Ојлерови графови и Флеријев алгоритам

Вања Мојсиловић

30. januar 2026.

Sadržaj

1 Ојлерови мултиграфови

Дефиниција 1. **Мултиграф** је граф који може да садржи више од једне гране између истих чворова.

За мултиграф кажемо да је **Ојлеров** ако садржи затворену стазу која сваком граном пролази једном. Такву стазу називамо *Ојлерова стаза*. Мултиграф је *полуојлеров* ако садржи стазу која сваком граном пролази једном. Јасно је да сваки Ојлеров мултиграф истовремено представља и полуојлеров.

Ојлеров пут је пут у графу који обилази сваку грану тачно једном, а Ојлеров циклус почиње и завршава се у истом чвору.

Теорема 1 (Ојлерова теорема)**.** Нетривијалан повезан мултиграф је **Ојлеров** ако и само ако су сви чворови парног степена.

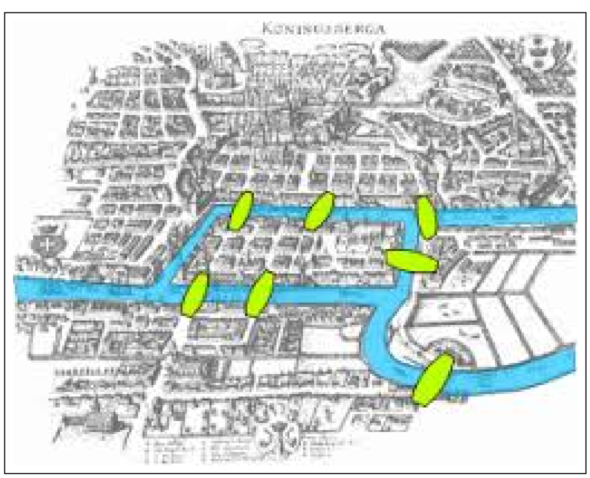
Теорема 2. Нетривијалан повезан мултиграф је полуојлеров ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена.

Лема 1. Сваки Ојлеров граф је такође полуојлеров.

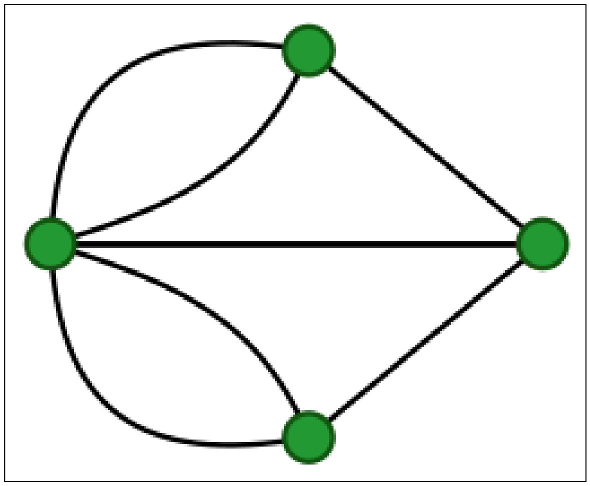
1.1 Седам Кенигсбершких мостова Ојлер је 1741. године објавио научни рад о 7 кенингсбершких мостова, који се сматра и првим радом из теорије графова. Проблем може бити формулисан математички:

С обзиром на граф на слици, да ли је могуће да се изгради пут (или циклус, то је пут који почиње и завршава се у истом чвору), који посети сваку грану тачно једном?

Ојлер је проблем решио тако што је конструисао припадни мултиграф чији чворови одговарају обалама реке и речним острвима, а гране мостовима. Два чвора мултиграфа спојена су са онолико грана колико мостова спаја одговарајуће делове града. Тај мултиграф илустрован је на сликама испод:



Slika 1: *Седам Кенигсбершких мостова*



Slika 2: *Припадни мултиграф седам мостова*

1.2 Ојлерова формула у графовима У контексту Ојлерових графова и планарног графа можемо користити **Ојлерову формулу**:

$$V - E + F = 2$$

gde su:

- V – број чворова (vertices),
- E – број grana (edges),
- F – број лица (faces) у планарном графу.

Ова формула је корисна за анализу структуре графова и одређивање да ли одређени граф може имати Ојлерову стазу или циклус.

2 Флеријев алгоритам

Флеријев алгоритам проналази Ојлеров пут или циклус у мултиграфу. Основни кораци су:

- Изабрати произвољан чвор v_0, ако тражимо **Ојлеров пут**, v_0 мора бити један од два чвора непарног степена.
- Додајемо гране у стазу, избегавајући мостове осим ако нема друге опције.
- Понављамо док све гране не буду коришћене.

К	Опис корака
К1	Изабрати произвољан чвор v_0, $w = v_0$ (ако тражимо **Ојлеров пут**, v_0 мора бити један од два чвора непарног степена)
К2	Нека је одабрана стаза $w = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_i, v_i$. Наредну грану e_{i+1} одабрати из скупа $E \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ тако да је e_{i+1} инцидентна са v_i и при томе није мост графа $G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$, осим ако нема друге могућности.
К3	КРАЈ када К2 не може да се извршава.

Напомена: Кључно правило алгоритма је "**не прелази мост осим ако мораш**", како би се осигурало да не останеш заробљен у једном делу графа док у другом још увек има неискоришћених грана.

3 Закључак

Ојлерови и полуојлерови мултиграфови, као и Флеријев алгоритам, имају значајну примену у практичним проблемима теорије графова и алгоритамском планирању. Користе се за **оптимизацију рута**, **планирање мрежа** и различите алгоритамске задатке.

Литература

- З. Станић, *Дискретне структуре 2*, Математички факултет, Универзитет у Београду. http://poincare.matf.bg.ac.rs/ zstanic//ds2/DS2-2021.pdf
- http://old.matf.bg.ac.rs/p/jelena/cas/4399/materijali-za-vezbe/
- https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian$_{p}ath$