8. Симметрия графа и его дополнения

8.1. Автоморфизмы графа и группа симметрий

Пусть $G = (V, E)$ — простой граф. *Автоморфизмом* графа называется биекция

$$\varphi\colon V \to V$$

такая, что для любых двух вершин $u, v \in V$ выполняется

$$\{u, v\} \in E \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$

Другими словами, φ сохраняет структуру смежности.

- Множество всех автоморфизмов графа G образует группу при композиции отображений, называемую **группой автоморфизмов** $\mathrm{Aut}(G)$.
- Тривиальный автоморфизм — тождественное отображение $\mathrm{id} : v \mapsto v$.
- Если $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ не является тождественным, говорят о *неявной* (или неполной) симметрии.

Пояснение: автоморфизмы — это «симметрии» графа, аналоги зеркальных и поворотных симметрий фигур. Они показывают, какие вершины и ребра можно «переставить», не меняя общей формы графа.

8.2. Примеры симметрий

Пример 1. Цикл C_4 (четырёхвершинный цикл). Вершины можно пронумеровать $1, 2, 3, 4$ по кругу. Автоморфизмы:

$$\text{поворот на } 90^\circ : \ 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1,$$

$$\text{отражение: } 1 \leftrightarrow 4, \ 2 \leftrightarrow 3,$$

и их композиции. Группа симметрий изоморфна диhedral group D_4 порядка 8.

Пример 2. Полный граф K_n. Любая перестановка вершин сохраняет все рёбра, поэтому

$$\mathrm{Aut}(K_n) \cong S_n,$$

симметричная группа порядка $n!$.

8.3. Граф-дополнение

Дополнением графа $G = (V, E)$ называется граф

$$\overline{G} = (V, \overline{E}), \quad \overline{E} = \big\{ \{u, v\} \mid u \neq v,\ \{u, v\} \notin E \big\}.$$

То есть в $\overline{G}$ все отсутствующие в исходном G связи становятся рёбрами, а все прежние исчезают.

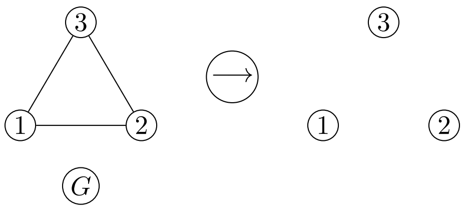
- $(\overline{G})^{\overline{}} = G$.
- Если G простой, то и $\overline{G}$ простой.
- $\deg_{\overline{G}}(v) = |V| - 1 - \deg_G(v)$.

Группа автоморфизмов и дополнение

$$\mathrm{Aut}(\overline{G}) = \mathrm{Aut}(G).$$

Пояснение: перестановка вершин сохраняет и отсутствующие в G связи, значит сохраняет рёбра дополнения.

8.4. Иллюстрация: граф и его дополнение



Пример. Пусть G — треугольник K_3 (все три ребра). Тогда $\overline{G}$ — три изолированные вершины (нет рёбер).

8.5. Свойства и применения

- **Симметрия упрощает алгоритмы:** при поиске путей, раскраске и проверке изоморфизма можно работать с представителем орбиты.
- **Дополнение и свойства связности:** G связен $\not\Rightarrow$ $\overline{G}$ связен, но часто изучают одновременно пару $(G, \overline{G})$, например в теореме Рамсея.
- **Оптимизация:** задачи клики в G переходят в задачи независимого множества в $\overline{G}$.

Источники

- Д.Б. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- P. Diestel, *Graph Theory.*
- Википедия: Автоморфизм графа
- Википедия: Дополнение графа