МОД-КП Домашнее задание – 2 (Неделя 4): Тема 2. Динамические системы

1 Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В данном Домашнем задании необходимо решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (ОДУ).

Для решения ОДУ используйте шаблоны кода из Практического занятия.

1.1 Задание 1: Решение ОДУ 1-го порядка

В данном задании необходимо решить численно задачу Коши для ОДУ 1-го порядка с помощью функции Матлаба `ode45()`. Задачи взяты из книги А. Филиппова, "Сборник задач по дифференциальным уравнениям", (2000). Необходимо сравнить численное решение с точным. В Таблице 1 приведены номер варианта, номер уравнения, начальное условие, и точное решение. Сами уравнения приведены на Рис.1.

Решите уравнение по времени от начального до $t_{end} = 10$. Постройте на одном графике численное и точное решения. Оцените среднюю абсолютную погрешность численного решения.

Таблица 1.

Вариант	№ уравнения	Начальное условие	Точное решение
1	301	$y(1) = 0$	$y_{th} = x(e^{1-x} - 1)$
2	302	$y(1) = 1/3$	$y_{th} = (2x-1)/(2x+1)$
3	305	$y(0) = 1/2$	$y_{th} = (x+1)/(x+2)$
4	306	$y(0) = 2$	$x_{th} = y^3 - 4y$
5	310	$y(0) = -1/2$	$y_{th} = x - 1/2$
6	311	$y(0) = -1/2$	$y_{th} = \exp(\sqrt{x})$
7	317	$y(0) = 1$	$x_{th} = (1-y^2)/y$
8	319	$y(0) = 0$	$x_{th} = \mathrm{tg}(y) - y$

Что включить в отчет: 1) Номер варианта, 2) Значения использованных относительной (`RelTol`) и абсолютной (`AbsTol`) погрешностей. 3) График с численным и точным решениями. 4) Среднюю абсолютную погрешность численного решения. 5) Выводы по работе.

Примечание. В Вариантах 4, 7, 9 точное решение задано в виде зависимости $x = x(y)$. Для построения точного решения в программе надо задавать вектор y, а вычислять вектор x. Соответствующая часть кода может выглядеть следующим образом,

```
yth = 1:0.1:10;
xth = (1 - y.^2 ) ./ y;
. . .
plot(. . . , xth, yth, '-');
```

Также, в этих Вариантах, оценка абсолютной погрешности и ее среднего значения будет затруднительной. Для оценки абсолютной погрешности выберите по графику точку по x, где отклонение численного и точного решений примерно максимально, и найдите значение абсолютную погрешность в этой точке. Примите это значение в качестве средней абсолютной погрешности.

301. $xy' + x^2 + xy - y = 0.$ **302.** $2xy' + y^2 = 1.$

303. $(2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0.$

304. $(xy' + y)^2 = x^2 y'.$ **305.** $y - y' = y^2 + xy'.$

306. $(x + 2y^3)y' = y.$ **307.** ${y'}^3 - y'\mathrm{e}^{2x} = 0.$

310. ${y'}^2 + 2(x-1)y' - 2y = 0.$

311. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'.$

312. $x^2 y' - 2xy = 3y.$

313. $x + yy' = y^2(1 + {y'}^2).$

314. $y = (xy' + 2y)^2.$ **315.** $y' = \dfrac{1}{x - y^2}.$

316. ${y'}^3 + (3x - 6)y' = 3y.$ **317.** $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}.$

Рис. 1: Уравнения для 1-го задания.

1.2 Задание 2: Решение системы двух ОДУ 1-го порядка

В данном задании необходимо решить численно задачу Коши для системы двух ОДУ 1-го порядка с помощью функции Матлаба `ode45()`. После решения сравнить численные решения с точными.

Решите уравнение по времени от начального до $t_{end} = 10$. Постройте на одном графике численное и точное решения $u(t)$. Оцените среднюю абсолютную погрешность численного решения.

Уравнение в каждом варианте является неоднородным линейным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Для решения этого уравнения с помощью функции `ode45()`, необходимо представить его в виде системы уравнений 1-го порядка.

Что включить в отчет: 1) Номер варианта, 2) Значения использованных относительной (`RelTol`) и абсолютной (`AbsTol`) погрешностей. 3) График с численным и точным решениями. 4) Среднюю абсолютную погрешность численного решения. 5) Выводы по работе.

Варианты уравнений:

1. $u'' + \dfrac{1}{2(1+x)}u' - \dfrac{1+2x}{2(1+x)}u = \dfrac{3\cos x - (3+4x)\sin x}{2\sqrt{1+x}}$,
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u_{th} = \sqrt{1+x}\,\sin x + e^{-x}$.

2. $u'' - (\operatorname{th} x)\,u' + (\operatorname{ch}^2 x)\,u = \dfrac{x\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{th} x}{3}$,
$u(0) = 0, \quad u'(0) = 4/3, \quad u_{th} = \sin(\operatorname{sh} x) + x/3$.

3. $u'' + (\cos x)\,u' + (\sin x)\,u = 1 - \cos x - \sin x$,
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_{th} = \sin x + \cos x$.

4. $u'' + \dfrac{1}{1+x}u' + \dfrac{1}{(1+x)^2}u = \dfrac{2+6x+5x^2}{(1+x)^2}$,
$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u_{th} = x^2 + \sin(\ln(1+x))$.

5. $u'' + (\operatorname{ch} x)\,u' + (\operatorname{sh} x)\,u = \operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x$,
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad u_{th} = \exp(-\operatorname{sh} x) + x$.

6. $u'' + \dfrac{2x}{1+x^2}u' + \dfrac{2\,x\operatorname{tg} x}{1+x^2}u = \dfrac{2\,x\operatorname{tg} x}{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \cos x$,
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u_{th} = \cos x + \operatorname{arctg} x$.

7. $u'' - \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}u' - \left(1 + \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}\right)u = -\dfrac{\sqrt{\cos x}}{2}(3 + \operatorname{tg} x)$,

$u(0) = 2, \quad u'(0) = -1, \quad u_{th} = \sqrt{\cos x} + \exp(-x).$

8. $u'' + \dfrac{1}{1+x} u' + \dfrac{\mathrm{tg} x}{1+x} u = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1+x} \ln(1+x) - \cos x,$
$u(0) = 1, \quad u'(0) = 2, \quad u_{th} = \cos x + 2\ln(1+x).$