МОД-КП Практика и ДЗ-4 (Неделя 6, 7): Тема 4. Численное решение уравнения теплопроводности

1 Решение уравнения теплопроводности

Цель данного практического занятия – решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности, используя явную численную схему. Конкретно, мы будем решать уравнение теплопроводности в безразмерной форме:

$$u_t = u_{xx} + q_{\text{вн}}(x,t). \tag{1}$$

где $x = [0,1]$, $q_{\text{вн}}(x,t)$ – плотность внешних источников / стоков тепла, с следующими начальными условиями:

$$u(x,0) = u_0(x).$$

граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода.

Явная численная схема для уравнения теплопроводности имеет следующий вид

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \tau \left[\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + q_{\text{вн}}(x_j, t_k) \right], \quad j = 2, \ldots, N-1, \tag{2}$$

где $u_j^k = u(x_j, t_k)$, h – шаг по x, τ – шаг по t. Численная схема (2) предназначена для внутренних точек $j = 2, \ldots, N-1$ по x. Для нахождения значений u на границах, необходима аппроксимация граничных условий. Например, из условий 3-го рода для $x = 0$

$$au_x(x,0) + bu(x,0) = q_L(t)$$

можно найти, что

$$u_1^{k+1} = \frac{au_2^{k+1} - h\, q_L(t_{k+1})}{a - hb}. \tag{3}$$

После нахождения значений u на новом $(k+1)$-ом временном слое для внутренних по x точек по формуле (2), значение на границе $x = 0$ определяется из уравнения (3). Аналогичное уравнение можно записать для правой границы $x = 1$ (сделайте самостоятельно). Заметим, что уравнение (3) можно использовать и для граничных условий 1-го рода (при $a = 0$, и $b = 1$) и 2-го рода (при $a = 1$, и $b = 0$).

1.1 Псевдокод решения

Основной скрипт имеет цикл по всем временным слоям. Внутри цикла делается один шаг по времени с помощью функции пользователя `he_step()`. Данная функция определяет значения u_j^{k+1} на новом временном слое, по значениям на текущем u_j^k, $j = 1, \ldots, N$. Псевдокод основного скрипта и функции `he_step()` приведены ниже.

```
Задать начальные условия
Цикл по k = 2, M     % цикл по временным слоям
  unew= he_step(x,t,u,h,dt);
  t = t + dt;
  u = unew;   % сделать новый слой текущим
  Если k кратно nout
    Вывод результатов
  конец_если
конец_цикла

function unew = he_step(x,t,u,h,dt)
p = dt / h^2;
Цикл по j = 2, N-1    % по внутр.точкам x
  unew(j)= u(j)+p*(u(j+1)-2*u(j)+u(j-1))+tau*q(x_j,t_k);
конец_цикла
unew(1) = T1;  unew(N) = T2;
конец_функции
```

Примеры основного кода и функции см. в шаблонах `pract06_shab.m` и `he_step.m`.

1.2 Задачи для Практики и Домашнего задания

Уравнения в данной разделе, те же, что и Практике (Недели 5, 6), которые решались с помощью функции Матлаба `pdepe()`.

1. Решить уравнение теплопроводности:

$$u_t = u_{xx} + q, \quad u(x,0) = T_1 + (T_2 - T_1)x, \quad \text{или} \quad u(x,0) = 4x(1-x).$$

1) $q = 0, \quad u(0,t) = 2, \quad u(1,t) = 1.$
2) $q = 0, \quad u_x(0,t) = 2, \quad u_x(1,t) = 2.$
3) $q = 0, \quad u_x(0,t) = 2, \quad u_x(1,t) = 1.$
4) $q = 0, \quad u_x(0,t) = -1, \quad u_x(1,t) = 1.$
5) $q = 0, \quad u_x(0,t) = 1, \quad u_x(1,t) = -1.$

2. Решить уравнение теплопроводности ($u_{th}(x,t)$ – точное решение)

$$u_t = u_{xx} + \frac{2x(1 + x + x\,t + (1+t)^2}{4(1 + x + x\,t)^{3/2}},$$

$u(0,t) + 2u_x(0,t) = 2 + t, \quad u(1,t) + 2\,u_x(1,t) = \dfrac{3+2t}{\sqrt{2+t}},$

$u(x,0) = \sqrt{1+x}, \quad u_{th}(x,t) = \sqrt{1+x+x\,t}.$

3. Решить уравнение теплопроводности ($u_{th}(x,t)$ – точное решение)

$u_t = u_{xx} + \dfrac{3(3x^2-t-1)}{2(1+t+x^2)^2},$

$u(0,t) - u_x(0,t) = \dfrac{3}{2}\ln(1+t), \quad u_x(1,t) = \dfrac{3}{2+t},$

$u(x,0) = \dfrac{3}{2}\ln(1+x^2), \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{3}{2}\ln(1+t+x^2).$