Содержание

1 Векторы

Вектор — это математический объект, описывающий как направление, так и величину. Векторы часто изображаются как направленные отрезки (стрелки), начинающиеся в начале координат.

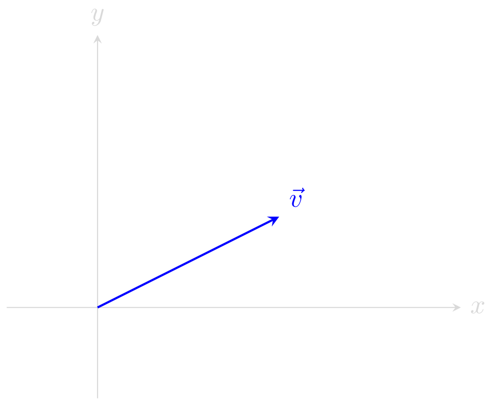
В алгебраической записи вектор в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ — это упорядоченный набор n чисел:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Примеры векторов

- В $\mathbb{R}^2$: $\vec{a} = (3, -1)$
- В $\mathbb{R}^3$: $\vec{b} = (0, 2, 1)$
- В $\mathbb{R}^4$: $\vec{c} = (1, 0, 0, -1)$

Геометрическая интерпретация: вектор — это перемещение из одной точки в другую. Например, вектор $(2, 1)$ соответствует сдвигу на 2 единицы вправо и 1 вверх.



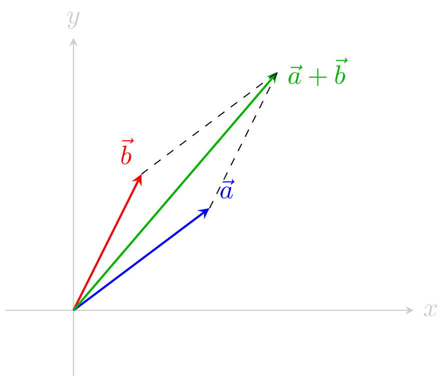
Операции с векторами

1. **Сложение:**
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

2. **Умножение на число (скаляр):**
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

3. **Нулевой вектор:**
$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

Графически сложение векторов выглядит как «перенос конца первого вектора к началу второго» — получаем диагональ параллелограмма:



—

2 Линейная зависимость системы векторов

Пусть заданы векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ в пространстве V. Мы говорим, что они **линейно зависимы**, если существует набор чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, такой что:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Если же такое равенство возможно только при $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, то векторы **линейно независимы**.

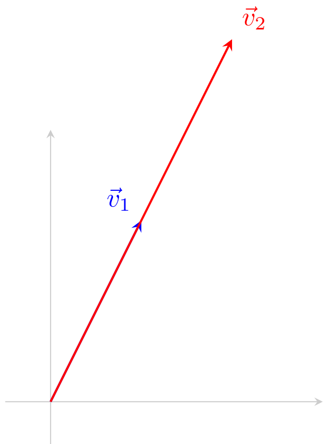
Интуитивно:

Если один вектор можно выразить через другие — система зависима.

Пример 1.

$$\vec{v}_1 = (1, 2), \quad \vec{v}_2 = (2, 4)$$

Очевидно, что $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, значит, они линейно зависимы.



Пример 2. Векторы $\vec{u}_1 = (1, 0)$ и $\vec{u}_2 = (0, 1)$ линейно независимы, так как невозможно выразить один через другой. Они формируют базис в $\mathbb{R}^2$.

—

3 Базис линейного пространства

Базис — это система векторов, которая:

1. линейно независима;
2. порождает всё пространство (любой вектор можно выразить через неё).

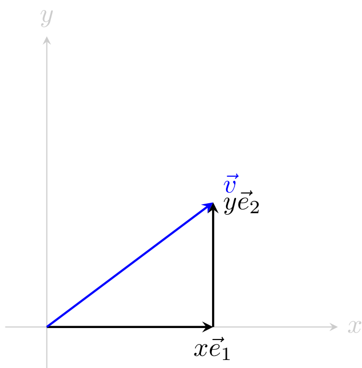
Если базис состоит из n векторов, говорят, что размерность пространства равна n.

Пример. В $\mathbb{R}^2$ стандартный базис:

$$\vec{e}_1 = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1)$$

Тогда любой вектор $\vec{v} = (x, y)$ записывается как:

$$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$



Важно:

Базис может быть не единственным. Например, вектора $\vec{e}_1 = (1, 1)$ и $\vec{e}_2 = (1, -1)$ тоже образуют базис в $\mathbb{R}^2$.

—

4 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Пример:

$$\vec{a} = (1, 2), \quad \vec{b} = (3, 4) \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

Свойства:

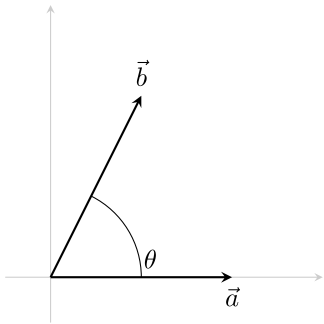
- Коммутативность: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
- Линейность по каждому аргументу

- $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$

Геометрическая формула:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$$

Если $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Rightarrow$ векторы перпендикулярны (ортогональны).



Приложение: длина и угол

Длина вектора $\vec{a}$ (её называют **нормой**) выражается так:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

А угол между двумя векторами вычисляется по формуле:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

—

Выводы

- Векторы — базовые элементы линейной алгебры, описывающие направление и величину.
- Линейная зависимость позволяет понять, насколько векторы ”разные”и важны.
- Базис даёт возможность представить любое состояние системы как комбинацию базовых движений.
- Скалярное произведение связывает векторы с геометрией: длиной и углом.

5 Матрицы. Их свойства. Транспонированная матрица. Ранг матрицы

Матрица — это прямоугольная таблица чисел, организованная в строки и столбцы. Она записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где a_{ij} — элемент матрицы на i-й строке и j-м столбце.

Обозначения и размерность

Матрицу обозначают заглавной латинской буквой (A, B, C и т.д.). Размерность матрицы — это количество строк и столбцов. Если в матрице m строк и n столбцов, её размер обозначают как $m \times n$.

Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Здесь A — квадратная матрица 2×2, B — прямоугольная матрица 2×3.

—

Основные типы матриц

- **Нулевая матрица:** все элементы равны нулю.
- **Единичная матрица I_n:** квадратная матрица с единицами на главной диагонали и нулями вне её.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Диагональная матрица:** все элементы вне главной диагонали равны нулю.
- **Квадратная матрица:** одинаковое число строк и столбцов.
- **Столбец (вектор-столбец):** матрица размером $m \times 1$.
- **Строка (вектор-строка):** матрица размером $1 \times n$.

—

Операции с матрицами

1. **Сложение:** складываются поэлементно. Возможно только для матриц одинакового размера.
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$
2. **Умножение на скаляр:**
$$\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})$$
3. **Умножение матриц:** если A — матрица размера $m \times n$, а B — $n \times k$, то их произведение $C = AB$ будет размером $m \times k$:
$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj}$$
4. **Транспонирование (см. ниже)** — замена строк и столбцов.

—

Свойства операций

- Коммутативность сложения: $A + B = B + A$
- Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Дистрибутивность: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(AB)^T = B^T A^T$ — важное свойство транспонирования

—

Транспонированная матрица

Матрица A^T (читается: «А транспонированная») получается из A заменой строк на столбцы. Формально:
$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Пример:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

—

Ранг матрицы

Ранг матрицы — это максимальное число линейно независимых строк (или столбцов) в матрице.

Обозначается: $\text{rank}(A)$.

Интуитивно: ранг показывает, сколько "уникальной"информации содержится в строках или столбцах.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{строки линейно зависимы} \Rightarrow \text{rank}(A) = 1$$

Другой пример:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(B) = 3$$

Как находить ранг?

Обычно с помощью преобразования матрицы к **ступенчатому виду** методом Гаусса. Количество ненулевых строк после преобразования и будет рангом.

Пример пошагово:

Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Видим: вторая и третья строки — кратные первой. После приведения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 1$$

—

Геометрическая интерпретация ранга

Векторы-строки (или столбцы) матрицы можно представить как векторы в пространстве. Ранг говорит о том, какое пространство они натягивают:

- Ранг 1: все лежат на одной прямой
- Ранг 2: в одной плоскости
- Ранг 3: в трёхмерном пространстве и т.д.

—

Важность ранга

Ранг используется в:

- Исследовании решений линейных систем: число решений зависит от ранга матрицы коэффициентов.
- Анализе линейной зависимости строк/столбцов.
- Проверке обратимости матрицы: квадратная матрица обратима $\iff$ её ранг равен размерности.

—

Выводы по теме

- Матрицы — основа линейной алгебры. Они обобщают векторы, храня данные и операции.
- Транспонирование меняет строки и столбцы местами.
- Ранг показывает, сколько независимых строк/столбцов содержит матрица.
- Если ранг меньше полной размерности — значит, матрица "выражает"только подпространство.

6 Сложение, умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матриц. Обратная матрица

Сложение матриц

Две матрицы A и B одинакового размера $(m \times n)$ можно сложить, если у них совпадают размеры. Сложение происходит поэлементно:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Свойства сложения:

- Коммутативность: $A + B = B + A$

- Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Существование нулевой матрицы O (нулевая поэлементно): $A + O = A$

—

Умножение матрицы на число

Если $\lambda \in \mathbb{R}$ — число (скаляр), то умножение $\lambda \cdot A$ означает умножение каждого элемента матрицы на это число:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 4 \Rightarrow 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Свойства:

- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

—

Умножение матриц

Матрицы A и B можно перемножить, если **число столбцов в** A равно **числу строк в** B.

Если A — размера $m \times n$, а B — $n \times k$, то произведение $C = AB$ — это матрица $m \times k$, где:

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} \cdot B_{rj}$$

То есть: элемент C_{ij} получается как скалярное произведение i-й строки A и j-го столбца B.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$$

Важно: $AB \neq BA$ в общем случае! Умножение матриц **не коммутативно**.

Свойства:

- Ассоциативность: $A(BC) = (AB)C$
- Дистрибутивность: $A(B + C) = AB + AC$
- $(AB)^T = B^T A^T$ — транспонирование произведения

—

Транспонирование матрицы

Транспонирование — это операция, при которой строки становятся столбцами, а столбцы — строками.

Для любой матрицы A, её транспонированная матрица A^T определяется как:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Эта операция часто используется при симметризации, а также в определениях симметрических и ортогональных матриц.

—

Обратная матрица

Обратная матрица A^{-1} к квадратной матрице A определяется как:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

где I — единичная матрица той же размерности.

Условия существования:

- Матрица должна быть **квадратной**.
- Её **определитель не должен равняться нулю** ($\det A \neq 0$).
- Ранг A должен равняться её размерности: $\text{rank}(A) = n$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1 \cdot 4 - 2 \cdot 3)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Способы нахождения обратной матрицы

1. Для 2×2-матриц:
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
2. Для больших матриц:
    - Через присоединённую матрицу (алгебраические дополнения + транспонирование + деление на определитель)
    - Метод Гаусса: расширение A до $[A|I]$ и приведение к $[I|A^{-1}]$

—

Свойства обратной матрицы

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Важно: не все матрицы имеют обратную. Такие матрицы называются **вырожденными**.

—

Применения обратной матрицы

- Решение систем уравнений: $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
- Вывод формул в статистике и машинном обучении
- Нормализация линейных преобразований
- Преобразование координат

—

Выводы

- Операции над матрицами (сложение, умножение, транспонирование) формируют алгебраическую структуру.
- Умножение матриц — основа линейных отображений и систем уравнений.
- Транспонирование — полезная симметризующая операция.
- Обратная матрица существует только у невырожденных квадратных матриц и даёт способ обращения линейных операторов.

7 Аппроксимация и интерполяция функций

Аппроксимация и **интерполяция** — это два метода приближённого описания функций, основанные на наборе дискретных точек.

Интерполяция — это построение функции, которая точно проходит через заданные точки. **Аппроксимация** — это построение функции, которая приближённо описывает данные, но может не проходить через все точки.

—

Постановка задачи

Пусть дана таблица значений:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

Наша цель — построить функцию $f(x)$ такую, что:

- **Для интерполяции:** $f(x_i) = y_i$ для всех i
- **Для аппроксимации:** $f(x_i) \approx y_i$

—

Интерполяция: идея и цель

Интерполяция позволяет восстанавливать значение функции в промежуточных точках, не выходя за пределы интервала $[x_0, x_n]$.

Пример: если известно, что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 6$$

можем интерполировать $f(x)$, скажем, через многочлен второй степени и вычислить $f(1.5)$.

—

Линейная интерполяция

Между двумя точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1) интерполяционная функция задаётся по формуле:

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки. Очень просто, но недостаточно точно для сложных функций.

—

Полиномиальная интерполяция

Если заданы $n + 1$ точек, можно построить единственный многочлен степени не выше n, который проходит через все точки.

Формула Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x), \quad \text{где } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Каждое $L_i(x)$ — базисный многочлен Лагранжа, равный 1 в точке x_i и 0 в остальных x_j.

Проблема: при увеличении числа узлов интерполяция может сильно колебаться (эффект Рунге), особенно на концах интервала.

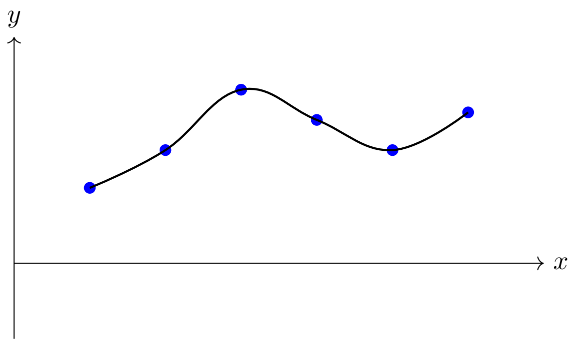
—

Сплайны (кубическая интерполяция)

Сплайн-интерполяция делит интервал на участки и на каждом строит многочлен степени 3 (кубический сплайн), с условием сглаженности в стыках.

- Гладкость первого и второго порядка: C^2-непрерывность
- Сплайны хорошо подходят для графиков, траекторий и данных с шумом

Визуально:



—

Аппроксимация: общая идея

Аппроксимация применяется, когда функция неизвестна, но имеются измеренные значения с шумом. Здесь уже не требуется точное прохождение через точки.

Идея: найти «наилучшую» функцию $f(x)$, которая *приблизительно* соответствует данным.

Часто ищут функцию в виде:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Аппроксимация методом наименьших квадратов (МНК)

Пусть есть точки (x_i, y_i), и нужно найти параметры $a_0, a_1, \ldots, a_n$, минимизирующие отклонение:

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

Минимум достигается при решении системы нормальных уравнений, которая получается из частных производных S по параметрам a_k.

Частный случай — линейная аппроксимация:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

Тогда минимизируется:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$$

Решение:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

—

Сравнение: интерполяция vs аппроксимация

Критерий	Интерполяция	Аппроксимация
Проходит через точки	Да	Не обязательно
Чувствительность к шуму	Высокая	Устойчивая
Сложность вычислений	Средняя–высокая	Низкая–средняя
Гладкость	Может не быть	Обычно есть

—

Практические применения

- **Интерполяция**:
  - Таблицы и справочники
  - Заполнение пропущенных значений
  - Графическая визуализация

- **Аппроксимация**:
  - Обработка измерений с шумом
  - Моделирование реальных процессов
  - Предсказания, тренды

—

Выводы по теме

- Интерполяция позволяет точно восстановить функцию внутри диапазона, но может колебаться.
- Аппроксимация — более устойчивая техника, особенно с шумными или неточными данными.
- Полиномы Лагранжа и кубические сплайны — мощные методы интерполяции.
- Метод наименьших квадратов — классический способ аппроксимации, широко используемый в статистике и машинном обучении.