Отношение эквивалентности
и классификация множеств

4. Отношение эквивалентности и классификация множеств

4.1. Что такое отношение эквивалентности?

Отношение R на множестве A связывает между собой некоторые пары элементов. Мы называем его *отношением эквивалентности*, если оно позволяет считать связанные элементы «равными» по какому-то признаку.

Формально $R \subseteq A \times A$ удовлетворяет трём ключевым свойствам:

1) **Рефлексивность.** Каждый элемент эквивалентен сам себе:

$$\forall a \in A \quad (a, a) \in R.$$

Пояснение: это значит, что сравнивая элемент с самим собой, мы всегда получаем «да» — элемент всегда «равен» самому себе.

2) **Симметричность.** Если a эквивалентен b, то и b эквивалентен a:

$$\forall a, b \in A \ \big((a, b) \in R \ \Rightarrow \ (b, a) \in R\big).$$

Пояснение: эквивалентность — взаимное отношение. Нельзя иметь «одностороннюю» равенство.

3) **Транзитивность.** Если a эквивалентен b, а b эквивалентен c, то a эквивалентен c:

$$\forall a, b, c \in A \ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big) \ \Rightarrow \ (a, c) \in R.$$

Пояснение: признак эквивалентности «передаётся» по цепочке.

Без одного из этих свойств отношение нельзя назвать «эквивалентностью», потому что нарушится идея «равности» как симметричной и непротиворечивой связи.

4.2. Классы эквивалентности: интуитивный смысл

Идея. Все элементы, которые попарно эквивалентны друг другу, можно «собрать в одну корзинку» — *класс эквивалентности.*

Для каждого $a \in A$ определим

$$[a] \ = \ \{\, x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

- Если $b \in [a]$, то по симметричности и транзитивности получаем $[b] = [a]$.
- Если два класса не совпадают, то они не имеют общих элементов:

$$[a] \neq [b] \implies [a] \cap [b] = \varnothing.$$

Таким образом, классы эквивалентности *разбивают* всё множество A на непересекающиеся «группы равных элементов».

4.3. Фактор-множество и фактор-отображение

Обозначим множество всех таких классов:

$$A/R \ = \ \{ [a] \mid a \in A \}.$$

Это называется *фактор-множеством.* С ним связано естественное отображение

$$\pi : A \longrightarrow A/R, \qquad \pi(a) = [a].$$

- π «сводит» каждый элемент в его класс.
- π является сюръекцией (покрывает все классы).
- Если aRb, то $\pi(a) = \pi(b)$, и наоборот.

4.4. Развёрнутые примеры

1) **Конгруэнция по модулю** n на $\mathbb{Z}$. Определение:

$$a \equiv b \pmod n \quad \iff \quad n \mid (a - b).$$

   Проверим свойства:

   - Рефлексивность: $n \mid (a - a) = 0$ всегда.
   - Симметричность: если $n \mid (a - b)$, то $n \mid (b - a)$.
   - Транзитивность: $n \mid (a - b)$ и $n \mid (b - c)$ даёт $n \mid (a - c)$.

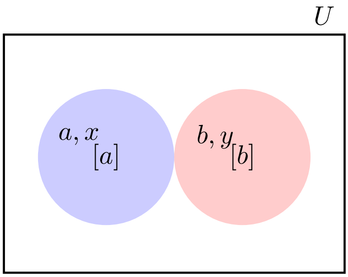
   Класс $[a] = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Всего n различных классов: $[0], [1], \ldots, [n - 1]$.

2) **Равенство длины слов** над алфавитом Σ. Правило: $u \sim v \iff |u| = |v|$.

   - Все слова длины 3 формируют один класс $[u]$.
   - В фактор-множестве $\Sigma^*/\!\sim$ каждый класс соответствует конкретной длине.

3) **Цвет точек на плоскости.** Определим отношение: две точки эквивалентны, если они имеют одинаковый цвет. Тогда каждый цвет — это один класс; фактор-множество — набор всех цветов.

4.5. Геометрическая иллюстрация



Здесь каждый круг — класс эквивалентности, внутри него лежат все «равные» элементы.

4.6. Зачем это нужно?

- Упрощает работу: вместо множества элементов оперируем множеством классов.
- В алгебре: фактор-группы, фактор-кольца.
- В теории языков: выделение всех слов одинаковой длины, одинакового суффикса и т. д.
- В анализе данных: кластеризация, когда каждый кластер — класс эквивалентности по выбранному критерию.

Источники и литература

- Г. С. Михалев, *Дискретная математика. Базовый курс для вузов.*
- Р. Джонсонбауг, *Дискретная математика*, Pearson Education.
- В. Э. Пахомов, *Введение в дискретную математику.*
- Википедия: Класс эквивалентности
- Википедия: Фактор-множество