Содержание

1 Векторы. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства. Скалярное произведение векторов

1.1 Векторы

Вектор — это упорядоченный набор чисел (координат), который характеризуется направлением и величиной. Векторы принято обозначать буквами со стрелкой: $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{u}$.

Примеры векторов в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Нулéвой вектор — это вектор, все координаты которого равны нулю:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Операции над векторами

- **Сложение**: если $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \; \dots, \; a_n + b_n).$$

- **Умножение на скаляр**: для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1,\ \ldots,\ \lambda a_n).$$

- **Противоположный вектор**: $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$, при сложении даёт нулевой вектор.

1.2 Линейная зависимость системы векторов

Пусть заданы векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ в векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим их линейную комбинацию:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Система векторов называется

- *линейно зависимой*, если существуют коэффициенты λ_i, не все равные нулю, такие что комбинация равна нулевому вектору.
- *линейно независимой*, если единственное решение $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$ — это $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Пример. Векторы в $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

линейно зависимы, так как

$$1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 - 1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0},$$

и при этом коэффициенты не все нули.

1.3 Базис линейного пространства

Базис линейного пространства V — это упорядоченная система векторов $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, обладающая двумя свойствами:

1) **Линейная независимость**: ни один из базисных векторов не выражается через другие.

2) **Порождающий (образующий) набор**: любой вектор $\vec{v} \in V$ можно единственным образом разложить в виде

$$\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n, \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Число n называется **размерностью** пространства V и совпадает с количеством векторов в любом базисе V.

Пример. В стандартном базисе $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Любой вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ раскладывается как

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3.$$

1.4 Скалярное произведение векторов

Для векторов $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ в $\mathbb{R}^n$ **скалярное произведение** определяется как

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Основные свойства:

- **Коммутативность**: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$.
- **Линейность по каждому аргументу**:

$$\langle \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}, \vec{b} \rangle = \alpha\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \beta\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle.$$

- **Положительная определённость**: $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ и равно нулю только для $\vec{a} = \vec{0}$.

Связь с длиной и углом между векторами. Длина (норма) вектора:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.$$

Косинус угла θ между $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}.$$

Пример. Для $\vec{a} = (1, 2, 2)$ и $\vec{b} = (2, 0, 1)$:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 4, \quad \|\vec{a}\| = 3, \; \|\vec{b}\| = \sqrt{5}, \quad \cos\theta = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

1.4.1 Источники

- Г. С. Михалев, *Дискретная математика. Базовый курс для вузов*.
- Ш. Л. Ланг, *Линейная алгебра*.
- Википедия: Вектор.

2 Матрицы. Их свойства. Транспонированная матрица. Ранг матрицы

2.1 Матрицы и их свойства

Матрица — это прямоугольная таблица чисел, записанная в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — элемент на i-й строке и j-м столбце.

Если $m = n$, то матрица называется **квадратной**.

Основные типы матриц:

- *Нулевая матрица*: все элементы равны нулю.
- *Диагональная матрица*: все элементы вне главной диагонали равны нулю.
- *Единичная матрица* I_n: на главной диагонали — единицы, остальное — нули.

Операции над матрицами:

- *Сложение и вычитание* — поэлементно, если размеры совпадают.
- *Умножение на число*: каждый элемент умножается на скаляр.
- *Умножение матриц*: определяется как

  $$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

  если количество столбцов A равно количеству строк B.

2.2 Транспонированная матрица

Транспонирование — это операция, при которой строки матрицы становятся столбцами. Обозначается A^T.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства:

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(AB)^T = B^T A^T$.

2.3 Ранг матрицы

Ранг матрицы — это наибольшее число линейно независимых строк (или столбцов) матрицы.

Обозначается: $\text{rank}(A)$.

Методы вычисления:

- Приведение к ступенчатому виду методом Гаусса.
- Определение максимального размера ненулевого минора.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 1,$$

так как все строки пропорциональны первой.

Свойства ранга:

- Ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк.
- $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$ для матрицы A размера $m \times n$.

2.3.1 Источники

- Ш. Л. Ланг, *Линейная алгебра*.
- Г. С. Михалев, *Дискретная математика*.
- Википедия: Матрица.