7. Пути и контуры в графе

7.1. Основные определения

Пусть задан неориентированный простой граф $G = (V, E)$.

- **Путь** (walk) в графе G — это последовательность вершин

  $$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k),$$

  где каждое ребро $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$. Говорят, что путь ведёт из v_0 в v_k.
- **Длина пути** — число ребер на пути, равное k.
- **Начальная вершина** — v_0, **конечная вершина** — v_k.
- **Открытый путь** — начальная и конечная вершины различны ($v_0 \neq v_k$).
- **Замкнутый путь** — начальная и конечная вершины совпадают ($v_0 = v_k$).

7.2. Простые пути и контуры

1) **Простой путь** — путь, в котором все вершины различны:

   $$v_i \neq v_j \quad \text{для } 0 \leq i < j \leq k.$$

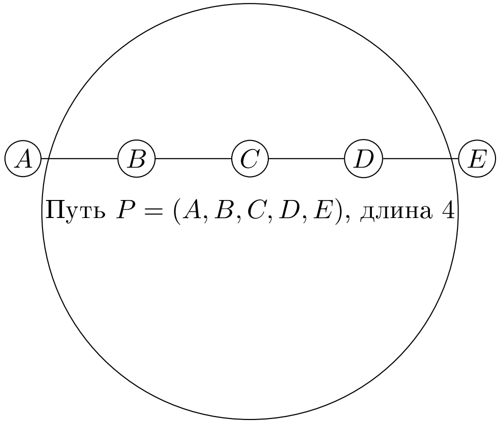
   Простота гарантирует отсутствие «заходов в тупик» и повторов.
2) **Контур** (cycle) или **простой замкнутый путь** — замкнутый простой путь длины $k \geq 3$, в котором кроме совпадения $v_0 = v_k$ все промежуточные вершины различны.

7.3. Специальные виды путей

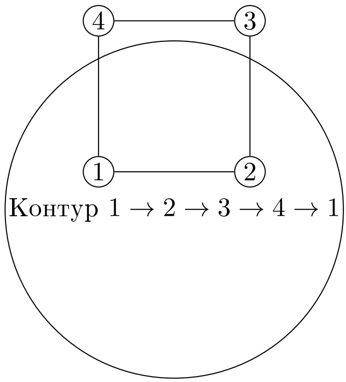
- **Trail** — путь, в котором рёбра не повторяются, но вершины могут.
- **Цепь** (trail) и **цепь без повторов** (simple trail) в ориентированных графах аналогично.
- **Эйлеров путь** — путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Если он замкнут, то это *цикл Эйлера*.
- **Гамильтонов путь** — простой путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз. Если он замкнут (возвращается в начальную вершину), то это *цикл Гамильтона*.

7.4. Примеры и иллюстрации

Пример 1. Простой путь длины 4 на графе:



Пример 2. Контур (цикл) длины 4:



7.5. Свойства путей и контуров

- *Комбинирование путей:* если существует путь из u в v и из v в w, то их конкатенация даёт путь из u в w.
- *Связность:* граф G называется связным, если для любых $u, v \in V$ существует путь из u в v.
- *Минимальный путь:* путь минимальной длины называют **коротким путём** или *найдём его с помощью алгоритма Дейкстры.*
- *Kycle Space:* множество всех циклов (контуров) образует векторное пространство над $\mathbb{F}_2$ (для ориентированных графов).

7.6. Матрица смежности и подсчёт путей

Если $A = (a_{ij})$ — матрица смежности графа G, то элемент матрицы A^k в позиции (i, j) равен числу различных путей длины k из вершины v_i в вершину v_j.

$$(A^k)_{ij} = \#\{\text{walks of length } k \text{ from } v_i \text{ to } v_j\}.$$

Это позволяет:

- Вычислить количество путей фиксированной длины.
- Определить достижимость: существует путь любой длины $k \leq n - 1$.

7.7. Заключение

Пути и контуры — фундаментальные понятия теории графов, лежащие в основе алгоритмов поиска (BFS, DFS), анализа связности, планарности и многих применений в сетевых и прикладных задачах.

Источники

- Д.Б. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall.
- P. Diestel, *Graph Theory*.
- Википедия: Путь в графе
- Википедия: Цикл (граф)