

Отношение эквивалентности и классификация множеств

4. Отношение эквивалентности и классификация множеств

4.1. Определение отношения эквивалентности

Пусть A — множество. Бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ называется **отношением эквивалентности**, если оно обладает тремя свойствами:

1) **Рефлексивность:**

$$\forall a \in A (a, a) \in R.$$

2) **Симметричность:**

$$\forall a, b \in A (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

3) **Транзитивность:**

$$\forall a, b, c \in A ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R.$$

4.2. Классы эквивалентности

Для каждого элемента $a \in A$ определим его *класс эквивалентности*:

$$[a] = \{ x \in A \mid (a, x) \in R \}.$$

- Если $(a, b) \in R$, то $[a] = [b]$.
- Классы эквивалентности попарно не пересекаются:

$$[a] \neq [b] \implies [a] \cap [b] = \emptyset.$$

4.3. Фактор-множество

Множество всех классов эквивалентности обозначается

$$A/R = \{ [a] \mid a \in A \},$$

и называется **фактор-множеством** или **множеством классов эквивалентности**. Имеет натуральное отображение:

$$\pi: A \longrightarrow A/R, \quad \pi(a) = [a].$$

4.4. Примеры

- 1) **Конгруэнция по модулю n на \mathbb{Z} :**

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b).$$

Здесь класс $[a] = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$, а фактор-множество $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ содержит n классов: $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$.

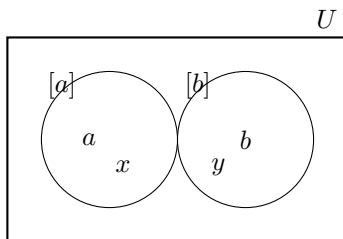
- 2) **Равенство длины слов над алфавитом Σ :**

$$u \sim v \iff |u| = |v|.$$

Класс $[u]$ — все слова фиксированной длины $|u|$.

- 3) **Классификация точек плоскости по цвету:** две точки эквивалентны, если окрашены в один цвет. Фактор-множество — набор всех используемых цветов.

4.5. Графическое представление



4.6. Классификация множеств

Отношения эквивалентности дают естественный способ **классификации** элементов множества A :

- Каждый класс эквивалентности можно воспринимать как *класс признаков* или *категорию*.
- Фактор-множество A/R — это множество *категорий*, упорядоченных произвольным образом.
- Если требуется работать не с элементами A , а лишь с их классами (например, вычислять «цвета», «остаток при делении» и т. д.), удобно перейти к A/R .

Источники

- Г. С. Михалев, *Дискретная математика. Базовый курс для вузов*.
- Р. Джонсонбауг, *Дискретная математика*, Pearson Education.
- В. Э. Пахомов, *Введение в дискретную математику*.
- Википедия: Класс эквивалентности
- Википедия: Фактор-множество