МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКА КОНСТАНТА π

Рад намењен предмету - Увод у информатику

Студент: Андреа Кузмановић
Број индекса: 152/2025
Професор: Данијела Симић

Јануар
Београд, 2026.

Садржај

1 Увод

(Овде ће стајати исти садржај као и на страници.)

Број π (Пи) је највише проучаван број у математици, али са добрим разлогом. Он је од суштинског значаја за наше разумевање геометрије. Има употребу у физици, астрономији и математици, као и у архитектури.

π је ирационалан број, што значи да се његова вредност не може изразити преко разломка. Има бесконачно много децимала, а најчешће се записује $\pi \approx 3,14$ (што значи да је његова вредност бриближно једнака 3,14). Он се дефинише као однос обима и пречника круга или као однос површина круга или квадрата над његовим полупречником.

Ознака број π потиче од грчке речи ($\pi\varepsilon\varrho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\varrho o\varsigma$). У математику га је увео Вилијам Џоунс (енг. *Wiliam Jones*) 1707. године, а популаризовао Леонард Ојлер (енг. *Leonhard Euler*) 1737. године. Такође је трансцендентан број што значи да га није могуће изразити коришћењем коначног броја целих бројева уз четири основне рачунарске операције.

У Еуклидској геометрији, број π се дефинише као однос обима и пречника круга:
$\pi = \frac{O}{d} = \frac{2r\pi}{2r} = \pi$

π се још може дефинисати и као површина круга полупречника 1, обим круга чији је пречник 1 или односом површине круга (P) и квадрата надњеговим полупречником:
$\pi = \frac{P}{r^2}$

2 Формуле са π

π се појављује у доста формула у **геометрији**, које се тичу кругова, елипси, ваљака, купа и лопти. Такође, угао од 180° (у степенима) износи π радијана.

Као ни геометрија, ни **математичка анализа** га није уопште штедела у примени, с обзиром на своју широку и неизоставну примену. У следећих неколико табела ћемо видети како и где све π има важну улогу.

2.1 Геометрија

Геометријски облик	Формула
Обим круга полупречника r и пречника d	$O = \pi d = 2\pi r$
Површина круга полупречника r	$P = \pi r^2$
Површина елипсе са полуосама a и b	$P = \pi ab$
Запремина кугле полупречника r	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Површина кугле полупречника r	$P = 4\pi r^2$
Запремина ваљка висине H и полупречника r	$V = \pi r^2 H$
Површина ваљка висине H и полупречника r	$P = 2(\pi r^2) + (2\pi r)H = 2\pi r(r + H)$
Запремина купе висине H и полупречника r	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$
Површина купе висине H и полупречника r	$P = \pi r\sqrt{r^2 + H^2} + \pi r^2 = \pi r(r + \sqrt{r^2 + H^2})$

2.2 Анализа

Доста формула у анализи садржи π, укључујући представљања у облику бесконачног реда (и бесконачног производа), интеграле и тзв. специјалне функције.

Франсоа Вијет, 1593:	$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$
Лајбницова формула(*):	$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$
Валисов производ:	$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$
Интеграл вероватноће:	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$
Базелски проблем(**):	$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$
Базелски проблем:	$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$
Гама-функције у тачки $\frac{1}{2}$:	$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
Стирлингова апроксимациона формула:	$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
Ојлеров идентитет:	$e^{i\pi} + 1 = 0$
Особина Ојлерове φ-функције:	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \phi(k) \sim \frac{3n^2}{\pi^2}$
Површина једне четвртине јединичног круга:	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$

- **Лајбницова формула (*)** - овај често навођени бесконачни ред најчешће се пише у облику са табеле, док је технички исправан следећи запис:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2n+1}) = \frac{\pi}{4}$$
- **Интеграл вероватноће** - поменут у табели, познат из калкулуса.
- **Базелски проблем** - први га је решио Ојлер. **(**)** - уопште, $\zeta(2n)$ је рационални умножак броја π^{2n} за свако природно n.
- **Ојлеров идентитет** - којег је Ричард Фејнман назвао "**најизванреднијом формулом у математици**".

2.2.1 Комплексна анализа

Специјалан случај Ојлерове формуле за e^{ix}:	$e^{i\pi} + 1 = 0$
Основни случај теореме о остацима:	$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$

2.3 Верижни разломак

π има уно представљања у облику верижних разломака, као што је на пример:
$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{3 + \frac{4}{5+\frac{9}{7+\frac{16}{9+\frac{25}{11+\frac{36}{13+\dots}}}}}}$$

3 Теорија бројева

Неки резултати из теорије бројева:

- **Вероватноћа да су два случајно изабрана цела броја узајамно проста је $\frac{6}{\pi^2}$;**
- **Вероватноћа да је случајно изабран цео број бесквадратан је $\frac{6}{\pi^2}$;**
- **У просеку, број начина да се дати природан број напише као збир два савршена квадрата (редослед сабирака је битан) је $\frac{\pi}{4}$.**

Овде, ”вероватноћа”, ”просек” и ”насумичан” су узети у смислу граничне вредности; тј. посматра се вероватноћа одговарајућег догађаја у скупу бројева $\{1, 2, 3, ..., \mathbb{N}\}$, затим узима гранична вредност из вероватноће када $\mathbb{N} \to \infty$ ($\mathbb{N}$ је ”јако велико”).

4 Динамички системи/Ергодичка теорија

Теорија динамичких система:

За скоро свако реално x_0 у интервалу $[1, 0]$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} = \frac{2}{\pi}$$
где су x_i итериране вредности логистичког пресликавања за $r = 4$.

5 Физика

У физици, број π у формулама је најчешће ствар договора и нормализације. На пример, коришћење упрошћене Планкове константе $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ може се избећи писање броја π експлицитно у великом броју формула у квантној механици. Заправо, упрошћена варијанта је и базичнија, а присуство фактора $\frac{1}{2\pi}$ у формулама које користе h може се сматрати условљеном, уобичајеном дефиницијом Планкове константе.

Хајзенбергов принцип неодређености:	$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$
Ајнштајнова једначина опште теорије релативности:	$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$
Кулонов закон за електричну силу:	$F = \frac{\lvert q_1 q_2 \rvert}{4\pi \epsilon_0 r^2}$
Магнетна пермеабилност слободног простора:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$

6 Вероватноћа и статистика

У вероватноћи и статистици постоји пуно расподела, чији аналитички изрази садрже π, укључујући:

Густина расподеле вероватноће за нормалну расподелу са математичким очекивањем μ и стандардном девијацијом σ:

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma)^2}$

Густина расподеле веероватноће за (стандардну) Кошијеву расподелу:

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

Треба приметити да се, како је $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ за сваку Функцију густине расподеле вероватноће $f(x)$, помоћу горњих формула може добити још интегралних формула за π.

Занимњива емпиријска апроксимација броја π заснована је на проблему Буфонове игле. Посматрајмо опит у којем се игла дужине L баца на раван на којој су означене две паралелне праве ба међусобном растојању S (где је $S > L$) ако се игла на случајан начин баци велики број (n) пута, од којих се x пута заустави тако да сече једну од правих, онда приближну вредност броја π можемо добити коришћењем формуле:

$\pi \approx \frac{2nL}{xS}$

7 Историја

Симбол "π" за Архимедеву константу је први увео 1706.-1707. математичар Вилијам Џоунс када је објавио Нови увод у математику (*A New Introduction to Mathematics*), мада је исти симбол још раније коришћен да назначи обим круга. Ова ознака је постала стандардна након што ју је усвојио Леонард Ојлер. У оба случаја "π" је прво слово речи *περίμετρος* (периметрос), што на грчком значи "мерити около".

7.1 Хронологија броја π

Време	Догађај / Особа	Вредност π
20. век пне.	Вавилонци	25/8 = 3.125
20. век пне.	Египатски математички папирус (Рајндов папирус)	$(16/9)^2$ = 3.160493...
12. век пне.	Кинези	3
средина 6. века пне.	1 Краљеви 7:23	3
434. пне.	Анаксагора покушао да квадратури круг	-
3. век пне.	Архимед	223/71 < π < 22/7 (3.140845... < π < 3.142857...)
20. пне.	Витрувије	25/8 = 3.125
130	Чанг Хонг	$\sqrt{10}$ = 3.162277...
150	Птоломеј	377/120 = 3.141666...
250	Ванг Фау	142/45 = 3.155555...
263	Лиу Хуи	3.14159
480	Зу Чонгжи	3.1415926 < π < 3.1415927
499	Арјабхата	62832/20000 = 3.1416
598	Брамагупта	$\sqrt{10}$ = 3.162277...
800	Мухамед Ал Хорезми	3.1416
12. век	Баскара	3.14156
1220	Фибоначи	3.141818
1400	Мадава	3.14159265359
1424	Џамшид Масуд Ал Каши	16 децимала
1573	Валентус Ото	6 децимала
1593	Франсоа Вијет	9 децимала
1593	Адријен ван Ромен	15 децимала

1953	Малер показао да π није Лиувилов број	-
1955	Џ. В. Вренч, јуниор и Л. Р. Смит	3,089 децимала
1961	-	100,000 децимала
1966	-	250,000 децимала
1967	-	500,000 децимала
1974	-	1,000,000 децимала
1992	-	2,180,000,000 децимала
1995	Јасумаса Канада	> 6,000,000,000 децимала
1997	Канада и Такахаши	> 51,500,000,000 децимала
1999	Канада и Такахаши	> 206,000,000,000 децимала
2002	Канада и тим	> 1,240,000,000,000 децимала
2003	Канада и тим	> 1,241,100,000,000 децимала
април 2004	Канада и тим	1.3511 билион цифара укупно

8 Литература

Библиографија

[1] Wikipedia. *Pi*. https://en.wikipedia.org/wiki/Pi, приступљено 19. јануар 2026.

[2] Кајзер, В. *Историја броја* π. Београд: Математички институт, 1990.

[3] Бојер, К., Кребс, К. *Историја математике*. Београд: Матица српска, 2002.

[4] Канада, Ј., Такахаши, Т. *Истраживања и рачунање* π. Journal of Computational Mathematics, 2003.

[5] Ојлер, Л. *Introductio in analysin infinitorum*. Базел, 1748.

[6] Ламберт, Ј. Х. *Меморија о ирационалности* π. 1761.