МОД-КП Лабораторная работа 3: Тема 4. : Нестационарное уравнение теплопроводности

1 Явная схема для уравнения теплопроводности

В данной лабораторной работе, необходимо решить смешанную краевую задачу для нестационарного уравнения теплопроводности с помощью явной схемы. Теоретический материал см. в файле `kp-w07.pdf` (Неделя 7). Детали реализации явной схемы см. файле `kp-w07prakt.pdf` (Неделя 7).

Необходимо выполнить следующие шаги:

1. Модифицируйте функцию `he_step()`, которая реализует один шаг по явной схеме для внутренних и граничных точек по x.

2. Модифицируйте (если нужно) основной скрипт, который использует функцию `he_step()`.

3. Решите уравнение из своего варианта, и постройте численные и теоретические зависимости (на одном графике) $u(x, 0)$ и $u(x, t_{end})$ (получится 4 кривых на одном графике). Проанализируйте точность численного решения в зависимости от величины шага h по x.

4. Сделайте выводы из полученных результатов.

Что включить в отчет: 1) Номер варианта, 2) Уравнение теплопроводности, 3) График зависимостей $u(x, 0)$ и $u(x, t_{end})$, полученные численным моделированием и из теоретической формулы. 4) Использованная величина шага по x. 5) В конце отчета по данному заданию приведите свои выводы: Как влияет величина шага по x на точность вычислений? Как при этом меняется время вычислений? Какую порядок аппроксимации использовался для граничных условий? Какие эффекты, тенденции наблюдаются в численном счете? Общие выводы: Как можно изменить / упростить / улучшить данное задание? и т.п.

Отчет в Степике пишите полностью, но кратко. Можно также написать отчет в Ворде, или другом редакторе. В этом случае необходимо doc- или pdf-файл разместить в облачном хранилище (YandexDisk, Mail.ru, GoogleDrive и т.д.), а в Степике указать соответствующую ссылку.

Варианты задач те же, что и на в Лаб. работе 2 (Неделя 6), а именно:

Варианты задач:

1. $u_t = u_{xx} + \left(2 - \dfrac{8x^2}{3}\right) e^{t-x^2},$
$u(0,t) - u_x(0,t) = 2\,e^t/3, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = -2\,e^{t-1}/3,$
$u(x,0) = 2\,e^{-x^2}/3, \quad u_{th}(x,t) = 2\,e^{t-x^2}/3.$

2. $u_t = u_{xx} - \dfrac{2}{\operatorname{ch}(x,t)}\left(x \operatorname{th}(xt) + t^2(2\operatorname{th}^2(xt) - 1)\right),$
$u(0,t) = 2 - e^{t-1}/4, \quad u(1,t) - 2u_x(1,t) = e^{t-1}/4 + \dfrac{2(1 + 2t\operatorname{th} t)}{\operatorname{ch} t},$
$u(x,0) = 2 - e^{x-1}/4, \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{2}{\operatorname{ch}(xt)} - e^{x+t-1}/4.$

3. $u_t = u_{xx} + \dfrac{x + 2\,t^2 \operatorname{th}(xt)}{\operatorname{ch}^2(xt)},$
$u(0,t) + u_x(0,t) = 1 + t, \quad u_x(1,t) = 1 + \dfrac{t}{\operatorname{ch}^2 t},$
$u(x,0) = x, \quad u_{th}(x,t) = x + \operatorname{th}(xt).$

4. $u_t = u_{xx} + x - t^2 \operatorname{ch}(xt) + x \operatorname{sh}(xt),$
$u_x(0,t) = t - 1, \quad u(1,t) - 3u_x(1,t) = 2\,(1-t) + \operatorname{ch} t - 3\,t \operatorname{sh} t,$
$u(x,0) = 1 - x, \quad u_{th}(x,t) = x(t-1) + \operatorname{ch}(xt).$

5. $u_t = u_{xx} + 2xt + \dfrac{1 + \operatorname{th}(x-t) - 2\operatorname{th}^2(x-t)}{\operatorname{ch}(x-t)},$
$u(0,t) + u_x(0,t) = t^2 + \dfrac{1 + \operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t}, \quad u(1,t) = t^2 + \dfrac{1}{\operatorname{ch}(1-t)},$
$u(x,0) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x-t)} + xt^2.$

6. $u_t = u_{xx} - \operatorname{sh}(x-t) - \operatorname{ch}(x-t),$
$u(0,t) - u_x(0,t) = e^t, \quad u(1,t) + u_x(1,t) = e^{1-t},$
$u(x,0) = \operatorname{ch} x, \quad u_{th}(x,t) = \operatorname{ch}(x-t).$

7. $u_t = u_{xx} - \dfrac{3\,(1 + \operatorname{ch}^2(1-x-t) + \operatorname{sh}(2-2x-2t))}{8\,(\operatorname{ch}(1-x-t))^{3/2}},$
$u(0,t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\operatorname{ch}(1-t)}, \quad u(1,t) - 2\,u_x(1,t) = \dfrac{3\,(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)}{2\sqrt{\operatorname{ch} t}},$
$u(x,0) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\operatorname{ch}(1-x)}, \quad u_{th}(x,t) = \dfrac{3}{2}\sqrt{\operatorname{ch}(1-x-t)}.$

8. $u_t = u_{xx} + \dfrac{5\,(2\mathrm{th}^2(x-t)-1)}{2\,\mathrm{ch}^2(x-t)}$,

$$u(0,t) - u_x(0,t) = -\frac{5}{2}\left(\mathrm{th}\,t + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\right), \quad u_x(1,t) = \frac{5}{2\mathrm{ch}^2(t-1)},$$

$$u(x,0) = \frac{5}{2}\,\mathrm{th}\,x, \quad u_{th}(x,t) = \frac{5}{2}\,\mathrm{th}(x-t).$$