Филиал МИФИ, Ташкент

МОД-КП 11: Тема 7. Численное решение эволюционных уравнений: Уравнение Кортевега-деВриза

Э. Н. Цой

ФТИ АН РУз, Ташкент, Узбекистан

весна, 2022

Линейные и нелинейные системы

Линейные соотношения $\Rightarrow$ линейные системы:
Закон Гука: $F = -k\,\Delta x$.
Закон Фурье: $q = -\lambda \partial T/\partial x$.
Поляризация: $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$.
Принцип суперпозиции (моды не взаимодействуют).

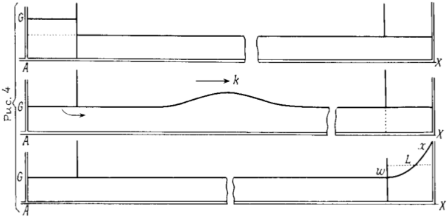
Отклик системы зависит нелинейно от внешнего воздействия (причины) $\Rightarrow$ нелинейные системы.
Обмен энергией (взаимодействие) между модами.
Все системы – нелинейны, при малом воздействии – линейное приближение.

До 70-х годов 20-го века в основном линейные уравнения.

Уединенная волна

Джон Скотт Рассел (1834 г.):
Наблюдал движение баржи по каналу.
Водяной холм: длина = 30 футов, высота = 1.5 фута, скорость 8-9 миль/час.
Холм двигался “не меняя своей формы и … скорости”.

Волна трансляции, экспериментально: скорость $v^2 = g(h + \eta)$, где h – глубина жидкости, η – высота волны.



Уравнение Кортевега-деВриза

Дж.Буссинеск (1872), Релей (1876): Возможна уединенная волна в форме $\mathrm{sech}^2()$.

Д. Кортевег и Г. деВриз (1895):

$$u_t + \beta u u_x + \gamma u_{xxx} = 0$$

Задача Ферми-Паста-Улама: Постановка

Э. Ферми, Дж. Паста, С. Улам (1955):
Термализация в цепочке атомов.

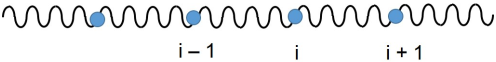
Линейные системы – бесконечная (?) теплопроводность (решения в виде невзаимодействующих sin(), cos() – бесконечно протяженные функции, нет обмена между модами).

Предположение: В нелинейных системах – обмен энергии между модами, замедляет распространение возбуждения (тепла).

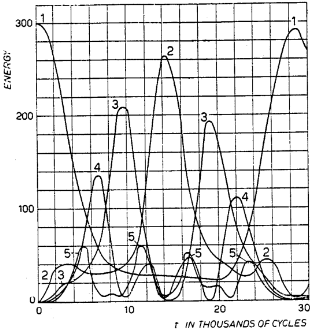
Частицы с ангармоническими пружинами: $F = k\,(\Delta + \alpha\Delta^2)$.

$$m\, y_{i,tt} = k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})[1 + \alpha\,(y_{i+1} - y_{i-1})],$$

$i = 1, 2, \ldots, N-1$, $y_0 = y_N = 0$.



Задача Ферми-Паста-Улама: Результаты



Ожидалось: Термализация – энергия моды $(\sin(kx))$ равнораспределится по всем возможным модам из-за нелинейности.

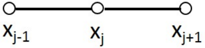
Получили: Термолизации не происходит. Энергия распределяется по нескольким модам, затем снова собирается в начальную моду.

Возбуждение может распространяться в виде импульса.

Задача ФПУ – начало вычислительной физики, начало нелинейной физики.

Вывод уравнения Буссинеска и КдВ

$$m\, y_{i,tt} = k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})[1 + \alpha\,(y_{i+1} - y_{i-1})].$$



$$\begin{aligned} y_{i-1} &= y(x_i) - y'(x_i)\frac{h}{1} + y''(x_i)\frac{h^2}{2} - y'''(x_i)\frac{h^3}{6} + y^{\mathrm{iv}}(x_i)\frac{h^4}{24} + \ldots \\ y_i &= y(x_i). \\ y_{i+1} &= y(x_i) + y'(x_i)\frac{h}{1} + y''(x_i)\frac{h^2}{2} + y'''(x_i)\frac{h^3}{6} + y^{\mathrm{iv}}(x_i)\frac{h^4}{24} + \ldots \end{aligned}$$

Уравнение Буссинеска

$$y_{tt} - y_{xx} = \bar{\beta} y_x y_{xx} + \bar{\gamma} y_{xxxx}.$$

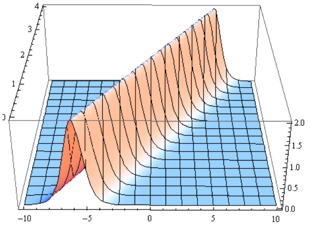
Уравнение Кортевега-деВриза

$$u_t + \beta u\, u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \qquad u = y_x.$$

Забуски, Крускал (1965).

Уравнение Кортевега-деВриза и солитоны

Стандартно ($\beta = 6, \gamma = 1$): $\quad u_t + 6u\,u_x + u_{xxx} = 0.$



Решение:

$$u(x,t) = 2a^2\,\mathrm{sech}^2[a(x - 4a^2 t)],$$ – солитон.

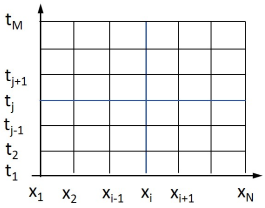
- Солитоны движутся без изменения формы и параметров.
- Солитоны взаимодействуют упруго, как частицы.
- КдВ имеет бесконечное число законов сохранения.
- КдВ имеет глубокую связь с уравнением Шредингера.
- КдВ интегрируется методом обратной задачи рассеяния .
- Имеется целый класс нелинейный уравнений, решаемых методом ОЗР.

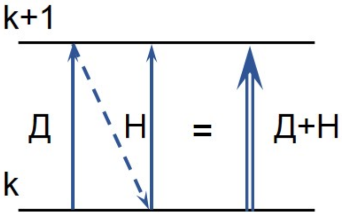
Численное решение уравнения КдВ

$$u_t = -\beta u\, u_x - \gamma u_{xxx}. \qquad x = [-\infty, \infty], \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Метод разделения по процессам (split step method):
Каждый член отвечает за отдельный процесс.
(Например, уравнение маятника: $\ddot{u} + \gamma \dot{u} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$.)

Численно: Совместное действие дисперсии и нелинейности на Δt = дисперсия на Δt + нелинейность на Δt.





Численное решение уравнения КдВ: Дисперсия

$u_t = -\gamma u_{xxx}.$ $\qquad | \cdot e^{-ikx}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} dx.$

$\bar{u}(k,t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx.$

$\int_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-ikx} dx = u\, e^{-ikx}|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-ikx} dx = i\, k\, \bar{u}(k,t).$

Фурье П. от производной $= ik\cdot$ Фурье П. от функции.

$\bar{u}_t = i\, k^3\, \gamma\, \bar{u}.$ – ОДУ отн. $\bar{u}(k,t)$.

Решение на линейном шаге

$\bar{u}(k, t+\Delta t) = \bar{u}(k,t) e^{i\gamma k^3 \Delta t}.$

$$u(x, t+\Delta t) = F^{-1}\left[e^{i\gamma k^3 \Delta t} F[u(x,t)] \right].$$

Численное решение уравнения КдВ: Нелинейность

$u_t = -\frac{\beta}{2}(u^2)_x.$ $\qquad \big| \cdot e^{-ikx}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} dx.$

$\bar{u}_t = -\frac{\beta}{2} ik\,\overline{u^2}.$

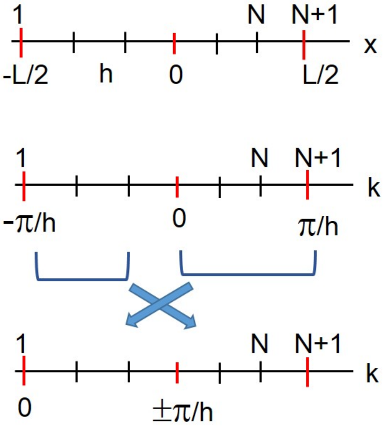
Решение на нелинейном шаге (метод Эйлера)

$$\bar{u}(k, t+\Delta t) \approx \bar{u}(k,t) - \Delta t\,\frac{\beta}{2}\,ik\,\overline{u^2}.$$

$$u(x, t+\Delta t) \approx F^{-1}[\bar{u}(k, t+\Delta t)].$$

Быстрое преобразование Фурье

Численно – конечные интервал $x = [-L/2, L/2]$ и шаг h.
Шаг $h = L/N$.
Им соответствуют волновые числа $k_c = \pi/h,\ \ \Delta k = 2\pi/L$.



Быстрое преобразование Фурье

Соответствие между x и k, или u_j и $\bar{u}_j$.

j	x	k
1	$-L/2$	0
2	$-L/2+h$	$\frac{2\pi}{Nh}$
3	$-L/2+2h$	$\frac{4\pi}{Nh}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$N/2$	$-L/2+h(N/2-1)$	$\frac{2\pi(N/2-1)}{Nh}$
$N/2+1$	$-L/2+hN/2$	$\pm\frac{\pi}{h}$
$N/2+2$	$-L/2+h(N/2-1)$	$-\frac{2\pi(N/2-1)}{Nh}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
N-1	$-L/2+h(N-2)$	$-\frac{4\pi}{Nh}$
N	$-L/2+h(N-1)$	$-\frac{2\pi}{Nh}$

W. Press et al, Numerical recipes: Fortran, Chap.12 (1997).

Псевдокод для уравнения КдВ

$$u_t + \beta\, u\, u_x + \gamma\, u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

```
Задать параметры (beta, gam, N, ...)
Задать вектор k
Задать начальное условие

Цикл по n (временнЫм слоям)
   Линейный шаг (дисперсия) для u
   Нелинейный шаг для u
   t = t + dt;
   Если n кратно nout
      Сохранить результат для данного t
   конец_если
конец_цикла
```

Псевдокод для уравнения КдВ

$$u_t + \beta\, u\, u_x + \gamma\, u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

```
Задать параметры (beta, gam, N, ...)
Задать вектор k
Задать начальное условие

U = fft(u); % Фурье-преобразование от u
Цикл по n (временнЫм слоям)
  Линейный шаг (дисперсия) для U
  Нелинейный шаг для U
  t = t + dt;
  Если n кратно nout
    Преобразовать U в u.
    Сохранить результат для данного t
  конец_если
конец_цикла
```

Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие линейных систем от нелинейных?
2. Почему для нелинейных систем не выполняется принцип суперпозиции?
3. В чем состоит явление термолизации для цепочки атомов?
4. Опишите кратко численный эксперимент Ферми-Паста-Улама.
5. Выпишите уравнение Кортевега-деВриза.
6. Что такое солитон?
7. В чем состоит метод разделения по процессам (как трактовка уравнений, и как численный метод)?
8. Получите решения для линейного и нелинейного шагов при использовании метода разделения по процессам для уравнения КдВ.