1 Dokazivači teorema – motivacija

1.1 Frame 1

- Aksiomatski dokazivači – dat skup aksioma i primenom logike (metod rezolucije, tabloa, prirodna dedukcija) dolazi se do nekih zaključaka.
  Vidjeno u radu Vesne i Sane. (i tu izvrsena provera u okviru sistema Isabelle/HOL)
  Velika je mana što nisu efikasni.

- Algebarski dokazivači – mogu dokazati veliki broj teorema. Problem je što dokazi nisu čitljivi. Zasnivaju se na analitičkom pristipu u dokazima, tj. na reprezentaciji tačaka korišćenjem koordinata. Prolem je i što nismo "sigurni" u dobijeni dokaz.

1.2 Frame 2

Prica preuzeta od Bezema: http://dream.inf.ed.ac.uk/events/adg2012/uploads/talks/ADG2012-Beeson.pdf

Ideja je da se ispriča motivacija za ovaj doktorat, otkuda sve to.

Svaku granu grafa objasniti:

- **Geometrijska teorema – Geometrijski dokaz** Bilo bi idealno da idemo ovim putem. Od teoreme ka dokazu, a pri tome koristimo geometrijske alatke (aksiome, prirodnu dedukciju itd.)
  Veliki je probelm što ovo uopšte nije jednostavno uraditi. Naime, problem može biti težak i nedokaziv za čoveka. Tu u priču dolaze računari.
  Ali, ako koristimo aksiomatske dokazivače – ne moramo biti uspešni (oni nisu baš najusp[ešniji u dokazivanju).
  Zato idemo ZAOBILAZNIM putem (to je deo grafa koji ide preko Algebraskih dokazivača).

- **Geometrijska teorema – Algebarska Transformacija** Ovde imamo zapravo dve stvari o kojima treba voditi računa:

  1. Prebacujemo sve u analitičku geometriju – zašto je to ok? Kako smemo da prebacimo u analitičku geometriju?
  2. Zašto su ok konstrukcijski polinomi? – da li nešto gubimo ili dobijamo prebacijući u polinome, da li su oni zaista korektni?

- **Algebarska transformacija – Algebarski dokaz** Grebnerove baze već formalizovane u okviru sistema Isabelle/HOL

- **Algebarski dokaz – Geometrijski dokaz** Da li je dokaz zaista dokaz? Zašto možemo da vratimo nazad? Zašto nešto što važi u analitičkoj geometriji važi i u sintetičkoj? Kako ide formalizacija: pokazati da se u sintetičkoj geometriji može izgraditi Dekartova ravan.

2 Formalizacija analitičke geometrije

2.1 Frame 3

U klasičnoj matematici postoji mnogo različitih geometrija. Takoę, različita su gledišta šta se smatra standardnom (Euklidskom) geometrijom. Ponekad, geometrija se definiše kao nezavisna formalna teorija, a ponekad kao specifičan model. Naravno, veze izmeų različitih zasnivanja geometrije su jake.

Tradicionalna Euklidska (sintetička) geometrija, koja datira još od antičke Grčke, je geometrija zasnovana na često malom skupu osnovnih pojmova (na primer, tačke, linije, relacija podudarnosti, . . .) i na skupu aksioma koje implicitno definišu osnovne pojmove. Korišćenjem aksioma, teorema, lema i logičkih argumenata moguće je izvoditi nove zaključke. Iako su Euklidovi "Elementi" jedan od najuticajnih radova iz matematike, postavilo se ozbiljno pitanje da li sistem aksioma, teorema i lema kojima se geometrija opisuje zaista precizan. Ispostavilo se da su nadjene greške u dokazima u tekstu, a i da su neki dokazi bili nekompletni jer su imali implicitne pretpostavke nastale zbog intuicije ili posmatranja slike. Ove praznine su uticale na pojavu drugih aksiomatskih sistema čiji je cilj bio da daju formalnu aksiomatizaciju Euklidove geometrije. Najvažniji su Hilbertov sistem aksioma, sistem aksioma Tarskog i najmodernija varijanta – Avigadov sistem aksioma.

Hilbertov sistem se sastoji iz tri osnovna pojma (tačka, prava i ravan), 6 predikata i 20 aksioma podeljenih po grupama. Hilbert nije želeo ništa da ostavo intuiciji, već je i najočiglednija tvrdjenja zapisivao kao aksiome i leme. Ovakav pristup je povećao nivo rigoroznosti ne samo u geometriji, nego u celoj matematici.

Sistem Tarskog je manji, sastoji se od jednog osnovnog pojma (tačka), 2 predikata i 11 aksioma i njegova osnovna prednost u odnosu na Hilbertov sistem je u njegovoj jednostavnosti. Sa druge strane, sistem Tarskog uvodi pojam linije kao skup tačaka ; a takav pristup dosta otežava rezonovanje jer zahteva da se u dokazima teorema i lema koristi kompleksna teorija skupova.

Jdn d naznačaniih tkrića u matmatici, k datira iz XVII vka, st Dkartv tkri krdinatng sistma i n mgućil da s algbarskim izrazima prdstav gmtriski blici. T dvl d rada na nv matmatik blasti ka s zv *analitička gmtria.* na psluila da spi gmtriu i algbru i bila vma vana za tkri bsknačnsti i matmatičk analiz.

Potreba za rigoroznim zasnivanjem matematike postoji veoma dugo i sa razvojem matematike pove-ćavao se i stepen rigoroznosti. Sa pojavom računara pojavila se mogućnost mašinski proverivih dokaza. Tako su se pojavili sistemi za formalno dokazivanje teorema. Čst, mhanički prvrni dkazi ppunjavau praznin k pst u dfiniciama i dkazima i upuuu na dublju analizu tm ka s izučava.

Pstje sistemi kji mgućavaju ptpun autmatsku prveru dkaza i ni su najčešće kriste ST rešavače ili tehnike prezapisivanja. Sistemi kji se zasnivaju na lgikama višeg reda su pluautmatski i u prcesu frmalng dkazivanja trma d strane krisnika (čest prgramer i/ili matematičar) pmažu tak št kntrlišu ispravnst dkaza i, klik t mguć, prnalaze autmatske dkaze. vi pluautmatski dkazivači se nazivaju i *asistenti za dkazivanje terema.*

Danas psti mng asistnata za dkazivanj trma: Isabelle, Isabelle/HL, Cq, HL Light, PVS i drugi. Psbn s ističu Isabelle/HL i Cq ka sistmi sa vćim brm krisnika ki su tkm gdina razvili vliki skup biblitka sa frmaln dkazanim triama k mguć dalj nadgradjivati. sistnti za dkazivanj trma s krist u različitim blastima. Pr svga, istič s primna u brazvanju. Prd tga, mgu s kristiti i za frmalnu vrifikaciu računarskih prgrama. Pmažu razv i prdubljivanj matmatikg znanja.

Postoji veliki broj formalizacija fragmenata različitih geometrija u okviru asistenata za dokazivanje teorema. Delovi Hilberove knjige "Osnove geometrije" su formalizovani u Isabelle-u i Coq-u. U okviru sistema Coq je formalizovana geometrija Tarskog, konstruktivna geometrija, projektivna geometrija, geometrija lenjira i šestara i druge.

2.2 Frame 5-6

Manje-više kratko reći ono što piše na slajdovima bez osvrtanja na detalje. Posebno se osvrnuti na **wlog** kao na veoma važnu tehniku.

3 Formalizing Complex Plane Geometry

3.1 Frame 7

Želeli smo da proširimo istraživanje i da dodamo formalizaciju Hiperboličke geometrije. Krenuli smo od Poinkareovog disk modela i želeli smo da formalizujemo da je on model geometrije Lobačevskog (važe sve aksiome osim aksiome paralelenosti).

Poincareov disk model predstavljamo jednim jediničnim krugom.

3.2 Frame 8

Linija je normalna na jedinični krug.

To može biti prava koja prolazi kroz centar.

3.3 Frame 9

Ili može bit krug (deo kruga, luk) koji je normalan na jedinični krug.

3.4 Frame 10

Ono što nam je interesantno je da posmatramo relaciju izmeu̧.

3.5 Frame 11

Jedan od načina da se definiše izmeu̧ bi mogao da bude: preslikamo tačke na x-osu i onda gledamo u kakvom su odnosu.

Postoji više problema:
– transformacija koja vrši preslikavanja ne sme da menja redosled tačaka, odnosno mora da ga čuva
– voleli bismo da je ta transformacija jednostavna, ali je kompleksna
– treba ispitati da li se nakon transformacije tačke nalaze na x-osi ili ne. One koje nisu na x-osi nisu ni na liniji odreęnoj ovim tačkama (malo detaljnije ovo objasniti)
– konacno, kako da povezemo ako imamo vise trojki tačaka i za njih hocemo da ispitujemo between; kada imamo jedan, onda ga preslikamo i gledamo x-osu, ali ako imamo 6 tačaka, kako preslikati svih 6 na x-osu i posmatrati svojsta? Ovaj problem značajno otežava dokaze.

3.6 Frame 12

Problem sa ovim resšenjem:
– kompleksna definicija (koja razlikuje pravu od kruga)
– teško pokazati da izmoterija čuva between
– teško uspostaviti vezu izmeų ove dve definicije

Trebala nam je definicija koja će biti jedinstvena. Sistem u kome možemo jednostavno definisati pravu, i u kome možemo na jedinstven način definisati between.

Zato, okrećemo se kompleksnoj analizi i algebri koje nude brojna rešenja. Ipak, da bi ovo razvili, bilo je potrebno razviti veliku teoriju u Isabelle/HOL sistemu

3.7 Frame 13

Iako se pojam sferične geometrije pojavio još u staroj Grčkoj, ozbiljnije istraživanje ne-Euklidske geometrije je započeto 1829. godina sa radom Lobačevskog. Iako je Lobačevski intenzivno istraživao ne-Euklidsku geometriju i pokušavao da sa njom opiše realan svet, ostali naučnici nisu bili toliko zainteresovani za ovu oblast i proslo je pola veka pre nego što se krenulo sa intenzivnijim istraživanjem. Ono što je najviše uticalo na ovu promenu jeste otkriće kompleksnih brojeva krajem XVIII veka. Kompleksni brojevi su predstavljali značajanu alatku za istraživanje osobina objekata u različitim geometrijama. Zamenom Dekartove koordinatne ravni sa kompleksnom ravni dobijaju se jednostavnije formule koje opisuju geometrijske objekte. Nakon Gausovog teorije o zakrivljenim površinama (???? curved surfaces) i Rimanovog rada o zakrivljenim (??manifolds) geometrija Lobačevskog dobija na značajnosti. Ipak, najveći uticaj ima rad Beltramija koji pokazuje da dvodimenzionalna ne-Euklidska kako se pise ne-euklidska geometrija je ništa drugo do izučavanje odgovarajuće površine konstantne negativne krive ??? constant negative curvature. Uvodi i pojam *projektivnog disk modela* koji je kasnije popularizovan od strane Klajna. Poinkare posmatra model poluravni half-plane koji su predložili (??? Louville i Beltrami – kako se oni prevode) i pre svega izučava izometrije hiperboličke ravni koje čuvaju orijentaciju. Danas se te transformaciju najčešće nazivaju Mebijusove transformacije.

Iako postoji dosta literature na polju kompleksne geometrije, mi nismo našli neku njenu formalizaciju.

Potreba za formalizacijom: puno grešaka, netrivijalnih zaključaka koji nisu pokazani, potom i sitne greške u samim dokazima, recimo zanemaruju se neki slučajevi i uopšte se ne pokazuje da tvrenje važi, tj. ne važi i u tom specijalnom slučaju. Često u okviru iste knjige su postojale nedoslednosti u pojmovima koji su korišćeni, recimo lako se prelazilo sa geometrijskog na alegbarski pojam a da pri tome nije pokazano, tj. opravdano da tako nešto sme. Takoe, važno je napomenitu da je važno i iskustvo koje smo imali tokom formalizacije. U knjigama postoje dva pristupa: jedan je više geometrijski, a drugi je više algebarski. Pokazuje se da je vrlo važno koji se pristup izabere da bi uopšte mogla uspešno da se izvrši formalizacija.

3.8 frame 18

Uvodimo homogene koordinate koje su posebno važne i značajno olakšavaju račun i reprezenatciju (zapis raznih formula).

Objasniti da je naš tip zapravo klasa ekvivalencije skupa ne-nula vektora koji su nadom onom relacijom $\approx$

3.9 Frame 19

Prokometarisati da za aritmetičke operacije definšemo i ono $\infty \cdot 0$ i slično i da to moramo da defnisišemo iako to nije dobro definisano.

3.10 Frame 20

Rimanova sfera se može postovetiti sa proširenom kompleksnom ravni korišćenjem stereografske projekcije. Ono što je važno je da je Rimanova sfera metrički prostor i da je rastojanje meu tačkama zapravo dužina tetive izmeu njih.

3.11 Frame 21

Ono što piše na slajdu. Dodati da je Mebijusov identitet u stvari jedinična matrica.

3.12 Frame 22-23

Ono što piše.

3.13 Frame 24

Ponoviti priču o klasi ekvivalencije.

Spomenitu postojanje specijalnih krugova – unit circle, prva kroz koordinatni početak. Spomenuti da ta prava sadrži beskonačno. Euklidske prave su one kad circline sadrži beskonačno. A svaka Euklidska prava i krug mogu biti reprezentovani kao circline.

*Kako se kaže na srpskom Hermitean (naći)?

3.14 Frame 25

Ispričati da se osobine čuvaju.

Spomenuti svojstvo jedinstevnosti uopštenog kruga.

3.15 Frame 26

Spomenuti da Moebijusova transformacija uopštenog kruga ima slična svojstva kao i Moebijusova transformacija tačke (navesti neka svojstva). Glavna stvar je naglasiti da Mebijusova transformacija čuva circline, tj. slika circline u circline (realan u realan). Naglasiti da veza se pravi izmeu̧ mebijusa nad tačkama i mebijusa nad circline. Takoȩ reći da se simetrične tačke čuvaju pod mebijusom.

3.16 Frame 27

Kod očuvanja ugla ispričati da postoje dva pristupa kako ugao da predstavimo. Jedan pristup je geometrijski: ugao izmeu̧ tangenti u tački preseka. Drugi pristup je alegebarski: ona formula. Iako je prvi vizuelno lepši i lakši za razumevanje, drugi je mnogo jednostavniji za analizu i pokazivanje svojstava. Istaći da smo mi oba pristupa formalizovali i pokazali smo da oni jesu ekvivalenti.

4 Primena algebarskih metoda u stereometriji

4.1 Frame 28

Dodati priču da treba izvršiti formalnu analizu. Biće napravljen sistem i primenjen na različite probleme. Formalna analiza transformacija.