1 Увод

У класичној математици постоји много различитих геометрија. Такође, различита су и гледишта шта се сматра стандардном (Еуклидском) геометријом. ПОнекад, геометрија се дефинише као независна формална теорија, а понекад као специфични модел. Наравно, везе између различтих заснивања геометрије су јаке. На пример, може се показати да Декартова раван представља модел формалних теорија геометрије.

Традиционална Еукидска (синетичка) геометрија, која датира још од античке Грчке, је геометрија заснована на често малом скупу основних појмова (на пример, тачке, линије, релација подударности, ...) и на скупу аксиома које имплицитно дефинишу ове основне појмове. Постоји више варијанти аксиомацког система за Еуклидску геометрију, а најважнији су Еуклидски систем аксиома (из његовог рада "Елементи"), потом Хилбертов систем аксиома[?], систем аксиома Тарског[?] и најмодернија варијанта – Авигадов систем аксиома[?].

Једна од најзначајнијих открића у математици, које датира из XVII века, јесте Декартово откриће координатног система и оно је омогућило да се алгебарским изразима представе геометријски облици. То је довело до рада на новој математичкој области која се зове *аналитичка геометрија*. Она је послужила да споји геометрију и алгебру и била је веома важна за откриће бесконачности и математичке анализе.

Последњих година, са појавом модерних интерактвних доказивача теорема, многе класичне математичке теорије су формално механички анализиране. Међу њима је и геометрија и постоји неколико покушаја да се формализују раличите геометрије и различити приступи у геометрији. Ми нисмо упознати да је поптпуно комплетно формализован Хилбертов систем[?] или систем аксиома Тарског[?], али значајно кораци су направљени и велики делови ових теорија су формализоване у оквиру интерактивних доказивача теорема[?, ?, ?]. Како искуство за сада показује, коришћењем доказивача теорема значајно се повећава ниво прецизности јер се показало да су многе класичне математичке књиге непрецизне, а понекад чак имају и грешке. Зато би приликом формалног заснивања геометрије требало користити доказивач теорема, а у нашем раду ми смо користили Isabelle/HOL[?] доказивач.

Главна примена нашег рада је у аутомацком доказивању теорема у геометрији и у математичком образовању и учењу геометрије.

Код аутомацког доказивања теорема у геометрији, аналитички приступ у доказима се показао далеко супериорнији у односу на остале доказиваче. Најуспешнији методи на овом пољу су *алгебарски методи* (Вуоов метод[?] и метод Гребнерових база[?, ?]) и они се заснивају на репрезентацији тачака коришћењем координата. Модерни доказивачи теорема који се заснивају на овим методима су коришћени да се докажу стотине нетривијалних теорема. Са друге стране, доказивачи теорема засновани на синтетичкој аксиоматизацији нису толико успешни. Већина система са аналитичким приступом за доказивање теорема се користи као софтвер којем се верује иако нису повезани са модерним интерактивним доказивачима теорема. Да би се повећала њихова поузданост потребно их је повезати са модерним интерактивним доказивачима теорема и то је могуће учинити на два начина – њиховом имплементацијом у оквиру интерактивног доказивача теорема и показивањем њихиове исправности или коришћењем интерактивних доказивача да провере њихова тврђења. Неколико корака у овом правцу је већ направљено[**?**, **?**].

У математичком образовању у средњим школама и на факултетима оба приступа у геометрији (аналитички и синтетички) се демонстрирају. Ипак, док се синтетички приступ предаје као ригорозан систем (????) (са намером да се демонстрира ригорозан аксиомацки приступ), аналитичка геометрија се показује много мање формално (понекад само као део рачуна calculus). Такође, ова два приступа се показују независно, и веза између ова два приступа се ретко формално показује у оквиру стандарог наставног плана.

Имајћи све ово на уму, ова рад покушава да премости више празнина за које мислимо да тренутно постоје у формализацији геометрије.

1. Прво, наш циљ је да формализујемо Декартову геометрију у оквиру интерактивног доказивача теорема, са ригорозним приступом, али веома блиско стандарном средњошколском образовању.

2. Намеравамо да покажемо да су разиличите дефиниције основних појмова аналитичке геометрије које можемо видети у литератури заправо еквивалентне, и да заправо представљају јединствен апстрактни ентитет – Декартову раван.

3. Намеравамо да покажемо да стандарна геометрија координатне равни представља модел неколико геометријских аксиоматизација (пре свега систем аксиома Тарског и Хилбертов систем аксиома).

4. Желимо формално да анализирамо теорецке особине различитих аксиомацких система (на пример, желимо да покажемо да сви модели Хилбертовог система аксиома су изоморфни стандарној координатној геометрији).

5. Желимо формално да анализирамо аксиоматизације и моделе не-Еуклидске геометрије и њихове особине (на пример, да покажемо да је Поинкареов диск модел запараво модел геометрије Лобачевског).

6. Желимо да формално успоставимо везу између геометрије координатног система са алгебарским методама за аутомацко доказивање теорема у геометрији.

Поред тога што су многе теореме формализоване и доказане у оквиру система Isabelle/HOL, ми такође дискутујемо и наше искуство у примени различитих техника за поједностављење доказа. Најзначајнија техника је "без губитка на општости"(" wlog"), која прати приступ Харисона[**?**] и која је оправдна коришћењем разних изометријиских трансформација.

2 Основни појмови

(??? background)

Isabelle/HOL је интерактивни доказивач теорема који је заснова на логици вишег реда (HOL). Он обезбеђује моћне аутомацке методе за доказивање (прооф метходс ??), који су обично засновани на симлификацији класичном резоновању. Isar је декларативни језик за доказе у Isabell/HOL систему, који дозвољава писање структурних, читљивих доказа. У Isabelle/HOL систему $[\![P_1; \ldots P_n]\!] \Longrightarrow Q$ значи ако P_1, $\ldots$, P_n је тачно, онда Q је такође тачно. Ова нотација се користи да означи и правила закључивања и тврђења (леме, теореме). Језик Isar такође омогоћува и нотацију `assumes "`P_1`"..."`P_n`" shows "`Q`"` , и она ће бити коришћена у овом раду. Такође, користићемо и везнике међу објектима (??? object-level connectives) $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, анд $\longleftrightarrow$ за означавање коњукције, дисјункције, имликације и логичке еквиваленције. Квантификатори ће бити означени са $\forall x.\ Px$ и $\exists x.\ Px$.

3 Формализација геометрије Декартове равни

Када се формализује теорија, мора се одлучити који појмови ће бити основни, а који појмови ће бити дефинисани помоћу тих основних појмова. Циљ наше формализације аналитичке геометрије је да успостави везу са синтетичком геометријом, па зато има исте основне појмове који су дати у синтетичком приступу (?? so it follows primitive notions given in synthetic approaches). Свака геометрија има класу објеката(?? class of objects) који се називају *тачке*. Неке геометрије (на пример, Хилбертова) има и додатни скуп објеката који се наизвају *линије*, док неке геометрије (на пример, геометрија Тарског) уопште не разматра линије . У неким геометријама, линије су дефинисани појам, и оне су дефинисане као скуп тачака. Ово подразумева рад са теоријом скупова, а многе аксиоматизације желе то да избегну. У нашој формализацији аналитичке геометрије, ми ћемо дефинисати и тачке и линије јер желимо да омогућимо анализу и геометрије Тарског и геометрије Хилберта. Основна релација која спаја тачке и линије је релације *инциденције*, која неформално означава да линија садржи тачку (или дуално да се тачка налази на линији). Други примитивни појмови (у већини аксиомацких система) су релација *између* (која дефише редослед колинеарних тачака) и релација *конгруенције*.

Важно је напоменути да су обично многи појмови који су заправно изведени појмови у синтетичкој геометрији у аналитичком геометрији дати у облику дефиниција. На пример, у књигама за средњу школу дефише се да су линије нормалне ако је производ њихових праваца -1. Ипка, ово нарушава везу са синтетичком геометријом (где је нормалност изведени појам) јер би оваква карактеризација требало да буде доказана као теорема, а не узета као дефиниција.

3.1 Тачке у аналитичкој геометрији.

Тачка у реалној координатној равни је одређена са својим x и y координатама. Зато, тачке су парови реалних бројева ($\mathbb{R}^2$), што се може лако формализовати у Isabell/HOL систему са `type_synonym` $point^{ag}$ = "$real \times real$".

3.2 Редослед тачака.

Редослед (колинерних) тачака се дефинише коришћењем релације *између*. Ово је релација која има три аргумента, $\mathcal{B}(A, B, C)$ означава да су тачке A, B, и C колинеране и да је тачка B између тачака A и C. Ипак, неке аксиоматизације (на пример, аксиоматизација Тарског) дозвољава случај када је тачка B једнака тачки A или тачки C (рећи цемо да је релација између инклузивна (??? inclusive)), док неке друге аксиоматизације (на пример, Хилбертова аксиоматизација) не дозвољавају једнакост тачака (и тада кажемо да је релација између ексклузивна (??? exclusive)). У првом случају, тачке A, B и C задовољавају релацију између ако постоји реалан број $0 \leq k \leq 1$ такав да $\vec{AB} = k \cdot \vec{AC}$. Желимо да избегенемо експлицитно коришћење вектора јер су они чешће изведени, а ређе примитиван појам у синтетичкој геометрији, тако да релацију између формализујемо у Isabelle/HOL систему на следећи начин :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}_T^{ag}\ (xa, ya)\ (xb, yb)\ (xc, yc) \longleftrightarrow \\
&\quad (\exists (k :: real).\ 0 \leq k \ \wedge\ k \leq 1\ \wedge \\
&\qquad (xb - xa) = k \cdot (xc - xa)\ \wedge\ (yb - ya) = k \cdot (yc - ya))
\end{aligned}
$$

Ако захтевамо да тачке A, B и C буду различите, она мора да важи $0 < k < 1$, и релацију ћемо означавати са $\mathcal{B}_H^{ag}$.

3.3 Конгруенција.

Релација конгрунеције дефинише се на паровима тачака. Неформално, $AB \cong_t CD$ означава да је сегмент AB конгруентан сегменту CD. Стандардна метрика у $\mathbb{R}^2$ дефинише да растојање међу тачкама $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ је $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Квадратно растојање се дефинише као $d_{ag}^2\ A\ B = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$. Тачке A и B су конгруентне тачкама C и D ако и само ако $d_{ag}^2\ A\ B = d_{ag}^2\ C\ D$. У Isabelle/HOL систему ово се може формализовати на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
&d_{ag}^2\ (x_1, y_1)\ (x_2, y_2) = (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cdot (y_2 - y_1) \\
&A_1 B_1 \cong^{ag} A_2 B_2 \longleftrightarrow d_{ag}^2\ A_1\ B_1 = d_{ag}^2\ A_2\ B_2
\end{aligned}
$$

3.4 Права и инциденција.

Једначина праве. Праве у Декартовој координатној равни се обично представљају једначинама облика $Ax + By + C = 0$, па тако тројка $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ означава линију. Ипак, тројке у којима је $A = 0$ и $B = 0$ морају бити изузете јер не представљају исправну једначину праве. Такође, једначине $Ax + By + C = 0$ и $kAx + kBy + kC = 0$, за реално $k \neq 0$, означавају исту праву. Зато права не може бити дефинисана коришћењем само једне једначине, већправа мора бити дефинисана као класа једначина које имају пропорционалне коефициенте. Формализација у систему Isabelle/HOL се састоји из неколико корака. Прво, дефинише се домен валидних тројки који су коефициенти једначине.

$$\texttt{тыпедеф}\ \mathit{line\_coeffs}^{ag}\ \texttt{l}$$
$$\{((A :: real), (B :: real), (C :: real)).\ A \neq 0 \vee B \neq 0\}$$

Када је овај тип дефинисан, функција *Rep_line_coeffs* конвертује апсреактне вредности овог типа у њихове конкретне репрезентације (тројке реалних бројева), а функција *Abs_line_coeffs* конвертује (валидне) тројке у вредности које припадају овом типу.

Две тројке су еквиваленте ако и само ако су пропорционалне.

$$\begin{aligned}
&l_1 \approx^{ag} l_2 \longleftrightarrow \\
&\quad (\exists\ A_1\, B_1\, C_1\, A_2\, B_2\, C_2. \\
&\quad (\mathit{Rep_line_coeffs}\ \ l_1 = (A_1, B_1, C_1))\ \wedge\ \mathit{Rep_line_coeffs}\ \ l_2 = (A_2, B_2, C_2)\ \wedge \\
&\quad (\exists k.\ k \neq 0\ \wedge\ A_2 = k \cdot A_1\ \wedge\ B_2 = k \cdot B_1\ \wedge\ C_2 = k \cdot C_1))
\end{aligned}$$

Показано је да је ово релација еквиваленције. Дефиниција типа праве користи подрску за количничке типове и количничке дефиниције који су скоро интегрисани у систем Isabelle. Значи права (тип $line^{ag}$) се дефинише коришћењем `чуотиентЪтыпе` команде као класа еквиваленције над релацијом $\approx^{ag}$.

Да би избегли коришћење теорије скупова, геометријске аксиоматизације које експлицитно разматрају праве користе релацију инциденције (??? припадања). Ако се користи претходна дефиниција за праве, она провера инциденције се своди на израчунавање да ли рачка (x, y) задовољава једначину праве $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, за неке коефицијенте A, B, и C који су представници класе.

$$\begin{aligned}
&\mathit{ag_in_h}\ \ (x, y)\ \ l \longleftrightarrow \\
&\quad (\exists\ \ A\ \ B\ \ C.\ \mathit{Rep_line_coeffs}\ \ l = (A,\ \ B,\ \ C)\ \wedge\ (A \cdot x + B \cdot y + C = 0))
\end{aligned}$$

Ипак, да би показали да је релација заснована на представницима класе добро засновама, мора бити показано да ако се изаберу други представници класе A', B', и C' (који су пропорционални са A, B, и C), онда $A' \cdot x + B' \cdot y + C = 0$. Зато, у нашо Isabelle формализацији, ми користимо пакет који подржава рад са количницким типовима (quotient package). Онда $A \in^{ag}_{H} l$ се дефинише коришћењем `чуотиентЪдефинитион` која се заснива на релацији *ag_in_h*. Лема добре дефинисаности је

```
лемма
  шощс "l ≈ l' ⟹ ag_in_h P l = ag_in_h P l'"
```

Афина дефиниција. У афиној геометрији, права се дефинише помоћу фиксне тачке и вектора. Као и тачке, вектори такође могу бити записани као пар реалних бројева `тыпеЪсыноным` vec^{ag} $=$ "$real \times real$". Вектори дефинисани на овај начин чине векторски простор (са природно дефинисаним векторским збиром и скаларним производом). Тачке и вектори се могу сабирати као $(x, y) + (v_x, v_y) = (x + v_x, y + v_y)$. Зато, права се записује као тачка и вектор који је различит од нуле:

тыпедеф $line\_point\_vec^{ag} = \{(p :: point^{ag}, v :: vec^{ag}).\ \ v \neq (0,0)\}$

Ипак, тазличите тачке и вектори могу заправо одређивати једну те исту праву, па конструкција са количничким типом опет мора бити коришћена.

$$
\begin{array}{l}
l_1 \approx^{ag} l_2 \longleftrightarrow (\exists\, p_1\, v_1\, p_2\, v_2. \\
\quad Rep\_line\_point\_vec\ \ l_1 = (p_1, v_1) \ \wedge \ Rep\_line\_point\_vec\ \ l_2 = (p_2, v_2) \wedge \\
\quad (\exists km.\ \ v_1 = k \cdot v_2 \ \wedge \ p_2 = p_1 + m \cdot v_1))
\end{array}
$$

Показује се да је ово заиста релација еквиваленције. Онда се тип праве ($line^{ag}$) се дефинише коришћењем команде чуотиентътыпе, као класа еквиваленције над релацијом $\approx^{ag}$.

У овом случају, инциденција се дефинише на начин који можете видети у наставку (поново се уопштава (??? lifted) коришћењем количницког пакета, након што се покаже добра дефинисаност).

$$ag\_in\_h\, p\, l, \longleftrightarrow \ (\exists\, p_0\, v_0.\, Rep\_line\_point\_vec\, l = (p_0, v_0) \ \wedge \ (\exists k.\, p = p_0 + k \cdot v_0))$$

Јоштједна могућа дефиниција праве је класа еквиваленције парова различитих тачака. Ми нисмо формализовали овај приступ јер је тривиално изоморфан са афином дефиницијом (разлика тачака је вектор који се појављује у афиној дефиницији).

3.5 Изометрије

У синтетичкој геометрији изометрије се уводе коришћењем дефиниције. Рефлексије могу прве да се дефинишу, а онда се друге изометрије могу дефинисати као композиција рефлексија. Ипак, у нашој формализацији , изометрије се користе само као помоћно средство да упросте наше доказе (што ће бити додатно појашњено у одељку **??**). Зато ми нисмо били заинтересовани да дефинишемо изометрије као примитивне појмове (као што су тачке и конгруенција) него смо представили аааналитичке дефиницје и доказали својства која су потребна за касније доказе.

Транслација је дефинисана преко датог вектора (који није експлицитно дефининсан, већје представљен као пар реалних бројева). Формална дефиницја у Isabelle/HOL је једноставна.

$$transp^{ag}\ \ (v_1, v_2)\ \ (x_1, x_2) = (v_1 + x_1, v_2 + x_2)$$

Ротација је параметризована за реални параметар α (који представља угао ротације), а само посматрамо ротације око координатног почетка (остале ротације могу се добити као композиција транслације и ротације око координатног почетка). Користимо основна правила тригонометрије да би добили следећу формалну дефиницију у Isabelle/HOL-u.

$$rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ (x, y) = ((\cos\alpha) \cdot x - (\sin\alpha) \cdot y, (\sin\alpha) \cdot x + (\cos\alpha) \cdot y)$$

Takoẹ, centralna simetrija se lako definiše korišćenjem koordinata tačake:

$symp^{ag}\ \ (x, y) = (-x, -y)$

Važna osobina svih izometrija je svojstvo invarijantnosti, tj. one čuvaju osnovne relacije (kao što su izmeų i kongruencija).

$\mathcal{B}_T^{ag}\ \ A\ \ B\ \ C \longleftrightarrow \mathcal{B}_T^{ag}\ \ (transp^{ag}\ \ v\ \ A)\ \ (transp^{ag}\ \ v\ \ B)\ \ (transp^{ag}\ \ v\ \ C)$
$AB \cong^{ag} CD \longleftrightarrow$
$\quad (transp^{ag}\ \ v\ \ A)(transp^{ag}\ \ v\ \ B) \cong^{ag} (transp^{ag}\ \ v\ \ C)(transp^{ag}\ \ v\ \ D)$
$\mathcal{B}_T^{ag}\ \ A\ \ B\ \ C \longleftrightarrow \mathcal{B}_T^{ag}\ \ (rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ A)\ \ (rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ B)\ \ (rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ C)$
$AB \cong^{ag} CD \longleftrightarrow (rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ A)(rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ B) \cong^{ag} (rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ C)(rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ D)$
$\mathcal{B}_T^{ag}\ \ A\ \ B\ \ C \longleftrightarrow \mathcal{B}_T^{ag}\ \ (symp^{ag}\ \ A)\ \ (symp^{ag}\ \ B)\ \ (symp^{ag}\ \ C)$
$AB \cong^{ag} CD \longleftrightarrow (symp^{ag}\ \ A)(symp^{ag}\ \ B) \cong^{ag} (symp^{ag}\ \ C)(symp^{ag}\ \ D)$

Izometrije se pre svega koriste da transformišu tačku u njenu kanonsku poziciju (obično pomeranjem na y-osu). Sledeće leme pokazuje da je to moguće učiniti.

$\exists v.\ transp^{ag}\ \ v\ \ P = (0, 0)$
$\exists \alpha.\ rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ P = (0, p)$
$\mathcal{B}_T^{ag}\ \ (0, 0)\ \ P_1\ \ P_2 \longrightarrow \exists \alpha\ \ p_1\ \ p_2.\ rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ P_1 = (0, p_1) \wedge rotp^{ag}\ \ \alpha\ \ P_2 = (0, p_2)$

Izometrijske transformacije linija se definišu korišćenjem izometrijskih transformacija nad tačkama (linija se transformiše tako što se transformišu dve njene proizvoljne tačke.

---

4 КориУЁење изометријских трансформација

Jedna od najvažnijih tehnika koja je korišćenja za uprošćavanje formalizacije oslanjala se na korišćenje izometrijskih transformacija. Mi ćemo pokušati da predstavimo motivacioni razlog za primenu izometrija na sledećem, jednostavnom primeru.

Cilj je da pokažemo da u našem modelu važi, ako $\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ X\ B$ i $\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ B\ Y$ onda$\mathcal{B}_T^{ag}\ X\ B\ Y$. Čak i na ovom jednostavnom primeru, ako primenimo direktan dokaz, bez korićenja izometrijskih transformacija, algebarski račun postaje previše kompleksan.

Neka važi $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, i $X = (x_X, y_X)$. Kako $\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ X\ B$ važi, postoji realan broj k_1, $0 \le k_1 \le 1$, takav da $(x_X - x_A) = k_1 \cdot (x_B - x_A)$, i $(y_X - y_A) = k_1 \cdot (y_B - y_A)$. Slično, kako $\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ B\ Y$ važi, postoji realan broj k_2, $0 \le k_2 \le 1$, takav da $(x_B - x_A) = k_2 \cdot (x_Y - x_A)$, i $(y_B - y_A) = k_2 \cdot (y_Y - y_A)$. Onda, može se definisati realan broj k sa $(k_2 - k_2 \cdot k_1)/(1 - k_2 \cdot k_1)$. Ako $X \neq B$, onda korišćem kompleksinih algebarskih transformacija, može se pokazati da $0 \le k \le 1$, i da $(x_B - x_X) = k \cdot (x_Y - x_X)$, i $(y_B - y_X) = k \cdot (y_Y - y_X)$, i zato $\mathcal{B}_T^{ag}\ X\ B\ Y$ važi. Degenerativni slučaj $X = B$ trivijalno važi.

Ipak, ako primenimo izometrijske transformacije, onda možemo predspostaviti da $A = (0, 0)$, $B = (0, y_B)$, i $X = (0, y_X)$, i da $0 \le y_X \le y_B$. Slučaj kada je $y_B = 0$ trivijalno važi. U suprotnom, $x_Y = 0$ i $0 \le y_B \le y_Y$. Zato, $y_X \le y_B \le y_Y$, i tvrẹnje važi. Primetimo da u ovom slučaju nisu bile potrebne velike algebarske transformacije i dokaz se oslanja na jednostavne osobine tranzitivnosti relacije $\le$.

Poredeći prethodna dva dokaza, možemo da vidimo kako primena izometrijskih transformacija značajno uprošćava potrebna izračunavanja i skraćuje dokaze.

Kako je ova tehnika dosta korišćena u našoj formalizaciji, važno je prodiskutovati koje je najbolji način da se formulišu odgovarajuće leme koje opravdavaju upotrebu ove tehnike i pokušati što više automatizovati korišćenje ove tehnike. Mi smo primenili pristup koji je predložio Harison [**?**].

Svojstvo P je invarijantno pod transformacijom t akko na njega ne utiče transformacija tačaka na koju je primenjena transformacija t.

$inv\ \ P\ \ t \longleftrightarrow (\forall\ \ A\ \ B\ \ C.\ \ P\ \ A\ \ B\ \ C \longleftrightarrow P\ \ (tA)\ \ (tB)\ \ (tC))$

Tada, sledeća lema se može koristiti da svedemo tvrenje koje važi za bilo koje kolinearne tačke na tvrenje za koje razmatramo damo tačke y-ose (možemo izabrati i x-osu ukoliko nam tako više odgovara).

```
лемма
  ассумес "∀ y_B y_C. 0 ≤ y_B ∧ y_B ≤ y_C ⟶ P (0,0) (0,y_B) (0,y_C)"
          "∀v. inv P (transp^ag v )∀α. inv P (rotp^ag α )"
          "inv P (symp^ag )"
  шощс    "∀ABC. B_T^ag A B C ⟶ P A B C"
```

Dokaz da je neko tvrenje invarijantno u odnosu na izometrijsku transformaciju najviše se oslanja na leme koje pokazuju da su relacija izmeu i relacija kongruencije invarijantne u odnosu na izometrijske transformacije.

5 Геометрија Тарског

Naš cilj u ovom poglavlju je da dokažemo da naše definicije Dekartove koordinatne ravni zadovoljavaju sve aksiome geometrije Tarskog[**?**]. Osnovni pojmovi u geometriji Tarskog su samo tri pojma - tačke, (inkluzivna) relacija izmeu (označena sa $\mathcal{B}_t(A,B,C)$) i relacija kongruencije (koju označavamo sa $\mathcal{B}_t(A,B,C)$). U geometriji Tarskog linije nisu eksplicitno definisane i kolinearnost se definiše korišćenjem relacije izmeu

$$\mathcal{C}_t(A,B,C) \longleftrightarrow \mathcal{B}_t(A,B,C) \vee \mathcal{B}_t(B,C,A) \vee \mathcal{B}_t(C,A,B)$$

5.1 Аксиоме конгруенције.

Prve tri aksiome Tarskog predstavljaju osnovna svojstva kongruencije.

$AB \cong_t BA$
$AB \cong_t CC \longrightarrow\ \ A = B$
$AB \cong_t CD \wedge\ \ AB \cong_t EF\ \ \longrightarrow CD \cong_t EF$

Želimo da dokažemo da naša relacija $\cong^{ag}$ zadovoljava svojstva relacije $\cong_t$ koja je apstraktno zadana sa prethodnim aksiomama (tj. da date aksiome važe u našem modelu Dekartove koordinatne ravni)[1]. Na primer, za prvu aksiomu, dokaz se svodi na pokazivanje tvrenja $AB \cong^{ag} BA$. Dokazi su straightforward (?? jednostavni) i gotovo automatski (pojednostavljivanjem nakon razvijanja (?? unfolding) definicija).

[1]У наVој формализацији, аксиоме геометрије Тарског су формулисане кориV цењем *лоцале* [**?**], и показано је да координатна раван представља интерпретацију тог дефинисаног *лоцале*. Како је ово техниVка страна формализације у Исабелле/ХОЛ систему, ми је нећемо дискутовати у виVе детаља

5.2 Аксиоме за релацију измеу̣.

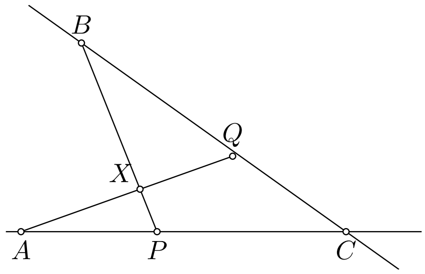
Identity релације измеу̣. Prva aksioma (inskluzivne) relacije izmeụ daje jedno njeno jednostavno svojstvo i, za naš model, dokazuje se gotovo automatski.

$\mathcal{B}_t(A, B, A) \longrightarrow A = B$

ПаЪова аксиома. Sledeća aksioma je Pašova aksioma:

$\mathcal{B}_t(A, P, C) \wedge \mathcal{B}_t(B, Q, C) \longrightarrow (\exists X.\ (\mathcal{B}_t(P, X, B) \wedge \mathcal{B}_t(Q, X, A)))$

Pod pretpostavkom da su sve tačke koje se pominju u aksiomi različite, slika koja odgovara aksiomi je:



Pre nego što damo dokaz da u našem modelu Dekartove koordinatne ravni važi ova aksioma, želimo da prodiskutujemo neka pitanja koja se odnose na geometriju Tarskog i koja su se pokazala važa za sveukupnu organizaciju našeg dokaza. Poslednja verzija aksiomatskog sistema Tarskog je napravljena da bude minimalna (sadrži samo 11 aksioma), i centralne aksiome koje opisuju relaciju izmeụ su identity relacije izmeụ i Pašova aksioma. U formalizaciji geometrije Tarskog ([?]) sva ostala elementarna svojstva ove relacije se izvode iz ove dve aksiome. Na primer, da bi se izvela simetričnost relacije izmeụ (i.e., $\mathcal{B}_t(A, B, C) \longrightarrow \mathcal{B}_t(C, B, A)$), aksioma Paša se primenjuje na trojke ABC i BCC i tada se dobija tačka X tako da važi $\mathcal{B}_t(C, X, A)$ i $\mathcal{B}_t(B, X, B)$, i onda prema aksiomi 1, $X = B$ i $\mathcal{B}_t(C, B, A)$. Ipak, prema našem iskustvu, u nameri da pokažemo da je naša Dekartova koordinatna ravan je model aksioma Tarskog (pogotovo za Pašovu aksiomu), potrebno je da već imamo pokazane neke njene posledice (kao što su simetričnost i tranzitivnost). Još da dodamo, da su ranije varijante aksiomatskog sistema Tarskog imale više aksioma, a ova svojstva su upravo bile neke od tih dodatnih aksioma. Takoẹ, svojstvo simetrije je jednostavnije svojstvo nego Pašova aksioma (na primer, ono uključuje samo tačke koje leže na liniji, dok u aksiomi Paša imamo tačke koje leže u ravni i ne moraju biti kolinerane). Dodatno, prethodni dokaz koristi veoma supstilna svojstva koja zavise od toga kako je Pašova aksioma formulisana. Na primer, ako se u njenom zaključku koristi $\mathcal{B}_t(B, X, P)$ i $\mathcal{B}_t(A, X, Q)$ umesto $\mathcal{B}_t(P, X, B)$ i $\mathcal{B}_t(Q, X, A)$, onda dokaz ne može da se izvede. Zato, mi smo odlučili da bi dobar pristup bio da direktno pokažemo da neka elementarna svojstva (kao što su simetrija, tranzitivnost) relacije izmeụ važe u modelu, a onda da koristimo ove činjenice u dokazu mnogo kompleksnije Pašove aksiome.

$\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ A\ B$
$\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ B\ C \longrightarrow \mathcal{B}_T^{ag}\ C\ B\ A$
$\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ X\ B\ \wedge\ \mathcal{B}_T^{ag}\ A\ B\ Y \longrightarrow \mathcal{B}_T^{ag}\ X\ B\ Y$
$\mathcal{B}_T^{ag}\ A\ X\ B\ \wedge\ \mathcal{B}_T^{ag}\ A\ B\ Y \longrightarrow \mathcal{B}_T^{ag}\ A\ X\ Y$