

1 Увод

У класичној математици постоји много различитих геометрија. Такође, различита су и гледишта шта се сматра стандардном (Еуклидском) геометријом. Понекад, геометрија се дефинише као независна формална теорија, а понекад као специфични модел. Наравно, везе између различитих заснивања геометрије су јаке. На пример, може се показати да Декартова равна представља модел формалних теорија геометрије.

Традиционална Еуclidска (синетичка) геометрија, која датира још од античке Грчке, је геометрија заснована на често малом скупу основних појмова (на пример, тачке, линије, релација подударности, ...) и на скупу аксиома које имплицитно дефинишу ове основне појмове. Постоји више варијанти аксиоматског система за Еуклидску геометрију, а најважнији су Еуклидски систем аксиома (из његовог рада "Елементи"), потом Хилбертов систем аксиома[?], систем аксиома Тарског[?] и најмодернија варијанта – Авигадов систем аксиома[?].

Једна од најзначајнијих открића у математици, које датира из XVII века, јесте Декартово откриће координатног система и оно је омогућило да се алгебарским изразима представе геометријски облици. То је довело до рада на новој математичкој области која се зове *аналитичка геометрија*. Она је послужила да споји геометрију и алгебру и била је веома важна за откриће бесконачности и математичке анализе.

Последњих година, са појавом модерних интерактивних доказивача теорема, многе класичне математичке теорије су формално механички анализирани. Међу њима је и геометрија и постоји неколико покушаја да се формализују различите геометрије и различити приступи у геометрији. Ми нисмо упознати да је потпуно комплетно формализован Хилбертов систем[?] или систем аксиома Тарског[?], али значајно корака су направљени и велики делови ових теорија су формализоване у оквиру интерактивних доказивача теорема[?, ?, ?]. Како искуство за сада показује, коришћењем доказивача теорема значајно се повећава ниво прецизности јер се показало да су многе класичне математичке књиге непрецизне, а понекад чак имају и грешке. Зато би приликом формалног заснивања геометрије требало користити доказивач теорема, а у нашем раду ми смо користили Isabelle/HOL[?] доказивач.

Главна примена нашег рада је у аутоматском доказивању теорема у геометрији и у математичком образовању и учењу геометрије.

Код аутоматског доказивања теорема у геометрији, аналитички приступ у доказима се показао далеко супериорнији у односу на остале доказиваче. Најуспешнији методи на овом пољу су *алгебарски методи* (Вуов метод[?] и метод Гребнерових база[?, ?]) и они се заснивају на репрезентацији тачака коришћењем координата. Модерни доказивачи теорема који се заснивају на овим методама су коришћени да се докажу стотине нетривијалних теорема. Са друге стране, доказивачи теорема засновани на синтетичкој аксиоматизацији нису толико успешни. Већина система са аналитичким приступом за доказивање теорема се користи као софтвер којем се верује иако нису повезани са модерним интерактивним доказивачима теорема. Да би се повећала њихова поузданост потребно их је повезати са модерним интерактивним доказивачима теорема и то је могуће учинити на два начина – њиховом имплементацијом у оквиру интерактивног доказивача теорема и показивањем њихове исправности или коришћењем интерактивних доказивача да провере њихова твђења. Неколико корака у овом правцу је већ направљено[?, ?].

У математичком образовању у средњим школама и на факултетима оба приступа у геометрији (аналитички и синтетички) се демонстрирају. Ипак, док се синтетички приступ предаје као ригорозан систем (са намером да се демонстрира ригорозан аксиоматски приступ), аналитичка геометрија се показује много мање формално (понекад само као део рачуна *calculus*). Такође, ова два приступа се показују независно, и веза између ова два приступа се ретко формално показује у оквиру стандарног наставног плана.

Имајући све ово на уму, ова рад покушава да премости више празнина за које мислимо да тренутно постоје у формализацији геометрије.

1. Прво, наш циљ је да формализујемо Декартову геометрију у оквиру интерактивног доказивача теорема, са ригорозним приступом, али веома блиско стандарном средњошколском образовању.
2. Намеравамо да покажемо да су различите дефиниције основних појмова аналитичке геометрије које можемо видети у литератури заправо еквивалентне, и да заправо представљају јединствен апстрактни ентитет – Декартову раван.
3. Намеравамо да покажемо да стандарна геометрија координатне равни представља модел неколико геометријских аксиоматизација (пре свега систем аксиома Тарског и Хилбертов систем аксиома).
4. Желимо формално да анализирамо теоретске особине различитих аксиоматских система (на пример, желимо да покажемо да сви модели Хилбертовог система аксиома су изоморфни стандарној координатној геометрији).
5. Желимо формално да анализирамо аксиоматизације и моделе не-Еуклидске геометрије и њихове особине (на пример, да покажемо да је Поинкареов диск модел заправо модел геометрије Лобачевског).
6. Желимо да формално успоставимо везу између геометрије координатног система са алгебарским методама за аутоматско доказивање теорема у геометрији.

Поред тога што су многе теореме формализоване и доказане у оквиру система Isabelle/HOL, ми такође дискутујемо и наше искуство у примени различитих техника за поједностављење доказа. Најзначајнија техника је "без губитка на општости" ("wlog"), која прати приступ Харисона[?] и која је оправдана коришћењем разних изометријских трансформација.

2 Основни појмови

Isabelle/HOL. Isabelle/HOL је интерактивни доказивач теорема који је заснова на логици вишег реда (HOL). Он обезбеђује моћне аутоматске методе за доказивање, који су обично засновани на симплификацији класичном резонувању. Isar је декларативни језик за доказе у Isabelle/HOL систему, који дозвољава писање структурних, читљивих доказа. У Isabelle/HOL систему $\llbracket P_1; \dots P_n \rrbracket \implies Q$ значи ако P_1, \dots, P_n је тачно, онда Q је такође тачно. Ова нотација се користи да означи и правила закључивања и тврђења (леме, теореме). Језик Isar такође омогућува и нотацију *assumes* " P_1 " \dots " P_n "

shows " Q ", и она ће бити коришћена у овом раду. Такође, користимо и везнике међу објектима \wedge , \vee , \longrightarrow , и \longleftrightarrow за означавање коњуункције, дисјункције, импликације и логичке еквиваленције. Квантификатори ће бити означени са $\forall x. Px$ и $\exists x. Px$.

3 Формализација геометрије Декартове равни

Када се формализује теорија, мора се одлучити који појмови ће бити основни, а који појмови ће бити дефинисани помоћу тих основних појмова. Циљ наше формализације аналитичке геометрије је да успостави везу са синтетичком геометријом, па зато има исте основне појмове који су дати у синтетичком приступу. Свака геометрија има класу објеката који се називају *тачке*. Неке геометрије (на пример, Хилбертова) има и додатни скуп објеката који се називају *линије*, док неке геометрије (на пример, геометрија Тарског) уопште не разматра линије. У неким геометријама, линије су дефинисани појам, и оне су дефинисане као скуп тачака. Ово подразумева рад са теоријом скупова, а многе аксиоматизације желе то да избегну. У нашој формализацији аналитичке геометрије, ми ћемо дефинисати и тачке и линије јер желимо да омогућимо анализу и геометрије Тарског и геометрије Хилберта. Основна релација која спаја тачке и линије је релације *инциденције*, која неформално означава да линија садржи тачку (или дуално да се тачка налази на линији). Други примитивни појмови (у већини аксиоматских система) су релација *између* (која дефинише редослед колинеарних тачака) и релација *конгруенције*.

Важно је напоменути да су обично многи појмови који су заправо изведени појмови у синтетичкој геометрији у аналитичком геометрији дати у облику дефиниција. На пример, у књигама за средњу школу дефинише се да су линије нормалне ако је производ њихових праваца -1 . Ипак, ово нарушава везу са синтетичком геометријом (где је нормалност изведени појам) јер би оваква карактеризација требало да буде доказана као теорема, а не узета као дефиниција.

3.1 Тачке у аналитичкој геометрији.

Тачка у реалној координатној равни је одређена са својим x и y координатама. Зато, тачке су парови реалних бројева (\mathbb{R}^2), што се може лако формализовати у Isabelle/HOL систему са `type_synonym pointag = "real \times real"`.

3.2 Редослед тачака.

Редослед (колинеарних) тачака се дефинише коришћењем релације *између*. Ово је релација која има три аргумента, $\mathcal{B}(A, B, C)$ означава да су тачке A , B , и C колинеарне и да је тачка B између тачака A и C . Ипак, неке аксиоматизације (на пример, аксиоматизација Тарског) дозвољава случај када је тачка B једнака тачки A или тачки C (рећи ћемо да је релација између инклузивна, док неке друге аксиоматизације (на пример, Хилбертова аксиоматизација) не дозвољавају једнакост тачака (и тада кажемо да је релација између ексклузивна. У првом случају, тачке A , B и C задовољавају релацију између ако постоји реалан број $0 \leq k \leq 1$ такав да $\vec{AB} = k \cdot \vec{AC}$. Желимо да избегнемо експлицитно коришћење вектора јер су

они чешће изведени, а ређе примитиван појам у синтетичкој геометрији, тако да релацију између формализујемо у Isabelle/HOL систему на следећи начин:

$$\mathcal{B}_T^{ag} (xa, ya) (xb, yb) (xc, yc) \longleftrightarrow \\ (\exists (k :: real). 0 \leq k \wedge k \leq 1 \wedge \\ (xb - xa) = k \cdot (xc - xa) \wedge (yb - ya) = k \cdot (yc - ya))$$

Ако захтевамо да тачке A , B и C буду различите, она мора да важи $0 < k < 1$, и релацију ћемо означавати са \mathcal{B}_H^{ag} .

3.3 Конгруенција.

Релација конгруенције дефинише се на паровима тачака. Неформално, $AB \cong_t CD$ означава да је сегмент AB конгруентан сегменту CD . Стандардна метрика у \mathbb{R}^2 дефинише да растојање међу тачкама $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ је $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Квадратно растојање се дефинише као $d_{ag}^2 A B = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$. Тачке A и B су конгруентне тачкама C и D ако и само ако $d_{ag}^2 A B = d_{ag}^2 C D$. У Isabelle/HOL систему ово се може формализовати на следећи начин:

$$d_{ag}^2 (x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cdot (y_2 - y_1) \\ A_1 B_1 \cong^{ag} A_2 B_2 \longleftrightarrow d_{ag}^2 A_1 B_1 = d_{ag}^2 A_2 B_2$$

3.4 Права и инциденција.

Једначина праве. Праве у Декартовој координатној равни се обично представљају једначинама облика $Ax + By + C = 0$, па тако тројка $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ означава линију. Ипак, тројке у којима је $A = 0$ и $B = 0$ морају бити изузете јер не представљају исправну једначину праве. Такође, једначине $Ax + By + C = 0$ и $kAx + kBx + kC = 0$, за реално $k \neq 0$, означавају исту праву. Зато права не може бити дефинисана коришћењем само једне једначине, већ права мора бити дефинисана као класа једначина које имају пропорционалне коефицијенте. Формализација у систему Isabelle/HOL се састоји из неколико корака. Прво, дефинише се домен валидних тројки који су коефицијенти једначине.

$$\text{typedef } line_coeffs^{ag} = \\ \{((A :: real), (B :: real), (C :: real)). A \neq 0 \vee B \neq 0\}$$

Када је овај тип дефинисан, функција Rep_line_coeffs конвертује апстрактне вредности овог типа у њихове конкретне репрезентације (тројке реалних бројева), а функција Abs_line_coeffs конвертује (валидне) тројке у вредности које припадају овом типу.

Две тројке су еквиваленте ако и само ако су пропорционалне.

$$l_1 \approx^{ag} l_2 \longleftrightarrow \\ (\exists A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2. \\ (Rep_line_coeffs l_1 = (A_1, B_1, C_1)) \wedge Rep_line_coeffs l_2 = (A_2, B_2, C_2) \wedge \\ (\exists k. k \neq 0 \wedge A_2 = k \cdot A_1 \wedge B_2 = k \cdot B_1 \wedge C_2 = k \cdot C_1))$$

Показано је да је ово релација еквиваленције. Дефиниција типа праве користи подршку за количничке типове и количничке дефиниције које су скоро интегрисане у систем Isabelle/HOL. Значи права (тип $line^{ag}$) се дефинише коришћењем `quotient_type` команде као класа еквиваленције над релацијом \approx^{ag} .

Да би избегли коришћење теорије скупова, геометријске аксиоматизације које експлицитно разматрају праве користе релацију инциденције. Ако се користи претходна дефиниција за праву, онда проверавање инциденције се своди на израчунавање да ли тачка (x, y) задовољава једначину праве $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, за неке коефицијенте A , B , и C који су представници класе.

$ag_in_h \ (x, y) \ l \longleftrightarrow$
 $(\exists \ A \ B \ C. \ Rep_line_coeffs \ l = (A, \ B, \ C) \wedge (A \cdot x + B \cdot y + C = 0))$

Ипак, да би показали да је релација заснована на представницима класе добро заснована, мора бити показано да ако се изабере други представници класе A' , B' , и C' (који су пропорционални са A , B , и C), онда $A' \cdot x + B' \cdot y + C' = 0$. Зато, у нашој Isabelle/HOL формализацији, ми користимо пакет који подржава рад са количничким типовима (quotient package). Онда $A \in_H^{ag} l$ се дефинише коришћењем `quotient_definition` која се заснива на релацији ag_in_h . Лема добре дефинисаности је

`lemma`
`shows "l ≈ l' ⇒ ag_in_h P l = ag_in_h P l'"`

Афина дефиниција. У афиној геометрији, права се дефинише помоћу фиксне тачке и вектора. Као и тачке, вектори такође могу бити записани као пар реалних бројева `type_synonym vecag = "real × real"`. Вектори дефинисани на овај начин чине векторски простор (са природно дефинисаним векторским збиром и скаларним производом). Тачке и вектори се могу сабирати као $(x, y) + (v_x, v_y) = (x + v_x, y + v_y)$. Зато, права се записује као тачка и вектор који је различит од нуле:

`typedef line_point_vecag = {(p :: pointag, v :: vecag). v ≠ (0, 0)}`

Ипак, тазличите тачке и вектори могу заправо одређивати једну те исту праву, па конструкција са количничким типом опет мора бити коришћена.

$l_1 \approx^{ag} l_2 \longleftrightarrow (\exists p_1 v_1 p_2 v_2. \ Rep_line_point_vec \ l_1 = (p_1, v_1) \wedge Rep_line_point_vec \ l_2 = (p_2, v_2) \wedge$
 $(\exists k m. \ v_1 = k \cdot v_2 \wedge p_2 = p_1 + m \cdot v_1))$

Показује се да је ово заиста релација еквиваленције. Онда се тип праве ($line^{ag}$) дефинише коришћењем команде `quotient_type`, као класа еквиваленције над релацијом \approx^{ag} .

У овом случају, инциденција се дефинише на начин који можете видети у наставку (поново се уопштава lifted) коришћењем количничког пакета, након што се покаже добра дефинисаност).

$ag_in_h \ p \ l, \longleftrightarrow (\exists p_0 v_0. \ Rep_line_point_vec \ l = (p_0, v_0) \wedge (\exists k. \ p = p_0 + k \cdot v_0))$

Још једна могућа дефиниција праве је класа еквиваленције парова различитих тачака. Ми нисмо формализовали овај приступ јер је тривиално изоморфан са афином дефиницијом (разлика тачака је вектор који се појављује у афиној дефиницији).

3.5 Изометрије

У синтетичкој геометрији изометрије се уводе коришћењем дефиниције. Рефлексије могу прве да се дефинишу, а онда се друге изометрије могу дефинисати као композиција рефлексија. Ипак, у нашој формализацији, изометрије се користе само као помоћно средство да упросте наше доказе (што ће бити додатно појашњено у одељку ??). Зато ми нисмо били заинтересовани да дефинишемо изометрије као примитивне појмове (као што су тачке и конгруенција) него смо представили аналитичке дефиниције и доказали својства која су потребна за касније доказе.

Транслација је дефинисана преко датог вектора (који није експлицитно дефинисан, већ је представљен као пар реалних бројева). Формална дефиниција у Isabelle/HOL је једноставна.

$$transp^{ag} (v_1, v_2) (x_1, x_2) = (v_1 + x_1, v_2 + x_2)$$

Ротација је параметризована за реални параметар α (који представља угао ротације), а ми само посматрамо ротације око координатног почетка (остале ротације могу се добити као композиција транслације и ротације око координатног почетка). Користимо основна правила тригонометрије да би добили следећу формалну дефиницију у систему Isabelle/HOL.

$$rotp^{ag} \alpha (x, y) = ((\cos \alpha) \cdot x - (\sin \alpha) \cdot y, (\sin \alpha) \cdot x + (\cos \alpha) \cdot y)$$

Такође, централна симетрија се лако дефинише коришћењем координата тачке:

$$symp^{ag} (x, y) = (-x, -y)$$

Важна особина свих изометрија је својство инваријантности, тј. оне чувају основне релације (као што су између и конгруенција).

$$\mathcal{B}_T^{ag} A B C \longleftrightarrow \mathcal{B}_T^{ag} (transp^{ag} v A) (transp^{ag} v B) (transp^{ag} v C)$$

$$AB \cong^{ag} CD \longleftrightarrow$$

$$(transp^{ag} v A)(transp^{ag} v B) \cong^{ag} (transp^{ag} v C)(transp^{ag} v D)$$

$$\mathcal{B}_T^{ag} A B C \longleftrightarrow \mathcal{B}_T^{ag} (rotp^{ag} \alpha A) (rotp^{ag} \alpha B) (rotp^{ag} \alpha C)$$

$$AB \cong^{ag} CD \longleftrightarrow (rotp^{ag} \alpha A)(rotp^{ag} \alpha B) \cong^{ag} (rotp^{ag} \alpha C)(rotp^{ag} \alpha D)$$

$$\mathcal{B}_T^{ag} A B C \longleftrightarrow \mathcal{B}_T^{ag} (symp^{ag} A) (symp^{ag} B) (symp^{ag} C)$$

$$AB \cong^{ag} CD \longleftrightarrow (symp^{ag} A)(symp^{ag} B) \cong^{ag} (symp^{ag} C)(symp^{ag} D)$$

Изометрије се пре свега користе да трансформишу тачку у њену канонску позицију (обично померањем на y -осу). Следеће леме показује да је то могуће учинити.

$$\exists v. transp^{ag} v P = (0, 0)$$

$$\exists \alpha. rotp^{ag} \alpha P = (0, p)$$

$$\mathcal{B}_T^{ag} (0, 0) P_1 P_2 \longrightarrow \exists \alpha p_1 p_2. rotp^{ag} \alpha P_1 = (0, p_1) \wedge rotp^{ag} \alpha P_2 = (0, p_2)$$

Изометријске трансформације линија се дефинишу коришћењем изометријских трансформација над тачкама (линија се трансформише тако што се трансформишу две њене произвољне тачке.

4 Коришћење изометријских трансформација

Једна од најважнијих техника која је коришћења за упрошћавање формализације ослањала се на коришћење изометријских трансформација. Ми ћемо покушати да представимо мотивациони разлог за примену изометрија на следећем, једноставном примеру.

Циљ је да покажемо да у нашем моделу, ако $\mathcal{B}_T^{ag} A X B$ и $\mathcal{B}_T^{ag} A B Y$ онда важи $\mathcal{B}_T^{ag} X B Y$. Чак и на овом једноставном примеру, ако применимо директан доказ, без коришћења изометријских трансформација, алгебарски рачун постаје превише комплексан.

Нека важи $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, и $X = (x_X, y_X)$. Како $\mathcal{B}_T^{ag} A X B$ важи, постоји реалан број k_1 , $0 \leq k_1 \leq 1$, такав да $(x_X - x_A) = k_1 \cdot (x_B - x_A)$, и $(y_X - y_A) = k_1 \cdot (y_B - y_A)$. Слично, како $\mathcal{B}_T^{ag} A B Y$ важи, постоји реалан број k_2 , $0 \leq k_2 \leq 1$, такав да $(x_B - x_A) = k_2 \cdot (x_Y - x_A)$, и $(y_B - y_A) = k_2 \cdot (y_Y - y_A)$. Онда, може се дефинисати реалан број k са $(k_2 - k_2 \cdot k_1)/(1 - k_2 \cdot k_1)$. Ако $X \neq B$, онда коришћењем комплексних алгебарских трансформација, може се показати да $0 \leq k \leq 1$, и да $(x_B - x_X) = k \cdot (x_Y - x_X)$, и $(y_B - y_X) = k \cdot (y_Y - y_X)$, и зато $\mathcal{B}_T^{ag} X B Y$ важи. Дегенеративни случај $X = B$ тривијално важи.

Ипак, ако применимо изометријске трансформације, онда можемо предпоставити да $A = (0, 0)$, $B = (0, y_B)$, и $X = (0, y_X)$, и да $0 \leq y_X \leq y_B$. Случај када је $y_B = 0$ тривијално важи. У супротном, $x_Y = 0$ и $0 \leq y_B \leq y_Y$. Зато, $y_X \leq y_B \leq y_Y$, и тврђење важи. Приметимо да у овом случају нису биле потребне велике алгебарске трансформације и доказ се ослања на једноставне особине транзитивности релације \leq .

Поредећи претходна два доказа, можемо да видимо како примена изометријских трансформација значајно упрошћава потребна израчунавања и скраћује доказе.

Како је ова техника доста коришћена у нашој формализацији, важно је продискутовати који је најбољи начин да се формулишу одговарајуће леме које оправдавају употребу ове технике и покушати што више аутоматизовати коришћење ове технике. Ми смо применили приступ који је предложио Харисон [?].

Својство P је инваријантно под трансформацијом t ако на њега не утиче трансформација тачака на коју је примењена трансформација t .

$$\text{inv } P \ t \longleftrightarrow (\forall A \ B \ C. P \ A \ B \ C \longleftrightarrow P \ (tA) \ (tB) \ (tC))$$

Тада, следећа лема се може користити да сведемо тврђење које важи за било које координатне тачке на тврђење за које разматрамо дамо тачке y -осе (можемо изабрати и x -осу уколико нам тако више одговара).

lemma

assumes " $\forall y_B \ y_C. 0 \leq y_B \ \wedge \ y_B \leq y_C \longrightarrow P \ (0, 0) \ (0, y_B) \ (0, y_C)$ "
" $\forall v. \text{inv } P \ (\text{transp}^{ag} \ v) \forall \alpha. \text{inv } P \ (\text{rotp}^{ag} \ \alpha)$ "
" $\text{inv } P \ (\text{symp}^{ag})$ "
shows " $\forall A \ B \ C. \mathcal{B}_T^{ag} A \ B \ C \longrightarrow P \ A \ B \ C$ "

Доказ да је неко тврђење инваријантно у односу на изометријску трансформацију највише се ослања на леме које показују да су релација између и релација конгруенције инваријантне у односу на изометријске трансформације.

5 Геометрија Тарског

Наш циљ у овом поглављу је да докажемо да наше дефиниције Декартове координатне равни задовољавају све аксиоме геометрије Тарског[?]. Основни појмови у геометрији Тарског су само три појма - тачке, (инклузивна) релација између (означена са $\mathcal{B}_t(A, B, C)$) и релација конгруенције (коју означавамо са $\mathcal{B}_t(A, B, C)$). У геометрији Тарског линије нису експлицитно дефинисане и колинеарност се дефинише коришћењем релације између

$$\mathcal{C}_t(A, B, C) \longleftrightarrow \mathcal{B}_t(A, B, C) \vee \mathcal{B}_t(B, C, A) \vee \mathcal{B}_t(C, A, B)$$

5.1 Аксиоме конгруенције.

Прве три аксиоме Тарског представљају основна својства конгруенције.

$$AB \cong_t BA$$

$$AB \cong_t CC \longrightarrow A = B$$

$$AB \cong_t CD \wedge AB \cong_t EF \longrightarrow CD \cong_t EF$$

желимо да докажемо да наша релација \cong^{ag} задовољава својства релације \cong_t која је апстрактно задана са претходним аксиомама (тј. да дате аксиоме важе у нашем моделу Декартове координатне равни)¹. На пример, за прву аксиому, доказ се своди на показивање тврђења $AB \cong^{ag} BA$. Докази су праволинијски и готово аутоматски (поједностављивањем након развијања дефиниција).

5.2 Аксиоме за релацију између.

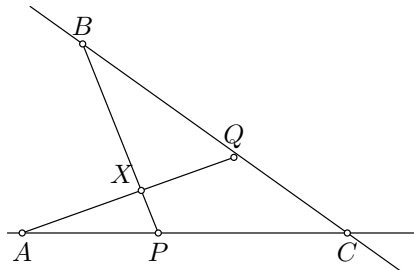
Идентиту релације између. Прва аксиома (инклузивне) релације између даје једно њено једноставно својство и, за наш модел, доказује се готово аутоматски.

$$\mathcal{B}_t(A, B, A) \longrightarrow A = B$$

Пашова аксиома. Следећа аксиома је Пашова аксиома:

$$\mathcal{B}_t(A, P, C) \wedge \mathcal{B}_t(B, Q, C) \longrightarrow (\exists X. (\mathcal{B}_t(P, X, B) \wedge \mathcal{B}_t(Q, X, A)))$$

Под претпоставком да су све тачке које се помињу у аксиоми различите, слика која одговара аксиоми је:



¹У нашој формализацији, аксиоме геометрије Тарског су формулисане коришћењем *locale* [?], и показано је да координатна раван представља интерпретацију тог дефинисаног *locale*. Како је ово техничка страна формализације у Isabelle/HOL систему, ми је нећемо дискутовати у више детаља

Пре него што дамо доказ да у нашем моделу Декартове координатне равни важи ова аксиома, желимо да продискутујемо нека питања која се односе на геометрију Тарског и која су се показала важна за свеукупну организацију нашег доказа. Последња верзија аксиоматског система Тарског је направљена да буде минимална (садржи само 11 аксиома), и централне аксиоме које описују релацију између су идентитет релације између и Пашова аксиома. У формализацији геометрије Тарског ([?]) сва остала елементарна својства ове релације се изводе из ове две аксиоме. На пример, да би се извела симетричност релације између (и.е., $\mathcal{B}_t(A, B, C) \rightarrow \mathcal{B}_t(C, B, A)$), аксиома Паша се примењује на тројке ABC и BCC и тада се добија тачка X тако да важи $\mathcal{B}_t(C, X,)$ и $\mathcal{B}_t(B, X, B)$, и онда према аксиоми 1, $X = B$ и $\mathcal{B}_t(C, B,)$. Ипак, према нашем искуству, у намери да покажемо да је наша Декартова координатна раван је модел аксиома Тарског (поготово за Пашову аксиому), потребно је да већ имамо показане неке њене последице (као што су симетричност и транзитивност). Још да додамо, да су раније варијанте аксиоматског система Тарског имале више аксиома, а ова својства су управо биле неке од тих додатних аксиома. Такође, својство симетрије је једноставније својство него Пашова аксиома (на пример, оно укључује само тачке које леже на линији, док у аксиоми Паша имамо тачке које леже у равни и не морају бити колинеране). Додатно, претходни доказ користи веома суптилна својства која зависе од тога како је Пашова аксиома формулисана. На пример, ако се у њеном закључку користи $\mathcal{B}_t(B, X, P)$ и $\mathcal{B}_t(, X, Q)$ уместо $\mathcal{B}_t(P, X, B)$ и $\mathcal{B}_t(Q, X,)$, онда доказ не може да се изведе. Зато, ми смо одлучили да би добар приступ био да директно покажемо да нека елементарна својства (као што су симетрија, транзитивност) релације између важе у моделу, а онда да користимо ове чињенице у доказу много комплексније Пашове аксиоме.

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_T^{ag} A A B \\ & \mathcal{B}_T^{ag} A B C \rightarrow \mathcal{B}_T^{ag} C B A \\ & \mathcal{B}_T^{ag} A X B \wedge \mathcal{B}_T^{ag} A B Y \rightarrow \mathcal{B}_T^{ag} X B Y \\ & \mathcal{B}_T^{ag} A X B \wedge \mathcal{B}_T^{ag} A B Y \rightarrow \mathcal{B}_T^{ag} A X Y \end{aligned}$$

Аксиома ниже димензије. Следећа аксиома каже да постоје 3 неколинеарне тачке. Зато сваки модел ових аксиома мора имати димензију већу од 1.

$$\exists A B C. \neg \mathcal{C}_t(A, B, C)$$

У нашој Декартовој равни тривијално важи (нпр. $(0, 0)$, $(0, 1)$, и $(1, 0)$ су неколинеране).

Аксиома (схема) континуитета. Аксиома континуитета Тарског је у ствари конструкција Дедекиндовога пресека. Интуитивно, ако су све тачке скупа тачака са једне стране тачака које припадају другом скупу тачака, онда постоји тачка која је између та два скупа. Оригинална Тарски аксиоматизација је дефинисана у оквиру логики првог реда и скупови нису експлицитно познати у оквиру формализације Тарског. Зато, уместо да користи скупове тачака, Тарски користи предикате логики првог реда, ϕ и ψ .

$$(\exists a. \forall x. \forall y. \phi x \wedge \psi y \rightarrow \mathcal{B}_t(a, x, y)) \rightarrow (\exists b. \forall x. \forall y. \phi x \wedge \psi y \rightarrow \mathcal{B}_t(x, b, y))$$

Ипак, формулација ове леме у оквиру логике вишег реда система Isabelle/HOL не ограничава предикате ϕ и ψ да буду предикати логике првог реда. Зато, строго гледано, наша формализација аксиоматског система Тарског у оквиру система Isabelle/HOL даје другачију геометрију у односу на оригиналну геометрију Тарског.

lemma

assumes " $\exists a. \forall x. \forall y. \phi \ x \wedge \psi \ y \longrightarrow \mathcal{B}_T^{ag} \ a \ x \ y$ "
shows " $\exists b. \forall x. \forall y. \phi \ x \wedge \psi \ y \longrightarrow \mathcal{B}_T^{ag} \ x \ b \ y$ "

Ипак, испоставља се да је могуће показати да Декартова координатна равна такође задовољава строжију варијанту аксиоме (без ограничавања да предикати ϕ и ψ су предикати логике првог реда). Ако је један скуп празан, тврђење тривијално важи. Ако скупови имају заједничку тачку, онда је та тачка уједно и тражена тачка. У другим случајевим, примењујемо изометријске трансформације тако да све тачке из оба скупа леже на позитивном делу y -осе. Онда, доказ тврђења се своди на доказивање следећег:

lemma

assumes
" $P = \{x. x \geq 0 \wedge \phi(0, x)\} Q = \{y. y \geq 0 \wedge \psi(0, y)\}$ "
" $\neg(\exists b. b \in P \wedge b \in Q) \exists x_0. x_0 \in P \exists y_0. y_0 \in Q$ "
" $\forall x \in P. \forall y \in Q. \mathcal{B}_T^{ag} \ (0, 0) \ (0, x) \ (0, y)$ "
shows
" $\exists b. \forall x \in P. \forall y \in Q. \mathcal{B}_T^{ag} \ (0, x) \ (0, b) \ (0, y)$ "

Доказивање овога захтева коришћење нетривијалних особина реалних пројева, пре свега, њихову потпуност. Потпуност реалних у систему Isabelle/HOL је формализована следећом теоремом (супремум, особина најмање горње границе):

$$(\exists x. x \in P) \wedge (\exists y. \forall x \in P. x < y) \longrightarrow \exists S. (\forall y. (\exists x \in P. y < x) \leftrightarrow y < S)$$

Скуп P задовољава својство супремума. Заиста, како, по претпоставци, P и Q немају заједнички елемент, а из претпоставке следи да $\forall x \in P. \forall y \in Q. x < y$, тако да је било који елемент из Q горња граница за P . По претпоставци, P и Q су непразни, тако да постоји елемент b такав да $\forall x \in P. x \leq b$ и $\forall y \in Q. b \leq y$, тако да теорема важи.

6 Геометрија Хилберта

Циљ у овом одељку је да покажемо да наше дефиниције Декартовог координатног система задовољавају аксиоме Хилбертове геометрије. Основни објекти у Хилбертовој планарној геометрији су тачке, праве, релација између (означена са $\mathcal{B}_h(A, B, C)$) и релација конгруенције (означена са $AB \cong_h C$).

У оригиналној Хилбертовој аксиоматизацији [?] неке претпоставке се имплицитно подразумевају у односу на контекст у коме су дате. На пример, ако је речено “*постоје две тачке*”, то увек значи постоје две различите тачке. Без ове претпоставке нека тврђења не важе (нпр. релација између не важи ако су тачке једнаке).

6.1 Аксиоме инциденције

Прве две аксиоме су формализоване коришћењем само једног тврђења.

$$A \neq B \longrightarrow \exists! l. A \in_h l \wedge B \in_h l$$

Последња аксиома ове групе је формализоване коришћењем два одвојена тврђења.

$$\exists AB. A \neq B \wedge A \in_h l \wedge B \in_h l$$

$$\exists ABC. \neg C_h(A, B, C)$$

Релација колинераности C_h (која је коришћена у претходној дефиницији) се дефинише на следећи начин:

$$C_h(A, B, C) \longleftrightarrow \exists l. A \in_h l \wedge B \in_h l \wedge C \in_h l.$$

Наравно, ми желимо да покажемо да наше дефиниције у Декартовој координатној равни задовољавају ове аксиоме. На пример, ово значи да ми треба да покажемо:

$$A \neq B \longrightarrow \exists l. A \in_H^{ag} l \wedge B \in_H^{ag} l.$$

Докази ових лема су тривијални и углавном су добијени дефиниција и онда коришћењем аутоматског доказивања (коришћењем методе Гребнерових база).

6.2 Аксиоме поретка

Аксиоме поретка описују својства (ексклузивне) релације између.

$$\mathcal{B}_h(A, B, C) \longrightarrow A \neq B \wedge A \neq C \wedge B \neq C \wedge C_h(A, B, C) \wedge \mathcal{B}_h(C, B, A)$$

$$A \neq C \longrightarrow \exists B. \mathcal{B}_h(A, C, B)$$

$$A \in_h l \wedge B \in_h l \wedge C \in_h l \wedge A \neq B \wedge B \neq C \wedge A \neq C \longrightarrow$$

$$(\mathcal{B}_h(A, B, C) \wedge \neg \mathcal{B}_h(B, C, A) \wedge \neg \mathcal{B}_h(C, A, B)) \vee$$

$$(\neg \mathcal{B}_h(A, B, C) \wedge \mathcal{B}_h(B, C, A) \wedge \neg \mathcal{B}_h(C, A, B)) \vee$$

$$(\neg \mathcal{B}_h(A, B, C) \wedge \neg \mathcal{B}_h(B, C, A) \wedge \mathcal{B}_h(C, A, B))$$

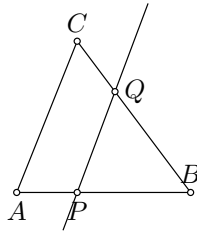
Докази да релације \cong^{ag} , \in_H^{ag} , и \mathcal{B}_H^{ag} задовољавају² ове аксиоме су једноставни и углавном су изведени одвијањем дефиниција³ и коришћењем аутоматизације.

Пашова аксиома.

$$A \neq B \wedge B \neq C \wedge C \neq A \wedge \mathcal{B}_h(A, P, B) \wedge$$

$$P \in_h l \wedge \neg C \in_h l \wedge \neg A \in_h l \wedge \neg B \in_h l \longrightarrow$$

$$\exists Q. (\mathcal{B}_h(A, Q, C) \wedge Q \in_h l) \vee (\mathcal{B}_h(B, Q, C) \wedge Q \in_h l)$$



²pronaći bolji izraz od ovog zadovoljavaju

³pronaći bolji izraz za ovo odvijanje definicija

У оргиналној Пашовој аксиоми постоји још једна претпоставка – тачке , B и C нису колинеарне, тако да је аксиома формулисана само за централни, недегенеративни случај. Ипак, у нашем моделу тврђење тривијално важи ако оне јесу колинеарне, тако да смо ми показали да наш модел задовољава и централни случај и дегенеративни случај када су тачке колинеарне. Приметимо да због својстава Хилбертове релације између, претпоставка да су тачке различите не може бити изостављена.

Доказ користи стандардне технике. Прво, користе се изометријске трансформације да транслирају тачке на y -оси, тако да $A = (0, 0)$, $B = (x_B, 0)$ и $P = (x_P, 0)$. Нека је $C = (x_C, y_C)$ и $Rep_line_coeffs\ l = (l_A, l_B, l_C)$. У зависности у којим сегментима тражена тачка се налази, имамо два велика различита случаја. Коришћењем својства $\mathcal{B}_h(A, P, B)$ показује се да важи $l_A \cdot y_B \neq 0$ и онда можемо одредити два коефицијента $k_1 = \frac{-l_C}{l_A \cdot y_B}$ и $k_2 = \frac{l_A \cdot y_B + l_C}{l_A \cdot y_B}$. Даље, показује се да важи $0 < k_1 < 1$ или $0 < k_2 < 1$. Коришћењем $0 < k_1 < 1$, тачка $Q = (x_Q, y_Q)$ је одређена са $x_Q = k_1 \cdot x_C$ и $y_Q = k_1 \cdot y_C$, па зато $\mathcal{B}_h(A, Q, C)$ важи. У другом случају, када друго својство важи, тачка $Q = (x_Q, y_Q)$ је одређена са $x_Q = k_2 \cdot (x_C - x_B) + x_B$ и $y_Q = k_2 \cdot y_C$, па зато $\mathcal{B}_t(B, Q, C)$ важи.

6.3 Аксиоме конгруенције

Прва аксиома омогућава конструисање конгруентних сегмената на датој прави. У Хилбертовој књизи "Основи геометрије"[?] аксиома се формулише на следећи начин: *Ако су u и v две тачке на правој a , a' је тачка на истој или другој правој a' онда је увек могуће одредити тачку v' на датој страни праве a' у односу на тачку u' такву да је сегмент uv конгруентан сегменту $u'v'$* . Ипак, у нашој формализацији део на датој страни је промењен и уместо једне одређене су две тачке (приметимо да је ово имплицитно и речено у оргиналној аксиоми).

$$A \neq B \wedge A \in_h l \wedge B \in_h l \wedge A' \in_h l' \longrightarrow \\ \exists B' C'. B' \in_h l' \wedge C' \in_h l' \wedge \mathcal{B}_h(C', A', B') \wedge AB \cong_h A'B' \wedge AB \cong_h A'C'$$

Докаж да ова аксиома важи у нашем моделу Декартове координатне равни, почиње са изометријским трансформацијама тако да A' постаје $(0, 0)$ и l' постаје x -оса. Тада је прилично једноставно одредити две тачке на x -оси тако што одредимо координате ових тачака користећи услов да d_{ag}^2 између њих и тачке A' је исто као и $d_{ag}^2 A B$.

Следеће две аксиоме су директно показане одвијањем одговарајућих дефиниција и применом алгебарских трансформација и метода Гребнерових база.

$$AB \cong_h A'B' \wedge AB \cong_h A''B'' \longrightarrow A'B' \cong_h A''B'' \\ \mathcal{B}_h(A, B, C) \wedge \mathcal{B}_h(A', B', C') \wedge AB \cong_h A'B' \wedge BC \cong_h B'C' \longrightarrow AC \cong_h A'C'$$

Следеће три аксиоме у Хилбертовој аксиоматизацији су о појму угла, а ми још нисмо разматрали угао у нашој формализацији.

6.4 Аксиома паралелности

$$\neg P \in_h l \longrightarrow \exists! l'. P \in_h l' \wedge \neg(\exists P_1. P_1 \in_h l \wedge P_1 \in_h l')$$

Доказ ове аксеме састоји се из два дела. Прво је показано да таква права постоји а потом да је она јединствена. Доказивање постојања је учињено одређивањем коефицијената тражене праве. Нека је $P = (x_P, y_P)$ и $Rep_line_coeffs l = (l_A, l_B, l_C)$. Онда су коефицијенти тражене праве $(l_A, l_B, -l_A \cdot x_P - l_B \cdot y_P)$. У другом делу доказа, полази се од претпоставке да постоје две праве које задовољавају услов $P \in_h l' \wedge \neg(\exists P_1. P_1 \in_h l \wedge P_1 \in_h l')$. У доказу је показано да су њихови коефицијенти пропорционални па су самим тим и праве једнаке.

6.5 Аксиома континуитета