МОД Компьютерный практикум: Лабораторная работа 1. **Исследование динамических систем**

1 Теоретическая часть

1.1 Введение: Динамические системы

Данная работа направлена на изучение методов численного исследования динамических систем. Динамическая система (ДС) – это система, параметры которой меняются со временем. Считается, что система не зависит от пространственных координат. В качестве примеров ДС можно рассматривать набор связанных маятников, химические или ядерные реакции с несколькими компонентами, движение небесных тел и т.д.

Динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка

$$\vec{x}\,' = \vec{f}(\vec{x}, t, \vec{a}), \tag{1}$$

где $\vec{x} = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)]$ – вектор неизвестных переменных, t – время, вектор-функция $\vec{f} = [f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t), \ldots, f_N(\vec{x}, t)]$ характеризует скорость изменения переменных, $\vec{a}$ – вектор (внешних) параметров системы. Динамическая система в развернутом виде (по компонентам) записывается в следующем виде

$$\begin{aligned}
x_1' &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N, t, a_1, \ldots a_M), \\
x_2' &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N, t, a_1, \ldots a_M), \\
&\ldots \quad \ldots \\
x_N' &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N, t, a_1, \ldots a_M).
\end{aligned} \tag{2}$$

Если правые части системы (1) не зависят от времени, то ДС называется *автономной*, в противном случае – *неавтономной*.

Обычно эволюция ДС сводится к четырем типам: инфинитное движение, стационарное состояние, периодическое изменение и хаотическое изменение. В стационарном состоянии переменные ДС $\vec{x}$ не менются со временем. При периодическом изменении переменные ДС меняются периодически. Если переменные меняются случайным образом, то система находится в хаотическом режиме. Типы эволюции могут меняться в зависимости от параметров системы $\vec{a}$. Изменение типа движения называется *бифуркацией*. Бифуркация возникает при пороговом значении какого-то параметра. При этом ниже порога система имеет один тип динамики, а выше порога – другой.

Задача исследования ДС состоит в определении типа движения при данном наборе внешних параметров, а также в нахождении пороговых значений параметров, при которых происходят бифуркации.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части необходимо построить фазовый портрет системы при различных значениях параметров. Во второй части работы необходимо найти значения параметров, при которых динамика системы становится хаотической.

1.2 Приведение к безразмерному виду

При исследовании физических систем, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями в частных производных полезно проводить процедуру обезразмеривания. При этом все переменные и параметры становятся безразмерными, а число управляющих параметров существенно уменьшается. Продемонстрируем процедуру на примере уравнения для линейного осциллятора с затуханием и внешней силой. Эта система описывается следующим уравнением:

$$mx'' + \Gamma x' + kx = A\sin(\Omega t), \tag{3}$$

где x – отклонение осциллятора от положения равновесия, m – его масса, Γ – коэффициент затухания, k – жесткость пружины, A и Ω – амплитуда и частота внешней силы. (Задание: Предполагая, что x имеет размерность метр, определите размерности остальных параметров). Таким образом, в системе имеется 5 параметров. Покажем, что на самом деле число управляющих параметром всего 2.

Введем новые безразмерные отклонение y и время τ

$$y = x/x_s, \quad \tau = t/t_s, \tag{4}$$

где x_s, t_s – неизвестные (пока) масштабы координаты и времени. Умножим и разделим первый член (3) на x_s и t_s^2, аналогично поступим с другими слагаемыми. Тогда имеем

$$\frac{mx_s}{t_s^2}\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma x_s}{t_s}\frac{dy}{d\tau} + kx_s y = A\sin(\Omega t_s\tau). \tag{5}$$

Разделим это уравнение на mx_s/t_s^2. В результате получим

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma t_s}{m}\frac{dy}{d\tau} + \frac{kt_s^2}{m}y = \frac{At_s^2}{mx_s}\sin(\Omega t_s\tau). \tag{6}$$

Выберем масштабы x_s и t_s, чтобы безразмерное уравнение выглядело как можно проще. Например, можно выбрать $t_s = \sqrt{m/k}$, $x_s = A/k$, так что коэффициенты при третьем и четвертом членах уравнения (6) равны 1. Тогда имеем

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \gamma\frac{dy}{d\tau} + y = \sin(\omega\tau), \tag{7}$$

где $\gamma = \Gamma/\sqrt{mk}$ $\omega = \Omega\sqrt{m/k}$. Отметим, что $1/t_s = \sqrt{k/m} \equiv \Omega_0$ – частота собственных колебаний осциллятора. Таким образом, число управляющих параметров равно 2 (γ и ω), что существенно упрощает систему. Вместо исследования системы в 5-мерном пространстве параметров, необходимо рассмотреть только двумерное пространство. Заметим, что в масштаб x_s входит амплитуда A. Тогда в случае отсутствия внешней силы ($A = 0$), параметр x_s обращается в ноль. Поэтому удобней оставить x_s свободным параметром, и ввести безразмерную амплитуду внешней силы $a = At_s^2/(mx_s)$.

Аналогичным образом проводится обезразмеривание других уравнений. В данном курсе мы будем часто использовать уравнения в безразмерном виде. Но иногда полезно проверить, возможно ли уменьшить число параметров, проведя дополнительное обезразмеривание.

1.3 Построение фазового портрета

Фазовое пространство – это пространство с координатами $x_1, x_2, \dots, x_N$, соответственно, размерность фазового пространства равно числу N зависимых переменных. *Фазовый портрет* – это набор траекторий в фазовом пространстве динамической системы, построенных для разных начальных условий. Основными элементами фазового портрета являются стационарные точки (если есть), предельные циклы, и другие аттракторы. При построении фазового портрета строятся только характерные линии и точки, предполагая, что близкие начальные условия дадут аналогичные траектории. Фазовый портрет дает полную качественную картину динамики системы в некоторой области фазового пространства.

Рассмотрим автономную систему, т. е. правые части системы (2) не зависят от t. Сначала определим стационарные точки системы. Они находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0, \\ \dots\ &\dots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

или кратко

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0$$

Система (8) – система N алгебраических уравнений относительно N неизвестных (x_1, x_2, $\dots, x_N$).

Далее надо определить тип стационарных точек. Обозначим положение равновесия $\vec{x}_s \equiv [x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{Ns}]$. Рассмотрим малые отклонения $\vec{u}(t)$ от положения равновесия, иначе говоря, представим координаты в следующем виде:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_s + \vec{u}(t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получим следующие уравнения для u_j:

$${u_j}' = a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2 + \dots a_{jN}u_N, \quad j = 1, 2, \dots N, \tag{9}$$

где $a_{jk} = (\partial f_j / \partial u_k)|_{\vec{x}^s}$. При выводе данного уравнения использовалось условие $f_j(\vec{x}_s) = 0$, а также отброшены члены высших порядков по $\vec{u}(t)$.

Будем искать решение уравнения (9) в виде $u_j = c_j \exp(\lambda t)$, где λ – *характеристический показатель*. Тогда для компонент вектора $\vec{c}$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (задачу на собственные значения):

$$\hat{J}\vec{c} = \lambda\vec{c},$$

где $J_{jk} = a_{jk}$. Данная система имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равен нулю, т.е.

$$\det(\hat{L} - \lambda\hat{I}) = 0, \tag{10}$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица. Данное уравнение соответствует полиному N-й степени относительно λ. Если вещественные части всех собственных значений отрицательны (положительны), то соответствующая стационарная точка является устойчивой (неустойчивой). Если вещественные части собственных значений имеют разные знаки, то стационарная точка является *седловой*.

Рассмотренная процедура дает только локальное (вблизи стационарных точек) поведение динамической системы. Обобщение результатов на всю область фазового пространства является непростой задачей. Однако, для двумерных систем, $N = 2$, есть регулярный метод построения фазового портрета, без непосредственного решения системы ОДУ. Пусть имеется автономная двумерная система

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{11}$$

тогда построение фазового портрета включает следующие шаги:

Шаг 1. Постройте зависимости $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$ в плоскости (x_1, x_2). Пересечение этих кривых дает стационарные точки. На кривой $f_1(x_1, x_2) = 0$ $(f_2(x_1, x_2) = 0)$ изменяется только координата x_2 (x_1).

Шаг 2. Кривые разделяют фазовую плоскость $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$ на области, где знаки компонент скоростей (x_1', x_2') *не меняются*. Расставьте знаки скоростей во всех областях, и проведите стрелки, соответствующие скоростям.

Шаг 3. Для каждой стационарной точки найдите собственный значения и определите тип этой точки. Нарисуйте локальный фазовый портрет вблизи стационарных точек.

Шаг 4. Используя стрелки, в полученные на Шагах 1 и 2, а также локальные фазовые портреты стационарных точек, постройте фазовые траектории в выбранной области фазового пространства.

При построении фазового портрета используйте следующие свойства:

1) Фазовые траектории могут пересекаться только в стационарных точках.

2) Разные типы траекторий разделяются *сепаратрисами* или *предельными циклами*.

Для построения фазового портрета численно, необходимо строить фазовые траектории, решая систему (2) при разных начальных условиях. Фазовый портрет можно строить для двумерных и трехмерных систем. Для систем большей размерности, обычно рассматривают проекции фазовых траекторий на некоторые плоскости.

1.4 Хаотическое поведение

Качественный анализ динамических систем показывает, что *одномерные* системы характеризуются обычно стремлением либо к стационарному состоянию, либо к бесконечности. Периодические движения в одномерных автономных системах отсутствуют. *Двумерные* автономные ДС имеют 3 типа движения: стационарное состояние, периодическое изменение, и уход на бесконечность. Хаотическое поведение в двумерных системах отсутствует. Если размерность ДС – три и выше, то вдобавок к перечисленным типам движений могут существовать также хаотические режимы. Хаотические режимы возникают в некоторых интервалах параметров системы.

Хаотическое поведение характеризуется (квази-) случайной зависимостью координат ДС от времени. Для идентификации хаотического поведения ДС полезно использовать *отображение Пуанкаре*. Отображение Пуанкаре связывает состояние системы $\vec{x}^{(k)}$ в момент времени t_k с состоянием системы в момент времени t_{k+1}. Другими словами, отображение Пуанкаре задается соотношением:

$$\vec{x}^{(k+1)} = P\vec{x}^{(k)},$$

где P – некоторый оператор преобразования. Часто отображение Пуанкаре соответствует состояниям системы через определенный интервал времени T_p, т.е.

$$\vec{x}(t + T_p) = P\vec{x}(t).$$

Дискретный набор точек в отображении Пуанкаре соответствует периодической динамике системы с периодом соизмеримым с периодом отображения T_p. Если отображение Пуанкаре – это регулярная ("правильная") кривая, то движение системы периодическое с периодом несоизмеримым с периодом отображения T_p. Если отображение Пуанкаре представляет собой набор точек случайно разбросанных по фазовому пространству, то, скорее всего, динамика системы хаотична. Отметим, что часто на начальном этапе эволюции система демонстрирует псевдо-случайное поведение, которое переходит в регулярное (стационарное или периодическое) при больших временах.

После обнаружения динамики, похожей на хаотическую, полезно проверить, что зависимость координат от времени действительно хаотическая. Есть много разных критериев. Одним из них является определение спектра сигнала. Спектр хаотического сигнала состоит из широкой полосы частот (хотя могут присутствовать пики на отдельных частотах).

2 Задания к Лабораторной работе 1

2.1 Задание 1. Фазовый портрет

Частица движется в некотором потенциале $U(x)$ под действием затухания $\gamma > 0$. Динамика частицы описывается следующими уравнениями:

Вариант	Уравнение
1.	$x'' + \gamma x' + \sin(x) + \dfrac{1}{2} = 0.$
2.	$x'' + \gamma x' + x - x^2 + 1 = 0.$
3.	$x'' + \gamma x' + \mathrm{sech}(x)\ \tanh(x) + \dfrac{1}{4} = 0.$
4.	$x'' + \gamma x' + x - x^3 + \dfrac{1}{8} = 0.$
5.	$x'' + \gamma x' + x\ \exp(-x^2/2) - \dfrac{1}{4} = 0.$
6.	$x'' + \gamma x' + \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{4} = 0.$
7.	$x'' + \gamma x' + \sin(x) - \dfrac{x}{2} = 0.$
8.	$x'' + \gamma x' - x - x^2 + x^3 + \dfrac{1}{2} = 0.$

Задание 1.1. Приведенные уравнения в отсутствии затухания, $\gamma = 0$, являются гамильтоновыми и соответствуют движению частицы в некотором потенциале $U = U(x)$. Поэтому уравнения движения представимы в следующем виде

$$x'' + \gamma x' = -\frac{dU}{dx}.$$

Определите вид потенциал $U(x)$. При $\gamma = 0$, частица совершает незатухающие колебания в этом потенциале. Это можно представить, как движение шарика в желобе, имеющим вид потенциала (но данная аналогия – неполная). При этом полная энергия частицы остается постоянной. При $\gamma > 0$, частица обычно стремится к минимуму потенциала, т.к. полная энергия уменьшается. Используйте данное интуитивное понимание движения при построении фазового портрета.

Задание 1.2 (по желанию). Постройте качественно фазовый портрет системы, не интегрируя систему ОДУ. Используйте алгоритм, описанный в теоретической части.

Задание 1.3. С помощью Матлаба постройте фазовый портрет системы для $\gamma = 0$, $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$. Используйте код, разработанный на практическом занятии. Проанализируйте фазовые траектории и убедитесь, что движение вдоль траекторий соответствует с формой потенциала, найденного в Задание 1.1. Также убедитесь, что фазовый портрет, построенный с помощью Матлаба подобен портрету, построенному качественно в Задании 1.2. Для фазового портрета старайтесь выбирайте репрезентативные траектории, которые различаются характером движения, например, периодические, пролетные, финитные, инфинитные и т.д. Примеры фазовых портретов изображены на Рис. .

Указания.

1. Выберите область, в которой вы будете строить фазовый портрет, с помощью команды `axis([xmin, xmax, ymin, ymax])`. Желательно, чтобы эта область включала все стационарные точки системы.

2. При выборе начальных условий полезно одну из координат держать постоянной, например $x_{1,0}$, и изменять значения другой координаты.

3. При определенных начальных условиях, фазовая траектория не попадает в выбранную область, и поэтому не отображается.

4. Конечное время выбирайте небольшим, 20-50 будет достаточным для большинства случаев.

5. При правильном выборе начальных условий для $\gamma = 0$, можно использовать те же начальные условия для $\gamma > 0$.

Что включить в отчет: 1) Номер варианта, 2) Уравнение движения, 3) Формулу для потенциала (Задание 1.1), 4) Фазовые портреты и соответствующие значения γ.

5) В конце отчета по данному заданию приведите свои выводы: Какие типы движений есть на фазовом портрете? Почему на фазовом портрете выбраны именно эти траектории? Есть ли связь между видом фазового портрета и формой потенциала? и т.п. В соответствии с фазовым портретом, как в целом ведет себя система в выбранной области фазового пространства? Общие выводы: Как можно изменить / упростить / улучшить данное задание? и т.п.

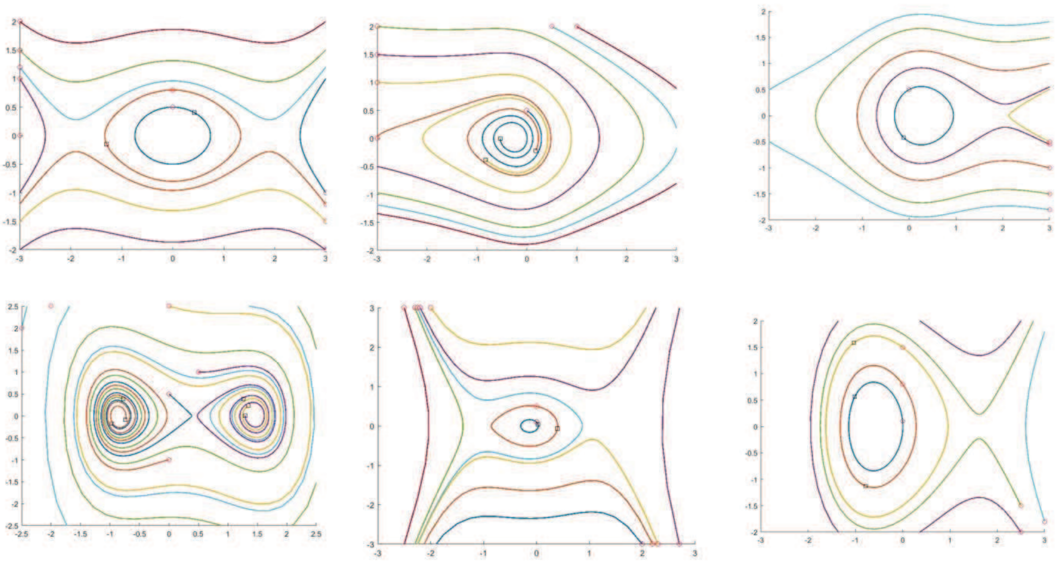

Рис. 1: Примеры фазовых портретов для различных систем.

2.2 Задание 2. Хаотическое поведение

В данном задании необходимо найти значения параметров (какие параметры менять, указано в Вариантах) при которых движение будет периодическим, и значения параметров, при которых движение будет хаотическим. Достаточно определить по одному значению управляющего параметра, при которых движение будет периодическим и хаотическим, соответственно. Для доказательства хаотического поведения постройте отображение Пуанкаре, а также спектр одной из координат. Примеры отображений Пуанкаре для периодических и хаотических траекторий приведены на Рис. . Примеры спектров для периодических и хаотических траекторий приведены на Рис. .

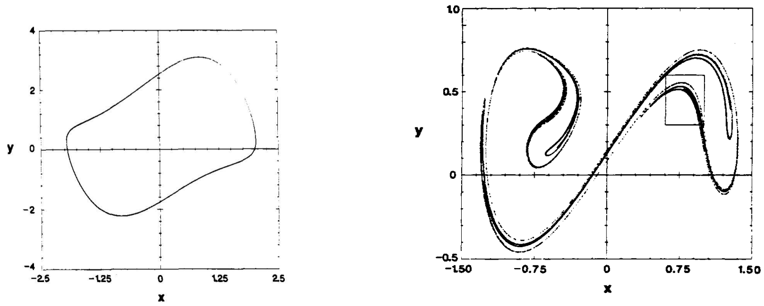

Рис. 2: Примеры отображения Пуанкаре для периодической (слева) и хаотической траекторий.

Вариант 1. Аттрактор Рёсслера. Система 3-х дифференциальных уравнений с 3-мя параметрами (a, b, c):

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + a\,y, \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c),$$

Используя $b = 0.2$, $c = 5.7$ исследовать, как меняется динамика в зависимости от параметра a. Найдите периодические и хаотические режимы. (Указание: Изменяйте a в пределах $[0.01, 0.4]$.)

Вариант 2. Аттрактор Рёсслера. Система 3-х дифференциальных уравнений с 3-мя параметрами (a, b, c):

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + a\,y, \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c),$$

Используя $a = b = 0.1$, исследовать, как меняется динамика в зависимости от параметра c. Найдите периодические и хаотические режимы. (Указание: Изменяйте c в пределах $[3, 20]$.)

Вариант 3. Аттрактор Лоренца. Система 3-х дифференциальных уравнений с 3-мя параметрами (σ, b, r):

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz,$$

Используя $\sigma = 10$, $b = 8/3$, исследовать, как меняется динамика в зависимости от параметра r. Найдите периодические и хаотические режимы. (Указание: Изменяйте r в пределах $[15, 30]$.)

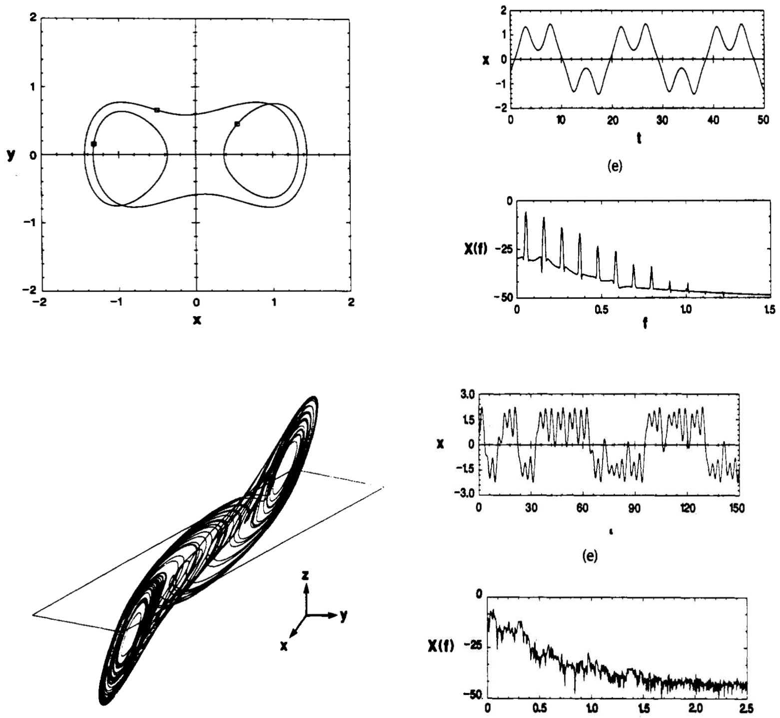

Рис. 3: Верхний ряд: Пример проекции фазовой траектории (слева), зависимость $x(t)$ и соответствующий спектр $X(f)$ (справа) для периодической траектории. Нижний ряд: Пример фазовой траектории (слева), зависимость $x(t)$ и соответствующий спектр $X(f)$ (справа) для хаотической траектории.

Вариант 4. Уравнение 3-го порядка с силой, зависящей от абсолютной величины

$$\frac{d^3x}{dt^3} + A\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - |x| + 1 = 0.$$

Исследовать зависимость динамики от параметра A. Найдите периодические и хаотические режимы.

5. Уравнение Дюффинга. Исследовать движение нелинейного маятника, который описывается следующим уравнением

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \beta u^3 = f\cos(\omega\, t).$$

Используйте значения $\gamma = 0.1$, $\beta = \omega = 1$. Меняя параметр f в пределах $[9, 14]$ найдите периодические и хаотические режимы.

6. Уравнение Дюффинга. Исследовать движение нелинейного маятника, который описывается следующим уравнением

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \beta\, u(1 - u^2) = f\cos(\omega\, t).$$

Используйте значения $\gamma = 0.15$, $\beta = 0.5$.

Задайте $\omega = 0.8$. Изменяя параметр f в пределах $[0.1, 0.5]$, найдите периодические и хаотические режимы.

7. Исследовать движение нелинейного маятника, который описывается следующим уравнением

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \beta\, u(1 - u^2) = f\cos(\omega\, t).$$

Используйте значения $\gamma = 0.15$, $\beta = 0.5$.

Задайте $\omega = 0.3$. Изменяя параметр $f = [0.1, 0.8]$, найдите периодические и хаотические режимы.

8. Исследовать движение нелинейного маятника, который описывается следующим уравнением

$$\ddot{u} + \gamma\dot{u} + \omega_0^2\,\sin(u) = f\cos(\omega\, t).$$

Используйте значения $\gamma = 0.1$, $\omega_0 = 1$. Изменяйте амплитуду внешней силы f, найдите периодические и хаотические режимы.

Примечание:

В Вариантах 1-3 может быть полезной функция `plot3()` для построения траектории в трехмерном пространстве.

Что включить в отчет: 1) Номер варианта, 2) Уравнение движения, 3) Значение (-я) параметра, при котором движение периодическое, и соответствующую фазовую траекторию или отображение Пуанкаре. 4) Значение (-я) параметра, при котором движение хаотическое, и соответствующее отображение Пуанкаре и спектр.

5) В конце отчета по данному заданию приведите свои выводы: Почему Вы считаете, что движение при данном значении параметра периодическое / хаотическое? Какие характеристики спектра указывают, что движение хаотическое? Как происходит возникновение хаотического движения при изменении управляющего параметра? и т.п. Общие выводы: Как можно изменить / упростить / улучшить данное задание? и т.п.

Литература

1. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, Введение в теорию колебаний и волн, 2 изд. (2000).

2. Г. Шустер, Детерминированный хаос, (1988).

3. Ф. Мун, Хаотические колебания (1990).

4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Курс теор.физики, т.1. (1988).