Филиал МИФИ, Ташкент

МОД-КП 04,05: Уравнение теплопроводности

Э. Н. Цой

ФТИ АН РУз, Ташкент, Узбекистан

весна, 2022

Литература

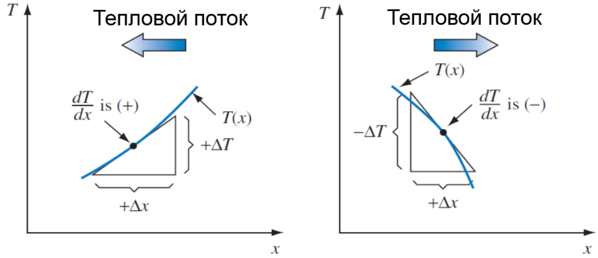
1. * В. Е. Зализняк, Основы вычислительной физики, Часть 1. Москва (2008).
2. * Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса : учеб. пособие.– Томск : STT, 2016. – 92 с.
3. В. М. Вержбицкий, Основы численных методов, Москва (2002).
4. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, Численные методы, М.: Бином, 2003.
5. Н. Н. Калиткин, Численные методы, М.: Наука, 1990.
6. Д. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк, Численные методы. Использование Матлаб. М. 2001.

Общие сведения

Теплообмен (3 основных типа):
1. Теплопроводность – перенос тепла внутри тела.
2. Конвекция (свободная и вынужденная) – при обтекании газами или жидкостями.
3. Излучение – испускание / поглощение фотонов.

Уравнение теплопроводности – большой класс параболических (нестационар. процессы), эллиптических (стационар.) уравнений.
Уравнение теплопроводности – большой класс физических явлений.

Закон Фурье, закон Ньютона



Закон теплопроводности Фурье (плотность потока):

$$q_\lambda \approx -\lambda \frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x}, \Rightarrow \quad q_\lambda = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

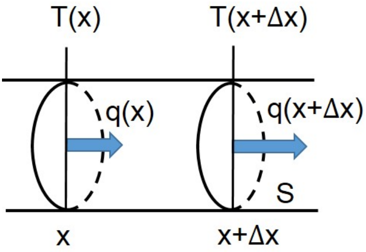
$$[q_\lambda] = \text{Вт}/\text{м}^2, \quad [\lambda] = \text{Вт} \,/\, (\text{м К})$$

Закон конвективного теплообмена Ньютона:

$$q_\alpha = \alpha\,(T_s - T_{f,\infty}).$$

$$[q_\alpha] = \text{Вт}/\text{м}^2, \quad [\alpha] = \text{Вт} \,/\, (\text{м}^2 \text{ К}).$$

Теплопроводность в 1D



ΔT – изменение температуры за Δt.
c – удельная теплоемкость, [Дж/ (кг К)].
$q_{\text{вн}}$ – плотность источников тепла [Вт/ м^3].

Теплота= [энергия в - энергия из] - энергия в среду + источники

$$mc\Delta T = S[q(x) - q(x+\Delta x)]\Delta t - S_b\alpha(T - T_\infty)\Delta t + q_{\text{вн}}(x,t)S\Delta x\Delta t,$$
$$m = \rho S\Delta x.$$

$$c\rho\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} - \frac{2\pi R\Delta x\alpha}{\pi R^2\Delta x}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(x,t),$$

Теплопроводность в 1D

$$c\rho\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} - \frac{2\pi R\Delta x\alpha}{\pi R^2\Delta x}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(x,t),$$
$$q = -\lambda(\partial T/\partial x).$$

Уравнение теплопроводности в 1D

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2\alpha}{R}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(x,t).$$

Однороднодная изолир. среда, без источников

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

$a = \lambda/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности.

Уравнение теплопроводности в 3D

3D декартовы координаты:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \equiv a\nabla^2 T.$$

3D цилиндрические координаты:

$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z.$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right].$$

3D сферические координаты.

$x = r\cos\phi\,\sin\theta, \quad y = r\sin\phi\,\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\right].$$

Уравнение теплопроводности в 2D

2D декартовы координаты (тонкая пластина):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).$$

2D цилиндрические координаты (не зависит от угла):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right].$$

2D цилиндрические координаты (не зависит от z):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right].$$

Уравнение теплопроводности в 1D

1D цилиндрические координаты (круглая пластина, труба):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) .$$

1D сферические координаты:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) .$$

1D декартовы координаты:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Уравнение теплопроводности

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2\alpha}{R}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(x,t).$$

Точечный объект (T не зависит от (x,y,z)):

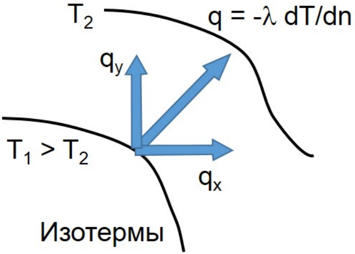
$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2\alpha}{R}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(t).$$

Стационарная задача ($\partial T/\partial t = 0$) – эллиптическое уравнение:

$$a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q_{\text{вн}}(x,y)/(\rho c) = 0.$$

Уравнение теплопроводности

Изотермы, градиент, дивергенция



$\vec{q} = -\lambda\,\mathrm{grad}T$ – плотность потока тепла.

Уравнение теплопроводности в компактном виде

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda\,\mathrm{grad}T) = \nabla(\lambda\,\nabla T).$$

Стационарные уравнения

Уравнение Лапласа: $\nabla^2 T = 0$.

Уравнение Пуассона: $\nabla^2 T = \Phi(\vec{r})$.

Уравнение Гельмгольца: $\nabla^2 T + \beta T = \Phi(\vec{r})$.

Начальные и граничные условия

Начальные условия (для 1D): $T(x, 0) = T_0(x)$.

Гранич. условие 1-го рода (Дирихле): $T(x_1, t) = f_a(t)$.

Гранич. условие 2-го рода (поток, Нейман): $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x_1, t) = g_1(t)$.

Гранич. условие 3-го рода (конвекция, Робин*):

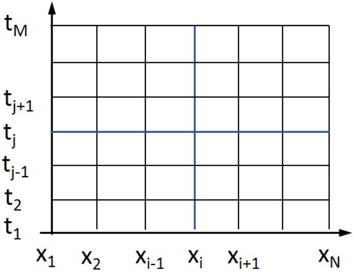
$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_1, t) + bT(x_1, t) = g_1(t).$$

Периодические гран.условия, условие на стыке 2 тел и т.д.

Методы численного решения

Метод конечных разностей.
Метод конечных элементов.

Численный метод – частное решение, при данных начальных и граничных условиях.
Пространственная или пространственно-временная сетка.



Определяем $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$.

Нестационарная теплопроводность в 1D

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2\alpha}{R}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(x,t), \qquad x = [0,1],$$

$$T(x,0) = T_0(x), \qquad T(0,t) = f_0(t), \qquad T(1,t) = f_1(t).$$

1D цилиндрические координаты (круглая пластина, труба):

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q_{\text{вн}}(x,t).$$

1D сферические координаты:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q_{\text{вн}}(x,t).$$

Функция Матлаба pdepe()

```
sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan,options)
```

Решает уравнение (систему):

$$c(x,t,u,\tfrac{\partial u}{\partial x})\,\tfrac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\tfrac{\partial}{\partial x}\left(x^m f(x,t,u,\tfrac{\partial u}{\partial x})\right) + s(x,t,u,\tfrac{\partial u}{\partial x})$$

$$t=[0,t_{end}], \quad x=[a,b].$$

Начальное условие: $u(x,0)=u_0(x)$.

Граничные условия (в $x=a$ и $x=b$):
$p(x,t,u)+q(x,t)f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})=0$.

```
function [c,f,s] = pdefun(x,t,u,DuDx)
function u0 = icfun(x)
function [pl,ql,pr,qr] = bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
```

Псевдокод: решение УТ с помощью pdepe()

`sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan,options)`

1. Определить 3 функции: `pdefun()`, `icfun()`, `bcfun()`.
2. Задать `xmesh`, `tspan`.
3. Задать опции `options` – параметры функции `pdepe()`.
4. Решить уравнение `sol = pdepe(m,@pdefun,@icfun,@bcfun,xmesh,tspan,options)`.
5. Построить график $u(x, T)$.

Граничные условия

С помощью pdepe():

1. Гранич. условие 1-го рода (Дирихле): $T(x_1, t) = T_1$.

Система стремится к T_1 на границе (но есть переменный поток).

2. Гранич. условие 2-го рода (поток, Нейман): $T_x(x_1, t) = g_1$.

$T_x(x_1, t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ поток против x.

3. Гранич. условие 3-го рода (конвекция, Робин*):
$T_x(x_1, t) + bT(x_1, t) = g_1$.

Естественные ГУ: $-\lambda T_x(x_1, t) = \alpha[T(x1, t) - T_\infty]$.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные виды теплообмена.
2. Сформулируйте закон Фурье и закон Ньютона.
3. Выведите уравнение теплопроводности в 1D при учет внутренних источников тепла. Запишите размерности параметров в этом уравнении.
4. Запишите трехмерное уравнение в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.
5. Запишите различные редукции трехмерного уравнения, в частности, стационарные уравнения и квази-одномерные уравнения.
6. Запишите граничные условия 1-го, 2-го и 3-го родов для одномерного уравнения.
7. Прочитайте подсказку Матлаба по функции pdepe().