Оглавление

Множества и способы их задания

Что такое множество?

Множество — это совокупность объектов, которые рассматриваются как единое целое. Эти объекты называются *элементами множества*.

Примеры множеств:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\text{красный}, \text{зелёный}, \text{синий}\}$$

Обозначение: если x принадлежит множеству A, пишем $x \in A$. Если не принадлежит — $x \notin A$.

Способы задания множеств

Существует два основных способа задания множеств:

1) **Перечислением элементов** — когда мы явно указываем все элементы множества:
$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$
Такой способ подходит, когда множество конечное и небольшое.

2) **Указанием свойства (предиката)** — когда множество задаётся условием:
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — чётное и } x \leq 10\}$$
Здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Значит, B — это все чётные натуральные числа, не превосходящие 10.

Подмножества и другие понятия

Если все элементы множества A входят в множество B, то A называется **подмножеством** B:
$$A \subseteq B$$

Пример:
$$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$$

Пустое множество — это множество, не содержащее ни одного элемента:
$$\varnothing$$

Мощность множества

Мощность множества (или *кардинальное число*) — это количество элементов в нём. Обозначается $|A|$.

Пример:

$$A = \{a, b, c\} \Rightarrow |A| = 3$$

Замечания

- В математике **порядок элементов и повторы не имеют значения**:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2, 2\}$$

- Главное — какие элементы входят в множество, а не как они записаны.

Источники

- Г.С. Михалев, *Дискретная математика. Базовый курс для вузов.*
- Р. Джонсонбауг, *Дискретная математика*, Pearson Education.
- Википедия: Множество

2. Диаграммы Венна

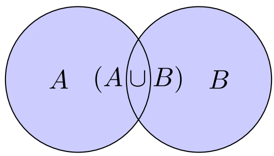
2.1. Определение и назначение

Диаграммы Венна (иногда называемые диаграммами Эйлера–Венна) служат для наглядного изображения отношений между множествами: объединений, пересечений, разностей и дополнений.

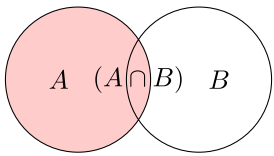
2.2. Основные операции

1) **Объединение**: $A \cup B$ — все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств.
2) **Пересечение**: $A \cap B$ — элементы, общие для обоих множеств.
3) **Разность**: $A \setminus B$ — элементы из A, не входящие в B.
4) **Дополнение**: $\overline{A}$ — все элементы универсального множества U, не входящие в A.

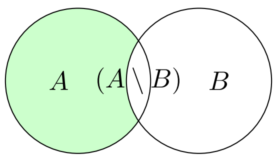
2.3. Примеры диаграмм



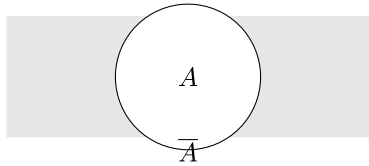
Объединение



Пересечение



Разность



Дополнение

2.4. Свойства

1) Ассоциативность:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

2) Коммутативность:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

3) Дистрибутивность:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4) Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

3. Отношения и их свойства

3.1. Что такое отношение

Бинарное отношение R между двумя множествами A и B — это множество упорядоченных пар:

$$R \subseteq A \times B,$$

где $A \times B$ — декартово произведение:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Если $(a, b) \in R$, то говорят, что a *связано с* b отношением R, и пишут $a\,R\,b$.

3.2. Примеры

- Отношение **«меньше»** на $\mathbb{N}$: $R = \{(a, b) \mid a < b\}$.
- Отношение **«быть делителем»** на $\mathbb{N}$: $R = \{(a, b) \mid a \mid b\}$.
- Отношение **«равенство по модулю»** на $\mathbb{Z}$: $a \equiv b \pmod{n}$.

3.3. Область и область значений

- **Область определения (domain)**:

$$\operatorname{dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B \colon (a, b) \in R\}.$$

- **Область значений (range)**:

$$\operatorname{ran}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A \colon (a, b) \in R\}.$$

3.4. Свойства бинарных отношений (на $A \times A$)

Пусть $R \subseteq A \times A$. Тогда отношение может обладать следующими свойствами:

- **Рефлексивность:**

$$\forall a \in A \colon (a, a) \in R.$$

  Пример: $=$, $\leq$.

- **Антирефлексивность (иррефлексивность):**

$$\forall a \in A\colon (a, a) \notin R.$$

  Пример: $<$.

- **Симметричность:**

$$\forall a, b \in A\colon (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

  Пример: «a и b живут в одном доме».

- **Антисимметричность:**

$$\forall a, b \in A\colon (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

  Пример: $\leq$.

- **Транзитивность:**

$$\forall a, b, c \in A\colon (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

  Пример: $\leq$, $<$.

3.5. Особые классы отношений

- **Отношение эквивалентности** — рефлексивное, симметричное и транзитивное. Пример: $a \equiv b \pmod{n}$.

  Такое отношение разбивает множество A на *классы эквивалентности*.

- **Отношение частичного порядка** — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное. Пример: $\leq$ на $\mathbb{N}$.

  Если дополнительно выполняется, что любые два элемента сравнимы, то это **полный порядок**.

3.6. Графическое представление

Бинарное отношение на множестве A можно представить в виде **ориентированного графа**:

- Вершины соответствуют элементам A.
- Направленное ребро $a \to b$ рисуется, если $(a, b) \in R$.

Пример: на множестве $A = \{1, 2, 3\}$ отношение $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ — транзитивное.

3.7. Табличное представление

Отношение R на множестве $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можно представить в виде **таблицы**, где в ячейке на пересечении строки i и столбца j стоит 1, если $(a_i, a_j) \in R$, и 0 — иначе. Это называется **матрицей смежности**.

Источники

- Г.С. Михалев, *Дискретная математика.*
- Р. Джонсонбауг, *Дискретная математика*, Pearson Education.
- Википедия: Бинарное отношение

Отношение эквивалентности
и классификация множеств

4. Отношение эквивалентности и классификация множеств

4.1. Что такое отношение эквивалентности?

Отношение R на множестве A связывает между собой некоторые пары элементов. Мы называем его *отношением эквивалентности*, если оно позволяет считать связанные элементы «равными» по какому-то признаку.

Формально $R \subseteq A \times A$ удовлетворяет трём ключевым свойствам:

1) **Рефлексивность.** Каждый элемент эквивалентен сам себе:

$$\forall a \in A \quad (a, a) \in R.$$

Пояснение: это значит, что сравнивая элемент с самим собой, мы всегда получаем «да» — элемент всегда «равен» самому себе.

2) **Симметричность.** Если a эквивалентен b, то и b эквивалентен a:

$$\forall a, b \in A \ \big((a, b) \in R \ \Rightarrow \ (b, a) \in R\big).$$

Пояснение: эквивалентность — взаимное отношение. Нельзя иметь «одностороннюю» равенство.

3) **Транзитивность.** Если a эквивалентен b, а b эквивалентен c, то a эквивалентен c:

$$\forall a, b, c \in A \ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big) \ \Rightarrow \ (a, c) \in R.$$

Пояснение: признак эквивалентности «передаётся» по цепочке.

Без одного из этих свойств отношение нельзя назвать «эквивалентностью», потому что нарушится идея «равности» как симметричной и непротиворечивой связи.

4.2. Классы эквивалентности: интуитивный смысл

Идея. Все элементы, которые попарно эквивалентны друг другу, можно «собрать в одну корзинку» — *класс эквивалентности.*

Для каждого $a \in A$ определим

$$[a] \ = \ \{\, x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

- Если $b \in [a]$, то по симметричности и транзитивности получаем $[b] = [a]$.
- Если два класса не совпадают, то они не имеют общих элементов:

$$[a] \neq [b] \implies [a] \cap [b] = \varnothing.$$

Таким образом, классы эквивалентности *разбивают* всё множество A на непересекающиеся «группы равных элементов».

4.3. Фактор-множество и фактор-отображение

Обозначим множество всех таких классов:

$$A/R \; = \; \{ \, [a] \mid a \in A \}.$$

Это называется *фактор-множеством.* С ним связано естественное отображение

$$\pi : A \;\longrightarrow\; A/R, \qquad \pi(a) = [a].$$

- π «сводит» каждый элемент в его класс.
- π является сюръекцией (покрывает все классы).
- Если aRb, то $\pi(a) = \pi(b)$, и наоборот.

4.4. Развёрнутые примеры

1) **Конгруэнция по модулю** n на $\mathbb{Z}$. Определение:

$$a \equiv b \pmod n \quad \iff \quad n \mid (a-b).$$

   Проверим свойства:

   - Рефлексивность: $n \mid (a-a) = 0$ всегда.
   - Симметричность: если $n \mid (a-b)$, то $n \mid (b-a)$.
   - Транзитивность: $n \mid (a-b)$ и $n \mid (b-c)$ даёт $n \mid (a-c)$.

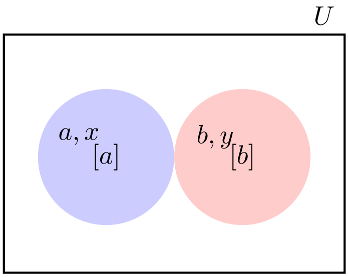
   Класс $[a] = \{a+kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Всего n различных классов: $[0], [1], \ldots, [n-1]$.

2) **Равенство длины слов** над алфавитом Σ. Правило: $u \sim v \iff |u| = |v|$.

   - Все слова длины 3 формируют один класс $[u]$.
   - В фактор-множестве $\Sigma^*/\!\sim$ каждый класс соответствует конкретной длине.

3) **Цвет точек на плоскости.** Определим отношение: две точки эквивалентны, если они имеют одинаковый цвет. Тогда каждый цвет — это один класс; фактор-множество — набор всех цветов.

4.5. Геометрическая иллюстрация



Здесь каждый круг — класс эквивалентности, внутри него лежат все «равные» элементы.

4.6. Зачем это нужно?

- Упрощает работу: вместо множества элементов оперируем множеством классов.
- В алгебре: фактор-группы, фактор-кольца.
- В теории языков: выделение всех слов одинаковой длины, одинакового суффикса и т. д.
- В анализе данных: кластеризация, когда каждый кластер — класс эквивалентности по выбранному критерию.

Источники и литература

- Г. С. Михалев, *Дискретная математика. Базовый курс для вузов.*
- Р. Джонсонбауг, *Дискретная математика*, Pearson Education.
- В. Э. Пахомов, *Введение в дискретную математику.*
- Википедия: Класс эквивалентности
- Википедия: Фактор-множество

5. Планарные графы

5.1. Определение

Планарным называется неориентированный граф G (множество вершин V и рёбер E), который можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались, кроме общих концов. Такое представление называется *планарным вложением* графа.

5.2. Примеры

- Граф K_4 (полный граф на четырёх вершинах) является планарным.
- Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными (теорема Куратовского, см. ниже).

5.2.1. Планарный пример: K_4

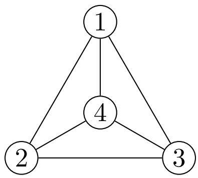


Рис. 1. Планарное вложение полного графа K_4.

5.2.2. Непланарный пример: K_5

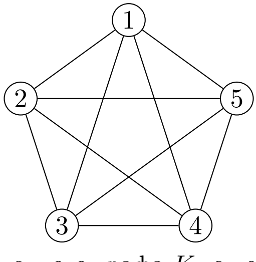


Рис. 2. Попытка вложения полного графа K_5 с неизбежными пересечениями.

5.3. Формула Эйлера

Для связного планарного графа справедлива *формула Эйлера*:

$$V - E + F = 2,$$

где $V = |V(G)|$ — число вершин, $E = |E(G)|$ — число ребер, а F — число граней (областей плоскости, включая внешнюю).

Пример. В графе K_4 имеем $V = 4$, $E = 6$. Рассчитаем F:

$$4 - 6 + F = 2 \implies F = 4.$$

Действительно, при планарном вложении мы получаем три внутренних треугольника и одну внешнюю область.

5.4. Критерии планарности

- **Теорема Куратовского:** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомоморфного K_5 или $K_{3,3}$.
- **Теорема Вагнера:** Упрощённый критерий: нет миноров K_5 и $K_{3,3}$.

5.5. Свойства и ограничения

1) Для простого планарного графа с $V \geq 3$ всегда выполняется

$$E \leq 3V - 6.$$

Если, кроме того, нет треугольников (циклов длины 3), то

$$E \leq 2V - 4.$$

2) Минимальный непланарный граф имеет $V = 5$, $E = 10$ (граф K_5) или $V = 6$, $E = 9$ (граф $K_{3,3}$).

5.6. Применения

- *Географические карты*: раскраска областей так, чтобы соседние области различались цветом (теорема о четырёх красках).
- *Схемотехника*: прокладка дорожек на печатных платах без пересечений.
- *Графический дизайн*: автоматическая укладка элементов схем и диаграмм.

Источники

- Д.Б. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- В. Д. Мазурин, *Дискретная математика: графы и алгоритмы.*
- Википедия: Планарный граф
- Википедия: Теорема Куратовского

6. Матрицы смежности и инцидентности

6.1. Граф и его представления

Пусть задан простой неориентированный граф $G = (V, E)$, где:

- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множество вершин ($|V| = n$),
- $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ — множество рёбер ($|E| = m$).

Для хранения и анализа структуры графа удобно использовать его представление в виде матриц:

1) **Матрица смежности** (adjacency matrix),
2) **Матрица инцидентности** (incidence matrix).

6.2. Матрица смежности

Матрица смежности A — это квадратная матрица $n \times n$, где:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Свойства:

- Для неориентированного графа A симметрична: $a_{ij} = a_{ji}$.
- Диагональные элементы a_{ii} равны 1, если в графе есть петли (в простом графе всегда 0).
- Сумма элементов i-й строки (или столбца) даёт степень вершины v_i.

Пример: граф с $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ и рёбрами $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3. Матрица инцидентности

Матрица инцидентности B — это матрица $n \times m$, где:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Особенности:

- Каждое ребро соединяет две вершины, значит в столбце j ровно два значения 1 (если граф простой и без петель).

- В ориентированном графе обычно используют -1 и $+1$:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } v_i \text{ — начало дуги } e_j, \\ +1, & \text{если } v_i \text{ — конец дуги } e_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример: тот же граф, где $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4. Сравнение представлений

- Матрица смежности подходит для быстрого ответа на вопрос: «Есть ли ребро между v_i и v_j?»

- Матрица инцидентности удобна для анализа структуры рёбер, особенно в ориентированных графах.

- Для разреженных графов (мало рёбер) матрица смежности неэффективна по памяти.

6.5. Визуальный пример

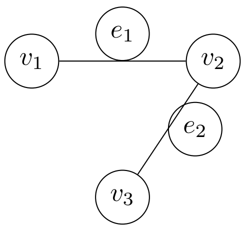


Рис. 1. Граф с вершинами v_1, v_2, v_3 и рёбрами e_1, e_2

6.6. Применения

- Алгоритмы поиска в графе (например, обход в глубину, поиск кратчайших путей).

- Сетевые задачи (анализ маршрутов, потоков, связности).

- Работа с графами в программировании, машинном обучении и обработке изображений.

Источники

- Гросс, Йелл: *Теория графов и её приложения.*
- Д.Б. Уэст, *Введение в теорию графов.*
- Википедия: Матрица смежности
- Википедия: Матрица инцидентности

7. Пути и контуры в графе

7.1. Основные определения

Пусть задан неориентированный простой граф $G = (V, E)$.

- **Путь** (walk) в графе G — это последовательность вершин

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k),$$

  где каждое ребро $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$. Говорят, что путь ведёт из v_0 в v_k.

- **Длина пути** — число ребер на пути, равное k.
- **Начальная вершина** — v_0, **конечная вершина** — v_k.
- **Открытый путь** — начальная и конечная вершины различны ($v_0 \neq v_k$).
- **Замкнутый путь** — начальная и конечная вершины совпадают ($v_0 = v_k$).

7.2. Простые пути и контуры

1) **Простой путь** — путь, в котором все вершины различны:

$$v_i \neq v_j \quad \text{для } 0 \leq i < j \leq k.$$

   Простота гарантирует отсутствие «заходов в тупик» и повторов.

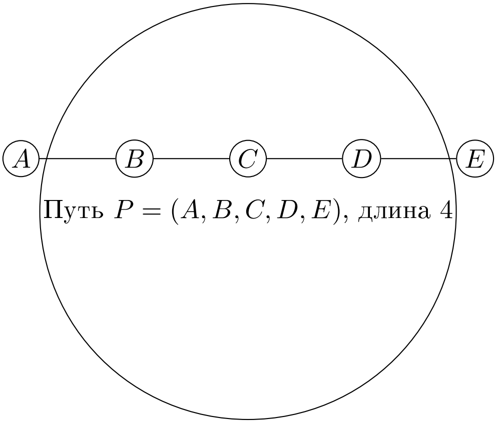
2) **Контур** (cycle) или **простой замкнутый путь** — замкнутый простой путь длины $k \geq 3$, в котором кроме совпадения $v_0 = v_k$ все промежуточные вершины различны.

7.3. Специальные виды путей

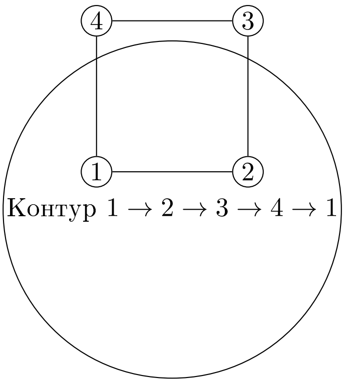
- **Trail** — путь, в котором рёбра не повторяются, но вершины могут.
- **Цепь** (trail) и **цепь без повторов** (simple trail) в ориентированных графах аналогично.
- **Эйлеров путь** — путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Если он замкнут, то это *цикл Эйлера*.
- **Гамильтонов путь** — простой путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз. Если он замкнут (возвращается в начальную вершину), то это *цикл Гамильтона*.

7.4. Примеры и иллюстрации

Пример 1. Простой путь длины 4 на графе:



Пример 2. Контур (цикл) длины 4:



7.5. Свойства путей и контуров

- *Комбинирование путей:* если существует путь из u в v и из v в w, то их конкатенация даёт путь из u в w.
- *Связность:* граф G называется связным, если для любых $u, v \in V$ существует путь из u в v.
- *Минимальный путь:* путь минимальной длины называют **коротким путём** или *найдём его с помощью алгоритма Дейкстры.*
- *Kycle Space:* множество всех циклов (контуров) образует векторное пространство над $\mathbb{F}_2$ (для ориентированных графов).

7.6. Матрица смежности и подсчёт путей

Если $A = (a_{ij})$ — матрица смежности графа G, то элемент матрицы A^k в позиции (i, j) равен числу различных путей длины k из вершины v_i в вершину v_j.

$$(A^k)_{ij} = \#\{\text{walks of length } k \text{ from } v_i \text{ to } v_j\}.$$

Это позволяет:

- Вычислить количество путей фиксированной длины.
- Определить достижимость: существует путь любой длины $k \leq n - 1$.

7.7. Заключение

Пути и контуры — фундаментальные понятия теории графов, лежащие в основе алгоритмов поиска (BFS, DFS), анализа связности, планарности и многих применений в сетевых и прикладных задачах.

Источники

- Д.Б. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- P. Diestel, *Graph Theory*.
- Википедия: Путь в графе
- Википедия: Цикл (граф)

8. Симметрия графа и его дополнения

8.1. Автоморфизмы графа и группа симметрий

Пусть $G = (V, E)$ — простой граф. *Автоморфизмом* графа называется биекция

$$\varphi\colon V \to V$$

такая, что для любых двух вершин $u, v \in V$ выполняется

$$\{u, v\} \in E \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$

Другими словами, φ сохраняет структуру смежности.

- Множество всех автоморфизмов графа G образует группу при композиции отображений, называемую **группой автоморфизмов** $\mathrm{Aut}(G)$.
- Тривиальный автоморфизм — тождественное отображение $\mathrm{id} : v \mapsto v$.
- Если $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ не является тождественным, говорят о *неявной* (или неполной) симметрии.

Пояснение: автоморфизмы — это «симметрии» графа, аналоги зеркальных и поворотных симметрий фигур. Они показывают, какие вершины и ребра можно «переставить», не меняя общей формы графа.

8.2. Примеры симметрий

Пример 1. Цикл C_4 (четырёхвершинный цикл). Вершины можно пронумеровать $1, 2, 3, 4$ по кругу. Автоморфизмы:

$$\text{поворот на } 90^\circ: \ 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1,$$

$$\text{отражение: } 1 \leftrightarrow 4, \ 2 \leftrightarrow 3,$$

и их композиции. Группа симметрий изоморфна диhedral group D_4 порядка 8.

Пример 2. Полный граф K_n. Любая перестановка вершин сохраняет все рёбра, поэтому

$$\mathrm{Aut}(K_n) \cong S_n,$$

симметричная группа порядка $n!$.

8.3. Граф-дополнение

Дополнением графа $G = (V, E)$ называется граф

$$\overline{G} = (V, \overline{E}), \quad \overline{E} = \big\{\{u, v\} \mid u \neq v,\ \{u, v\} \notin E\big\}.$$

То есть в $\overline{G}$ все отсутствующие в исходном G связи становятся рёбрами, а все прежние исчезают.

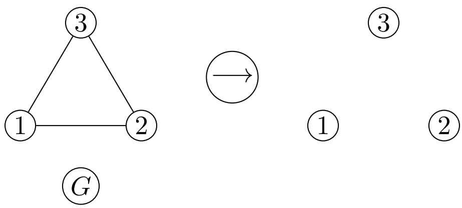
- $\overline{(\overline{G})} = G$.
- Если G простой, то и $\overline{G}$ простой.
- $\deg_{\overline{G}}(v) = |V| - 1 - \deg_G(v)$.

Группа автоморфизмов и дополнение

$$\mathrm{Aut}(\overline{G}) = \mathrm{Aut}(G).$$

Пояснение: перестановка вершин сохраняет и отсутствующие в G связи, значит сохраняет рёбра дополнения.

8.4. Иллюстрация: граф и его дополнение



Пример. Пусть G — треугольник K_3 (все три ребра). Тогда $\overline{G}$ — три изолированные вершины (нет рёбер).

8.5. Свойства и применения

- **Симметрия упрощает алгоритмы:** при поиске путей, раскраске и проверке изоморфизма можно работать с представителем орбиты.
- **Дополнение и свойства связности:** G связен $\nRightarrow$ $\overline{G}$ связен, но часто изучают одновременно пару $(G, \overline{G})$, например в теореме Рамсея.
- **Оптимизация:** задачи клики в G переходят в задачи независимого множества в $\overline{G}$.

Источники

- Д.Б. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- P. Diestel, *Graph Theory.*
- Википедия: Автоморфизм графа
- Википедия: Дополнение графа

9. Двоичные алгебры

9.1. Понятие двоичной (бинарной) операции

Пусть A — непустое множество. *Двоичной операцией* на A называется отображение

$$* : A \times A \longrightarrow A, \quad (x, y) \mapsto x * y.$$

Интуиция: берём два элемента из A, «складываем» их по правилу $*$ и получаем снова элемент из A.

9.2. Свойства двоичной операции

Пусть $*$ — двоичная операция на A. Говорят, что $*$ обладает свойствами:

- **Замкнутость**: по определению $x * y \in A$ для любых $x, y \in A$.
- **Ассоциативность**:

  $$(x * y) * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in A.$$

  Позволяет не ставить скобок при многократном применении.
- **Коммутативность**:

  $$x * y = y * x, \quad \forall x, y \in A.$$

- **Нейтральный (единичный) элемент**: существует $e \in A$ такое, что

  $$e * x = x * e = x, \quad \forall x \in A.$$

  Его часто обозначают 0 или 1 в зависимости от контекста.
- **Обратимые элементы**: элемент $x \in A$ называется обратимым, если существует $y \in A$ такой, что

  $$x * y = y * x = e.$$

  Тогда y называют *обратным* к x и обозначают x^{-1}.

9.3. Классификация двоичных алгебр

1) **Магма**: $(A, *)$ — любое множество с двоичной операцией (требуется лишь замкнутость).

2) **Полугруппа**: магма с ассоциативной операцией.

3) **Моноид**: полугруппа, в которой есть единица e.

4) **Группа**: моноид, в котором каждый элемент обратим.

5) **Абелева (коммутативная) группа**: группа с коммутативным $*$.

9.4. Примеры

1) $(\mathbb{Z}, +)$ — абелева группа, где единица 0, обратный к x есть $-x$.

2) $(\mathbb{N}, +)$ — моноид (нет обратных элементов, кроме 0).

3) $(\{0, 1\}, \wedge)$ — коммутативная монода, где $0 \wedge 1 = 0$, единица 1.

4) $(\{0, 1\}, \oplus)$ (сумма по модулю 2) — абелева группа:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0; \quad e = 0,\ x^{-1} = x.$$

5) $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ — полугруппа матриц; моноид при наличии единичной матрицы.

9.5. Таблица Кэли

Для конечных алгебр удобно задавать операцию таблицей. *Пример:* группа $(\{0, 1\}, \oplus)$:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

9.6. Связь с булевыми алгебрами

Булева алгебра — это *расширенная* коммутативная группа с дополнительными операциями «и», «или» и «не» на множестве $\{0, 1\}$. В частности, структура $(\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$ удовлетворяет ряду аксиом идемпотентности и дистрибутивности.

9.7. Зачем нужны двоичные алгебры?

- Моделирование и анализ абстрактных операций (сложение, умножение, логические связки).
- Основа теории групп и её приложений: симметрии, криптография, теории кодирования.
- В информатике: операции над битами, булевы функции, конечные автоматы.

Источники

- С. Ланг, *Алгебра.*
- Д. С. Джонсонбауг, *Дискретная математика*, Pearson.
- Википедия: Бинарная операция.

9.

9.1. ()

A . A

$$*: A \times A \longrightarrow A, \quad (x, y) \mapsto x * y.$$

: A, књ $*$ A.

9.2.

$*$ A. , $*$:

- : $x * y \in A$ $x, y \in A$.
- :
$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in A.$$
.
- :
$$x * y = y * x, \quad \forall x, y \in A.$$
- () : $e \in A$,
$$e * x = x * e = x, \quad \forall x \in A.$$
0 1 .
- : $x \in A$, $y \in A$,
$$x * y = y * x = e.$$
y x x^{-1}.

9.3.

1) : $(A, *)$ ( ).

2) : .

3) : , e.

4) : , .

5) () : $*$.

9.4.

1) $(\mathbb{Z}, +)$, 0, x $-x$.

2) $(\mathbb{N}, +)$ (, 0).

3) $(\{0,1\}, \wedge)$, $0 \wedge 1 = 0$, 1.

4) $(\{0,1\}, \oplus)$ (ґ2) :

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0; \quad e = 0,\ x^{-1} = x.$$

5) $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$; .

9.5.

. : $(\{0,1\}, \oplus)$:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

9.6.

књ, књ књ $\{0,1\}$. , $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg)$.

9.7. ?

- (, ,).
- : , , .
- : , , .

- . , .
- . . ґ, , Pearson.
- : .