

6. Матрицы смежности и инцидентности

6.1. Граф и его представления

Пусть задан простой неориентированный граф $G = (V, E)$, где:

- $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — множество вершин ($|V| = n$),
- $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ — множество рёбер ($|E| = m$).

Для хранения и анализа структуры графа удобно использовать его представление в виде матриц:

- 1) **Матрица смежности** (adjacency matrix),
- 2) **Матрица инцидентности** (incidence matrix).

6.2. Матрица смежности

Матрица смежности A — это квадратная матрица $n \times n$, где:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Свойства:

- Для неориентированного графа A симметрична: $a_{ij} = a_{ji}$.
- Диагональные элементы a_{ii} равны 1, если в графе есть петли (в простом графе всегда 0).
- Сумма элементов i -й строки (или столбца) даёт степень вершины v_i .

Пример: граф с $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ и рёбрами $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3. Матрица инцидентности

Матрица инцидентности B — это матрица $n \times m$, где:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Особенности:

- Каждое ребро соединяет две вершины, значит в столбце j ровно два значения 1 (если граф простой и без петель).
- В ориентированном графе обычно используют -1 и $+1$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } v_i \text{ — начало дуги } e_j, \\ +1, & \text{если } v_i \text{ — конец дуги } e_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример: тот же граф, где $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4. Сравнение представлений

- Матрица смежности подходит для быстрого ответа на вопрос: «Есть ли ребро между v_i и v_j ?»
- Матрица инцидентности удобна для анализа структуры рёбер, особенно в ориентированных графах.
- Для разреженных графов (мало рёбер) матрица смежности неэффективна по памяти.

6.5. Визуальный пример

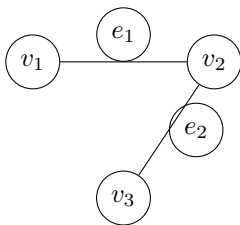


Рис. 1. Граф с вершинами v_1, v_2, v_3 и рёбрами e_1, e_2

6.6. Применения

- Алгоритмы поиска в графе (например, обход в глубину, поиск кратчайших путей).
- Сетевые задачи (анализ маршрутов, потоков, связности).
- Работа с графами в программировании, машинном обучении и обработке изображений.

Источники

- Гросс, Йелл: *Теория графов и её приложения*.
- Д.Б. Уэст, *Введение в теорию графов*.
- Википедия: Матрица смежности
- Википедия: Матрица инцидентности