МОД-КП Лабораторная работа 2: Тема 3. Уравнение теплопроводности, функция `pdepe()`

1 Решение уравнения теплопроводности с помощью функции pdepe()

В данной лабораторной работе, необходимо решить смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности с помощью функции Матлаб `pdepe()`. Соответствующие варинты уравнений приведены ниже. Во всех вариантах, интервал по x выбран $[0, 1]$, а время t изменяется в пределах [0,10]. Конкретно, мы будем решать уравнение теплопроводности в безразмерной форме:

$$\frac{\partial_t T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_{\text{вн}}(x, t).$$

с следующим начальным условием:

$$T(x, 0) = T_0(x).$$

и граничными условиями 1-го рода, 2-го или 3-го родов.

Необходимо выполнить следующие шаги:

1. Напишите 3 функции `pdefun1()`, `icfun1()`, `bcfun1()` для своего Варианта уравнения.

2. Напишите основной скрипт, где используется функция `pdepe()`.

3. В основном скрипте, постройте график зависимости начальной температуры $u(x, 0)$, используя функцию `icfun1()`.

4. Постройте график зависимости плотности источников тепла $q_{\text{вн}}(x, t)$, используя функцию `pdefun1()`.

5. Если граничные условия 1-го или 2-го родов, постройте графики зависимости функции u или ее производной в граничных точках от времени. Если граничные условия 3-го рода, определите, являются ли они естественными.

6. Проанализируйте примерную динамику температуры, на основе графиков начальной температуры $u(x, 0)$, плотности $q_{\text{вн}}(x, t)$ и граничных условий. Постройте примерный график зависимости $u(x, t)$.

7. Запустите основной скрипт и получите зависимость $u(x,t)$, а также распределение температуры в начальный и конечный моменты времени $u(x,0)$ и $u(x,t_{end})$. Изменяйте шаг по x и определите оптимальный шаг, при котором численное решение близко к теоретическому. Сравните численные графики с полученными в п.6.

8. Сделайте выводы из полученных результатов.

Что включить в отчет: 1) Номер варианта, 2) Уравнение теплопроводности, 3) График начальной температуры $u(x,0)$. 4) График плотности источников тепла $q_{\text{вн}}(x,t)$. 5) Графики (если имеются) изменения функции и производных на границах. 6) Графики $u(x,t)$, $u(x,0)$ и $u(x,t_{end})$, полученные численным моделированием. 7) Использованная величина шага по x. 8) В конце отчета по данному заданию приведите свои выводы: Как влияет величина шага по x на точность вычислений? Как можно объяснить динамику температуры, испольуя начальное условие, распределение источников тепла, и граничные условия? Какие эффекты, тенденции наблюдаются в численном счете? Общие выводы: Как можно изменить / упростить / улучшить данное задание? и т.п.

Отчет в Степике пишите полностью, но кратко. Можно также написать отчет в Ворде, или другом редакторе. В этом случае необходимо doc- или pdf-файл разместить в облачном хранилище (YandexDisk, Mail.ru, GoogleDrive и т.д.), а в Степике указать соответствующую ссылку.

Варианты задач:

1. $u_t = u_{xx} + \left(2 - \dfrac{8x^2}{3}\right) e^{t-x^2},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = 2\,e^t/3, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = -2\,e^{t-1}/3,$
$u(x,0) = 2\,e^{-x^2}/3, \quad u_{th}(x,t) = 2\,e^{t-x^2}/3.$

2. $u_t = u_{xx} - \dfrac{2}{\operatorname{ch}(x,t)}\left(x\operatorname{th}(xt) + t^2(2\operatorname{th}^2(xt) - 1)\right),$

$u(0,t) = 2 - e^{t-1}/4, \quad u(1,t) - 2u_x(1,t) = e^{t-1}/4 + \dfrac{2(1+2t\operatorname{th}t)}{\operatorname{ch}t},$

$u(x,0) = 2 - e^{x-1}/4, \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}(xt)} - e^{x+t-1}/4.$

3. $u_t = u_{xx} + \dfrac{x + 2\,t^2\operatorname{th}(xt)}{\operatorname{ch}^2(xt)},$

$u(0,t) + u_x(0,t) = 1 + t, \quad u_x(1,t) = 1 + \dfrac{t}{\operatorname{ch}^2 t},$
$u(x,0) = x, \quad u_{th}(x,t) = x + \operatorname{th}(xt).$

4. $u_t = u_{xx} + x - t^2\operatorname{ch}(xt) + x\operatorname{sh}(xt),$
$u_x(0,t) = t - 1, \quad u(1,t) - 3u_x(1,t) = 2\,(1-t) + \operatorname{ch}t - 3\,t\operatorname{sh}t,$

$u(x,0) = 1 - x, \quad u_{th}(x,t) = x(t-1) + \mathrm{ch}(xt).$

5. $u_t = u_{xx} + 2xt + \dfrac{1 + \mathrm{th}(x-t) - 2\,\mathrm{th}^2(x-t)}{\mathrm{ch}(x-t)},$

$u(0,t) + u_x(0,t) = t^2 + \dfrac{1 + \mathrm{th}\, t}{\mathrm{ch}\, t}, \quad u(1,t) = t^2 + \dfrac{1}{\mathrm{ch}(1-t)},$

$u(x,0) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x}, \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x-t)} + xt^2.$

6. $u_t = u_{xx} - \mathrm{sh}(x-t) - \mathrm{ch}(x-t),$
$u(0,t) - u_x(0,t) = e^t, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = e^{1-t},$
$u(x,0) = \mathrm{ch}\, x, \quad u_{th}(x,t) = \mathrm{ch}(x-t).$

7. $u_t = u_{xx} - \dfrac{3\,(1 + \mathrm{ch}^2(1-x-t) + \mathrm{sh}(2-2x-2t))}{8\,(\mathrm{ch}(1-x-t))^{3/2}},$

$u(0,t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\mathrm{ch}(1-t)}, \quad u(1,t) - 2\,u_x(1,t) = \dfrac{3\,(\mathrm{ch}\, t - \mathrm{sh}\, t)}{2\sqrt{\mathrm{ch}\, t}},$

$u(x,0) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\mathrm{ch}(1-x)}, \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\mathrm{ch}(1-x-t)}.$

8. $u_t = u_{xx} + \dfrac{5\,(2\mathrm{th}^2(x-t) - 1)}{2\,\mathrm{ch}^2(x-t)},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = -\dfrac{5}{2}\left(\mathrm{th}\, t + \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\right), \quad u_x(1,t) = \dfrac{5}{2\mathrm{ch}^2(t-1)},$

$u(x,0) = \dfrac{5}{2}\mathrm{th}\, x, \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{5}{2}\mathrm{th}(x-t).$