

Планарные графы

5. Планарные графы

5.1. Определение

Планарным называется неориентированный граф G (множество вершин V и ребёр E), который можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались, кроме общих концов. Такое представление называется *планарным вложением* графа.

5.2. Примеры

- Граф K_4 (полный граф на четырёх вершинах) является планарным.
- Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными (теорема Куратовского, см. ниже).

5.2.1. Планарный пример: K_4

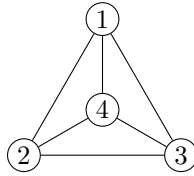


Рис. 1. Планарное вложение полного графа K_4 .

5.2.2. Непланарный пример: K_5

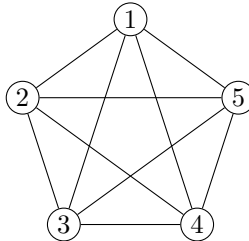


Рис. 2. Попытка вложения полного графа K_5 с неизбежными пересечениями.

5.3. Формула Эйлера

Для связного планарного графа справедлива *формула Эйлера*:

$$V - E + F = 2,$$

где $V = |V(G)|$ — число вершин, $E = |E(G)|$ — число ребер, а F — число граней (областей плоскости, включая внешнюю).

Пример. В графе K_4 имеем $V = 4$, $E = 6$. Рассчитаем F :

$$4 - 6 + F = 2 \implies F = 4.$$

Действительно, при планарном вложении мы получаем три внутренних треугольника и одну внешнюю область.

5.4. Критерии планарности

- **Теорема Куратовского:** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомоморфного K_5 или $K_{3,3}$.
- **Теорема Вагнера:** Упрощённый критерий: нет миноров K_5 и $K_{3,3}$.

5.5. Свойства и ограничения

- 1) Для простого планарного графа с $V \geq 3$ всегда выполняется

$$E \leq 3V - 6.$$

Если, кроме того, нет треугольников (циклов длины 3), то

$$E \leq 2V - 4.$$

- 2) Минимальный непланарный граф имеет $V = 5$, $E = 10$ (граф K_5) или $V = 6$, $E = 9$ (граф $K_{3,3}$).

5.6. Применения

- *Географические карты:* раскраска областей так, чтобы соседние области различались цветом (теорема о четырёх красках).
- *Схемотехника:* прокладка дорожек на печатных платах без пересечений.
- *Графический дизайн:* автоматическая укладка элементов схем и диаграмм.

Источники

- Д.Б. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- В.Д. Мазурин, *Дискретная математика: графы и алгоритмы*.
- Википедия: Планарный граф
- Википедия: Теорема Куратовского