МОД Компьютерный практикум: Лабораторная работа 1. **Исследование динамических систем (Дополнение)**

1 Советы для Вариантов 1-4

Рассмотрим исследование динамической системы на примере системы Рёслера:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \equiv f_1, \quad \frac{dy}{dt} = x + a\,y \equiv f_2 \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \equiv f_3.$$

Используем $b = 0.2$, $c = 5.7$, и меняем параметра a.

Если ввести вектор $\vec{u} = (x, y, z)$, то видно, что система Рёслера – динамическая система 3-го порядка, $N = 3$, соответственно, есть три правые части f_1, f_2, f_3.

Найдем стационарные точки, приравняв все правые части нулю. Получим, что всего есть 2 стационарные точки и они определяются следующими уравнениями

$$z = -y, \quad x = -ay, \quad ay^2 + cy + b = 0.$$

Полезно (но не обязательно) также определить тип стационарных точек. Для этого в каждой точке необходимо найти матрицу Якоби $\mathbf{J}$ (см. Лекцию). Элементы матрицы Якоби определяются следующим образом

$$\mathbf{J}_{jk} \equiv \partial f_j / \partial u_k|_{stat}$$

Индекс *stat* показывает, что значение частной производной находится в стационарной точке. Затем надо найти собственные значения (характеристические показатели) λ матрицы $\mathbf{J}$. Это можно сделать, например, с помощью функции Матлаба `eig()`. Если вещественные части собственных значений λ отрицательны, то значит стационарная точка устойчивая. Если обе стационарные точки устойчивы, то система будет притягиваться к этим точкам, т.е. динамика при больших временах будет стационарной. Значит, никаких периодических, а тем более хаотических траектории не будет.

Отдельную фазовую траекторию можно просмотреть с помощью функции `plot3()`, синтаксис которой, например такой

```
plot3(u(:, 1), u(:, 2), u(:, 3), '-')
```

(Здесь `u(:, 1)`, `u(:, 2)`, `u(:, 3)` соответствуют значениям x, y, z). При $a = 0.05$ получится график, как на Рис.1(а). На этом графике непонятно, является ли эта динамика стационарной, периодической или хаотической. Но если строить этот же для поздних времен, используя например

```
plot3(u(4000:end, 1), u(4000:end, 2), u(4000:end, 3), '-')
```

то получится график, как на Рис. 1(б). На этом графике отброшен переходный процесс, т.е. рассматривается динамика системы при больших t. (В вычислениях на Рис. 1, использовалось $t_{end} = 1000$). Рисунок 1(б) четко показывает, что при динамика $a = 0.05$ – периодическая. (Размазанная кривая, наверху фазовой траектории, говорит о том, что и на этих временах траектория еще не сошлась к предельному циклу.)

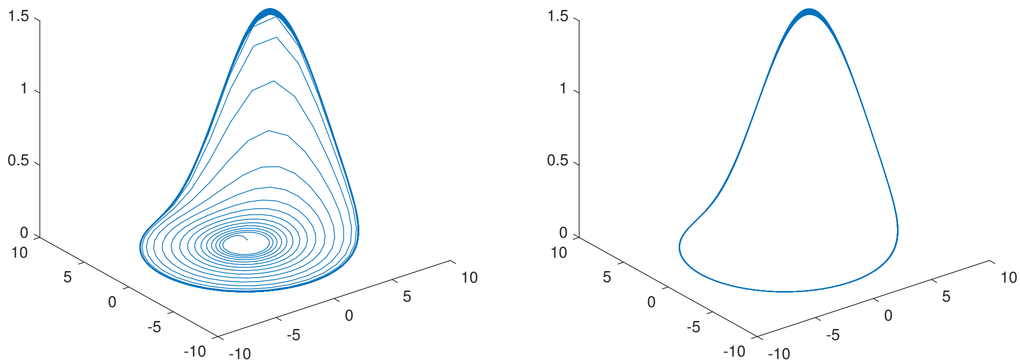

Рис. 1: Фазовая траектория в трехмерном пространстве (x, y, z). Слева (a): Полная траектория для $t = [0, 1000]$. Справа (b): Траектория без переходного процесса для $t = [800, 1000]$.

Отображение Пуанкаре (с периодом $T = 1$) даст график (в плоскости (x, y)), как на Рис. 2(а). Из него можно сделать вывод, что после переходного процесса динамика системы будет периодической, так как возле замкнутой кривой находится больше точек. И действительно, если мы построим отображение Пуанкаре для больших времен, отбросив переходный процесс, то получим Рис.2(b).

Таким образом, при построении фазовой траектории или отображения Пуанкаре полезно отбросить начальную часть динамики, т.к. она соответствует переходному процессу (к стационарной точке или периодической траектории). Если отображение Пуанкаре выглядит, как случайный набор точек и отбрасывание начальных точек не приводит к регулярной структуре точек, то скорее всего движение хаотично. Это можно проверить построив зависимость какой-нибудь координаты (например, x) от времени, а также определив спектр этой координаты.

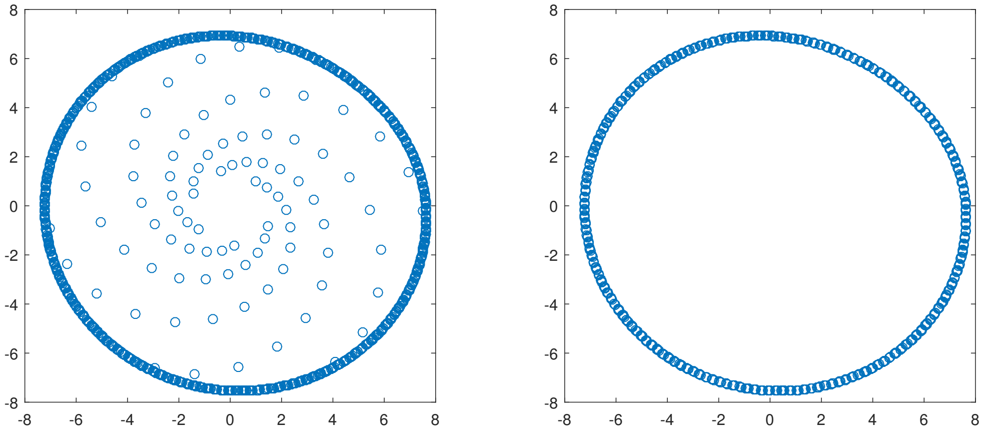

Рис. 2: Отображение Пуанкаре с $T = 1$ на плоскости (x, y). Слева (a): Для $t = [0, 1000]$. Справа (b): Для $t = [800, 1000]$.