# Тема №1. Теория множеств

**def** **Множество** — это совокупность объектов заданных путём их перечисления, либо удовлетворением свойству.

$X = \mathbb{N}$ $M^1_{\text{чётн}} = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$

$X = \mathbb{Z}$ $M^2_{\text{чёт}} = \{\dots, -2m, \dots, -2, 0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$

Множество невозможно сформировать только по св-ву, требуется знать налагаемые глобальные ограничения.

$M := \{a \in X : \frac{a}{2} \in \mathbb{Z}\}$

**def** **Элементом** называется объект $a$, являющийся неделимой частью множества.

$\{1, 2, 3\} = M$, где $4 \notin M$, $3 \notin M^{1,2}_{\text{чётн}}$; $1 \in M$; $2 \in M$; $3 \in M$

$M^1_{\text{чёт}} \subset M^2_{\text{чёт}}$

**def** Если элементы одного множества все без исключения являются элементами другого множества, то говорят что первое множ-во является **подмножеством** второго и записывают в таком виде:

$$M_1 \subset M_2$$

$\exists$ даны $A$ и $B$ $A \subset B$, $B \subset A$ — так может быть?
Да! Т.к. это не противоречит определению.

Два множества равны, если первое есть подмножество второго и одновременно с этим второе является подмножеством первого.

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ но $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 0 \\ 2 & \leftrightarrow & 1 \\ 3 & \leftrightarrow & -1 \\ 4 & \leftrightarrow & 2 \\ 5 & \leftrightarrow & -2 \\ 6 & \leftrightarrow & 3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Каждому $\mathbb{N}$ числу соответствует одно и только одно $\mathbb{Z}$

$\{-2; 2\} \to M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0\}$

$\times\ ?\qquad \parallel$

$\{-2; 2\} \to N = \{x \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}\ \&\ -3 < x < 3\ \&\ x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -1\}$

Все равные множества являются ещё и эквивалентными друг другу. Однако если множества эквивалентные друг другу, но не равные друг другу.

**def** Два множ-ва называются **эквивалентными** если между их элементами $\exists$ взаимооднозначное соответствие.

**def** **Мощность** – х-ка множеств определяющая какое из двух множеств больше, какое меньше либо они равны.

Если $A \subset B \Rightarrow B$ мощнее чем $A$, а $A$ менее мощное чем $B$.

Если $\left.\begin{matrix} A \subset B \\ B \subset A \end{matrix}\right] \Rightarrow A = B$

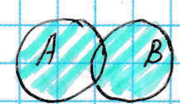
Rem: if $C \sim A\ \&\ A \subset B \Rightarrow B$ более мощную чем $C$

$C \sim A\ \&\ A = B \Rightarrow C \sim B\ \&\ \mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(B)$

$\mathrm{card}(N)$.

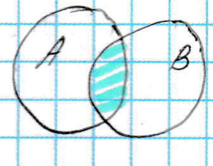
## 1.1 Операции над множествами

**def** Множ-во $C$ называется **объединением** множеств $A$ и $B$ (обознач. $C = (A \cup B)$), если $C := \{x \in X : x \in A \text{ or } x \in B\}$

$A \cup B = C \Longleftrightarrow$ 

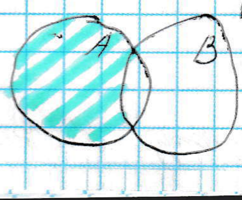
ИЛИ
Or

**def** Множ-во $C$ называется **пересечением** множеств $A$ и $B$ (обознач. $C = A \cap B$), если $C := \{x \in X : x \in A\ \&\ x \in B\}$

$A \cap B = C \Longleftrightarrow$ 

И
AND

**def** Множ-во $C$ называется **разностью** множеств $A$ и $B$ (обознач. $C = A \setminus B$), если $C := \{x \in X : x \in A\ \&\ x \notin B\}$

$A \setminus B = C \Longleftrightarrow$ 

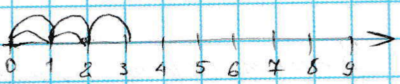
ИСКЛ.
ИЛИ
XOr

# 1.2. Числовые множ.-ва (Классифик. точек множеств)

$\varnothing$ = 0   $\{\varnothing\}$ = 1   $\{\varnothing; \{\varnothing\}\}$ = 2

$\mathbb{N}$ - множ-во натур. чисел.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 11, 12, \dots, 999, 1000, \dots\}$




2 + 3 (Прямая задача) Имеем инфу и работаем над получением ответа

2 + ? = 5 (обратная задача)

5 + ? = 3 Имеем часть информ. и знаем ответ

$\mathbb{N}$ замкнутое относительно „+" и „*" $\Rightarrow$ Если $\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}$

$\mathbb{N} * \mathbb{N} = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ - целые числа (множ-во)

$\mathbb{Z} := \{\mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})\} = \{\dots, -999, \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 999, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ замкнуто относительно „+" и „*" и „−" $\Rightarrow$ Если $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} - \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ - множ-во рациональных чисел

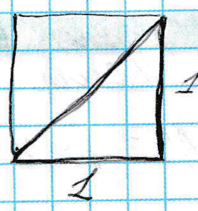
$\mathbb{Q} := \{x \in X : x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$   $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

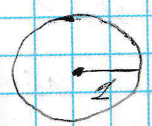
| -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $-\frac{2}{1}$ | $-\frac{1}{1}$ | 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | |
| | | $-\frac{2}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | |
| | | | | 3 | | | | | |
| | | | | 4 | | | | | |
| | | | | 5 | | | | | |
| | | | | n | | | | | |

$x^2 - 2 = 0$ ?

$1 < \sqrt{2} < 2$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$




$\mathbb{R}$ - Иррациональное множество

## Полнота и плотность

**Опр.** Плотным называется множество когда между двумя элементами этого существует ещё один элемент.

## 1.3. Св-ва множеств и классификация точек

$X = \mathbb{R}$ - основное множ-во (действит / веществ. числа)

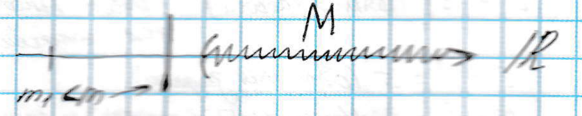
$M_1 := \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$;  $M_2 := \{1, 2, -7\}$;  $M_3 := \{(-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup \{6\}\}$.

$M_4 := \{\varnothing\}$

# Способы задания множеств в множестве $\mathbb{R}$ чисел.

(Ограниченность, не ограниченность; замкнутость, открытость — 4 основных параметра)

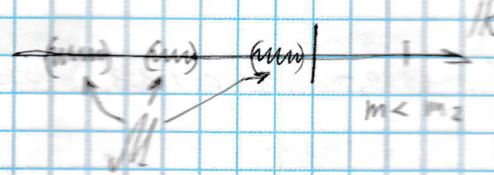
**def** Множ-во $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным (слева/снизу), если $\exists$ число $\in \mathbb{R}$ : $\forall x \in M \Rightarrow m \leq x$.




В этом случае $m$ называют нижней гранью $M$

$m$ — грань и всё что меньше $m$ (левее), но не $\infty$

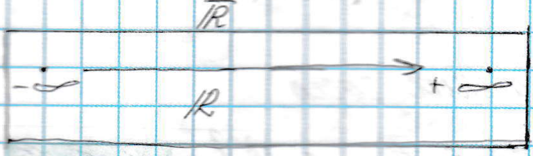
**def** Множ-во $M \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным (сверху/справа), если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in M \Rightarrow m \geq x$.




В этом случае $m$ называется верхней гранью.

$m$ — грань и всё что больше $m$ (справа), но не $\infty$

$\infty \notin \overline{\mathbb{R}}$
$\infty \notin \mathbb{R}$




расширенное $\mathbb{R}$

**def** Множ-во ограниченное, если оно одновременно ограничено и слева и справа.

$$M_5 = \left\{1, 2, -7; \frac{n \cdot \sin n!}{\sqrt{n^2 + n \log_n}}\right\} \; n \in \mathbb{N}$$

Если сущ. хотя бы одна грань (сл. или справа), то их бесконечно много.

$M = (-2; 5)$ — Нет наиб. и наим. элемента (т.к. по Th плотности между двумя элементами $\exists$ ещё один, например 1,1; 1,11; 1,1101; и т. д.)

**def** Инфимум $M$ — наибольшая нижняя грань (точная нижняя грань)

**def** Критерий — это разновидность Th, когда некий факт будет выполнен только в определённом случае. (Частный случай Th. Между двумя предикатами $\Leftrightarrow$ / iff тогда и только тогда.)

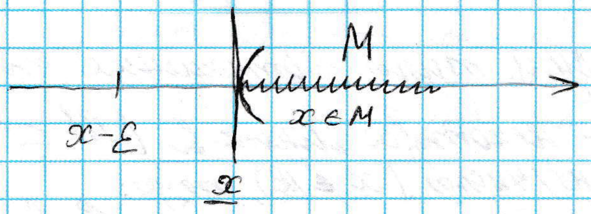
Критерий (о $\exists$ инфимума $M$ ($\inf M$)) — У ограничено слева множ-ва всегда $\exists!$ $\inf M$, при этом ($\underline{x} = \inf M$) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ \; \forall x \in M \\ 2^\circ \; \forall \varepsilon > 0 \\ \exists x \in M : \; \underline{x} > x - \varepsilon \end{cases}$

т.е. $\underline{x}$ является инфимумом $M$ тогда и только тогда когда выполн. 2 условия: 1. $\underline{x}$ — меньшая грань. 2. для любого сколь угодно малого больше 0 сущ. элемент из множ-ва $M$ $\exists$ $\underline{x}$ большей чем

$M_5 = [-2\ ;\ 2]$

$\inf M_5 = -2 \in M_5$

$\overset{?}{\underline{x}}$



$1^\circ\ \forall\ x \le -2$

$-2 \le -2$

$\underline{x} > x - \varepsilon$ $\qquad$ $\underline{x} > x - \varepsilon$

$2^\circ\ x = -2$ $\qquad$ $\exists\, x \in M\ ;\ \forall \varepsilon > 0$ $\qquad$ $-2 > -2 - \varepsilon \quad |\cdot(-1)$

$x \in M$

$2 < 2 + \varepsilon$

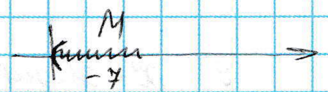
$\Rightarrow -2$ является $\inf M_5$

$M_6 := (-7; 5) = \{x \in \mathbb{R} : -7 < x < 5\}$

$?\ \underline{x} = \inf M_6 = -7$

$1^\circ\ -7 \le x \in M_6$

$2^\circ$ конкр. $\varepsilon > 0$



$\exists x \in M : x = -7 + \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad$ $-7 = \underline{x}$

$\underline{x} > x - \varepsilon$ $\qquad$ $\cancel{-7} > \cancel{-7} + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon$

$\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$M_7 := \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ – найти inf

$\exists\ n \in \mathbb{N} :$ $\boxed{0 > \frac{1}{n} - \varepsilon} \rightsquigarrow \varepsilon > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

→ претендент на inf M

Предполож. $x = 0 = \inf M_7$.

n как целая часть $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

$\varepsilon^\circ = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

$\boxed{[A] + 1 > A}$ ! – всегда верно $\qquad$ $\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ – верно всегда

ДЗ: def Sup.
Сформировать критерий от Sup.

Def Супремум M – наименьшая верхняя грань (точная верхняя грань)

Критерий (о $\exists$ sup M) – У ограничено снизу множ-ва всегда $\exists!$ sup M, при этом ($\underline{x}$ = sup M)

Какие сущ. типы соотношения точки и множества?

**def** Пусть $M$ - некоторое множ-во ($M \subset \mathbb{R}$), а $x$ - некоторая точка (элемент/число) ($x \in \mathbb{R}$), тогда:

$1^\circ$ $x$ - называется внутренней точкой множ-ва $M$, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall m \in \mathbb{R} \ |x - m| < \varepsilon \Rightarrow m \in M$.

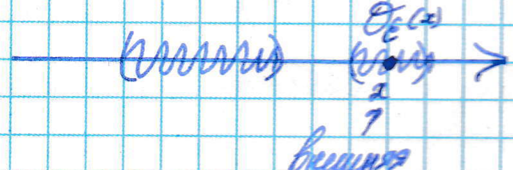
$O_\varepsilon(x)$ - эпсилон окрестность точки $x$

$(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ - интервал и не принадлежит (на расст. $\varepsilon$ от точки $x$)

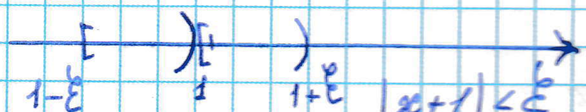
$2^\circ$ $x$ - называется внешней точкой множ-ва $M$, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall_m \in \mathbb{R} \ |x - m| < \varepsilon \Rightarrow m \in M$.

$x \in (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon$

$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$



$3^\circ$ $x$ - граничная точка множ-ва $M$, если



$|x+1| < \varepsilon$

$$\left[ \begin{array}{l} ① \begin{cases} x - 1 \geq 0 & x \geq 1 \\ x - 1 < \varepsilon & x < \varepsilon + 1 \end{cases} \\ ② \begin{cases} x - 1 < 0 & x < 1 \\ -(x-1) < \varepsilon & x > 1 - \varepsilon \end{cases} \end{array} \right.$$

Д/З: Сформулировать def граничной, изолированной, предельной точки.

**def** Граничная точка множества - точка пространства, любая (открытая) окрестность которой содержит как точки, принадлежащие рассматриваемому множ-ву, так и не принадлежащие ему точки (точки его дополн). Граничная точка множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множ-ву.

**def** Изолированная точка множества - такая его точка, в некоторой окрестности которой нет других точек из этого множества, кроме неё самой.

**def** 1. Точка $P$ называется предельной точкой множества $M$, если в любой окрестности точки $P$ имеется, по крайней мере, ещё одна точка множества $M$, кроме точки $P$.
Оказывается, в любой точке окрестности предельной точки содержится бесконечное число точек множества $M$. Сама же предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $M$.

2. Предельная точка числовой последовательности. Так называют (если он существует) частичный предел последовательности $\{x_n\}$ т.е. такое число $C$, что существ. последовательность $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности, для которой
$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = C.$$

# Chapter 1. Вещественные числа.

## Ограниченные и неограниченные числовые множества.

**def** Множ-во $E$ называется ограниченным сверху, если $\exists$ такое число $M \in \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in E \Rightarrow x \le M.$$

В этом случае число $M$ называется верхней гранью, или верхней границей множества $E$.

Если $E$ - огранич. сверху множ-во. и $M$ - его верхняя граница, то $E \subset (-\infty; M]$

Если $M$ - верхняя граница множества $E$ и $M_1 > M$, то $M_1$ тоже верхняя граница $E$. Так наибольшей верхней границы у ограниченного множества нет

**def** Supremum. Пусть $E$ ограничено сверху. Наименьшая из всех верхних граней множества $E$ называется точной верхней гранью или супремумом и обознач $\sup E$.

Пусть $\bar{x} = \sup E$. Тогда можно сформулировать следующие св-ва $\bar{x}$:

1° $\forall x \in E$, $x \le \bar{x}$ ($\bar{x}$ - верхняя грань множества $E$).

2° $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$, то есть $\bar{x} - \varepsilon < x_\varepsilon \le \bar{x}$ ($\bar{x}$ наименьшая верхняя грань).

**Th 1.** (О существовании супремума.) Если непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, то сущ. $\bar{x} = \sup E$.

Замечание 1. Пусть $E$ ограничено сверху и $\bar{x} = \sup E$. Тогда $\bar{x}$ может как принадлежать $E$, так и не принадлежать $E$.

Замечание 2. Если у множества $E$ существует $\sup E = \bar{x}$, то он единствен

**def** Множ-во $E$ называется ограниченным снизу, если $\exists$ такое число $m \in \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in E \Rightarrow m \le x$$

В этом случае число $m$ называется нижней гранью (нижней границей) множ-ва $E$.

Если $E$ ограничено снизу и $m$ его нижняя грань, то $E \subset [m, +\infty)$

Если $m$ - нижняя граница множества $E$ и $m_1 < m$, то $m_1$ тоже нижняя граница $E$. Наименьшей нижней границы у ограниченного снизу множества нет.

**def** Infimum. Пусть $E$ ограничено снизу. Наибольшая из всех нижних границ множества $E$ называется точной нижней гранью или инфимумом и обозначается $\inf E$.

Сформулируем св-ва $\underline{x}$:

1° $\forall x \in E$, $\underline{x} \le x$ ($\underline{x}$ - нижняя грань множ-ва $E$).

2° $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in [\underline{x}, \underline{x} + \varepsilon)$, то есть $\underline{x} \le x_\varepsilon \le \underline{x}+\varepsilon$ ($\underline{x}$ наиб. ниж. гран

Th 2. (О сущ. инфимума). Если непустое мн-во $E \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, то сущ. $\underline{x} = \inf E$.

## Предел числовой последовательности

**def** Числовая последовательность — если каждому числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое число $x_n$, то говорят, что задана числовая последовательность.

Числовая последовательность это функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $f(n) = x_n$.

**def** Совокупность чисел $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ называется множеством значений числовой последовательности.

**def** Число $a$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдётся такой номер $N_\varepsilon$, что для всех $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Пишут: $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

**def** Последовательность $\{x_n\}$, имеющая предел называется сходящейся. Последовательность не являющаяся сходящейся называется расходящейся.

Замечание: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n \to \infty} (x_n - a) = 0$

**def** Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.п.), если

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$$

Замечание. $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ такой, что $\forall n \geq N_\varepsilon\ |\alpha_n| < \varepsilon$

Замечание. Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то последовательность $\{x_n\}$ можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — б.м.п.

Замечание. Определение предела последовательности можно сформулировать эквивалентным образом на языке $\varepsilon$-окрестностей, а именно: Число $a$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$, что $\forall n \geq N_\varepsilon$ все элементы $x_n$ лежат в $\varepsilon$-окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки $a$:

$$x_n = U_\varepsilon(a)$$

## Свойства сходящихся последовательностей

### Единственность предела числовой последовательности

**Th.** Числовая последовательность может иметь только один предел.

**Доказательство.** Предположим, что $\{x_n\}$ имеет два различных предела $a$ и $b$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = b, \text{ и } a \neq b$$

Для определённости считаем $a < b$. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

Тогда $V_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) = \varnothing$.

$$\lim_{n\to\infty} = a \Rightarrow \exists N(\varepsilon_1) = N_1, \text{ что } \forall n \geq N_1\ x_n \in V_\varepsilon(a)$$

$$\lim_{n\to\infty} = b \Rightarrow \exists N(\varepsilon_2) = N_2, \text{ что } \forall n \geq N_2\ x_n \in V_\varepsilon(b)$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$

Тогда $\forall n \geq N$ одновременно $x_n \in V_\varepsilon(a)$ и $x_n \in V_\varepsilon(b)$, что невозможно так как эти окрестности не пересекаются. Следовательно наше предположение не верно и $a = b$.

Th. доказана.

### Ограниченные и неограниченные последовательности

Пусть $\{x_n\}$ – некоторая последовательность и $E$ – множ-во ее значений. Ограниченность сверху, снизу или просто ограниченность последовательности $\{x_n\}$ определяется через ограниченность сверху, снизу, или ограниченность множ-ва $E$.

**def** Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если сущ. такое $M$, что

$$\forall n \in N\ x_n \leq M\ (E \subset (-\infty; M]).$$

**def** Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если $\exists$ такое $m$, что

$$\forall n \in N\ x_n \geq m\ (E \subset [m; +\infty)).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу:

$$x_n \in [m, M]\quad E \subset [m, M].$$

**Замечание.** Последовательность $x_n$ называется неограниченной, если для любого положительного $A$ $\exists$ такое $n_A$, что $|n_A| > A$.

Th. Если последовательность сходится (то есть имеет предел), то она ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Тогда, для $\varepsilon = 1$ $\exists$ номер $N$ такой, что $\forall n \geq N$ $|x_n - a| < 1$. $\Rightarrow$

$\forall n \geq N$

$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$.

Положим $A = \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|\}$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leq A$.

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Th. доказана.

## Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их св-ва

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, то последовательность $x_n$ представима в виде: $x_n = \alpha + \alpha_n$,

где $a_n$ б.м.п.

Сформулируем ещё раз def (б.м.п).

def $\{\alpha_n\}$ называется {б.м.п}, если

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \; |\alpha_n| < \varepsilon$.

или эквивалентно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Th. Если $\alpha_n$ и $\beta_n$ б.м.п., то их сумма $\{\alpha_n + \beta_n\}$ тоже б.м.п.

Доказательство

Так как $\{\alpha_n\}$ б.м.п то $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 : \forall n \geq N_1$

$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Так как $\{\beta\}$ б.м.п то для того же $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2 : \forall n \geq N_2$

$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда, при $n \geq N$ оба неравенства (1) и (2) выполнены. $\Rightarrow \forall n \geq N$.

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\}$ б.м.п.

Тh. доказана.

Тh. Если $\alpha_n$ и $\beta_n$ б.м.п. то их разность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ тоже б.м.п. Доказательство повторяет доказательство предыдущей Тh.

Следствие 1. Алгебраическая сумма любого конечного числа б.м.п. является б.м.п. (св-во 2.)

Так, если $\{\alpha_n^{(1)}\} \ldots \{\alpha_n^{(k)}\}$ б.м.п и $\delta_k = \pm 1$ то $\{\delta_1 \alpha_n^{(1)} + \delta \alpha_n^{(2)} + \ldots + \delta_k \alpha_n^{(k)}\}$ тоже б.м.п.

Тh. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство.

Пусть $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность, а $\{\alpha_n\}$ - б.м.п. Тогда сущ. такое число $A > 0$, что для любого $N$ числа $n$

$$|x_n| < A$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{A}$ и по нему найдём такой номер $N$, что $\forall n \geq N$

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1$$

Тогда $\forall n \geq N$

$$A|\alpha_n| < \varepsilon$$

Поэтому $\forall n \geq N$

$$|x_n \alpha_n| = |x_n|\,|\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$

То есть $\{x_n \alpha_n\}$ - б.м.п.

Тh доказана.

Следствие. Произведение любого конечного числа б.м.п. является б.м.п. (св-во 3).

Частное двух бесконечно малых последовательностей может быть какой годно последовательностью и даже может быть неопределено.

Th. Если все элементы б. м. п. $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу $c$, то $c = 0$ (св-во 4).

Доказательство

Допустим, что $c \neq 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Тогда $\exists$ $N$: что $\forall n \geq N$.

$$|\alpha_n| < \varepsilon$$

то есть

$$|c| < \frac{|c|}{2}.$$

Откуда мы получаем неверное равенство $1 < \frac{1}{2}$.
Полученное противоречие показывает, что $c = 0$.

Th. доказана

Def Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой последовательностью, если $\forall A > 0 \exists N_A$, что $n \geq N_A$ $|x_n| > A$.

Замечание. Если $\{x_n\}$ – б. б. п. то она ограничена
Однако не всякая неограниченная последовательность является б. б. п.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

Th. Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Доказательство

Т.к. $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, то $\exists$ $a, b, \alpha_n, \beta_n$, такие, что

$$x_n = a + \alpha_n$$
$$y_n = b + \beta_n$$

( $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности).

Следовательно $x_n + y_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$,

но последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая.
Следовательно последовательность $\{x_n + y_n\}$ – сходящаяся и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n$$

Th. Доказано.

**Th. Разность** сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n$$

**Th. Произведение** сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. Тогда

$$x_n=a+\alpha_n,\quad y_n=b+\beta_n.$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. $\Rightarrow$

$$x_n y_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(\alpha_n b+\beta_n a+\alpha_n\beta_n)$$

Но $(\alpha_n b+\beta_n a+\alpha_n\beta_n)$ — б.м.п. $\Rightarrow$ $\{x_n\cdot y_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=ab=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n$$

Th доказана.

Замечание. Очевидно, что если $\{x_n\}$ — стационарная начиная с некоторого номера последовательность (то существует номер $N$: $\forall n\geq N$, $x_n=c$), то $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$

Следствие. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то $\forall c$ последовательность $\{c\,x_n\}$ так же сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(c\,x_n)=c\lim_{n\to\infty}x_n$$

**Th.** Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, причём $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$, то начиная с некоторого номера определена последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ которая является сходящейся, причём

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$$

Доказательство

$\exists\ \forall n \geq N$ определена последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\} \Rightarrow$

$\forall n \geq N$ определена последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Т.к. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, тогда

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{b y_n} = \frac{(a+\alpha_n) b - (b+\beta_n) a}{b y_n} =$$

$$= \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Последовательность $\{\beta_n\} = \frac{1}{\beta_n}\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ является

б.м.п. $\Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \beta_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$

Так $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

Тг. доказана.

## Монотонные последовательности. Тг Вейерштрасса. С.

def Последовательность $\{x_n\}$ называется

- неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1}$
- невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \geq x_{n+1}$
- возрастающей (или строго возрастающей), если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$
- убывающей (или строго убывающей), если $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$

def Невозрастающие и неубывающие последовательности называются монотонными.

def Убывающие и возрастающие последовательности называются строгомонотонными.