МОД-КП Практика и Лаб.работа 4 (Неделя 10): Тема 6. Стационарное уравнение теплопроводности: Метод итераций

1 Решение стационарного уравнения теплопроводности: Теория

На данном практическом занятии мы решим стационарное уравнение теплопроводности для двумерной системы методом конечных разностей. В компактной форме это уравнение записывается в следующем виде:

$$-\mathrm{div}(\lambda\,\mathrm{grad}T) = q_{\text{вн}} - \alpha(T - T_\infty).$$

Мы рассматриваем случай, когда коэффициент теплопроводности λ не зависит от координат и нет конвективного теплообмена на боковой поверхности ($\alpha = 0$). Тогда уравнение теплопроводности имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $q = q_{\text{вн}}/\lambda$. Будем считать, что область задана в виде квадрата $x = [0, 1]$, $y = [0, 1]$, и на границах заданы условия 1-го, 2-го или 3-го родов. Для численного решения уравнения (1), введем разбиение по x и y: $x_i = (i-1)h$ $y_j = (j-1)h$. где $i, j = 1, \ldots, N$. Будем определять неизвестную функцию только в узлах сетки: $u_{i,j} = T(x_i, x_j)$ (физическую величину обозначаем переменной T, численную – переменной u). Применяя центральные разности для вторых производных, можно переписать уравнение (1) в следующем виде

$$\frac{1}{h^2}[(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})] + q(x_i, y_j) = 0,$$

или

$$(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) + h^2 q(x_i, y_j) = 0. \tag{2}$$

Данное уравнение справедливо для $i, j = 2, \ldots, N-1$. Значения функции на границах (хотя бы один индекс i, j равен 1 или N) определяются из граничных условий.

Можно показать, что уравнение (2) – это система линейных уравнений относительно $u_{i,j}$. Поэтому можно использовать стандартные методы (например, метод исключения Гаусса) для решения этой системы. Однако, формальная запись этой системы затруднительна. Более того, при изменении шага дискретизации, количество членов и коэффициенты при них изменятся, поэтому данный подход трудоемкий для численной реализации.

Данную систему можно решить методом итераций (методом Якоби или Гаусса-Зейделя). Для этого перепишем уравнение (2) в следующем виде

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}[u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + h^2 q(x_i, y_j)]. \tag{3}$$

где верхний индекс $k = 1, 2 \ldots$ означает номер итерации. В соответствии с уравнением (3), новое значение функции в узле (i, j) определяется через старые значения функции в соседних узлах. Начальное распределение (при $k = 1$) $u_{i,j}$ задается произвольно, например равным температуре на одной из границ области. Уравнение (3) соответствует методу Якоби. Известно, что данный метод сходится, если абсолютное значение коэффициента при функции в узле (i, j) не превосходит суммы абсолютных значений коэффициентов при остальных членах, см. уравнение (2).

Уравнение (3) справедливо только для внутренних точек. Для определения значений функции на границах необходимо использовать граничные условия. Пусть на границах заданы условия 3-го рода

$$(aT_z + bT)_G = f \tag{4}$$

где $z = \{x, y\}$, а индекс G показывает, что значение берется на границе. В дальнейшем, вместо (a, b и f) используем (a_L, b_L, f_L), (a_R, b_R, f_R) (a_T, b_T, f_T) на левой ($x = 0$), правой ($x = 1$) и верхней ($y = 1$) границах, соответственно. Для простоты везде считаем, что на нижней границе ($y = 0$) задано условие первого рода $T = T_B$.

Рассмотрим условие на левой границе, $x = 0$. Для дискретизации производной T_x желательно использовать центральную разность

$$T_x(0, y) = \frac{u_{2,j} - u_{0,j}}{h}. \tag{5}$$

Но значения $u_{0,j}$ нет, т.к. оно лежит вне рассматриваемого интервала $x = [0, 1]$. При этом условие (4) запишется в следующем виде

$$\left[a\left(\frac{u_{2,j} - u_{0,j}}{h}\right) + bu_{1,j}\right]_G = f \tag{6}$$

Чтобы исключить значение функции в фиктивной точке, используем факт, что функция T на границе также должна удовлетворять уравнению (1), и следовательно $u_{1,j}$ – уравнению (2), т.е.

$$u_{1,j} = \frac{1}{4}[u_{2,j}^{(k)} + u_{0,j}^{(k)} + u_{1,j+1}^{(k)} + u_{1,j-1}^{(k)}) + h^2 q(x_1, y_j)]. \tag{7}$$

Исключая $u_{0,j}$ из уравнения (6) с помощью уравнения (7), и разрешая получившееся уравнение относительно $u_{1,j}$, получим:

$$u_{1,j} = \frac{(-2f_L + a_L\, q_{1,j}\, h)h + a_L(u_{1,j-1} + 2u_{2,j} + u_{1,j+1})}{2(2a_L - b_L h)}, \tag{8}$$

где $j = 2, N-1$ и $q_{1,j} \equiv q(x_1, y_j)$.

Аналогично, устраняя фиктивную точку на правой границе, $x = 1$, получим

$$u_{N,j} = \frac{(2f_R + a_R\, q_{N,j}\, h)h + a_R(u_{N,j-1} + 2u_{N-1,j} + u_{N,j+1})}{2(2a_R + b_R h)}, \tag{9}$$

где $j = 2, N-1$. Соответственно, на верхней границе, $y = 1$, получим

$$u_{i,N} = \frac{(2f_T + a_T\, q_{i,N}\, h)h + a_T(u_{i-1,N} + 2u_{i,N-1} + u_{i+1,N})}{2(2a_T + b_T h)}, \tag{10}$$

где $i = 2, N-1$.

Для определения значениий функций $u_{1,N}$ и $u_{N,N}$ в угловых точках необходимо использовать по два граничных условия и уравнение (3). Тогда для верхней левой точки можно получить

$$u_{1,N} = \frac{(2a_L f_T - 2a_T f_L + a_L a_T\, q_{1,N}\, h)h + 2a_L a_T(u_{1,N-1} + u_{2,N})}{2(2a_L a_T - a_T b_L h + a_L b_T h)}, \tag{11}$$

а для верхней правой точки

$$u_{N,N} = \frac{(2a_T f_R + 2a_R f_T + a_R a_T\, q_{N,N}\, h)h + 2a_R a_T(u_{N-1,N} + u_{N,N-1})}{2(2a_R a_T + a_T b_R h + a_R b_T h)}. \tag{12}$$

Таким образом, используя уравнения (3), (8), (9), (10), (11), и (12), можно рассчитать значение температуры во всех точках области на данной итерации.

2 Практическое занятие

Найти стационарное распределение температуры по уравнению (1) для квадратной области $x = [0, 1]$, $y = [0, 1]$ методом итераций Якоби. Плотность источников и граничные условия заданы в следующем виде

$q(x, y) = 800 \sin(3(x^2 - y^2))$,
$x = 0 : T_x = 0; \quad x = 1 : -T_x = 3(T - 30)$,
$y = 0 : T = 40; \quad y = 1 : T = 80$.

3 Лабораторная работа 4

Найти стационарное распределение температуры по уравнению (1) для квадратной области $x = [0, 1]$, $y = [0, 1]$ с помощью инструментария PDE Toolbox и методом итераций Якоби. Ниже приведены плотности источников и граничные условия для каждого варианта. Отметим, что на нижней границе, при $y = 0$, для всех вариантов, стоит условие 1-го рода.

Варианты задач:

Вариант **1.**
$q(x,y) = 700\,((x-0.5)^2 + (y-0.7)^2)$.
$x=0: T_x = 0; \quad x=1: -T_x = 5(T-10)$.
$y=0: T = 100; \quad y=1: T_y = 0$.

Вариант **2.**
$q(x,y) = 1200\,\cos(4*(x^2\,y^2))$.
$x=0: T_x = 2(T-40); \quad x=1: T_x = 0$.
$y=0: T = 25; \quad y=1: -T_y = 8(T-80)$.

Вариант **3.**
$q(x,y) = 350/\cosh(x\,y)$.
$x=0: T_x = 7(T-10); \quad x=1: T = 120$.
$y=0: T = 65; \quad y=1: T_y = 0$.

Вариант **4.**
$q(x,y) = 600\,\log(x+y+1)$.
$x=0: T_x = 11(T-10); \quad x=1: -T_x = 5(T-90)$.
$y=0: T = 20; \quad y=1: T_y = 0$.

Вариант **5.**
$q(x,y) = 400\,(x^2 - y^3)$.
$x=0: T_x = 3(T-30); \quad x=1: -T_x = 7(T-30)$.
$y=0: T = 120; \quad y=1: T = 20$.

Вариант **6.**
$q(x,y) = 1100\,(\sin(3x) + \cos(4y))$.
$x=0: T_x = 0; \quad x=1: T_x = 0$.
$y=0: T = 10; \quad y=1: T = 8(T-50)$.

Вариант **7.**
$q(x,y) = 700\,\sin(3*x)\,\sqrt{1+y^2}$.
$x=0: T_x = 0; \quad x=1: -T_x = 12(T-40)$.
$y=0: T = 70; \quad y=1: T = 4(T-150)$.

Вариант **8.**
$q(x,y) = 1200\,\sin(2x)\,\cos(3y^2)$.
$x=0: T_x = 7(T-60); \quad x=1: T_x = 0$.
$y=0: T = 10; \quad y=1: T = 100$.

Порядок выполнения работы

1. Рассчитайте свою задачу с помощью инструментария PDE Toolbox. Используйте модуль “Heat Transfer”. Используйте достаточно мелкую сетку. Сохраните полученный

график (двумерный, с изотермами и потоками тепла).

2. Напишите программу для решения стационарного уравнения теплопроводности методом Якоби.

3. Задайте значение числа точек $N = 11$ (шаг $h = 0.1$). Найдите число итераций, за которое процесс сходится, а также минимальное и максимальное значения температуры. Повторите это для $N = 21$ и $N = 51$. Запишите полученные значения. (Примечание: Для некоторых значений N процесс итераций может не сходиться. При этом количество итераций будет равно максимальному.)

4. Задайте $N = 51$. Получите график стационарное распределения температуры. Проверьте, что распределение удовлетворяет граничным условиям. Сравните полученный график с графиком, найденным с помощью инструментария PDE Toolbox.

5. (факультативно) Измените программу так, чтобы она рассчитывала стационарное распределение по методу Гаусса-Зейделя. Определите число итераций для $N = 51$, и сравните с методом Якоби.

6. Сделайте выводы из полученных результатов.

Что включить в отчет: 1) Номер варианта. 2) Формулы плотности источников и граничных условий. 3) Значения числа итераций, минимальной и максимальной температур для $N = 11, 21, 51$. 4) Графики зависимости $u(x, y)$, полученные с помощью инструментария PDE Toolbox и методом Якоби. На втором графике укажите названия осей x, y, а также в заголовке графика значение N. 5) В конце отчета по данному заданию приведите свои выводы: Как влияет величина шага по x на точность вычислений? Как при этом меняется количество итераций? Меняется ли качественно распределение температуры при изменении N? Соответствуют ли распределения температур, вычисленные по первому и второму способами? Общие выводы: Как можно изменить / упростить / улучшить данное задание? и т.п.

Отчет в Степике пишите полностью, но кратко. Можно также написать отчет в Ворде, или другом редакторе. В этом случае необходимо doc- или pdf-файл разместить в облачном хранилище (YandexDisk, Mail.ru, GoogleDrive и т.д.), а в Степике указать соответствующую ссылку.