Филиал МИФИ, Ташкент

МОД-КП 06,07: Нестационарное уравнение теплопроводности

Э. Н. Цой

ФТИ АН РУз, Ташкент, Узбекистан

весна, 2022

Пространственно-временная сетка

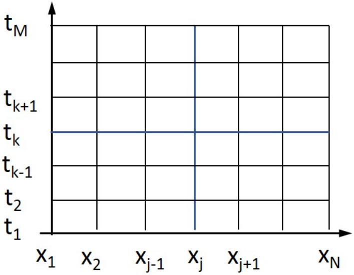
$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2\alpha}{R}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(x,t), \quad x = [0,1],$$

Начальные условия: $u(x,0) = u_0(x)$.

Граничные условия: $u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$. 1-го рода.

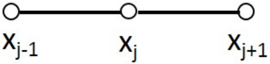
Численный метод – частное решение, при данных НУ и ГУ.

Пространственная или пространственно-временная сетка.



Определяем $u_j^j = u(x_j, t_k)$.

Конечные разности



Первая производная:

$$u'(x) \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}.$$

Вторая производная:

$$u''(x) \approx \frac{\Delta u'}{\Delta x} = \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}\right] =$$

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}.$$

Конечные разности

Первая производная

$$u'(x_j) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + O(h) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2).$$

$$\begin{aligned}
u(x_j - h) &= u(x_j) - u'(x_j)\tfrac{h}{1} + u''(x_j)\tfrac{h^2}{2} - u'''(x_j)\tfrac{h^3}{6} + \ldots \\
u(x_j) &= u(x_j). \\
u(x_j + h) &= u(x_j) + u'(x_j)\tfrac{h}{1} + u''(x_j)\tfrac{h^2}{2} + u'''(x_j)\tfrac{h^3}{6} + \ldots
\end{aligned}$$

Три параметра: u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, три неизвест. $u(x_j), u'(x_j), u''(x_j)$.
($u'''(x_j)$ определить нельзя, нужно больше точек)

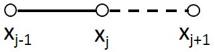
Конечные разности

Первая производная

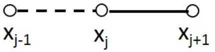
$$u'(x_j) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + O(h) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2).$$

Вторая производная

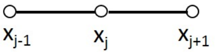
$$u''(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + O(h^2).$$



“Левая”



“Правая”



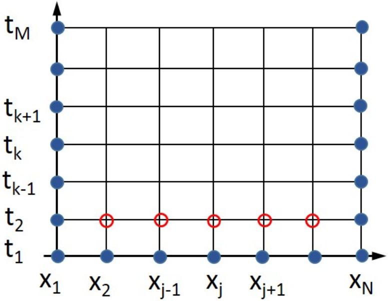
“Центральная”

Уравнение теплопроводности

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2\alpha}{R}(T - T_\infty) + q_{\text{вн}}(x,t), \quad x = [0,1],$$

Начальные условия: $u(x,0) = u_0(x)$.

Граничные условия: $u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$. 1-го рода.

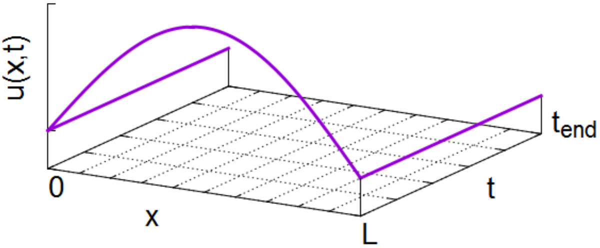


Всего N точек по x.
Вычислять: $(N-2)$ точки.
$u(x_j, t_k) \perp (x,t)$.

Слой $t = 0$ задан.
Если найдем слой $t_2 = \tau$, задача решена.

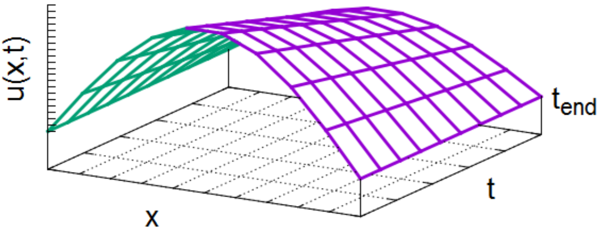
Уравнение теплопроводности

Сетка и неизвестная функция.
Дано: $u(x,0)$ при $t = 0$, и значения на границе.
Найти: $u(x,t)$ на всей сетке.



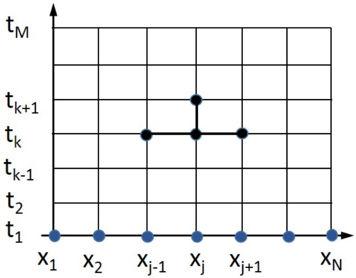
Уравнение теплопроводности

Найденное решение.



Явная схема

$$u_t = a u_{xx} + q_{\text{вн}}(x,t), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = T_1, \; u(L,t) = T_2.$$



Дискретизация по x и t.

$$u_t \approx \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau},$$

$$u_{xx} \approx \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}.$$

Шаблон: $\perp$.

Явная схема для теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + q_{\text{вн}}(x_j, t_k).$$

$$j = 2, \ldots, N-1, \quad k = 0, M-1. \quad u_1^{k+1} = T_1, \quad u_N^{k+1} = T_2.$$

Явная схема: Реализация

Основной скрипт:

```
Задать начальные условия
Цикл по k = 2, M     % цикл по временным слоям
  unew= he_step(x,t,u,h,dt);
  t = t + dt;
  u = unew;   % сделать новый слой текущим
  Если k кратно nout
    Вывод результатов
  конец_если
конец_цикла
```

Явная схема: Реализация

Явная схема для теплопроводности

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \tau \left[a \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + q_{\text{вн}}(x_j, t_k) \right].$$

```
function unew = he_step(x,t,u,h,dt)
p = dt*a/h^2;
Цикл по j = 2, N-1    % по внутр.точкам x
  unew(j)= u(j)+p*(u(j+1)-2*u(j)+u(j-1))+tau*q(x_j,t_k);
конец_цикла
unew(1) = T1;  unew(N) = T2;
конец_функции
```

Аппроксимация и устойчивость

Погрешность аппроксимации (невязка) показывает насколько хорошо разностное уравнение аппроксимирует исходное уравнение в ЧП.

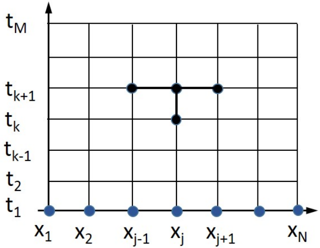
$$\delta_A = \left(-\frac{\tau}{2} y_{tt} + \frac{ah^2}{12} y_{xxxx}\right)_j = O(\tau + h^2).$$

Условие устойчивости явной схемы

$$p = a\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2}.$$

Неявная схема

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}+q_{\text{вн}}(x_j,t_k). \qquad \text{(явная схема)}$$



$$u_t\approx\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau},$$

$$u_{xx}\approx\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}.$$

Шаблон: $\top$.

Неявная схема для теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+q_{\text{вн}}(x_j,t_k).$$

$$i=2,\dots,N-1,\quad k=0,M-1.\quad u_1^{k+1}=T_1,\quad u_N^{k+1}=T_2.$$

Значения функции на границах

Граничные условия

2-го рода: $u_x(0,t) = q(t)$, 3-го рода: $au_x(0,t) + bu(0,t) = q_L(t)$.

Аппроксимация ГУ 3-го рода

$$a\frac{u_2 - u_1}{h} + bu_1 = q_L,$$

Значение функции на левой границе

$$u_1^{k+1} = \frac{au_2^{k+1} - h\,q_L}{a - hb} + O(h).$$

Самостоятельно: Значение функции на правой границе.

Проблема: аппроксимация ГУ $= O(h)$, аппроксимация уравнения $= O(h^2)$.

Неявная схема

Проблема:

При нахождении $(k+1)$-го слоя, исп. точки на этом слое.

Решение:

Сводится к решению системы линейных уравнений (N, N).

Аппроксимация – та же, что и у явной схемы.

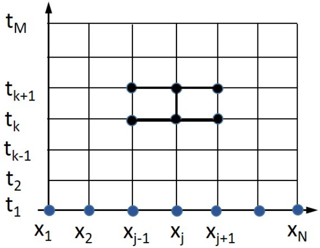
Безусловная устойчивость – при любом соотношении τ и h.

Неявная схема

Другая неявная схема для теплопроводности

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\left[\sigma\left(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k\right)/h^2+\right.$$
$$\left.(1-\sigma)\left(u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}\right)/h^2\right]+q_{\text{вн}}(x_j,t_k).$$

$$i=2,\ldots,N-1,\quad k=0,M-1.\quad u_1^{k+1}=T_1,\quad u_N^{k+1}=T_2.$$



При $\sigma=1$ – явная схема,
при $\sigma=0$ – неявная схема,
при $\sigma=0.5$ – схема
Кранка-Николсона.

Методы построения разностных схем

- Метод разностной аппроксимации (рассмотренный).
- Интегро-интерполяционный метод (метод баланса).
- Метод неопределенных коэффициентов.

Для любой построенной схемы надо проверять порядок аппроксимации и условие устойчивости.

Также необходимо выполнять различные законы сохранения и условия согласования.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое пространственно-временная сетка?
2. Запишите приближенные формулы для первой и второй производной через конечные разности.
3. Выведите приближенные формулы для первой и второй производной, используя разложения возле точки x_j.
4. Каков порядок погрешности при аппроксимации первой производной с помощью левой, правой, и центральной конечной разностью.
5. Запишите явную схему для уравнения теплопроводности с ГУ 1-го рода. Каков шаблон явной схемы?
6. Как определять значения функции на границах для граничных условий 2-го и 3-го родов?
7. Запишите схему Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности с ГУ 1-го рода. Каков шаблон этой схемы?