

MATEMATIČKI FAKULTET

SEMINARSKI RAD  
IZ TEHNIČKOG I NAUČNOG PISANJA

---

**Kjubiti i kvantno računarstvo:  
Kako kvantni i klasični računari rade  
zajedno**

---

*Student*  
Sara Vilotić 116/2025

*Profesor*  
dr Jelena Graovac

Beograd, 9. januar 2026.

# Sadržaj

<b>1 Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2 Kvantni bit - kjubit</b>	<b>3</b>
2.1 Superpozicija . . . . .	3
2.2 Kvantna kola . . . . .	4
<b>3 Hibridni pristup: saradnja klasičnih i kvantnih računara</b>	<b>5</b>
3.1 Algoritam kvantne aproksimativne optimizacije . . . . .	5
3.2 Biblioteke i SDK za kvantno programiranje . . . . .	5
<b>4 Izazovi i budućnost</b>	<b>6</b>
<b>5 Zaključak</b>	<b>6</b>
<b>Literatura</b>	<b>6</b>

## Sažetak

Ovaj seminarski rad daje uvod u kvantno računarstvo i objašnjava kako kvantni i klasični računari mogu da rade zajedno u okviru hibridnih sistema. U radu su predstavljeni osnovni pojmovi kao što su kubit, superpozicija i kvantna kola, kao i razlike u odnosu na klasične računare.

Posebna pažnja posvećena je hibridnom pristupu, gde klasični računari upravljaju izvršavanjem kvantnih algoritama i obrađuju rezultate mereњa. Kao primer takvog pristupa opisan je algoritam kvantne aproksimativne optimizacije (QAOA). Na kraju su ukratko navedeni najvažniji izazovi i mogući pravci daljeg razvoja kvantno-klasičnih računarskih sistema.

## 1 Uvod

Kvantno računarstvo predstavlja oblast koja istražuje primenu kvantne mehanike u razvoju novih računarskih modela i algoritama za efikasnije rešavanje određenih problema u poređenju sa klasičnim računarima. Osnovna jedinica informacije u kvantnom računarstvu je kvantni bit - *kubit* (eng. quantum bit, qubit). Za razliku od klasičnih bitova koji mogu biti u stanju 0 ili 1, kubit može biti u **superpoziciji** oba stanja, što znači da može biti u stanju 0 i 1 istovremeno. Ovo svojstvo superpozicije omogućava kvantnim računarima da manipulišu ogromnim brojem paralelnih računskih puteva istovremeno.

Na slici 1 može se videti fizička struktura kvantnog računara.



Slika 1: Kvantni računar

**Šorov algoritam** (eng. Shor's algorithm) [1] je jedan od najuticajnijih kvantnih algoritama, osmišljen za efikasnu faktorizaciju velikih brojeva. Za razliku od klasičnih algoritama, koji zahtevaju ogromno vreme za rešavanje ovog problema, Šorov algoritam ga rešava znatno brže, što dovodi u pitanje sigurnost savremenih kriptografskih sistema zasnovanih na faktorizaciji. Upravo ova pretnja postojećim metodama šifrovanja jedan je od ključnih pokretača interesovanja za razvoj kvantnih računara.

Svaki problem koji se može rešiti klasičnim računaram može se rešiti i kvantnim računaram. Suprotno tome, svaki problem koji se može rešiti kvantnim računaram može se rešiti i klasičnim računaram, barem pod

pretpostavkom da ima dovoljno vremena i memorije. Iako kvantni računari ne proširuju klasu izračunljivih problema u odnosu na klasične, oni mogu značajno smanjiti vremensku složenost za određene probleme, što je osnova koncepta kvantne nadmoći.

Međutim, tehnički i teorijski izazovi u razvoju kvantnih računara još uvek postoje. Održavanje kvantnih sistema u superpoziciji i uspostavljanje pouzdane kvantne korekcije grešaka su neki od trenutnih izazova sa kojima se suočavaju istraživači. U trenutnoj etapi, poznatoj kao Noisy Intermediate-Scale Quantum (eng. NISQ) era, dostupni su uređaji sa desetinama do nekoliko stotina kubitova, ali su ograničeni šumom i skromnim kapacitetima. Uprkos tim ograničenjima, kvantno računarstvo obećava značajne primene u kriptografiji, optimizaciji i drugim oblastima gde klasični računari imaju svoje granice.

## 2 Kvantni bit - kubit

U kvantnom računarstvu, klasični bitovi se zamjenjuju kubitima, čije svojstvo superpozicije omogućava predstavljanje više informacija nego što je to moguće klasičnim bitovima.

Jedan kubit  $q$  se predstavlja kao vektor u kompleksnom vektorskom prostoru dimenzije dva, tj.  $q \in \mathbb{C}^2$ . Bazna stanja 0 i 1 su definisana kao vektori ortonomirane baze prostora  $\mathbb{C}^2$ :

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 2.1 Superpozicija

Kubit se može nalaziti u superpoziciji, tj. u bilo kojoj linearnej kombinaciji baznih stanja:

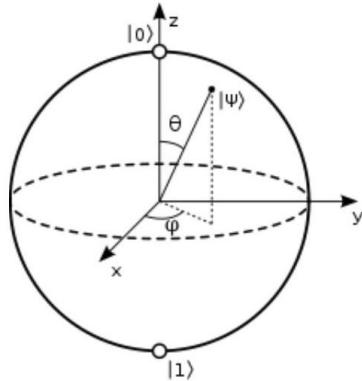
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

pri čemu je stanje  $|\psi\rangle$  normalizovano, tj.  $\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Medjutim, prilikom merenja kubita, superpozicija se gubi i kubit prelazi u jedno od klasičnih stanja. Upravo zbog toga, kvantni algoritmi moraju biti pazljivo dizajnirani kako bi se iskoristile prednosti superpozicije.

Paradoks Šredingerove mačke [2] je misaoni eksperiment koji ilustruje kvantnu superpoziciju. Mačka u zatvorenoj kutiji može biti istovremeno živa i mrtva dok se kutija ne otvori i ne izvrši posmatranje. Ovaj primer pomaže da se objasni kako kvantni sistemi mogu istovremeno biti u više stanja, što je osnova kvantnog računanja i njegove prednosti u odnosu na klasične računare.

Kubit se grafički može predstaviti Blohovom sferom prikazanom na slici 2. Na Blohovoј sferi, bazna stanja su pridružena polovima sfere, dok su sve moguće superpozicije opisane površinom sfere.

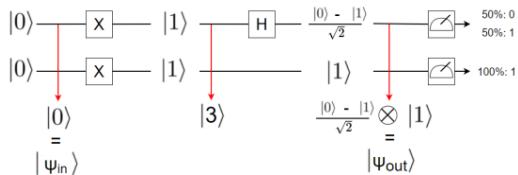


Slika 2: Blohova sfera

## 2.2 Kvantna kola

Kvantna kola predstavljaju osnovni model rada kvantnog računara i imaju sličnu ulogu kao logička kola u klasičnom računarstvu. Ona opisuju primenu kvantnih operacija nad kubitima tokom izvršavanja kvantnih algoritama. Kvantno kolo se sastoje od kubitova u početnim stanjima i niza kvantnih logičkih kapija koja menjaju njihova stanja.

Kvantne logičke kapije su matematičke, reverzibilne operacije koje omogućavaju pojave kao što su superpozicija i kvantna upetljanost. Posebno su značajna višekubitske kapije, jer omogućavaju upetljanost, pri kojoj se stanja kubitova ne mogu posmatrati nezavisno. Ove osobine daju kvantnim računarima prednost u rešavanju određenih složenih problema.



Slika 3: Primer kvantnog kola od 2 kubitova

Na kraju kvantnog kola vrši se merenje, pri čemu kvantna stanja prelaze u klasične rezultate koji se dalje obrađuju na klasičnom računaru. Zbog toga se kvantna kola često koriste u hibridnom okruženju, gde klasični računari upravljaju izvršavanjem algoritama i analiziraju dobijene rezultate.

Na slici 3 prikazan je primer kvantnog kola sastavljenog od dva kubita.

### 3 Hibridni pristup: saradnja klasičnih i kvantnih računara

Hibridni pristup podrazumeva spregu koju čine parametrizovano *kvantno kolo*, koje se izvršava na kvantnom računaru, i *optimizator*, koji se izvršava na klasičnom računaru. Optimizator ažurira parametre kvantnog kola minimizujući ciljnou funkciju na osnovu rezultata dobijenih merenjem izlaza kvantnog kola.

#### 3.1 Algoritam kvantne aproksimativne optimizacije

Algoritam kvantne aproksimativne optimizacije (eng. Quantum Approximate Optimization Algorithm - QAOA) predstavlja jedan od najperspektivnijih pristupa u okviru varijacionih kvantnih algoritama, sa ciljem efikasnog rešavanja problema kombinatorne optimizacije. Dizajniran je tako da na kvantnim računarima omogući približno rešavanje optimizacionih zadataka, pri čemu se problem formuliše kao pronalaženje osnovnog (najnižeg) energetskog stanja adekvatno definisanog Hamiltonijana.

QAOA je, između ostalog, pogodan za pronalaženje aproksimativnih rešenja za nekoliko poznatih optimizacionih problema kao što su problem maksimalnog reza (eng. Max-Cut) [3], problem maksimalnog nezavisnog skupa (eng. Maximum Independent Set - MIS) [4, 5], binarni linearni metod najmanjih kvadrata (eng. Binary Linear Least Squares - BLLS) [6], problem višestrukog ranca (eng. Multi-Knapsack) [7].

Primene QAOA algoritma u stvarnom svetu su brojne i dalekosežne. Neke od primena uključuju: faktorizaciju (varijacioni kvantni algoritam za faktorizaciju) [8], optimizaciju portfolija [9], detekciju objekata [10], summarizaciju teksta [11], preklapanje proteina [12].

#### 3.2 Biblioteke i SDK za kvantno programiranje

Biblioteke i SDK (eng. Software Development Kit) za kvantno programiranje predstavljaju skup alata, funkcija i gotovih kodova koji omogućavaju programerima da lakše razvijaju programe za kvantne računare. Umesto da svaki put moraju da pišu sve od nule ili da razumeju složeni rad kvantnog hardvera, oni mogu da koriste ove biblioteke za kreiranje kvantnih algoritama, simulaciju kvantnih kola i testiranje svojih programa.

Većina današnjih biblioteka i SDK-ova za kvantno programiranje prvenstveno nudi **simulator kvantnih kola**, što omogućava istraživanje i testiranje algoritama bez potrebe za stvarnim kvantnim računarom. Direktni pristup stvarnom kvantnom hardveru je i dalje ograničen; trenutno ga nude pre svega IBM i Google. IBM omogućava izvršavanje na kvantnim računarima sa većim brojem kubitova, dok Google pruža pristup stvarnom hardveru, ali sa veoma malim brojem kubitova, što ograničava kompleksnost algoritama koji se mogu pokrenuti.

U tabeli 1 prikazani su najpoznatiji alati za simulaciju i izvršavanje kvantnih algoritama:

Tabela 1: Pregled alata za kvantno programiranje

Biblioteka / SDK	Jezik	Simulacija	Stvarno izvršavanje	Napomena
Qiskit (IBM)	Python	25–30 kjubita	5–127+ kjubita	Najrašireniji ekosistem
Cirq (Google)	Python	25–30 kjubita	10–30+ kjubita	Fokus na NISQ
PennyLane	Python	20–30 kjubita	Više backend-a	Hibridni QML
Microsoft QDK	Q#, Python	20–30 kjubita	Azure Quantum	Enterprise alat
AWS Braket	Python	25–30 kjubita	Više provajdera	Cloud pristup

## 4 Izazovi i budućnost

Trenutni izazovi kvantnih računara uključuju:

- **Dekoherenčija** – kvantna stanja brzo gube koherenciju zbog interakcije sa okolinom, što ograničava vreme trajanja računanja i zahtevaju sofisticovane tehnike stabilizacije.
- **Greške u kvantnim operacijama** – kvantni računari su skloni greškama usled buke i nepreciznosti u kontrolnim pulsovima, što zahteva implementaciju korektivnih algoritama i redundancije.
- **Skalabilnost** – povećanje broja stabilnih kjubita je tehnički zahtevno, jer veći sistemi zahtevaju preciznu kontrolu i izolaciju od spojilašnjih uticaja.

Pored tehničkih izazova, postoje i organizacioni i praktični aspekti uvođenja hibridnih sistema, uključujući integraciju u postojeće IT infrastrukture, edukaciju stručnog kadra i standardizaciju softverskih interfejsa.

Budućnost hibridnih sistema je obećavajuća: očekuje se da će kvantni računari postati standardni dodatak klasičnim serverima u specijalizovanim zadacima, dok klasični računari ostaju osnova za svakodnevne računske potrebe.

## 5 Zaključak

Očekuje se da će razvoj kvantno-klasičnih hibridnih sistema dovesti do revolucije u načinu na koji se rešavaju složeni problemski zadaci, smanjujući vreme i resurse potrebne za analizu i optimizaciju.

Hibridni sistemi predstavljaju prelaznu, ali dugoročno značajnu fazu u razvoju računarskih tehnologija.

## Literatura

- [1] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring, In Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science.
- [2] Wikipedia, *Kvantna mehanika, Šredingerova mačka, Kvantni računar*. Dostupno na: <https://sr.m.wikipedia.org/sr>

- [3] Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, and Sam Gutmann. A Quantum Approximate Optimization Algorithm, November 2014.
- [4] Jaeho Choi and Joongheon Kim. A Tutorial on Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA): Fundamentals and Applications. In 2019 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC), October 2019.
- [5] Leo Zhou, Sheng-Tao Wang, Soonwon Choi, Hannes Pichler, and Mikhail D. Lukin. Quantum Approximate Optimization Algorithm: Performance, Mechanism, and Implementation on NearTerm Devices, June 2020.
- [6] Ajinkya Borle, Vincent Elfving, and Samuel J. Lomonaco. Quantum approximate optimization for hard problems in linear algebra. *SciPost Phys*, November 2021.
- [7] Abhishek Awasthi, Francesco Bär, Joseph Doetsch, Hans Ehm, Marvin Erdmann, Maximilian Hess, Johannes Klepsch, Peter A. Limacher, Andre Luckow, Christoph Niedermeier, Lilly Palackal, Ruben Pfeiffer, Philipp Ross, Hila Safi, Janik Schönmeier-Kromer, Oliver von Sicard, Yannick Wenger, Karen Wintersperger, and Sheir Yarkoni. Quantum Computing Techniques for MultiKnapsack Problems, November 2021.
- [8] Eric R. Anschuetz, Jonathan P. Olson, Alán Aspuru-Guzik, and Yudong Cao. Variational Quantum Factoring, August 2018.
- [9] Mark Hodson, Brendan Ruck, Hugh Ong, David Garvin, and Stefan Dulman. Portfolio rebalancing experiments using the Quantum Alternating Operator Ansatz, November 2019.
- [10] Junde Li, Mahabubul Alam, Abdullah Ash Saki, and Swaroop Ghosh. Hierarchical Improvement of Quantum Approximate Optimization Algorithm for Object Detection: (Invited Paper). In 2020 21st International Symposium on Quality Electronic Design (ISQED), March 2020.
- [11] Pradeep Niroula, Ruslan Shaydulin, Romina Yalovetzky, Pierre Minssen, Dylan Herman, Shaohan Hu, and Marco Pistoia. Constrained Quantum Optimization for Extractive Summarization on a Trapped-ion Quantum Computer, June 2022.
- [12] Hasan Mustafa, Sai Nandan Morapakula, Prateek Jain, and Srinjoy Ganguly. Variational Quantum Algorithms for Chemical Simulation and Drug Discovery, November 2022. Optimization
- [13] Mitić Nenad, *Uvod u organizaciju računara*.
- [14] Todorović Milan, Šta su to kvantni računari. Dostupno na: <http://www.astronomija.org.rs/nauka/fizika/9157-sta-su-to-kvantni-racunari>
- [15] Stojanović Miloš, *D-Wave*. Dostupno na: <http://ictcasopis.ict.edu.rs/clanak/d-wave>