Формализација различитих модела геометрије и примене у верификацији аутоматских доказивача теорема

Данијела Симић
Ментор: др Филип Марић

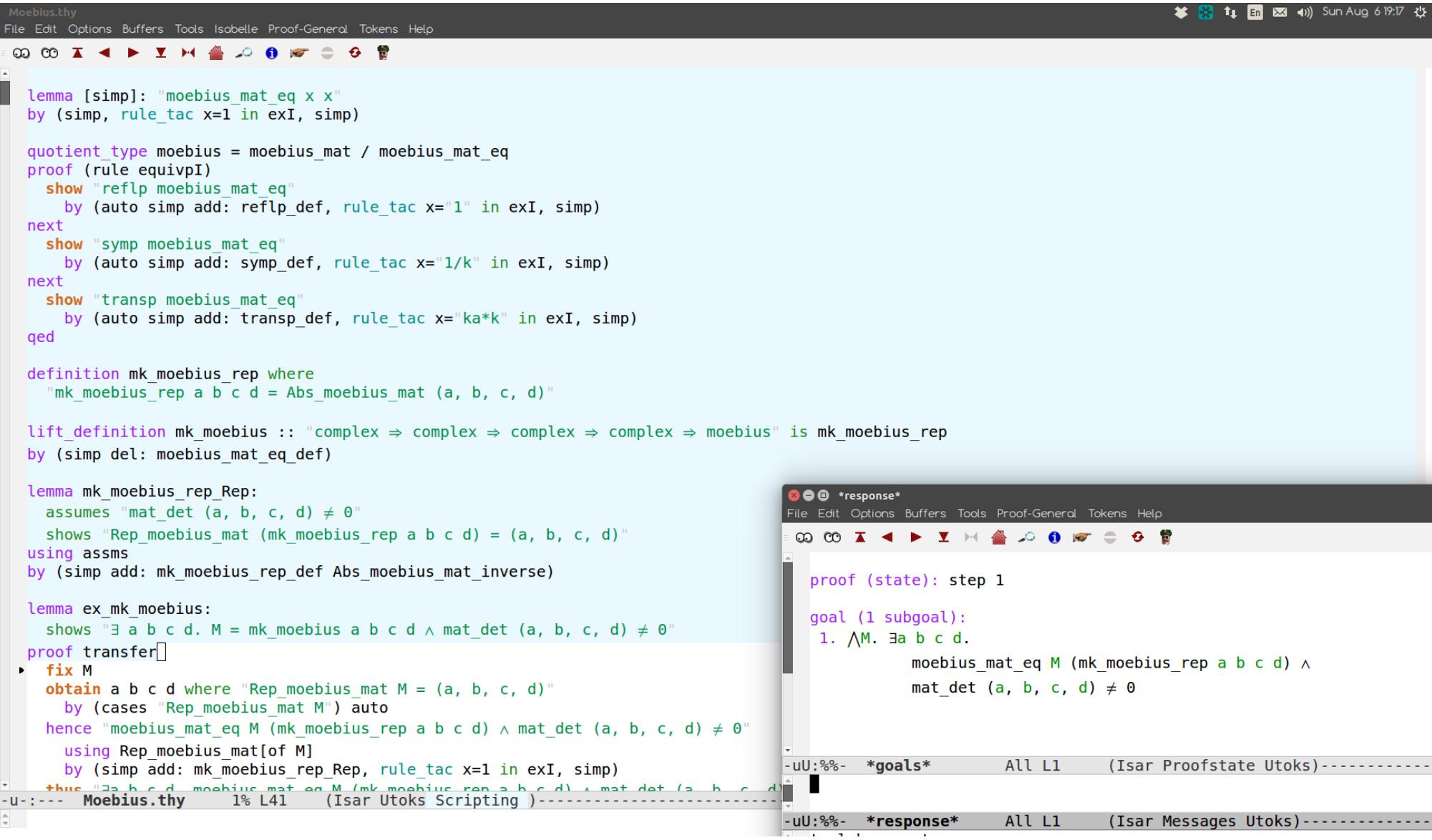
Математички факултет
Универзитет у Београду

24.04.2018.

Доказивање у геометрији

- Грешке у математичким доказима.
- Механички провериви докази.
- Интерактивни доказивачи теорема.
- Аутоматски доказивачи теорема.

Isabelle/HOL



Мотивација и циљеви

- Верификација аутоматских доказивача теорема.
- Формализација мета–теорије потребне да се искаже и докаже коректност алгебарских метода.
- Развој и прилагођавање алгебарских метода.

Циљеви формализације геометрије Декартове равни

- Формализација Декартове координатне равни.
- Различите дефиниције су еквивалентне.
- Стандардна геометрија координатне равни представља модел аксиоматског система Тарског.
- Декартова координатна раван задовољава већину аксиома Хилберта.
- Упоредити ове две формализације.

Основни појмови

- Тачке: **type_synonym** $\texttt{point}^{ag} = \text{"}real \times real\text{"}$
- Распоред тачака: $\mathcal{B}(A, B, C)$

Релација *између* у геометрији Тарског

definition $\text{"}\mathcal{B}_T^{ag}\ (xa, ya)\ (xb, yb)\ (xc, yc) \longleftrightarrow$
$(\exists(k :: real).\ 0 \leq k\ \wedge\ k \leq 1\ \wedge$
$(xb - xa) = k \cdot (xc - xa)\ \wedge\ (yb - ya) = k \cdot (yc - ya))\text{"}$

- Релација подударно: $AB \cong_t CD$

Релација подударно

definition $\text{"}d_{ag}^2\ (x_1, y_1)\ (x_2, y_2) = (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cdot (y_2 - y_1)\text{"}$
definition $\text{"}A_1B_1 \cong^{ag} A_2B_2 \longleftrightarrow d_{ag}^2\ A_1\ B_1 = d_{ag}^2\ A_2\ B_2\text{"}$

Права

- $Ax + By + C = 0$ $(kAx + kBy + kC = 0,\ k \neq 0)$
- **typedef** line_coeffs^{ag} =
  "$\{((A :: real), (B :: real), (C :: real)).\ A \neq 0 \vee B \neq 0\}$"
- **definition** "$l_1 \approx^{ag} l_2 \longleftrightarrow$
  $(\exists\ A_1\, B_1\, C_1\, A_2\, B_2\, C_2.$
  $\lfloor l_1 \rfloor_{R3} = (A_1, B_1, C_1))\ \wedge\ \lfloor l_2 \rfloor_{R3} = (A_2, B_2, C_2)\ \wedge$
  $(\exists k.\ k \neq 0 \wedge A_2 = k \cdot A_1 \wedge B_2 = k \cdot B_1 \wedge C_2 = k \cdot C_1))$"

Права (тип `line`^{ag}) се дефинише коришћењем `quotient_type` команде као класа еквиваленције над релацијом $\approx^{ag}$.

Права – афина дефиниција

- Вектор: **type_synonym** $\texttt{vec}^{ag}$ $=$ "$real \times real$".

- **typedef** $\texttt{line\_point\_vec}^{ag} =$
  "$\{(p ::\texttt{point}^{ag}, v ::\texttt{vec}^{ag}).\ v \neq (0,0)\}$"

- **definition** "$l_1 \approx^{ag} l_2 \longleftrightarrow (\exists\, p_1\, v_1\, p_2\, v_2.$
  $\lfloor l_1 \rfloor_{R3} = (p_1, v_1) \wedge \lfloor l_2 \rfloor_{R3} = (p_2, v_2) \wedge$
  $(\exists km.\ v_1 = k \cdot v_2 \wedge p_2 = p_1 + m \cdot v_1))$"

Изометрије

- Транслација: **definiton** "$\texttt{transp}^{ag}\ (v_1, v_2)\ (x_1, x_2) = (v_1 + x_1, v_2 + x_2)$"
- Ротација: **definition** "$\texttt{rotp}^{ag}\ \alpha\ (x, y) = ((\cos\alpha) \cdot x - (\sin\alpha) \cdot y, (\sin\alpha) \cdot x + (\cos\alpha) \cdot y)$"

Инваријантност

Изометрије чувају основне релације (као што су *између* и *подударно*).

- **lemma** "$\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ B\ C \longleftrightarrow \mathcal{B}_T^{ag}\ (\texttt{transp}^{ag}\ v\ A)\ (\texttt{transp}^{ag}\ v\ B)\ (\texttt{transp}^{ag}\ v\ C)$"

Изометрије

Коришћењем изометријских трансформација значајно се упрошћава формализација.

- Коришћена је техника без губитка на општости:
  definiton "`inv` $P\ t \longleftrightarrow (\forall\ A\ B\ C.\ P\ A\ B\ C \longleftrightarrow P\ (tA)\ (tB)\ (tC))$"

  lemma
  assumes "$\forall\ y_B\ y_C.\ 0 \leq y_B\ \wedge\ y_B \leq y_C \longrightarrow P\ (0,0)\ (0,y_B)\ (0,y_C)$"
  "$\forall v.$ `inv` $P\ (\texttt{transp}^{ag}\ v\ )$"
  "$\forall \alpha.$ `inv` $P\ (\texttt{rotp}^{ag}\ \alpha\ )$"
  shows "$\forall A\,B\,C.\ \mathcal{B}_T^{ag}\ A\ B\ C \longrightarrow\ P\ A\ B\ C$"

Модели геометрије

- Формализација геометрије Тарског, пример Пашове аксиоме.

- Формализација геометрије Хилберта, проблем углова.

Закључци

- Представили смо добро изграђену формализацију Декартове геометрије равни у оквиру система *Isabelle/HOL*.
- Формално је доказано да Декартова координатна раван задовољава све аксиоме Тарског и већину аксиома Хилберта.
- Наше искуство је да доказивање да наш модел задовољава једноставне Хилбертове аксиоме лакше него доказивање да модел задовољава аксиоме Тарског.
- Проблем приликом дефинисања и рада са угловима.
- Најважнија техника коришћена да се упросте докази "без губитка на општости" и коришћење изометријских трансформација.
- Формализација аналитичке геометрије се заснива на аксиомама реалних бројева и у многим доказима су коришћена својства реалних бројева (својство супремума, тактика заснована на Гребнеровим базама).

Циљеви формализације геометрије комплексне равни

- Формализовати теорију проширене комплексне равни, њених објеката и њених трансформација.
- Спојити бројне приступе које можемо срести у препорученој литератури.
- Анализирати и формално доказати све случајеве који често остану недовољно истражени јер их више различитих аутора сматра тривијалним.
- Дискутовати односе између два приступа у формализацији (геометријски и алгебарски) као и њихове предности и мане.
- Анализирати технике које се користе у доказима, као и могућност коришћења аутоматизације.
- Посматрати да ли је доказе лакше извести у моделу Риманове сфере или у моделу хомогених координата.
- Показати да аксиоме Тарског важе у Поенкареовом диск моделу.

- Комплексни бројеви, вектори и матрице у $\mathbb{C}^2$.
- Хермитска матрица: **definition** `hermitean` **where** "`hermitean` $H \longleftrightarrow$ `mat_adj` H `=` H"
- Унитарна матрица: **definition** `unitary` **where** "`unitary` $M \longleftrightarrow$ `mat_adj` M $*_{mm}$ M `= eye`"
- Проширена комплексна раван, $\overline{\mathbb{C}}$.
- Хомогене координате: $z = \frac{z'}{z''}$

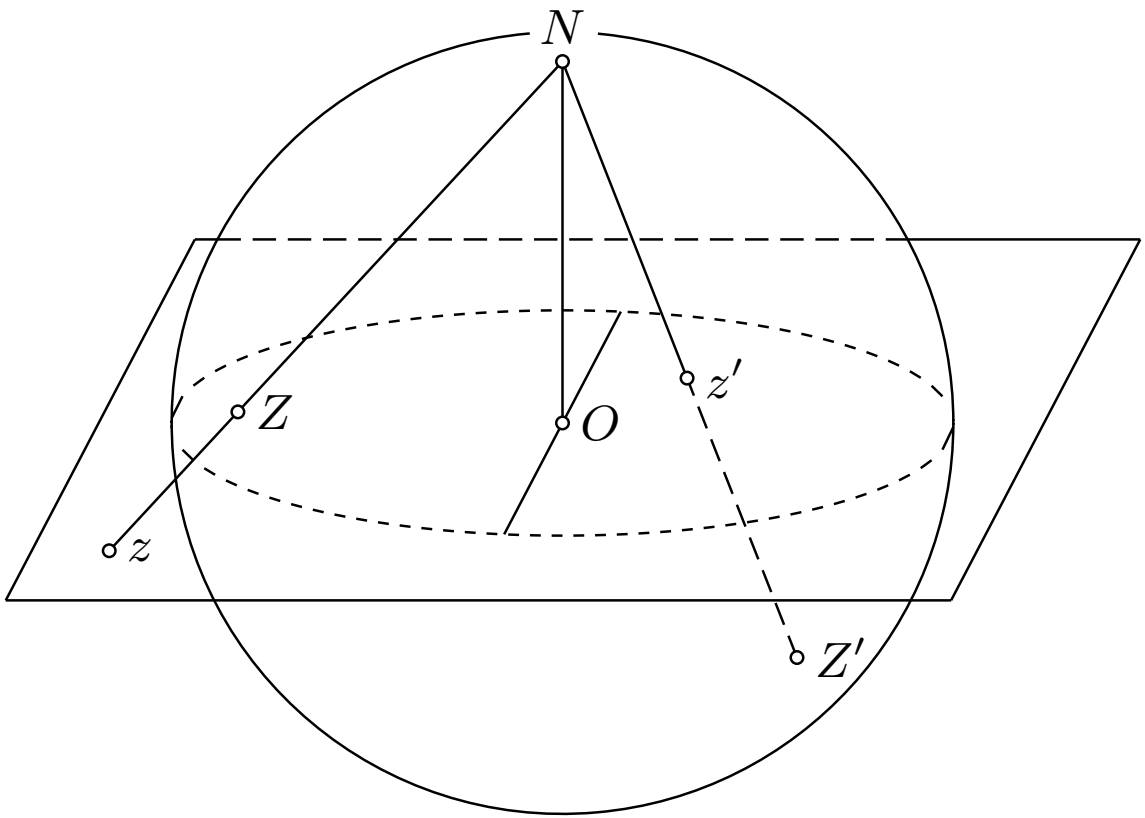
  definition $\approx_{C2}$ `::` "`C2_vec`$_{\neq 0}$ $\Rightarrow$ `C2_vec`$_{\neq 0}$ $\Rightarrow$ `bool`" **where**
  "$z_1 \approx_{C2} z_2 \longleftrightarrow$ (∃ (`k::complex`). `k` $\neq$ `0` $\wedge$ $\lfloor z_2 \rfloor_{C2}$ `=` `k` $*_{sv}$ $\lfloor z_1 \rfloor_{C2}$)"

  quotient_type `complex`$_{hc}$ `=` `C2_vec`$_{\neq 0}$ `/` $\approx_{C2}$

- Бесконачно далека тачка у хомогеним координатама:

  definition `inf_hc_rep` `::` "`C2_vec`$_{\neq 0}$ **where**
  `inf_hc_rep` `=` $\lceil (1,0) \rceil^{C2}$"
  lift_definition ∞_{hc} `::` "`complex`$_{hc}$" **is** `inf_hc_rep`

Стереографска пројекција



Тетивно растојање

- Риманова сфера може бити метрички простор:

definition $\texttt{dist}_{rs}$ ::
"riemann_sphere ⇒ riemann_sphere ⇒ real" **where**
"$\texttt{dist}_{rs}$ M_1 M_2 = (**let** (x_1, y_1, z_1) = $\lfloor M_1 \rfloor_{R3}$;
(x_1, y_1, z_1) = $\lfloor M_2 \rfloor_{R3}$
in norm (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2))"

- Тетивна метрика има своју репрезентацију и у равни.

- Доказано је да су стереографска пројекција и инверзна стереографска пројекција непрекидне.

lemma "continuous_on UNIV stereographic"
"continuous_on UNIV inv_stereographic"

Мебијусове трансформације

- $\mathcal{M}(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \qquad \lfloor \mathcal{M} \rfloor_M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

- **typedef** C2_mat_reg = "{M :: C2_mat. mat_det $M \neq 0$}"

  definition $\approx_M$ :: "C2_mat_reg $\Rightarrow$ C2_mat_reg $\Rightarrow$ bool"
  where "$M_1 \approx_M M_2 \longleftrightarrow$
  ($\exists$ (k::complex). k $\neq$ 0 $\wedge$ $\lfloor M_2 \rfloor_M$ = k $*_{sm}$ $\lfloor M_1 \rfloor_M$)"

  quotient_type mobius = C2_mat_reg / $\approx_M$

Мебијусова група

Пројективна генерална линеарна група, $PGL(2,\mathbb{C})$

Мебијусови елементи формирају групу над композицијом.

- Композиција Мебијусових елемената се постиже множењем матрица које их репрезентују.
- Инверзна Мебијусова трансформација се добија инверзијом матрице која је представља.
- Мебијусова трансформација која је идентитет је представљена јединичном матрицом.
- Дејство Мебијусове групе: $\mathcal{M}(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

```
definition mobius_pt_rep :: "C2_mat_reg ⇒ C2_vec≠0 ⇒ C2_vec≠0"
    where "moebius_pt_rep M z = ⌈⌊M⌋M *mv ⌊z⌋C2⌉C2"
lift_definition mobius_pt :: "mobius ⇒ complexhc ⇒ complexhc" is
    mobius_pt_rep
```

Еуклидске сличности

- **definition** `similarity :: "complex ⇒ complex ⇒ mobius"` **where**
  `"similarity` a b `= mk_mobius` a b `0 1"`

- Формирају параболичку групу.

- Еуклидске сличности су једини елементи Мебијусове групе такви да је тачка ∞_{hc} фиксна тачка.

- Свака еуклидска сличност се може добити као композиција транслације, ротације и хомотетије:

  lemma `"`$a \neq 0 \Longrightarrow$ `similarity` a b `=`
  `(translation` b`) + (rotation (arg` a`)) + (dilatation` $|a|$`)"`

- Рециprочна вредност $(1_{hc} :_{hc} z)$ је такође Мебијусова трансформација.

- Инверзија $(1_{hc} :_{hc} (\texttt{cnj}\ \ z))$ није Мебијусова трансформација – антихоломорфна функција.

Свака Мебијусова трансформација се може добити композицијом еуклидских сличности и рециprочне функције.

- **lemma assumes** "$c \neq 0$"**and** "$a * d - b * c \neq 0$"
  shows "mk_mobius a b c d =
  translation (a/c) +
  rotation_dilatation ((b*c - a*d)/(c*c)) +
  reciprocal + translation (d/c)"

- Декомпозиција је веома често коришћена у доказима.

Дворазмера као Мебијусова трансформација

- `cross_ratio` z z_1 z_2 z_3 је Мебијусова трансформација.
- **lemma** "$[\![z_1 \neq z_2;\ z_1 \neq z_3;\ z_2 \neq z_3]\!] \Longrightarrow$
  $(\exists M.$ `mobius_pt` M z_1 = $0_{hc} \wedge$
  `mobius_pt` M z_2 = $1_{hc} \wedge$ `mobius_pt` M z_3 = $\infty_{hc})$"

Без губитка на општости

lemma assumes "P 0_{hc} 1_{hc} ∞_{hc}" "$z_1 \neq z_2$" "$z_1 \neq z_3$" "$z_2 \neq z_3$"
"$\bigwedge$ M u v w. P u v $w \Longrightarrow$
P (`mobius_pt` M u) (`mobius_pt` M b) (`mobius_pt` M c)"
shows "P z_1 z_2 z_3"

Постоји јединствена Мебијусова трансформација која слика три различите тачке у друге три различите тачке.

Мебијусове трансформације чувају дворазмеру.

Кругоправа

- $A * z * \texttt{cnj}\, z + B * \texttt{cnj}\, z + C * z + D = 0$

  Хермитска матрица: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$; $\quad C = \bar{B}$; $\quad A, D \in \mathbb{R}$

- Скуп тачака на датој кругоправи:

  $$\begin{bmatrix} \bar{z_1} \\ \bar{z_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0$$

  definition "quad_form H z = (vec_cnj z) $*_{vm}$ H $*_{vv}$ z"
  definition on_circline_rep ::
  "C2_mat_herm $\Rightarrow$ C2_vec$_{\neq 0}$ $\Rightarrow$ bool" **where**
  "on_circline_rep H z $\longleftrightarrow$ quad_form $\lfloor H \rfloor_H$ $\lfloor z \rfloor_{C2}$ = 0"
  lift_definition on_circline :: "circline $\Rightarrow$ complex$_{hc}$ $\Rightarrow$ bool" **is**
  on_circline_rep
  definition circline_set :: "complex$_{hc}$ set" **where**
  "circline_set H = {z. on_circline H z}"

Повезаност са правама и круговима у обичној еуклидској равни

- Праве су дефинисане као оне кругоправе код којих матрице имају коефицијент $A = 0$, или, еквивалентно као оне кругоправе које садрже тачку ∞_{hc}.
- Сваки еуклидски круг и еуклидска права може бити представљена коришћењем кругоправе.
- Скуп тачака који су одређени кругоправом је увек или еуклидски круг или еуклидска права.

  definition `euclidean_circle_rep` **where** "`euclidean_circle_rep` H =
  (**let** (A, B, C, D) = $\lfloor H \rfloor_H$
  in $(-B/A,$ `sqrt`(`Re` $((B * C - A * D)/(A * A)))))$"
- Тип кругоправе:
  - имагинарне кругоправе
  - тачка кругоправе
  - реалне кругоправе

Дејство Мебијусових трансформација на кругоправе

Мебијусове трансформације сликају кругоправе на кругоправе.

- Сличност две матрице:

  definition "congruence M H = mat_adj M $*_{mm}$ H $*_{mm}$ M"

- Дефиниција дејства:

  definition mobius_circline_rep ::
  "C2_mat_reg ⇒ C2_mat_herm ⇒ C2_mat_herm" **where**
  "mobius_circline_rep M H = $\lceil$congruence (mat_inv $\lfloor M \rfloor_M$) $\lfloor H \rfloor_H \rceil^H$"
  lift_definition mobius_circline :: "mobius ⇒ circline ⇒ circline"
  is mobius_circline_rep

- **lemma** "mobius_pt M ‘ circline_set H =
  circline_set (mobius_circline M H)"

Дејство Мебијусових трансформација на кругоправе

Мебијусове трансформације чувају и тип кругоправе.

Две тачке ћемо рећи да су симетричне у односу на круг ако се оне сликају једна у другу коришћењем било рефлексије или инверзије у односу на произвољну праву или круг:

```
definition circline_symmetric_rep where
   "circline_symmetric_rep z1 z2 H ⟷
                bilinear_form ⌊z1⌋C2 ⌊z2⌋C2 ⌊H⌋H = 0"
lift_definition circline_symmetric ::  "complexhc ⇒ complexhc ⇒
   circline ⇒ bool" is circline_symmetric_rep
```

Принцип симетрије

Симетрија тачака је очувана након дејства Мебијусових трансформација.

Оријентисане кругоправе

- Еквивалентне оријентисане кругоправе — пропорционалне у односу на неки позитиван, реални фактор.
- Унутрашњост:
  definition `in_o_circline_rep :: "C2_mat_herm ⇒ C2_vec≠0 ⇒ bool"`
  where `"in_o_circline_rep` H $z \longleftrightarrow$ `quad_form` $\lfloor H \rfloor_H$ $\lfloor z \rfloor_{C2}$ `< 0"`

- $A > 0$ – позитивно оријентисане кругоправе. $A = 0$ (случај правих) – разматрамо коефицијенте B и D.
- Све еуклидске сличности чувају оријентацију кругоправе.
- Оријентација слике дате оријентисане кругоправе H након дате Мебијусове трансформације M зависи од тога да ли пол M лежи на диску или у диску који је комплементаран H.

Оријентација резултујућег круга не зависи од оријентације полазног круга.

Очување угла

- Геометријска дефиниција угла.
- Алгебарска дефиниција угла.

конформно пресликавање

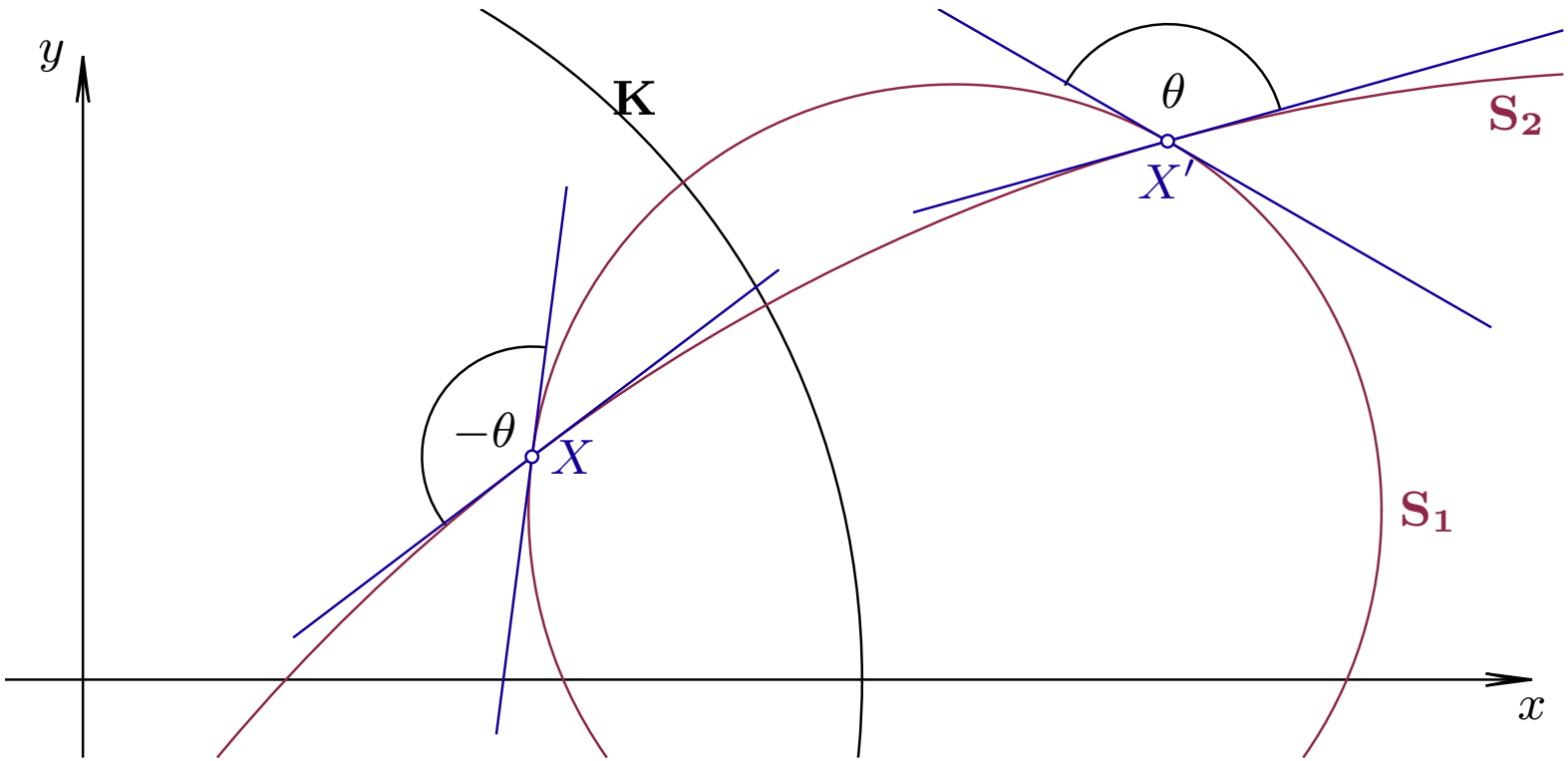
Мебијусове трансформације чувају оријентисане углове међу оријентисаним кругоправама.

fun mat_det_mix :: "C2_mat ⇒ C2_mat ⇒ complex" **where**
"mat_det_mix (A_1, B_1, C_1, D_1) (A_2, B_2, C_2, D_2) =
$A_1 * D_2 - B_1 * C_2 + A_2 * D_1 - B_2 * C_1$"

definition cos_angle_rep **where**
"cos_angle_rep H_1 H_2 =
- Re (mat_det_mix $\lfloor H_1 \rfloor_H$ $\lfloor H_2 \rfloor_H$) /
2 * (sqrt (Re (mat_det $\lfloor H_1 \rfloor_H$ * mat_det $\lfloor H_2 \rfloor_H$))))"

Дискусија – очување угла

- Посматрамо Нидамов приступ.
- Доказ се ослања на чињеницу да се свака Мебијусова трансформација може раставити на транслацију, ротацију, хомотетију и инверзију.



Дискусија – очување угла

- Алгебарска дефиниција
  - веома погодна за доказе
  - веома неинтуитивна
- Геометријска дефиниција
  - компликовани докази, много специјалних случајева
  - веома интутивна
- Решење
  - увести алгебарску дефиницију и користити је у доказима
  - показати њену еквивалентност са геометријском дефиницијом

Формализација Поенкареовог диск модела

- Релација *између*

definition `between` **where**
`"between` z_1 z_2 z_3 $\longleftrightarrow$ `((`z_1 `=` z_2 $\wedge$ z_2 `=` z_3`)` $\vee$
`(let CR = to_complex(cross_ratio` z_1 z_2 z_3 `(inversion_homo` z_2`))`
`in`
`is_real CR` $\wedge$ `Re CR` $\leq$ 0`))"`
lift_definition `between_poincare ::`
`"unit_disc` $\Rightarrow$ `unit_disc` $\Rightarrow$ `unit_disc` $\Rightarrow$ `bool"` **is** `between`

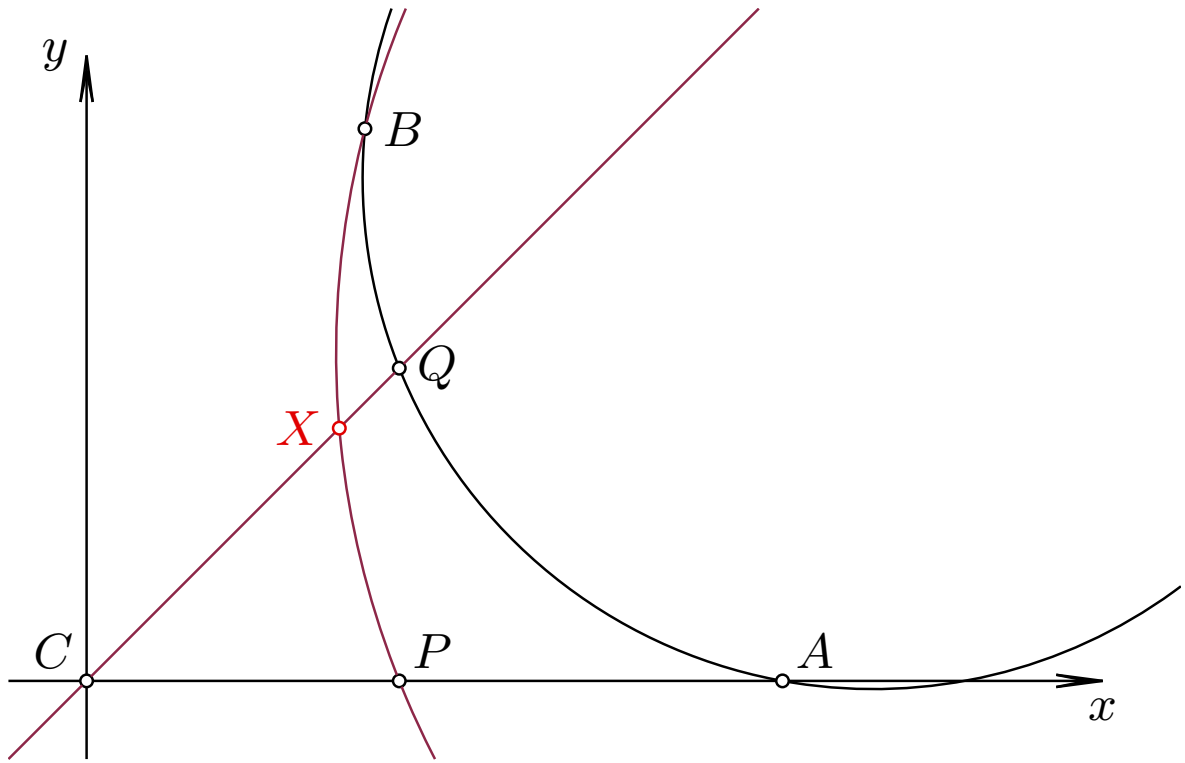
Аутоморфизми диска чувају релацију *између*.

- **lemma**
assumes `"`z_1' `= moebius_pt_poincare` M z_1`"`
`"`z_2' `= moebius_pt_poincare` M z_2`"`
`"`z_3' `= moebius_pt_poincare` M z_3`"`
`"between_poincare` z_1 z_2 z_3`"`
shows `"between_poincare` z_1' z_2' z_3'`"`

Ако за три тачке важи релација *између*, онда се оне могу сликати на реалну осу.

Проблем пресека кругоправих

- Одређивање кругоправе: $\bar{u'} \cdot H_1 \cdot u' = 0$ $\bar{v'} \cdot H_1 \cdot v' = 0$
- Одређивање пресека: $\bar{x'} \cdot H_1 \cdot x' = 0$ $\bar{x'} \cdot H_2 \cdot x' = 0$



Закључци

- Формализовали: аритметичке операције у $\overline{\mathbb{C}}$, размеру и дворазмеру, тетивну метрику у $\overline{\mathbb{C}}$, групу Мебијусових трансформација и њихово дејство на $\overline{\mathbb{C}}$, неке њене специјалне подгрупе, кругоправе, дејство Мебијусових трансформација на кругоправе, оријентисане кругоправе, однос између Мебијусових трансформација и оријентације, својство очувања угла итд.
- Кључан корак — коришћење алгебарске репрезентације објеката.
- Што чешће избегавати анализу случајева.
- Увођење више модела истог концепта.
- Око 12,000 линија кода.
- Око 800 лема.
- Око 125 дефиниција.

Закључци

- Дефинисана релација *између* у Поинкареовом диск моделу.
- Показано је да важи 6 аксиома Тарског.
- Показано је да не важи Еуклидова аксиома.
- Одређивање пресека кругоправих представља проблем.

Циљеви формалног изучавања алгебарских метода и њихових проширења

- Формализовати превођење геометријских тврђења у алгебарску форму.
- Веза између синтетичке геометрије и алгебре, категоричност геометрије.
- Дизајнирати систем за запис и трансформацију геометријских тврђења из стереометрије на начин погодан за примену у оквиру алгебарских доказивача.
- Тестирати и упоредити различите приступе алгебризације.

Алгебризација

- let c = Bisector (Point A) (Point B);
  b = Bisector (Point A) (Point C);
  a = Bisector (Point B) (Point C);
  O_1 = Intersect a b;
  O_2 = Intersect a c in
  IsEqualp O_1 O_2

- Добијају се два скупа полиномијалних једначина.

Доказивање исправности

- Алгебарским методама се доказује:
  $\forall v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C} \bigwedge_{i=1}^{k} f_i(v_1, \ldots, v_n) = 0 \Longrightarrow g_i(v_1, \ldots, v_n) = 0$

- $(\forall (u, x))(\forall g \in G)((\forall f \in F. f(u, x) = 0) \Rightarrow g(u, x) = 0) \Rightarrow$
  геометријско тврђење

- **theorem** "**let** (cp, sp) = **algebrize term in**
  (∀ ass. ((∀ p : cp. eval_poly ass p = 0) ⟶
  (∀ p : sp. eval_poly ass p = 0)) ⟶
  AnalyticGeometry.valid s)"

Алгебризација геометријских релација у стереометрији

Два приступа:

- Сви објекти су дефинисани коришћењем тачака.
- Сви објекти се представљају коришћењем њихових сопствених координата.

Примери алгебризације:

- `parallel_planes` $\alpha\ \beta$
  1. $\overrightarrow{\beta_A\beta_B} \cdot \overrightarrow{\alpha_A\alpha_C} \times \overrightarrow{\alpha_B\alpha_A} = 0$
     $\overrightarrow{\beta_A\beta_C} \cdot \overrightarrow{\alpha_A\alpha_C} \times \overrightarrow{\alpha_A\alpha_B} = 0$
  2. $\overrightarrow{\alpha_v} \times \overrightarrow{\beta_v} = 0$

Експерименти

	GeoProver успех	*GeoProver* неуспех	*Гребнерове базе* успех	*Гребнерове базе* неуспех
први приступ	13	16	23	6
други приступ	22	7	29	0

Закључци

- Формализовано је превођење геометријских тврђења у алгебарску форму.
- Извршена је алгебризација геометријских тврђења на два начина.
- Извршено је поређење различитих приступа у алгебризацији.
- Тестирањем се показало да је систем ефикаснији када су полиноми једноставни.

Даљи рад

- Доказ да наша дефиниција Декартове координатне равни задовољава све аксиоме Хилберта.
- Дефинишемо аналитичку геометрију у оквиру аксиоматизације Тарског или Хилберта.
- Доказати категоричност и система аксиома Тарског и система аксиома Хилберта.
- Испитати својства различитих класа Мебијусових трансформација.
- Завршити формализацију Поинкареовог диск модела.
- Испитати примене формализације у другим областима, нпр. физици.
- Услови недегенерисаности у стереометрији.
- Проширити систем тако да обухвати обла тела.
- Повезати направљени доказивач са динамичким геометријским софтвером.