MODELLE FÜR DIE BESCHAFFUNGS - UND PRODUKTIONSPLANUNG IN REVERSE SUPPLY CHAINS

Daniel Brice Kamga Nana

Technische Universität Clausthal,
Institut für Wirtschaftswissenschaft,
Betriebswirtschaftslehre insbesondere Produktion und Logistik

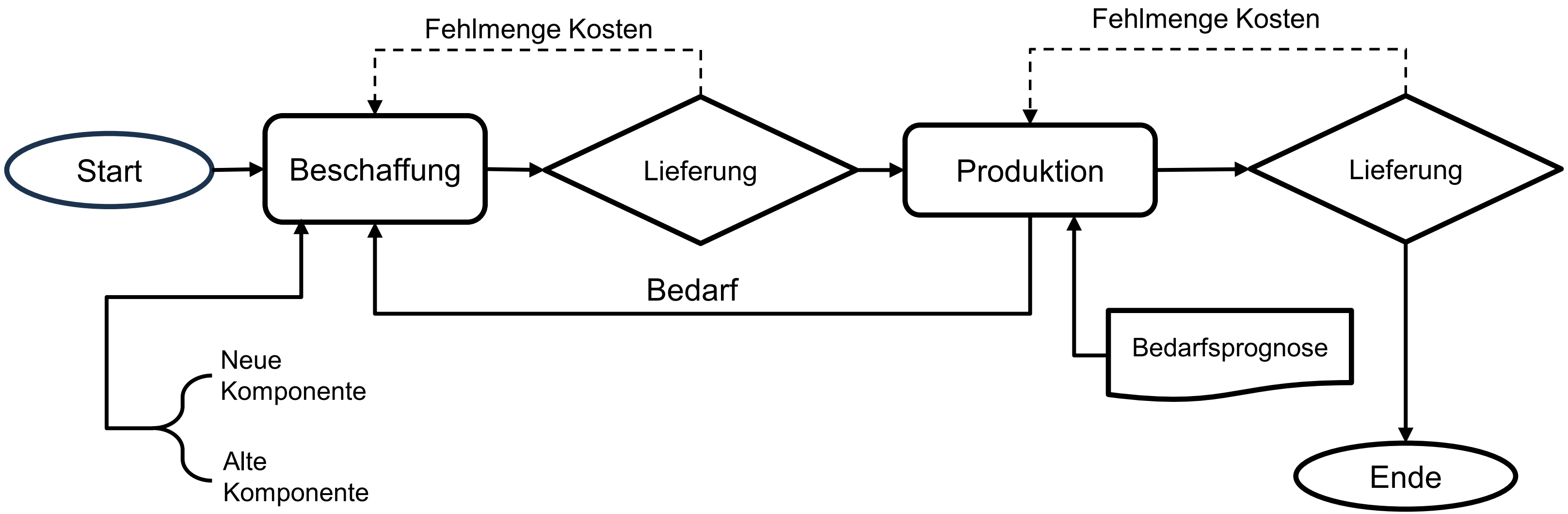
07. Oktober 2025

Gliederung

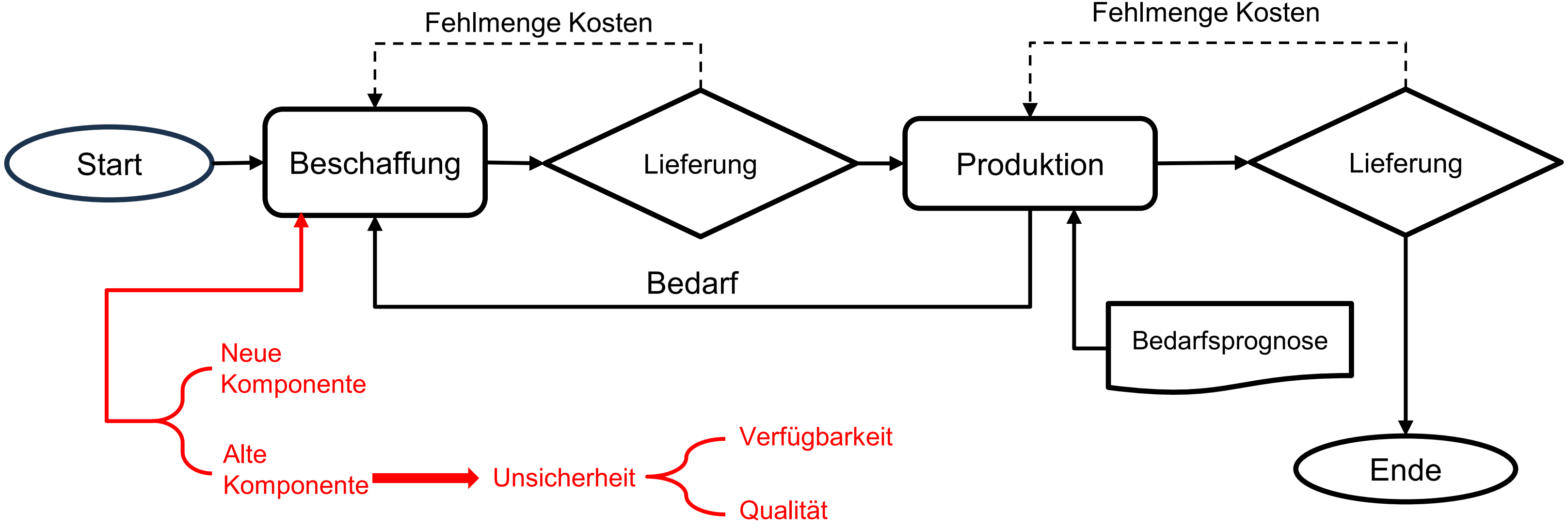
- Einführung
- Problemstellung
- Modellierung der Bestellmengenplanung
- Lösung des Problems
- Experimentelle Analyse
- Modellierung der produktionsprogrammplanung
- Lösung des Problems
- Experimentelle Analyse
- Zusammenfassung und Ausblick

Gliederung

Einführung


Fehlmenge Kosten
Fehlmenge Kosten
Start
Beschaffung
Lieferung
Produktion
Lieferung
Bedarf
Bedarfsprognose
Neue Komponente
Alte Komponente
Ende

Einführung


Fehlmenge Kosten
Fehlmenge Kosten
Start
Beschaffung
Lieferung
Produktion
Lieferung
Bedarf
Bedarfsprognose
Neue Komponente
Alte Komponente
Unsicherheit
Verfügbarkeit
Qualität
Ende

Gliederung

Problemstellung

- **Beschaffungsplanung**
  - Ziel: Ermittlung der optimalen Bestellstrategie für eine Gesamtkosten Minimierung
- **Produktionsplanung**
  - Ziel: Ermittlung des optimalen Produktionsprogramms für die Maximierung des Deckungsbeitrags

Herausforderung:

- Unsicherheit hinsichtlich der Verfügbarkeit von Vorprodukten
- Unsicherheit hinsichtlich der Qualität von Vorprodukten

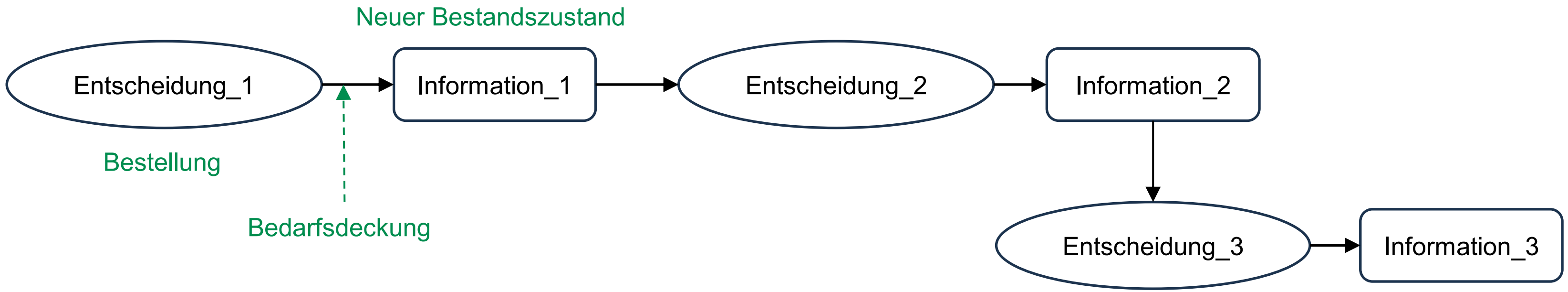
Problemstellung

- ✓ Wie lassen sich Unsicherheiten hinsichtlich der Verfügbarkeit von Vorprodukten bei der Beschaffungs- und Produktionsplanung modellieren und wie sehen die Ergebnisse bei der Berücksichtigung dieser Unsicherheiten aus ?

Gliederung

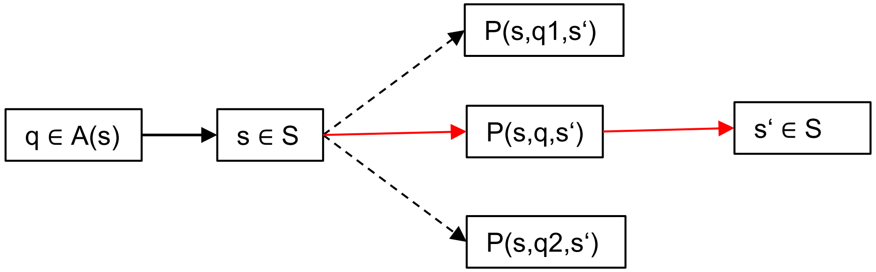
Modellierung der Bestellmengenplanung

- Sequenzielles Entscheidungsproblem



Modellierung der Bestellmengenplanung

- Markov Entscheidungsprozess
  - Eine endliche Menge von Zuständen S: Lagerbestandswerten ∈ {-d_max,…, x_max}
  - Eine endliche Menge von Aktionen A: mögliche Bestellmenge
  - Übergangswahrscheinlichkeiten P
  - Belohnung: Bewertung des Systems



Ziel: Langfristige Kosten Minimierung $f(s) := \lim_{K\to\infty} \mathbb{E}(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} r(X_k)|X_0 = s), \quad s \in S$

Modellierung der Bestellmengenplanung

- Zwei Stochastische Variable: Bedarf und Verfügbarkeit / Qualität
- Kostenfunktion: $C(X_t, q, X_{t+1}, Y) = \pi.\min\{q_t, Y_t\} + h.\max\{0, X_{t+1}\} + k.\delta(q_t) + v.\max\{0, -X_{t+1}\}$
- Übergangsgleichung: $x' = f(x, q, Y, D) := \min\{\max\{0, x\} + \min\{q, Y\} - D, x_{max}\}$, $s \in \{-d_{max}, ..., x_{max}\}$
- Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p^q_{xx'} = \sum_{\substack{d \in W_D, y \in W_y \\ x' = f(x,q,y,d)}} p_D(d).p_Y(y)\ ,\ p : S \times A \times S \to [0, 1]$$

  - Umwandlung von Stochastische Y in Deterministischer y und X_{t+1} in Xt

$$\textit{Belohnung:}\ r(s,a) = -(\pi. \sum_{y \in W_y} p_y(y).\min\{a,y\} + h.\max\{0, x_t\} + k.\delta(a_t) + v.\max\{0, -x_t\})$$

Modellierung der Bestellmengenplanung

Stochastischer Qualität

- Für jede i in der Menge an verfügbaren Produkten gibt es eine Wahrscheinlichkeit, dass die Bestellmenge q qualitativ ist.
- Wenn die Möglichkeit nicht existiert, ist P(s,q,s‘) = 0
- Somit ändert sich im obigen Modell die Übergangswahrscheinlichkeit Gleichung und P(y) bekommt:

$$P(X = q) = \binom{y}{q} . p^q . (1 - p)^{y-q}$$

- Übergangsgleichung: $x' = f(x, q, Y, D) := \min\{\max\{0, x\} + q - D, x_{max}\}$, $s \in \{-d_{max}, ..., x_{max}\}$

- Belohnung:

$$r(s,q) = -(\pi . q + h . \max\{0, x_t\} + k . \delta(q_t) + v . \max\{0, -x_t\}$$

Gliederung

- Einführung
- Problemstellung
- Modellierung der Bestellmengenplanung
- Lösung des Problems
- Experimentelle Analyse
- Modellierung der produktionsprogrammplanung
- Lösung des Problems
- Experimentelle Analyse
- Zusammenfassung und Ausblick

Lösung des Problems

- S endlich
- optimalitätsgleichung lautet:

$$BE + h(s) = \min_{a \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r(s,a) + \sum_{s' \in S} p^{a}_{ss'} h(s') \right\} \quad \forall s \in S, \forall a \in \mathcal{A}(s)$$

$$BE(s) := \inf_{\pi} BE_{\pi} \quad \forall s \in S$$

- Das ganze ergibt:

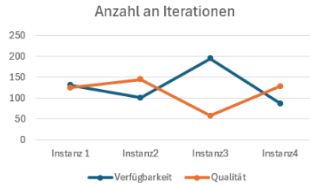
$$(P): \begin{cases} \text{Min.} \quad BE \\ \text{udn: } BE + h(s) \geqslant r(s,a) + \sum_{s' \in S} P^{a}_{ss'} . b_{s'} \qquad (s \in S; a \in \mathcal{A}(s)) \end{cases}$$

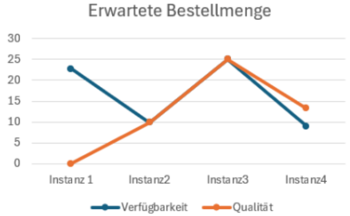
Gliederung

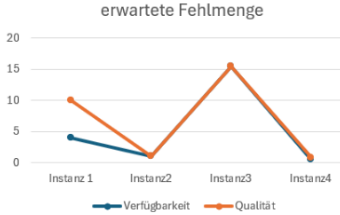
Experimentelle Analyse

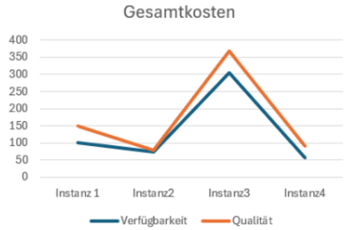
Tabelle 7.1: Vergleichanalyse der Beschaffungsmodelle

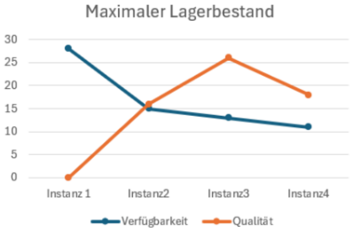
INSTANZ	KONFIGURATION
Instanz 1	$d_{max} = 20; x_{max} = 30$
	$y_{max} = 30; c = 5$
	$h = 2; k = 10$
	$v = 15; par_{pD} = 0.5; par_{pY} = 0.2$
Instanz 2	$d_{max} = 20; x_{max} = 30$
	$y_{max} = 10; c = 5$
	$h = 2; k = 10$
	$v = 15; par_{pD} = 0.5; par_{pY} = 0.9$
Instanz 3	$d_{max} = 40; x_{max} = 50$
	$y_{max} = 25; c = 5$
	$h = 2; k = 10$
	$v = 15; par_{pD} = 0.7; par_{pY} = 0.5$
Instanz 4	$d_{max} = 15; x_{max} = 20$
	$y_{max} = 15; c = 5$
	$h = 2; k = 10$
	$v = 15; par_{pD} = 0.5; par_{pY} = 0.5$





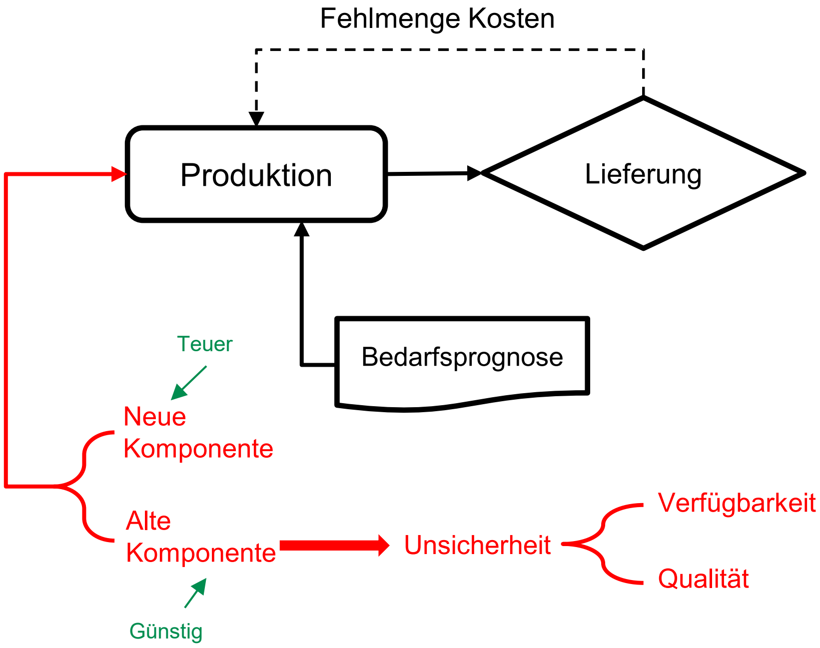






Gliederung

Modellierung der produktionsprogrammplanung



- **Frage**: Wie viel von jedem Art-Produkt bestellen, wann produzieren, wann verkaufen und wann lagern mit dem Ziel der Deckungsbeitrag-Maximierung.

Modellierung der produktionsprogrammplanung

- Zweistufiges Stochastisches Programm:
  - Hier and Now Entscheidungsvariablen: Entscheidung vor Realisation der Stochastischen Variablen
  - Wait and see Entscheidungsvariablen: Entscheidung nach Realisation der Stochastischen Variablen

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x + \mathbb{E}_w[Q(x,w)]$$
$$\text{Udn. } Ax = b,\ x \geqslant 0,$$

$$Q(x,w) = \min_{y \in \mathbb{R}^m} q(w)^T y$$
$$\text{Udn. } Tx + Wy = h,\ y \geqslant 0.$$

Tabelle 5.2: Entscheidungsvariablen

Beschreibung	Entscheidungsvariable	
Verkaufsmenge von Produkt j in Periode t	z_{jt}	Erste Stufe
Produktionsmenge von Produkt j in Periode t	y_{jt}	
Lagerungsmenge von Produkt j in Periode t+1	$x_{j(t+1)}$	
Beschaffungsmenge von sekundär Komponente i in Periode t	v_{it}	Zweite Stufe
Beschaffungsmenge von primär Komponente in Periode t	w_{it}	
Kapazität des Faktors i im Zeitraum t	R_{it}	

Modellierung der produktionsprogrammplanung

- Anderen Variablen und Parametern

Tabelle 5.1: Produktionsplannung Variablenverzeichnis

Beschreibung	Variable
Produkte	j
Verkaufspreis des Produkts j	p_j
Herstellungskosten des Produkts j	k_j
Lagerkosten des Produkts j	h_j
Nachfrage des Produkts j im Zeitraum t	d_{jt}
Verfügbarkeit der Faktoren i im Zeitraum t	(Zufallsvariable) $\tilde{A}_{it}$
Verteilungsfunktion von $\tilde{A}_{it}$	F_{it}
Anzahl der Produktionsfaktoren	m
Anzahl der sekundären Faktoren	m_a
Menge der sekundären Faktoren	I_A=(0,1,...,min(m_a,m))
Anschaffungskosten der sekundären Faktoren	b_i pro Einheit
Anschaffungskosten pro Einheit der primären Faktoren	$c_i > b_i$
Anfangslagerbestand	$R_{i1} = R_i^a$

Modellierung der produktionsprogrammplanung

- Anderen Variablen und Parametern

Stochastisch

Deterministisch

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}(p_j.Z_{jt} - k_j.Y_{jt} - h_j.X_{jt+1}) \quad (1) \\ \text{udN}: \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.Y_{jt} \leqslant R_{it} \quad (i = 1,\dots,m; t = 1,\dots,T) \quad (2) \\ X_{j1} = x_j^a \quad (j = 1,\dots,n) \quad (2) \\ X_{j,t+1} = X_{jt} + Y_{jt} - Z_{jt} \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (4) \\ Z_{jt} \leqslant d_{jt} \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (5) \\ X_{j,t+1}, Y_{jt}, Z_{jt} \geqslant 0 \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (6) \end{cases} \tag{2.4}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{j=1}^{n}(p_j.z_{jt} - k_j.y_{jt} - h_j.x_{j(t+1)}) - \sum_{i\in I_A}(b_i.v_{it} + c_i.w_{it})\right] \\ \text{udN}: \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.y_{jt} \leqslant R_{it} \quad (i = (1,\dots,m) - I_A; t = 1,\dots,T) \quad (1) \\ x_{j1} = x_j^a \quad (j = 1,\dots,n) \quad (2) \\ x_{j,(t+1)} = x_{jt} + y_{jt} - z_{jt} \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (3) \\ z_{jt} \leqslant d_{jt} \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (4) \\ x_{j,(t+1)}, y_{jt}, z_{jt} \geqslant 0 \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (5) \\ R_{i1} = R_i^a \quad (i \in I_A) \quad (6) \\ R_{i(t+1)} = R_{it} + v_{it} + w_{it} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_{jt} \quad (i \in I_A; t = 1,\dots,T) \quad (7) \\ v_{it} \leqslant \tilde{A}_{it} \quad (i \in I_A; t = 1,\dots,T) \quad (8) \\ R_{i(t+1)}, v_{it}, w_{it} \geqslant 0 \quad (i \in I_A; t = 1,\dots,T) \quad (9) \end{cases} \tag{5.2}$$

Gliederung

Lösung des Problems

- Anwendung eines deterministischen Äquivalents: Sampling Average Approximation (SAA)
- **Idee**: kleine Stichprobe-Generation für Werte von der Zufallsvariable der Verfügbarkeit, die repräsentativ sind und darauf optimieren.
- **Problem:** Auswahl von v_{it} **darf nicht** von zukünftigen Realisationen abhängen
- **Lösung**: Non anticipativity Bedingung

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\max g = \sum_{t=1}^{T} \left[\sum_{j=1}^{n} (p_j.z_{jt} - k_j.y_{jt} - h_j.x_{j(t+1)}) - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \sum_{i \in I_A} (b_i.v_{itl} + c_i.w_{itl}) \right] \\
\text{udN}: \\
\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.y_{jt} \leqslant R_{it} \quad (i = (1,\dots,m) - I_A; t = 1,\dots,T) \quad (1) \\
\qquad x_{j1} = x_j^a \quad (j = 1,\dots,n) \quad (2) \\
\qquad x_{j,(t+1)} = x_{jt} + y_{jt} - z_{jt} \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (3) \\
\qquad z_{jt} \leqslant d_{jt} \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (4) \\
\qquad x_{j,(t+1)}, y_{jt}, z_{jt} \geqslant 0 \quad (j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T) \quad (5) \\
\qquad R_{i1l} = R_i^a \quad (i \in I_A; l = 1,\dots,L) \quad (6) \\
\qquad R_{i(t+1)l} = R_{itl} + v_{itl} + w_{itl} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{jt} \quad (i \in I_A; t = 1,\dots,T; l = 1,\dots,L) \quad (7) \\
\qquad v_{itl} \leqslant A_{itl} \quad (i \in I_A; t = 1,\dots,T; l = 1,\dots,L) \quad (8) \\
\qquad R_{i(t+1)l}, v_{itl}, w_{itl} \geqslant 0 \quad (i \in I_A; t = 1,\dots,T; l = 1,\dots,L) \quad (9) \\
\text{Non} - \text{anticipativityconstraint}(10)
\end{array}
\right.
\tag{5.4}
$$

Modellierung der produktionsprogrammplanung

Stochastischer Qualität

- Binomiale oder andere Verteilungen benutzen, um den Anteil an verfügbaren Faktoren, die qualitativ sind, zu berechnen. Das ganze erfolgt wie folgt:
    - Falls Verfügbarkeit fixiert ist:
        - Wahrscheinlichkeiten $p_{i,l,t}$ pro Periode, pro Faktor und pro Stichprobe erzeugen
        - Pro Periode und pro Stichprobe den Anteil an benutzbare Faktoren berechnen: $Usable_{i,l,t} = p_{i,l,t} * Avl_{i,t}$
- Danach das gleiche Problem lösen wie folgt in nächsten Seiten.

Lösung des Problems

- Problem mehrperiodisch, Anwendung von rollierender Planung, um die tatsächlich realisierten Werte in zukünftigen Perioden zu berücksichtigen.

Algorithm 1 Algorithmus zur Lösung des Zweistufigen Stochastische Programm

1: Löse das Sampling Approximation Linear program $\overline{P}$ ohne Non Anticipativity bedingung (10)
2: nehme den optimalen Zielfunktionswert g^* von $\overline{P}$ und betrachte ihn als Zielfunktionswert vom gesamten program P
3: Modifiziere $\overline{P}$; setzt die neue Zielfunktion $\sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{T}(1+\epsilon)^t.\sum_{i\in I_A} v_{itl}$ und fügt die Zielfunktion von (p) als Bedingung hinzu wie folgt: g(x,y,z,v,w)=g*
4: Löse das neue Problem und betrachte die Lösung als optimale Lösung von (P)

Algorithm 2 Algorithmus zur Implementierung der Rollierende Planung

1: Löse das vollständige Linear Programm mithilfe vom Algorithmus 1
2: **while** $\tau < T$ **do**
3: fixiere die verschiedene Entscheidungsvariablen für die Periode τ
4: setze den Anfangsbestand bezüglich der Situation in Periode τ
5: setzte $\tau = \tau + 1$
6: Löse das linear Programm mithilfe von Algorithmus 1

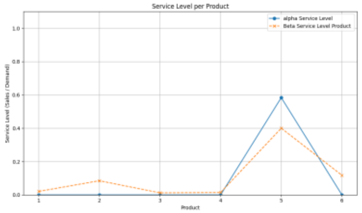
Gliederung

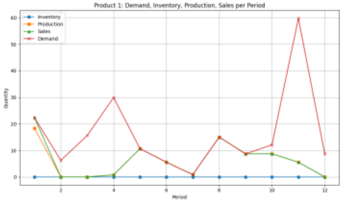
Experimentelle Analyse

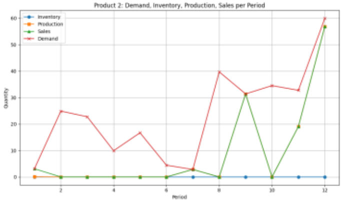
Instanz 2	Einfluss von Bedarf Funktion	$T = 12; n = 6$ $m = 6; m_a = 4$ $q = 100;$ Bedarf $\mathcal{N}(10, 20)$

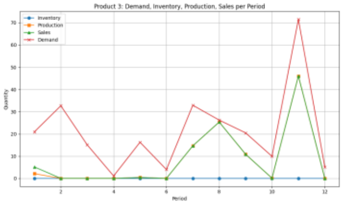

```
Contribution margin predicted by sampling approximation without non-anticipativity: 11131.194402704823
Contribution margin predicted by sampling approximation with non-anticipativity: 11131.194402704823
Average realized contribution margin of sampling approximation without non-anticipativity: 11472.741882376595
Average realized contribution margin of sampling approximation with non-anticipativity: 11481.295503999689
Average realized contribution margin of rolling sampling approximation without non-anticipativity: 12717.987679241902
Average realized contribution margin of rolling sampling approximation with non-anticipativity: 12763.243863790958
Elapsed time: 733.0254263877869 seconds
```

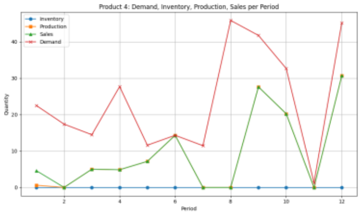
Experimentelle Analyse

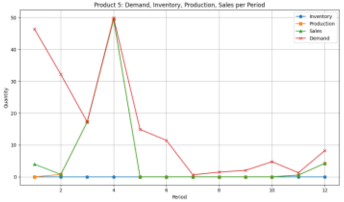




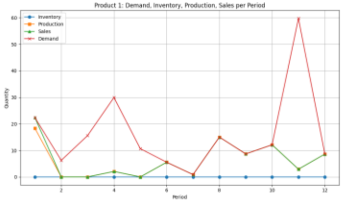


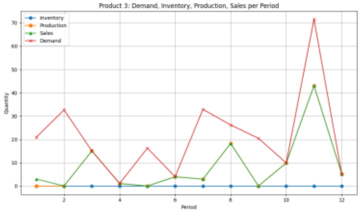


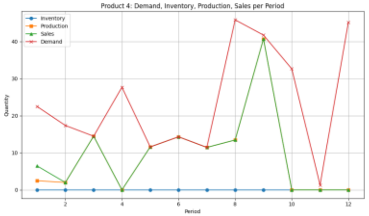


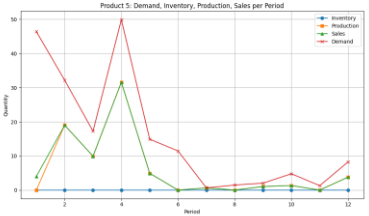


Beta: 40%










```
Contribution margin predicted by sampling approximation without non-anticipativity: -178195.86700986422
Contribution margin predicted by sampling approximation with non-anticipativity: -178195.86700986422
Average realized contribution margin of sampling approximation without non-anticipativity: -167884.17713034898
Average realized contribution margin of sampling approximation with non-anticipativity: -167884.177130349
Average realized contribution margin of rolling sampling approximation without non-anticipativity: -167894.90713034893
Average realized contribution margin of rolling sampling approximation with non-anticipativity: -167893.63764401927
Elapsed time: 258.4594142436981 seconds
```

Gliederung

Zusammenfassung und Ausblick

- Zusammenfassung
  - Modellierung von Beschaffungsplanung mithilfe von Diskretes MDP
  - Optimale Politik ist insgesamt in einige Iterationen erreicht
  - Insgesamt ergibt der Qualitativ Modell mehr gesamt kosten und weniger bestand
  - Für größe Instanzen (Bsp: d_max = 50, x_max = 100), kann der Solver nicht lösen
  - Modellierung von Produktionsplanung mithilfe von zweistufige Stochastische Programmierung
  - Non-Anticipativity Bedingung hilft Entscheidungen früher zu treffen und somit gute Produktionsplan zu erstellen
  - Rollierende Planung verlängert die Lösungszeit
  - Rollierende Planung zwar teuer aber hilfst das Modell vernünftige Entscheidungen zu nehmen
  - Tradeoff zwischen Servicegrad und gewinn
- Ausblick
  - Benutzung von Künstlicher Intelligenz Methoden, um zu testen, ob Größe Instanzen da gelöst werden
  - Erweiterung des Beschaffungsmodells zu mehreren Produkten
  - Vergleich von zweistufigem Programm mit existierender Methode

TU Clausthal

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !

Litteraturverzeichnis

- K.-H. Waldmann und U. M. Stocker. Stochastische Modelle.Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. isbn: 978-3-540-03241-0 978-3-642-17058-4. doi: 10.1007/ 978-3-642-17058-4. url: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-17058-4 (besucht am 18. 09. 2025).
- M. L. Puterman. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. en. Wiley Series in Probability and Statistics v.414. Hoboken: John Wiley & Sons,Inc, 2009. isbn: 978-0-471-72782-8.
- J. R. Norris. Markov chains. First paperback edition, 15th printing. Cambridge series on statistical and probabilistic mathematics 2. Cambridge New York Melbourne Madrid Cape Town Singapore São Paulo Delhi Dubai Tokyo Mexico City: Cambridge University Press, 2009. 237 S. isbn: 978-0-521-48181
- A. Shapiro, D. Dentcheva und A. P. Ruszczy ´nski. Lectures on stochastic programming: modeling and theory. Unter Mitarb. von Society for Industrial and Applied Mathematics. MPS-SIAM series on optimization 9. Philadelphia, Pa: SIAM, 2009. 436 S. isbn: 978-0-89871-
- K. Schade. Stochastische Optimierung: Bestandsoptimierung in mehrstufigen Lagernetzwerken. SpringerLink Bücher. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012. 180 S. isbn:978-3-8348-1821-8 978-3-8348-8345-2. doi: 10.1007/978-3-8348-8345-2.687-0. doi: 10.1
- A. Bischi, L. Taccari, E. Martelli, E. Amaldi, G. Manzolini, P. Silva, S. Campanari und E. Macchi. „A rolling-horizon optimization algorithm for the long term operational scheduling of cogeneration systems“. In: Energy 184 (Okt. 2019), S. 73–90. issn: 03605442. doi: 10.1016/j.energy. 2017 . 12 . 022. url: https : / / linkinghub . elsevier . com / retrieve / pii / S0360544217320418 (besucht am 24. 09. 2025).137/1.9780898718751.-6 978-0-521-63396-3.
- W. B. Powell. Sequential Decision Analytics and Modeling.1st ed. Foundations and Trends® in Technology, Information and Operations Management Ser v.42. Norwell, MA: Now Publishers, 2022. 1 S. isbn: 978-1-63828-083-5.