УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

У Београду, _ 2015.

Катедри за рачунарство и информатику

Пријава теме за израду докторске дисертације

Молим да ми одобрите израду докторске дисертације под насловом ”Формализација различитих модела геометрије”. Тему предлажем у договору са ментором др Филипом Марићем.

Подносилац пријаве

____

Данијела Симић

Ментор:
др Филип Марић

Наставно-научном већу Математичког факултета
Универзитета у Београду

Пријава теме за израду докторске тезе
кандидата Данијеле Симић (бивше Петровић):

Формализација различитих модела геометрије и примене

1 Подаци о кандидату

1.1 Биографија

Данијела Симић је рођена 26.09.1986. године у Ваљеву. Основну школу Жикица Јовановић Шпанац завршила је као ђак генерације и вуковац. Потом је уписала Ваљевску гимназију, коју је такође завршила као ђак генерације и вуковац. Током школовања учествовала је на бројним такмичењима при чему се посебно истичу резултати и награде са републичких и савезних такмичења из физике и програмирања. Године 2005. уписала је Математички факултет, уневерзитета у Београду, смер Рачунарство и Информатика. Студије је завршила 2009. године са просечном оценом 9.86. Исте године уписала је докторске студије на смеру Информатика. Положила је све испите на докторским студијама са просечном оценом 10.

Запослена је на Математичком факултету, Универзитета у Београду од 2009. године и држала је вежбе из следећих предмета:

- Програмирање 1
- Програмирање 2
- Увод у организацију рачунара
- Вештачка интелигенција

1.2 Списак научних радова

Објављени радови

- Filip Marić, Ivan Petrović, Danijela Petrović, Predrag Janičić: Formalization and Implementation of Algebraic Methods in Geometry (Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science 79, pp. 63–81.)
- Filip Marić, Danijela Petrović: Formalizing Complex Plane Geometry (Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, November 2014)
- Danijela Simić: Using Small-Step Refinement for Algorithm Verification in Computer Science Education (accepted for publish in The International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 22, Number 4 (December 2015)

Саопштења на научним скуповима

- Danijela Petrović, Filip Marić: Formalizing Analytic Geometries (Automated Deduction in Geometry 2012)
- Danijela Petrović: Using Small-Step Refinement for Algorithm Verification in Computer Science Education (ThEdu'14)

1.3 Конференције и летње школе

- Automated Deduction in Geometry, Automated Deduction in Geometry 2012, Единбург, Велика Британија, 17.09. – 19.09.2012.
- European Summer School in Logic, Language and Information, Љубљана, Словенија, 01.08. – 12.08.2011
- Више пута презентовала и учествовала у организацији радионица АРГО групе

2 Преглед области тезе и постојећих резултата

2.1 Формално доказивање теорема

У класичној математици постоји много различитих геометрија. Такође, различита су и гледишта шта се сматра стандардном (Еуклидском) геометријом. Понекад, геометрија се дефинише као независна формална теорија, а понекад као специфични модел. Наравно, везе између различтих заснивања геометрије су јаке. На пример, може се показати да Декартова раван представља модел формалних теорија геометрије.

Традиционална Еукидска (синетичка) геометрија, која датира још од античке Грчке, је геометрија заснована на често малом скупу основних појмова (на пример, тачке, линије, релација подударности, . . .) и на скупу аксиома које имплицитно дефинишу ове основне појмове. Коришћењем аксиома, теорема, лема и логичких аргумената могуће је изводити нове закључке. Иако су Еуклидови "Елементи"један од најутицајних радова из математике, поставило се озбиљно питање да ли систем аксиома, теорема и лема којима се геометрија описује заиста прецизан. Испоставило се да су нађене грешке у доказима у тексту, а и да су неки докази били некомплетни јер су имали имплицитне претпоставке настале због интуиције или посматрања слике. Ове празнине су утицале на појаву других аксиоматских система чији је циљ био да дају формалну аксиоматизацију Еуклидове геометрије. Најважнији су Хилбертов систем аксиома, систем аксиома Тарског и најмодернија варијанта – Авигадов систем аксиома.

Хилбертов систем се састоји из три основна појма (тачка, права и раван), 6 предиката и 20 аксиома подељених по групама. Хилберт није желео ништа да оставо интуицији, већје и најочигледнија тврђења записивао као аксиоме и леме. Овакав приступ је повећао ниво ригорозности не само у геометрији, него у целој математици.

Систем Тарског је мањи, састоји се од једног основног појма (тачка), 2 предиката и 11 аксиома и његова основна предност у односу на Хилбертов систем је у његовој једноставности. Са друге стране, систем Тарског уводи појам линије као скуп тачака

Једно од најзначајнијих открића у математици, које датира из XVII века, јесте Декартово откриће координатног система и оно је омогућило да се алгебарским изразима представе геометријски облици. То је довело до рада на новој математичкој области која се зове *аналитичка геометрија.* Она је послужила да споји геометрију и алгебру и била је веома важна за откриће бесконачности и математичке анализе.

Иако се појам сферичне геометрије појавио јошу старој Грчкој, озбиљније истраживање не-Еуклидске геометрије је започето 1829. година са радом Лобачевског. Иако је Лобачевски интензивно истраживао не-Еуклидску геометрију и покушавао да са њом опише реалан свет, остали научници нису били толико заинтересовани за ову област и просло је пола века пре него што се кренуло са интензивнијим истраживањем. Оно што је највише утицало на ову промену јесте откриће комплексних бројева крајем XVIII века. Комплексни бројеви су представљали значајану алатку за истраживање особина објеката у различитим геометријама. Заменом Декартове координатне равни са комплексном равни добијају се једноставније формуле које описују геометријске објекте. Након Гаусовог теорије о закривљеним површинама (???? curved surfaces) и Римановог рада о закривљеним (?? manifolds) геометрија Лобачевског добија на значајности. Ипак, највећи утицај има рад Белтрамија који показује да дводимензионална не-Еуклидска kako se pise ne-euklidska геометрија је ништа друго до изучавање одговарајуће површине константне негативне криве ??? constant negative curvature. Уводи и појам *пројективног диск модела* који је касније популаризован од стране Клајна. Поинкаре посматра модел полуравни half-plane који су предложили (??? Louville i Beltrami – kako se oni prevode) и пре свега изучава изометрије хиперболичке равни које чувају оријентацију. Данас се те трансформацију најчешће називају Мебијусове трансформације (???? PSL_2R – da li ovo pominjati).

- Tristan Needham. *Visual Complex Analysis.* Oxford University Press, 1998.
- Hans Schwerdtfeger. *Geometry of Complex Numbers.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1979.

2.2 Интерактивно доказивање теорема уз помоћ рачунара

Потреба за ригорозним заснивањем математике постоји веома дуго и са развојем математике повећавао се и степен ригорозности. Са појавом рачунара појавила се могућност машински проверивих доказа. Тако су се појавили системи за формално доказивање теорема. Често, механички проверени докази попуњавају празнине које постоје у дефиницијама и доказима и упућују на дубљу анализу теме која се изучава. Постоје системи који омогућавају потпуно аутомацку проверу доказа и они су најчешће користе SAT решаваче или технике презаписивања. Системи који се заснивају на логикама вишег реда су полуаутомацки и у процесу формалног доказивања теорема од стране корисника (често програмер и/или математичар) помажу тако што контролишу исправност доказа и, колико је то могуће, проналазе аутомат ке доказе. Ови полуаутомацки доказивачи се називају и *асистенти за доказивање теорема.*

Данас постоји много асистената за доказивање теорема: Isabelle, Isabelle/HOL, Coq, HOL Light, PVS и други. Посебно се истичу Isabelle/HOL и Coq као системи са већим бројем корисника који су током година развили велики скуп библиотека са формално доказаним теоријама које је могуће даље надограђивати. Асистенти за доказивање теорема се користе у различитим областима. Пре свега, истиче се примена у образовању. Поред тога, могу се користити и за формалну верификацију рачунарских програма. Помажу развој и продубљивање математичког знања.

Постоји велики број формализација фрагмената различитих геометрија у оквиру асистената за доказивање теорема. Делови Хилберове књиге "Основе геометријешу формализовани у Isabelle-у и Coq-у. У оквиру система Coq је формализована геометрија Тарског, конструктивна геометрија, пројективна геометрија, геометрија лењира и шестара и друге.

Једни од најзначајних радова из формализације геометрије су:

- Laura Meikle and Jacques Fleuriot. *Formalizing Hilberts Grundlagen in Isabelle/Isar.* In Theorem Proving in Higher Order Logics, volume 2758 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2003.
- Phil Scott. *Mechanising Hilberts Foundations of Geometry in Isabelle.* Master's thesis, University of Edinburgh, 2008.
- Julien Narboux. *Mechanical Theorem Proving in Tarski's Geometry.* In Automated De- duction in Geometry, volume 4869 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2007.
- Gilles Kahn. *Constructive geometry according to Jan von Plato.* Coq contribution, Coq V5.10, 1995.
- Frédérique Guilhot. *Formalisation en Coq et visualisation d'un cours de géométrie pour le lycée.* Technique et Science Informatiques, 24(9), 2005.
- Ницолас Магауд, Јулиен Нарбоуш, анд Пасцал Счрецк. *Формализинг Пројецтиве Плане геометры ин Цоч.* Ин Аутоматед Дедуцтион ин Геометры, волуме 6301 оф Лецтуре Нотес ин Цомпутер Сциенце. Спрингер, 2011.

Формализација система Тарски за не-Еуклидске геометрије (Клаин-Белтрами модел) урађена је у раду:

- Timothy James McKenzie Makarios. *A mechanical verification of the independence of Tarski's Euclidean axiom.* Master's thesis, Victoria University of Wellington, 2012.

Формализација комплексне анализе може се видети у радовима:

- Robert Milewski. *Fundamental theorem of algebra.* Formalized Mathematics, 9(3), 2001.
- Herman Geuvers, Freek Wiedijk, and Jan Zwanenburg. *A Constructive Proof of the Fundamental Theorem of Algebra without Using the Rationals.* In Types for Proofs and Programs, volume 2277 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2002.

2.3 Аутоматско доказивање теорема

Један од првих аутомацких доказивача теорема био је аутомацки доказивач за геометрију. Интересовање за аутомацко доказивање у геометрији постоји још одавно, од времена Тарског. Он је развио алгебарску методу за Еуклидску геометрију, али је та метода била неупотребљива за комликованије теореме. Ипак, највећи напредак је направљен тек средином XX-ог века када је Ву предложио своју алгебарску методу за доказивање теорема у Еуклидској геометрији. Његова метода је могла да докаже и веома комплексне теореме. Јоштједна алгебарска метода која се развила у исто време је метода Гребнерових база. Ови методи имају аналитички приступ у доказивању и заснивају се репрезентацији тачака коришћењем координата. Модерни доказивачи теорема који се заснивају на овим методима су коришћени да се докажу стотине нетривијалних теорема. Ипак, велика мана ових система је што производе доказе који нису читљиви. Деведесетих година XX-ог века постојало је више покушаја да се овај проблем реши и развијене су нове методе засноване на аксиоматизацији синтетичке геометрије – метода површи (?? area method), метода пуног угла (?? full angle method). Ипак, њихова главна мана је што су далеко мање ефикасни у односу на алгебарске методе.

Примена система за аутоматско доказивање теорема у геометрији је велика. Пре свега ови системи се могу користити у образовању. Поред тога користе се у начним областима као што су роботика, биологија, препознавање слика и друге.

Значајни радови из ове области су:

- Wen-Tsün Wu. *On the decision problem and the mechanization of theorem proving in elementary geometry.* Scientia Sinica , 21:157–179, 1978
- Deepak Kapur. *Using Gröbner bases to reason about geometry problems.* Journal of Symbolic Computation, 2(4):399–408, 1986
- Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. *Machine Proofs in Geometry.* World Scientific, Singapore, 1994

3 Циљеви тезе

3.1 Формализација аналитичке геометрије Декартове равни

Синтетичка геометрија се обично изучава ригорозно, као пример ригорозног аксиомацког извођења. Са друге стране, аналитичка геометрија се углавном изучава неформално. Често се ова два приступа представљају независно и веза између њих се ретко показује.

Циљ тезе је да повеже ове празнине. Први циљ је да се формализује аналитичка геометрија у оквиру асистента за доказивање теорема. Потом, циљ је да се покаже да је анлитичка геометрија модел више аксиомацких система, тј. система аксиома Тарског и система аксиома Хилберта.

3.2 Формализација геометрије комплексне равни

Постоји јако пуно радова и књига које описују геометрију комплексне равни. Циљ тезе је да представи потпуно развијену теорију проширене комплексне равни, њених објеката (линија и кругова) и њених трансформација (Мебијусове трансформације). Иако је већина појмова већ описана у различитим књигама, циљ тезе је да споји бројне приступе у један униформни приступ у коме ће бити коришћен јединствен и прецизан језик за описивање појмова. Наиме, чак и у оквиру исте књиге дешава се да аутори користе исти назив за различите појмове. Поред тога, циљ је анализирати и формално показати све случајеве који често остану недовољно истражени јер их више раличитих аутора сматра тривијалним. Пре свега, интересантни резултати се очекују у оквиру испитивања Мебијусових трансформација и како оне утичу на линије, кругове, углове, релације међу тачкама, оријентацију, унутрашњост и спољашњост диска.

Поред тога, биће формализована два приступа: геометријски приступ и алгебарски приступ. Намеће се питање да ли избор приступа утиче на ефикасност формалног доказивања у оквиру асистента за доказивање теорема.

3.3 Формализација Поинкареовог диск модела

Циљ тезе је да формализује Поинкарев диск модел. Иако постоји много радова који упућују да би формализација Поинкареовог диск модела могла бити тривијална, не постоји ни један рад, нити књига који ту формализацију заиста и представљају. Пре свега, циљ је правилно дефинисати релацију "између"за три тачке Поинкареове диск равни. Иако једна од основних релација, њену дефиницију нисмо пронашли до сада, барем не у истакнутој литератури из ове области. Потом, циљ је анализирати како Мебијусове трансформације утичу на релацију "између"и доказати да Поинкареов диск модел је модел геометрије Лобачевског.

3.4 Формална анализа алгебарских метода и разматрање њихове примене на проблеме у стереометрији

Већина система са аналитичким приступом за доказивање теорема се користи као софтвер којем се верује иако нису повезани са модерним интерактивним доказивачима теорема. Да би се повећала њихова поузданост потребно их је повезати са модерним интерактивним доказивачима теорема и то је могуће учинити на два начина – њиховом имплементацијом у оквиру интерактивног доказивача теорема и показивањем њихиове исправности или коришћењем интерактивних доказивача да провере њихова тврђења. Неколико корака у овом правцу је већ направљено.

Циљ тезе је да допуни ова истраживања и да понуди формално верификован систем за аутоматско доказивање у геометрији који користи метод Гребнерових база.

4 Прелиминарни садржај тезе

Теза ће се састојати из 4 велике целина подељених на мање делове при чему се неки од делова могу мењати у зависности од тока истраживања:

1. Увод. У овом поглављу биће описани основни појмови и главни циљеви тезе.
2. Асистенти за формално доказивање. Биће описани асистени за формално доказивање теорема са нагласком на систему Isabelle/HOL који ће бити коришћен у раду.
3. Различити притупи и тренутни резултати у формализацији геометрије.
    - 3.1. *Аутомацко доказивање у геометрији.* Ово поглавље ће представити раличите приступе у овој области и биће наведени најзначајнији резултати.

3.2. *Интерактивно доказивање у геометрији.* Биће представљени различити приступи у интерактивном доказивању у геометрији и биће истакнути сви значајни резултати из стално растућег скупа нових радова и истраживања.

4. Формализација аналитичке геометрије.

   4.1. *Модел Тарског.* Биће описана формализација аналитичке геометрије у моделу Тарског. Биће представњене дефиниције појмова и докази аксиома Тарског у аналитичког геометрији.

   4.2. *Модел Хилберта.* Биће представљене дефиниције појмова и докази аксиома Хилберта у аналитичкој геометрији.

5. Формализација хиперболичке геометрије.

   5.1. *Формализација геометрије комплексне равни.* Биће приказана формализација многих појмова комплексне геометрије: Мебијусове трансформације, круг, линија, угао итд. У оквиру овог поглавља биће анализирани различити приступи у формализацији.

   5.2. *Формализација Поинкареовог диск модела.* У овом поглављу биће анализиране аксиоме Тарског у Поинкареовом диск моделу.

6. Формална анализа алгебарских метода и разматрање њихове примене на проблеме у стереометрији

   6.1. *Формална анализа методе Гребнерових база у систему Isabelle/HOL.* Ово поглавље је посвећено анализи полинома којима се представљају геометријске конструкције и тврђења у оквиру система Isabelle/HOL.

   6.2. *Примена алгебарских метода на проблеме у стереометрији.* Биће анализирана примена алгебарских метода на задатке из стереометрије.

5 Досадашњи резулатати кандидата

Формализација аналитичке геометрије је заршена. Показано је да је она модел за две аксиомацки засноване геометрије, геометрије Тарског и геометрије Хилберта. Ови резултати су приказани у раду:

- Petrović, Danijela, and Filip Marić. "Formalizing Analytic Geometries." *Paper presented at ADG 2012: The 9th International Workshop on Automated Deduction in Geometry, held on September 17–19, 2012 at the University of Edinburgh.*

Поред овог рада, урађена је и формализација геометрије комплексне равни. Дефинисани су основни појмови и показане су многе особине Мебијусових трансформација. Такође, истражено је како Мебијусове трансформације утичу на објекте комплексне равни, као што су линија, круг, угао, оријентација. Резултати овог истраживања приказани су у раду:

- Marić, Filip, and Danijela Petrović. "Formalizing complex plane geometry." *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence: 1-38.*