ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

УДК 519.1, 519.85

Отчет об исследовательском проекте

на тему Исследование движения точек на метрических графах

(промежуточный, этап 3)

Выполнил:
студент группы БПМИ 191 ____________________ Д.В. Пятько

Подпись И.О. Фамилия

22.05.2021

Дата

Принял:
руководитель проекта Всеволод Леонидович Чернышев

Имя, Отчество, Фамилия

Департамент больших данных и информационного поиска, доцент

Должность, ученое звание

Международная лаборатория Алгебраической топологии и ее приложений

Место работы (Компания или подразделение НИУ ВШЭ)

Дата проверки_________2021 ____________________ ____________________

Оценка (по 10-тибалльной шкале) Подпись

Москва 2021

Содержание

Введение

Мы рассматриваем следующую динамическую систему: дан граф с весами на ребрах и одной выделенной вершиной, в нулевой момент времени из выделенной вершины вдоль всех инцидентных ей ребер начинают двигаться точки с единичной скоростью. Как только какая-то из точек оказывается в вершине, на каждом инцидентном вершине ребре появляется новая точка, которая начинает двигаться от вершины по ребру, а старая исчезает. Если в одну вершину одновременно приходит сразу несколько точек, то все эти точки пропадают, а появляются новые точки так, как будто бы вошла только одна точка.

Данная конструкция полезна, например, при изучении некоторых видов сетевых протоколов. Если рассмотреть компьютерную сеть, в которой каждый пакет при получении каким-либо узлом сети, отправляется на все непосредственно соединенные с устройством узлы, то пакеты будут соответствовать точкам на графе в нашей конструкции, вершины – узлам сети, а веса на ребрах – времени, которое нужно, чтобы пакет прошел путь от одного узла до другого.

Также рассматриваемая конструкция используется в квантовой физике при изучении поведения волновых пакетов, локализованных в малой окрестности в начальный момент времени [2].

Основная часть

Пусть N(T) – количество движущихся точек в момент времени T. Основной нашей целью является изучение данной функции на различных графах.
Для неориентированных графов N(T) уже достаточно хорошо изучена. Например, если граф связен и все ребра линейно независимы над Q, то известно [2], что

$$N(T) = N_1 T^{E-1} + o(T^{E-1}),$$

(здесь и далее во всех асимптотических равенствах предполагаем стремление переменной к бесконечности)
где

$$N_1 = \frac{1}{2^{V-2}(E-1)!} \frac{\sum_{i=1}^{E} t_i}{\prod_{i=1}^{E} t_i}$$

$$t_i - \text{время прохождения } i - \text{ого ребра}$$
$$V\ -\ \text{количество вершин в графе}$$
$$\mathrm{E}\ -\ \text{количество ребер в графе}$$

Основная идея доказательства заключается в сведении задачи нахождения числа точек в данный момент времени к задаче поиска количества решений неравенств вида

$$\sum_{i=1}^{k} t_i n_i \leq T,$$

где $n_i \geq 0$.
Неравенства такого вида получаются при рассмотрении количества точек, появившихся в какой-то вершине. Понятно, что, зная для каждой вершины сколько в ней появляется точек до определенного момента времени, можно получить общее число появившихся точек до определенного момента и следовательно оценить число точек в данный момент.
Рассмотрим пример, из которого будет понятно откуда появляются неравенства такого вида при подсчете числа вышедших из вершины точек. Пусть есть подвешенное за вершину A дерево, и мы хотим узнать сколько появилось в вершине A новых точек, при условии, что процесс начинается из нее самой. Любая точка, которая появляется в A порождена каким-то не обязательно простым путем, который начинается и заканчивается в A. Поскольку наш граф – подвешенное дерево, то пройдя по ребру вниз, чтобы вернуться наверх, нужно вновь преодолеть ребро, по которому мы спустились, то есть каждое ребро пройдено четное число раз. Таким образом, при фиксированном поддереве с вершиной A. Количество появившихся в A точек до момента T

$$2t_{i_1}n_1 + 2t_{i_2}n_2 + \cdots + 2t_{i_p}n_p \leq T$$

Где t_{i_f} – времена ребер из поддерева.

По таким неравенствам уже есть асимптотические оценки [2], например известно, что число решений имеет вид

$$R_k(T) + O\big(\log(\mathrm{T})^{k+\varepsilon}\big) \quad \forall\varepsilon > 0$$

Где $R_k(T)$ – многочлен.

Для ориентированных графов на данный момент доказанной и опубликованной формулы нет, но есть гипотеза, что для сильно связных графов с линейно независимыми над Q ребрами выполнено

$$N(T) = N_1 T^{\alpha-1} + o(T^{\alpha-1}),$$

где

$$N_1 = \frac{\sum_{i=1}^{E} t_i}{(\alpha - 1)! \cdot P}$$

$\alpha -$ количество линейно независимых циклов в графе

$\mathrm{P} -$ произведение длин линейно независимых циклов

$t_i -$ время прохождения $i -$ ого ребра

$\mathrm{E} -$ количество ребер в графе

Для начала мы будем проверять гипотезу на случайно сгенерированных графах. Если мы не сможем найти контрпример, то будем пытаться доказать теорему с нуля или с использованием методов, которыми удалось доказать формулу для неориентированных графов [4] и которые частично уже были описаны выше.

Также, мы собираемся рассмотреть случай ориентированных и неориентированных графов с натуральными весами ребер.

Календарный план

1. (23 февраля – 1 марта)
    a. Закончить написание программы для проверки гипотезы о формуле для ориентированных графов.
2. (1 марта – 31 марта)
    a. Если контрпримера не будет найдено, то попытаться доказать формулу.
    b. Если контрпример будет найден, то выделить класс графов, для которых формула не выполена и исправить ее.
    c. Написать программу для моделирования движения точек на бесконечных k-ичных деревьях.
3. (31 марта – 1 апреля)
    a. Начать рассматривать случай натуральных ребер для ориентированных и неориентированных графов: убедится в верности гипотезы и попытаться доказать формулу.
    b. Написание отчета для КТ2

Литература

1. Chernyshev V. L., Tolchennikov A. A., Shafarevich A. I. (2016). Behavior of Quasi-particles on Hybrid Spaces. Relations to the Geometry of Geodesics and to the Problems of Analytic Number Theory, Regular and Chaotic Dynamics.
2. Chernyshev V. L., Tolchennikov A. A. (2017). Correction to the Leading Term of Asymptotics in the Problem of Counting the Number of Points Moving on a Metric Tree. *Russian Journal of Mathematical Physics Vol. 24, No. 3*, 290–298.
3. V. Chernyshev, A. Tolchennikov. (2018). Polynomial approximation for the number of all possible endpoints of a random walk on a metric graph.
4. Vsevolod L. Chernyshev., Anton A. Tolchennikov. (2017). The Second Term in the Asymptotics for the Number of Points Moving Along a Metric Graph. *7, Regular and Chaotic Dynamics, 2017, Vol. 22, No. 8*, 937–948.