

3. Отношения и их свойства

3.1. Что такое отношение

Бинарное отношение R между двумя множествами A и B — это множество упорядоченных пар:

$$R \subseteq A \times B,$$

где $A \times B$ — декартово произведение:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Если $(a, b) \in R$, то говорят, что a *связано с* b отношением R , и пишут $a R b$.

3.2. Примеры

- Отношение «меньше» на \mathbb{N} : $R = \{(a, b) \mid a < b\}$.
- Отношение «быть делителем» на \mathbb{N} : $R = \{(a, b) \mid a \mid b\}$.
- Отношение «равенство по модулю» на \mathbb{Z} : $a \equiv b \pmod{n}$.

3.3. Область и область значений

- **Область определения (domain):**

$$\text{dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a, b) \in R\}.$$

- **Область значений (range):**

$$\text{ran}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in R\}.$$

3.4. Свойства бинарных отношений (на $A \times A$)

Пусть $R \subseteq A \times A$. Тогда отношение может обладать следующими свойствами:

- **Рефлексивность:**

$$\forall a \in A: (a, a) \in R.$$

Пример: $=$, \leq .

- **Антирефлексивность (иррефлексивность):**

$$\forall a \in A: (a, a) \notin R.$$

Пример: $<$.

- **Симметричность:**

$$\forall a, b \in A: (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

Пример: « a и b живут в одном доме».

- **Антисимметричность:**

$$\forall a, b \in A: (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

Пример: \leq .

- **Транзитивность:**

$$\forall a, b, c \in A: (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Пример: $\leq, <$.

3.5. Особые классы отношений

- **Отношение эквивалентности** — рефлексивное, симметричное и транзитивное. Пример: $a \equiv b \pmod{n}$.

Такое отношение разбивает множество A на *классы эквивалентности*.

- **Отношение частичного порядка** — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное. Пример: \leq на \mathbb{N} .

Если дополнительно выполняется, что любые два элемента сравнимы, то это **полный порядок**.

3.6. Графическое представление

Бинарное отношение на множестве A можно представить в виде **ориентированного графа**:

- Вершины соответствуют элементам A .
- Направленное ребро $a \rightarrow b$ рисуется, если $(a, b) \in R$.

Пример: на множестве $A = \{1, 2, 3\}$ отношение $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ — транзитивное.

3.7. Табличное представление

Отношение R на множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ можно представить в виде **таблицы**, где в ячейке на пересечении строки i и столбца j стоит 1, если $(a_i, a_j) \in R$, и 0 — иначе. Это называется **матрицей смежности**.

Источники

- Г.С. Михалев, *Дискретная математика*.
- Р. Джонсонбауг, *Дискретная математика*, Pearson Education.
- Википедия: Бинарное отношение