

МОД-КП 10: Тема 6. Стационарное уравнение теплопроводности: Метод итераций

Э. Н. Цой

ФТИ АН РУз, Ташкент, Узбекистан

весна, 2022

Стационарная теплопроводность в 2D

Стационарная теплопроводность в компактном виде

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \beta T = q_{\text{вн}}(\vec{r}).$$

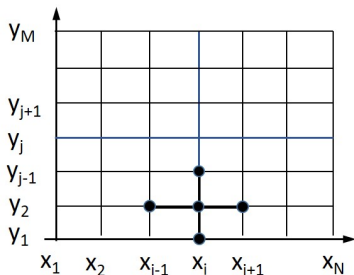
+ граничные условия. Эллиптическое уравнение.

Частный случай, который рассматриваем ($q = q_{\text{вн}}/\lambda$)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q(x, y) = 0, \quad (1)$$

Численная схема

Сетка, шаблон, граничные условия, проблема



$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q(x, y) = 0.$$

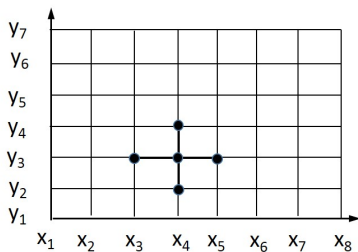
$$[(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})] + h^2 q_{i,j} = 0.$$

Пусть известна T на границе. Но температура в неизвестных точки выражается через неизвестные точки.

Численная схема

Численная схема:

$$[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}] + h^2 q_{i,j} = 0.$$



$$[u_{5,3} + u_{3,3} + u_{4,4} + u_{4,2} - 4u_{4,3}] + h^2 q_{4,3} = 0.$$

$$u_{i,j} \equiv w_{i+N(j-1)}. \quad u_{4,3} = w_{20}, \quad u_{4,4} = w_{28} \text{ и т.д.}$$

$$w_{21} + w_{22} + w_{28} + w_{12} - 4w_{20} = -Q_{20}.$$

это система линейных уравнений (метод Гаусса, метод Якоби...).

Численная схема

Решение СЛАУ методом итераций

$$(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) + h^2 q_{i,j} = 0.$$

Метод Якоби

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[\left(4u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} \right) + h^2 q_{i,j} \right].$$

$i = 2, 3, \dots, N-1$ и $j = 2, 3, \dots, N-1$.

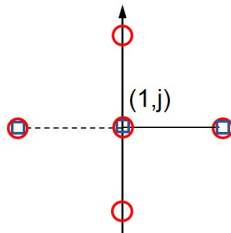
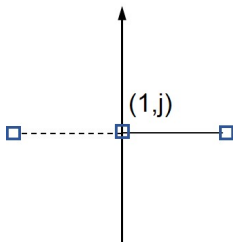
Псевдокод

1. Задать произвольное распределение (например, постоянное).
2. По текущему (k -му) распределению найти новую итерацию ($k+1$)-ю.
3. Выполнять до тех пор, пока текущая и новая итерация не станут близкими.

Граничные условия

При ГУ 1-рода T задается. Что делать при ГУ 2-го и 3-го родов?

ГУ 3-го рода на левой границе: $(aT_x + bT)|_{x=0} = f$.



Фиктивная точка.

$$a \frac{u_{2,j} - u_{0,j}}{h} + bu_{1,j} = f_{1,j},$$

$$(u_{2,j} + u_{0,j} + u_{1,j+1} + u_{1,j-1} - 4u_{1,j}) + h^2 q_{1,j} = 0.$$

Граничные условия

Левая граница ($j = 2, N - 1$)

$$u_{1,j} = \frac{(-2f_L + a_L q_{1,j} h)h + a_L(u_{1,j-1} + 2u_{2,j} + u_{1,j+1})}{2(2a_L - b_L h)}.$$

Правая граница ($j = 2, N - 1$)

$$u_{N,j} = \frac{(2f_R + a_R q_{N,j} h)h + a_R(u_{N,j-1} + 2u_{N-1,j} + u_{N,j+1})}{2(2a_R + b_R h)}.$$

Верхняя граница ($i = 2, N - 1$)

$$u_{i,N} = \frac{(2f_T + a_T q_{i,N} h)h + a_T(u_{i-1,N} + 2u_{i,N-1} + u_{i+1,N})}{2(2a_T + b_T h)}.$$

Граничные условия

Верхняя левая точка

$$u_{1,N} = \frac{(2a_L f_T - 2a_T f_L + a_L a_T q_{1,N} h)h + 2a_L a_T (u_{1,N-1} + u_{2,N})}{2(2a_L a_T - a_T b_L h + a_L b_T h)}.$$

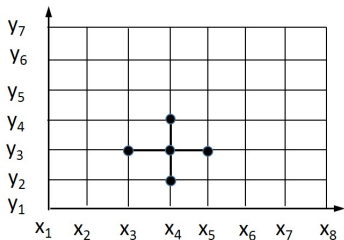
Верхняя правая точка

$$u_{N,N} = \frac{(2a_T f_R + 2a_R f_T + a_R a_T q_{N,N} h)h + 2a_R a_T (u_{N-1,N} + u_{N,N-1})}{2(2a_R a_T + a_T b_R h + a_R b_T h)}.$$

Метод Гаусса-Зейделя

Метод Якоби

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[\left(4u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} \right) + h^2 q_{i,j} \right].$$



Метод Гаусса-Зейделя

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[\left(4u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + h^2 q_{i,j} \right].$$

Псевдокод метода итераций

Основной скрипт:

Задать параметры (niter, delta0, ...)

Задать начальное распределение u

Цикл по $k = 2, niter$ % цикл по итерациям

$u_{new} = \text{stat_iter}(x, t, u, h, dt);$

Δ = средняя разность между итерациями

$u = u_{new};$ % сделать новую итерацию текущей

Если $\Delta < \Delta_0$

Закончить цикл

конец_если

конец_цикла

Проверить k (д.б. $< niter$)

Нарисовать стац. распределение

Псевдокод для функции

Задать параметры u_B , a_L, b_L, f_L , a_R, b_R, f_R , a_T, b_T, f_T

Задать плотность источников тепла

Задать u на нижнем слое по y

for $j = 2:nn-1$ % Цикл по внутренним слоям по y

 Вычислить u на левой границе по x

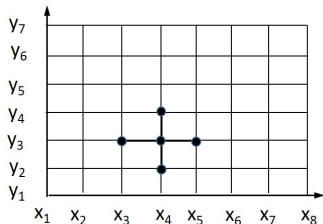
 Вычислить внутренние точки по x (шаблон)

 Вычислить u на правой граница по x

end

Вычислить u на верхнем слое по y

Угловые точки на верхнем слое



Вопросы для самопроверки

1. Что такое пространственно-временная сетка?
2. Запишите стационарное уравнение теплопроводности и его разностное представление.
3. Выведите формулу итераций для стационарного уравнения теплопроводности в двумерной системе.
4. Сколько линейных уравнений будет для внутренних точек при решении стационарного уравнения теплопроводности с шаблоном в форме креста?
5. Получите формулу для значений функции на левой границе, используя граничное условие 3-го рода и шаблон для уравнения.
6. Чем отличается метод Гаусса-Зейделя от метода Якоби для стационарного уравнения теплопроводности?