее. Китайский ретрансляционный спутник летал вокруг  $L_2$  по такой орбите, чтобы Луна не загромождала ему вид на Землю. При взгляде с Земли эта орбита проходит снаружи от лунного диска, нигде не заходя за него, – как «гало» вокруг Луны. Поэтому такие орбиты иногда называют гало-орбитами.

В этих точках Лагранжа собираются астероиды, потому что там иная картина с устойчивостью, чем в трех других точках Лагранжа. С первого взгляда, правда, ситуация даже хуже, потому что баланс сил притяжения таков, что при выходе из точки Лагранжа в любом направлении возникает сила, которая побуждает уходить дальше. Но это только если смотреть на то, как работают силы притяжения. Кроме притяжения, в дело вступает движение. Сама точка Лагранжа движется по окружности, а в этом случае есть вот такая новость: при движении относительно вращающейся системы тело испытывает действие силы Кориолиса.