

Thema 1

WOK, Regelziele im Pol-Nst-Diagramm

$$\text{Verzweigungspunkt} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_A - s_{pi}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s_A - s_{Ni}}$$

geometrische Orte der Pole von $G(s)$ in S-Ebene
für totzeitfreies \rightarrow geb. rationalem $G(s)$
(auch im Z-Bereich anwendbar)

Verstärkungsfaktor K mit Betragskriterium:

$$|K| = \frac{\pi |z - z_{pi}|}{\pi |z - z_{Ni}|}$$

$$\text{oder } |K| = \frac{\pi |s - s_{pi}|}{\pi |s - s_{Ni}|}$$

$$G_o(s) = K \frac{(s - s_{N1})(s - s_{N2}) \dots}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots} = K \cdot G'_o(s)$$

$K \neq$ Kreisverstärkung! K ist hier der statische Übertragungsfaktor $\lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)$

1. Betragsbedingung: $|K| \cdot |G'_o| = 1$

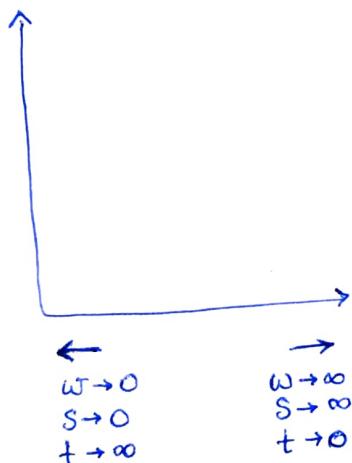
2. Winkelbedingung: $\varphi_o(s) = \begin{cases} \pi + q \cdot 2\pi & \text{für } K > 0 \\ 0 + q \cdot 2\pi & \text{für } K < 0 \end{cases} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
(unabh. von K)

$$\rho_o(s) = \sum_{i=1}^m \varphi_{Ni} - \sum_{i=1}^n \varphi_{pi} = \pi$$

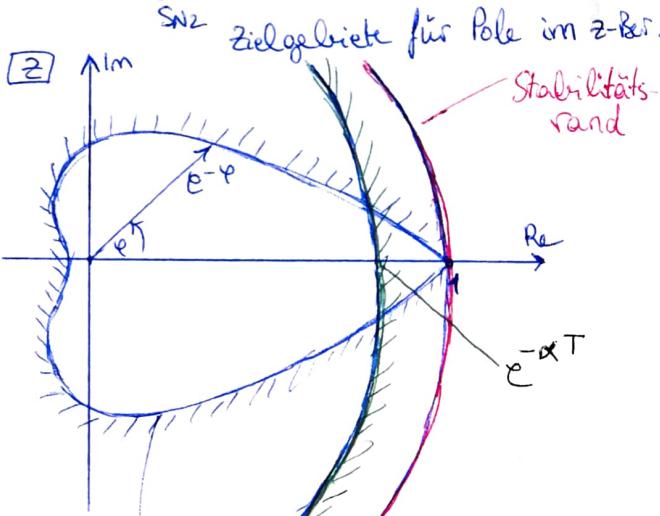
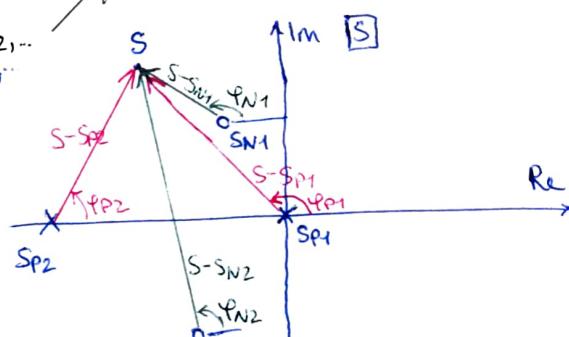
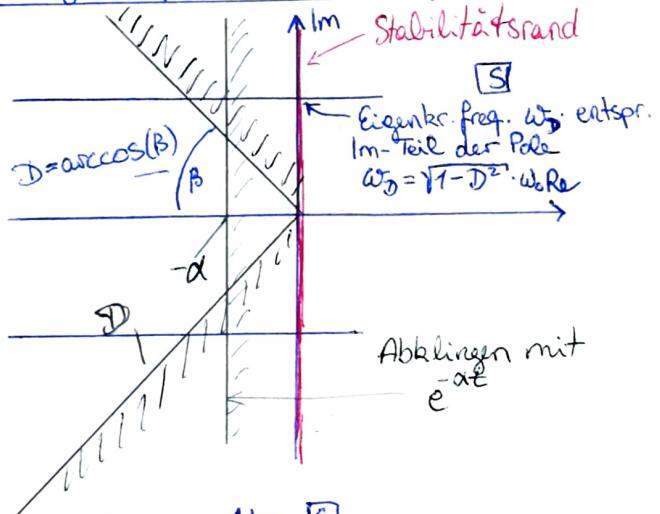
Jeder Punkt der S-Ebene für den die Winkel- & betragsbed. erfüllt ist, (\rightarrow WOK) ist Polstelle des geschl. RK $G(s)$ ($\hat{\cong}$ Lösung von $1 + G_o(s) = 0$)

Basis

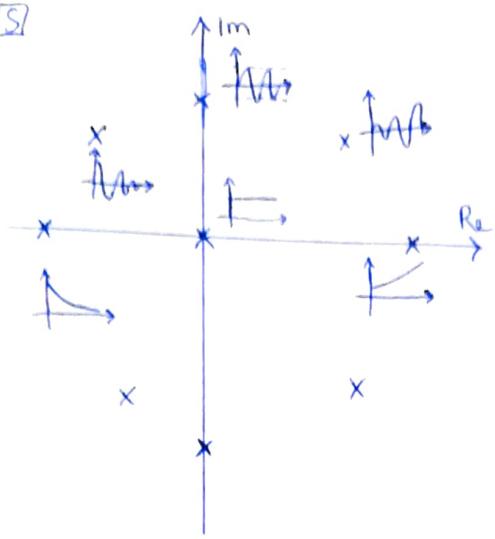
Grenzwerte im Bode-Diagramm:

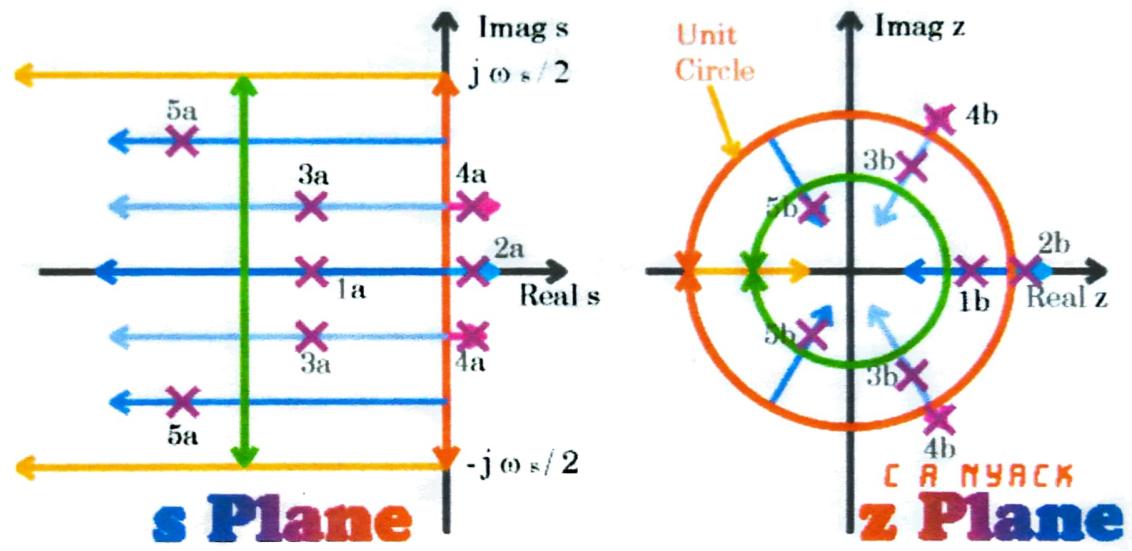


zieldreiekt für Polstellen d. geschl. Kreises



(S)





Thema 2

LQR, Beobachter, Zustandsschätzung

aus Zust. Raum in Übertragungsfunktion:

$$G(s) = C^T (sI - A)^{-1} b + d$$

hier auch A_K möglich

Regelentwurf im Zustandsraum:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Kx \end{aligned}$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

Polvorgabe:
 $\det(sI - (A - BK)) \stackrel{!}{=} (s - s_1) \dots (s - s_n)$
 L^oKoeffizientenvergleich führt zu K

optimale Zustandsregelung

Bewertung der Regelabweichung (Fläche) & des Stellauwandes:

Zustände müssen beobachtbar sein!

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt$$

gesucht: K mit $u_{\text{opt}} = -Kx$

$$\text{minimale Kosten für } \frac{\partial J}{\partial u} = 0 \Rightarrow J_{\text{opt}} = x_0^T P_{\text{opt}} x_0$$

$$\text{Riccati-Gleichung } 0 = -A^T P - P \cdot A + P \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot P - Q$$

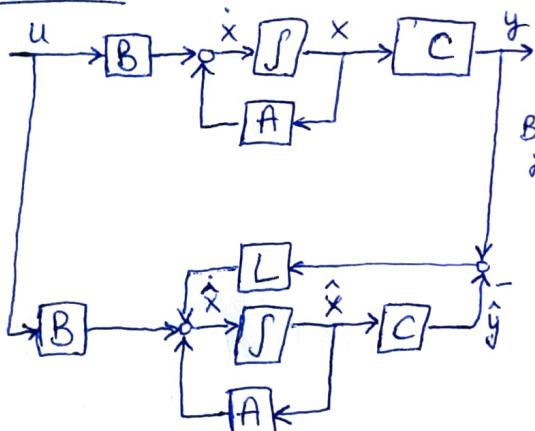
$$\Rightarrow \text{optimales Stellgesetz: } u_{\text{opt}} = -R^{-1} \cdot B^T \cdot P_{\text{opt}} \cdot x$$

$$P_{\text{opt}} = R^{-1} \cdot B^T \cdot P_{\text{opt}}$$

P_{opt} wird numerisch bestimmt

wenn K vorgegeben wird kann P aus der Riccati-Gl. berechnet werden

Beobachter



$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{x} &= A\hat{x} + Bu + LC(x - \hat{x}) \\ \text{Bedachterfehler} \hat{e} &= \dot{x} - \hat{x} = (A - LC)(x - \hat{x}) = \underbrace{(A - LC)}_F e \end{aligned}$$

Ziel: Beobachter deutlich schneller als Regelsystem \Rightarrow Beobachterpole min. 3x weiter links als Systempole

mit Polvorgabe: $\det(sI - F) \stackrel{!}{=} (s - s_1) \dots (s - s_n)$

L^oKoeffizientenvergleich \rightarrow siehe Rückseite Bedachternormalform

$$\begin{aligned} F &= A - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_2 \end{pmatrix} C^T \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} - l_1 a_{21} & a_{22} \\ a_{22} - l_2 a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

reduzierter Beobachter:

- die messbare Zust.größe durch y ersetzen, z.B. $y = x_1$
- Gleichung für andere Zust.größe in Abh. von x_2 & y aufstellen

$$\text{Bsp. } \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

jetzt: $y = x_1$

$$\dot{x}_2 = -4y + x_2 + u \Rightarrow \dot{x}_2 = \underbrace{1}_{\beta} x_2 + \underbrace{(1 - 4)}_{\gamma} \underbrace{y}_{\tilde{u}}$$

$$\text{aus 1. Gleichung: } \dot{y} = -5y + 2x_2 \Rightarrow \dot{y} + 5y = \underbrace{2}_{\alpha} \underbrace{x_2}_{\tilde{x}} \quad \Rightarrow \tilde{y} = (0.51) \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

→

Polevorgabe auch durch Ausgangsrückführung (eingeschränkt) möglich s. Lunze S. 266

emo

- Strecke muss auf jeden Fall vollständig steuerbar & beobachtbar sein (notw. aber nicht hinreichend)
- Äquivalenz von Zustands- & Ausgangsrückführung ist möglich, wenn hinreichend)

$$\text{Rang } (K) = \text{Rang } C \quad | \quad K: \text{Zustandsrückführung}$$

\Rightarrow dann gilt $KyC = R$

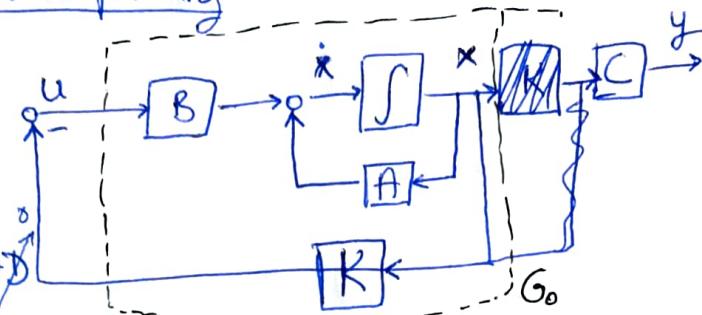
Ausgangsrückführung

Regelkreis mit Zustandsrückführung

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$= Ax + B(-K)x$$

$$G_o(s) = K(sI - A)^{-1}B + D$$



Sind Polstellen des geschlossenen Systems aus Polstellen von System und Beobachter zusammengesetzt?

Ja. Virtueller Zustand $e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = (A - LC)e ; \dot{x} = (A - BK)x + BS\omega + BKe$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BS \\ 0 \end{pmatrix} \omega \Rightarrow \text{EW: } (A - BK) \cdot (A - LC) \Rightarrow \text{Pole von } L \text{ & } K \text{ unabh. einstellbar}$$

$$A_K = A - \begin{pmatrix} * \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ k^T & \end{pmatrix}$$

$$A_L = A - \begin{pmatrix} * \\ l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ C^T & \end{pmatrix}$$

Beobachtungsnormalform:

$$\dot{x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} x_B + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u \Rightarrow A - LC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 - l_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 - l_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 - l_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - l_n \end{pmatrix}$$

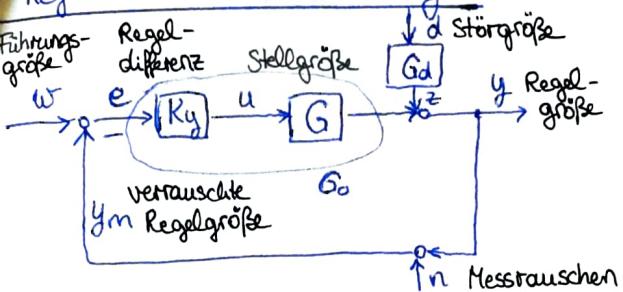
$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{dim}(n)} x_B$$

Interpretation (Q und R): Unter Annahme skalierter Größen x, u werden die [z.B. Zustandsabw.] gegenüber der [z.B. Stellenergie] stärker gewichtet, da die Einträge in der [Q] Matrix größer sind als [R].

Daneben wird, aufgrund des höheren Zahlenwertes in der Q-Matrix, der Zustand x_2 gegenüber Zustand x_1 stärker gewichtet. $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad R = 1$

Open Loop Shaping

- Optimieren des Verlaufs von G_o um Störgrößen möglichst nicht zu verstärken und Messrauschen zu unterdrücken
- Voraussetzung: vereinf. Nyquist anwendbar \hat{G}_o hat keine instabilen Pole

Regelkreis mit Vorsteuerung:

$$\begin{aligned} & \text{stationärer Fehler } |e| = |s| \cdot \omega \leftarrow \text{für Sprung } \omega=1 \\ & S = \frac{1}{1+G_o} = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{E(s)}{W(s)} \quad \text{Störgrößen-} \\ & \cdot T = \frac{G_o}{1+G_o} = \frac{Y(s)}{W(s)} = -\frac{Y(s)}{N(s)} \quad \text{Führungs-} \\ & \cdot \underbrace{y_w - y}_{e} = -S \cdot w + S \cdot z - T \cdot n \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Ziel}) \end{aligned}$$

Fundamentales Dilemma der Regelungstechnik:

$$T(s) + S(s) \not\equiv 1$$

- Verbesserung durch Zwei-Freiheitsgrad-Struktur
 - Einführung Vorsteuerung $K_w \rightarrow$ Führungsverhalten separat einstellbar

$$y = T \cdot K_w \cdot w + S \cdot z - T \cdot n$$

$$\text{Vorsteuerung: } T \cdot K_w = T_{ref} \Rightarrow T_{ref} = \frac{Y(s)}{W(s)} \xrightarrow{\text{ideal}} y = w \Rightarrow K_w = T^{-1}$$

1. kausal, wenn rel. Grad von T_{ref} nicht kleiner als rel. Grad von T ist

2. stabil, wenn alle NST mit pos. Realteil aus T auch in T_{ref} enthalten sind

Fehler schwanken

$$|S| = \frac{1}{|1+G_o(j\omega)|} \leq M \Rightarrow |G_o(j\omega)| \geq \frac{1}{M} + 1$$

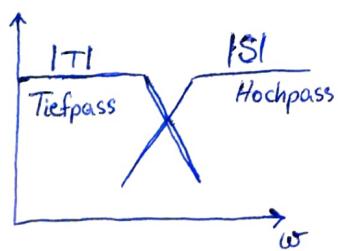
$$|T| = \frac{|G_o(j\omega)|}{|1+G_o(j\omega)|} \leq M \Rightarrow |G_o(j\omega)| \leq M \cdot (M+1)$$

Formulierungen

- Rauschen oberhalb ... rad/s darf nicht verstärkt werden
 $\hookrightarrow |T| \leq 1$
- Störungen sollen um 80% gedämpft werden
 $\hookrightarrow |S| \leq 1 - 0.8 = 0.02$

für verschwindenden stationären Regelfehler muss gelten: $|G_o(j0)| \rightarrow \infty \Rightarrow$ integrierendes Verhalten im offenen Regelkreis

für einen kausalen Regler muss gelten: Zählergrad \leq Nennergrad (G_o muss mindestens genauso stark abfallen wie die Strecke)

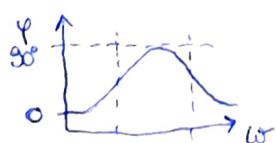
Arbeiten mit Lead/Lag-Elementen:

Schneide $|G_o| = 1$ im Wirkungsbereich des Lead-Elementes, gleiche weiter hinten mit Lag-Element aus, damit $|G_o|$ nicht zu hoch & Phase nicht zu stark verringert

Lead-Element

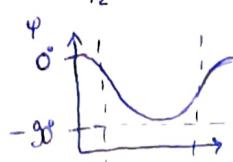
$$G(s) = K \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$$

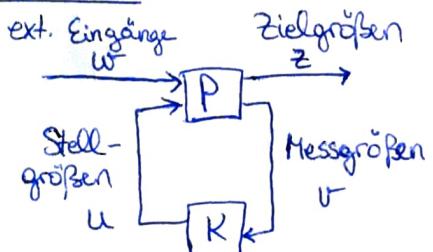
$T_1 > T_2$
→ phasenanhebend
→ ω_p nach rechts verschieben

Lag-Element

$$G(s) = K \cdot \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s}$$

$T_2 > T_1$
→ phasenanhebend
→ ω_p nach links verschieben



Generalized Plant

- Ordnung der G.P. = Ordnung Strecke + Ordnung Filter

$$\cdot w(t) = \begin{pmatrix} d(t) \\ r(t) \\ n(t) \end{pmatrix} \text{ oft}$$

→ Finde Regler: - der aufgrund von Messgrößen v ein Stellsignal u erzeugt
- Einfluss externer Einflüsse w auf Zielgrößen z minimiert

→ eine gleiche Größe kann sowohl in Messgrößen als auch Eingängen auftauchen

Im Frequenzbereich

$$\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad \text{Regler: } u(s) = K(s) \cdot v(s)$$

Übertragungsfunktion geschlossener Kreis:

$$\hookrightarrow F(s) = \frac{z(s)}{w(s)} = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} \cdot P_{21}$$

herleitbar durch Aufstellen von $z(s) \sim w(s)$
und $v(s) \sim u(s)$

Im Zustandsraum

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Regler: } u = C_r x_r + D_r v \\ \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u \end{array}$$

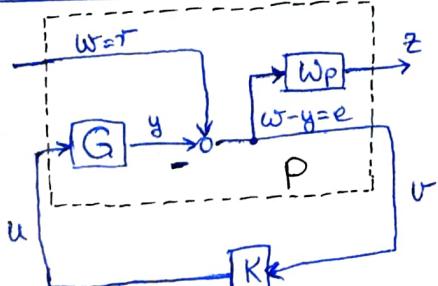
• Closed Loop Shaping: Anforderungen an Frequenzgänge des geschlossenen Regelkreises (S & T) direkt betrachtet → Regler K_y wird direkt numerisch gesucht, kein Umweg über Abschätzung G_0

• H_{∞} -Norm: $\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \rightarrow$ größte betragsmäßige Verstärkung über alle Frequenzen einschließlich Grenzwerte

• Bode-Sensitivitäts-Integral: $\int_0^{\infty} \lg |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \text{Re}(\rho_i) - \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot G_0(s)$

→ rel. Grad 2 + stabil/integrierend: Wasserbett-Effekt wegen Bode-Integral = 0

zust.raum-
darst. von W_p

CLS in Generalized PlantStreckenmodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= A_s x_s + B_s u \\ y &= C_s x_s + D_s u \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_w \\ z \\ v \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_s \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{Ausgang Filter} \\ \downarrow \end{array}$$

| | | |
|------------------|----------|-------------------|
| A | B_1 | B_2 |
| $A_s \ 0$ | 0 | B_s |
| $-B_w C_s \ A_w$ | B_w | $-B_w D_s$ |
| $-D_w C_s \ C_w$ | D_w | $-D_w D_s$ |
| $-C_s \ 0$ | 1 | $-D_s$ |
| D_{21} | D_{12} | $D_{11} \ D_{22}$ |

$$\begin{array}{l} \text{Eingang Filter} \\ \downarrow \end{array}$$

Ausgangsgewichtung

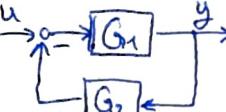
$$\dot{x}_w = A_w x_w + B_w (w - y)$$

$$z = C_w x_w + D_w (w - y)$$

MIMO - Systeme: Problem: zusätzliche Kopplungen, die Gesamtsystemstabilität gefährden

Rechenregeln für MIMO-Systeme:

• Reihenschaltung: $\rightarrow [G_1] \rightarrow [G_2] \rightarrow \Rightarrow G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s)$ wo das Signal als 1. wirkt steht ganz rechts

• Rückführung:  $\Rightarrow G(s) = \frac{G_1(s)}{I + G_1(s) \cdot G_2(s)} = \frac{G_1}{1 + G}$

• Skalierung: u, y, d so skalieren, dass alle in der gleichen Größenordnung/Einheit sind

$$\Rightarrow u = S_u^{-1} \hat{u} \quad d = S_d^{-1} \hat{d} \quad \text{unskalierte Größe}$$

$$y = S_y^{-1} \hat{y} \quad w = S_w^{-1} \hat{w} \quad \text{wegen: } e = S_y^{-1} \hat{e}$$

$$\Rightarrow G_s = S_y^{-1} \hat{G}_s \cdot S_u \quad ; \quad G_d = S_y^{-1} \hat{G}_d \cdot S_d \quad \text{normierte / skalierte Übertragungsfunktionen}$$

S_u : max. zul. Stellgröße

S_d : größte erwartete Störgröße

S_y : größter zul. Regelfehler oder Sollwertänderung

wenn Skalierungen aus Spannungen und Messwerten berechnet werden sollen:

welche Spannung gibt der Sensor bei seinem Max.wert aus? \rightarrow auf welchen Spannungswert soll das verstärkt werden? Ist (A, B, C, D) minimale Realisierung, so gilt,

• Polstellen: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ mit p Polstellen von $G(s)$

\hookrightarrow Zust.raum.darst. von $G(s)$ mit p Zuständen heißt minimale Realisierung

\hookrightarrow liegt minimale Realisierung vor, ist (A,B) steuerbar und (A,C) beobachtbar

\Rightarrow Polstellen berechnen über kleinen gemeinsamen Nenner aller Unterterminanten von $G(s)$

\hookrightarrow Bei quadratischer Matrix auch die $n \times n$ -Determinante berechnen

Dezentrale Regelung: \rightarrow Rückführung auf n separate SISO-Regler

\hookrightarrow Verhältnis direkte Wirkung zu Gesamtwirkung ist Relative Gain Array (RGA) Λ

$$\Lambda_{ij} = \left| \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{\substack{u_k \neq j \\ \text{const.}}} = [G(s)]_{ij} \cdot [G(s)^{-1}]_{ji} \Rightarrow \boxed{\Lambda(s) = G(s) \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & G(s)^{-1} \end{pmatrix}}$$

Elementweise
Multiplikation

• RGA ist unabh. von Skalierungen & symmetrisch

• außerdem Spalten- & Zeilensumme = 1

\rightarrow für 2×2 -Matrizen:

$$\Lambda_{11} = \frac{g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 1 - \Lambda_{11} \\ 1 - \Lambda_{11} & \Lambda_{11} \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow Kopple Stell- & Regelgrößen für die die RGA-Elemente ≈ 1 (für angest. Bandbreite)

\hookrightarrow vermeide Kopplungen bei denen im stat. Fall $\begin{pmatrix} \omega \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \\ z \rightarrow 1 \end{pmatrix}$ negative Elemente auftreten

\rightarrow Gesamtwirkung hat andere Wirkungsrichtung als direkte Wirkung \rightarrow außerdem siehe Rücksicht auf Vorzeichenwechsel!

Stabilität $G_o(s) = G(s) \cdot K(s)$, $T(s) = G_o(s) (I + G_o(s))^{-1}$

⇒ alle Polstellen von $T(s)$ müssen in der linken HE liegen

↪ überprüfen der Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix $F(j\omega)$

$F(j\omega) = I + G(j\omega) K(j\omega)$ ⇒ Diagonaleinträge jeweils größer als Summe der restlichen Einträge der Zeile/Spalte

K aufstellen: $K(j\omega) = \begin{pmatrix} y_1 \text{ auf } u_1 & y_2 \text{ auf } u_1 \\ y_1 \text{ auf } u_2 & y_2 \text{ auf } u_2 \end{pmatrix}$

$$\xleftarrow[u]{K} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

⇒ Übertragungsfkt. $R_i(s) \in \text{Ricst. } G_o(s)$

- RK aus m Eingrößenregelkreisen mit Regeln K_i und Regelstrecke $G(j\omega)$ ist stabil,
- wenn F diagonaldominant ist → Diagonalelemente von $G_o(j\omega)$
 - und die Übertr. fkt. $[R_i(j\omega) G_o(j\omega)]$ den Punkt -1 insgesamt p mal entgegen Uhrzeigersinn umschließen (mit p: # instabile Polstellen in G_o)

bei zeitdiskretem MIMO-System:

$G(z)$ in Abh. von z

↪ Stabilität über $\det(F) \neq 0$

↪ und bilineare Transformation → Hurwitz

Interpretation Ergebnisse RGA

Bsp. $\Lambda(s) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ → starke Abweichung von Einheitsmatrix, mit Nebendiag. vergleichsweise groß

→ starke Querkopplung zwischen Eingängen
→ neg. Elemente → ~~versetzen~~ dezentrale Regelung
problematisch

$\Lambda(s) = \frac{1}{s-2} \begin{pmatrix} 2(s+1) & -s+4 \\ -(s+4) & 2(s+1) \end{pmatrix}$ → Einträge stark frequenzabh. und wechseln Vorzeichen
→ Querkopplung für versch. Frequenzen unterschiedlich
→ da im ~~neg. Fall~~ stationären Fall neg. Einträge → diese Kopplung nicht wählen

- Bestimmung der Folge y_k bei gegebenem $G(z)$ $\xrightarrow{u_k} \boxed{G(z)} \xrightarrow{y_k}$
- Transformieren von $G(z)$ zu Differenzengleichung $a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots$
mit $u_k = y_k = 0$ für $k < 0$
- Verwendung der Transformationstabellen
- Sonderfall Übergangsfolge ($u_k = 1$ für $k \geq 0$)
Polynomdivision $(z^n + b_1 z^{n-1} + \dots) : (a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots) = (f_k)$ \leftarrow gibt erste Glieder der Übergangsfolge an
Ergebnis $F(z) = 3 + 5z^{-1} - 2z^{-2} + 6z^{-3}$
 $(f_k) = (3, 5, -2, 6)$

$$\cdot z = e^{j\omega T} = e^{sT}$$

- Transformation s - in z -Bereich

$$G(s) \rightarrow H(s) = \frac{1}{s} G(s) \rightarrow H(z) \rightarrow G(z) = \frac{z-1}{z} H(z)$$

Grenzwertsätze

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z) F(z)$$

$$f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

- Verzögerungsfaktor n Zeitschritte der Abtastzeit $T: \cdot z^{-nT}$

- Integrator (Einheitssprung): $\frac{z}{z-1}$

- Polstelle bei $z=1 \Rightarrow$ keine bleibende Regelabweichung: $G_0(z) = \frac{\text{Zähler}}{(z-1) \cdot \text{Nenner}}$

$$H(z) = \frac{z \cdot \text{Zähler}}{(z-1) \cdot \text{Nenner} + \text{Zähler}} \cdot \frac{1}{z-1} \Rightarrow f_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z \cdot \text{Zähler}}{(z-1) \cdot \text{Nenner} + \text{Zähler}} \cdot \frac{1}{(z-1)} = 1$$

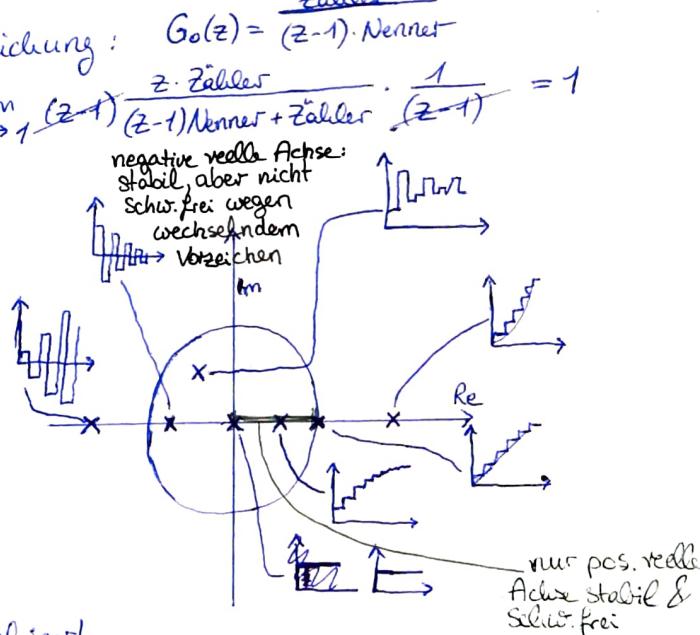
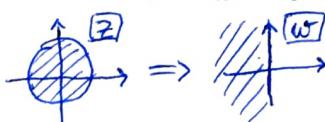
- Stabilität: $|z| \leq 1$

→ alle Polstellen müssen im Einheitskreis liegen

- bilineare Transformation $z = \frac{1+j\omega}{1-j\omega}$

→ stabil: Pole auf linker ω -Halbebene

→ Kriterien Routh/Hurwitz anwendbar

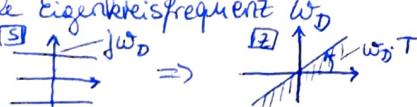


- Ablenkungsverhalten: $|z| < e^{-\alpha T} \rightarrow$ Einheitskreis verkleinert

→ Einstellzeit schneller je kleiner $|z|$

- Dämpfung $z = e^{-\beta \pm j\omega} = e^{-\beta} \cdot e^{\pm j\omega}$

- maximale Eigenkreisfrequenz ω_0



Zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \text{ umformen in Differenzierbare Potenzreihe: } Y(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) = U(s)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})$$

\Rightarrow in zeitdiskrete RNF: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $X_R = \begin{pmatrix} z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \end{pmatrix}$ $c = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1})^T$

Reglerentwurf durch Polvorgabe (zeitkontinuierlich & zeitdiskret):

$$A_K = (A - b k^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(AKB_K^T) \det(sI - A_K) = \prod_i^1 (s - p_i)$$

ermitteltes k^T in Übertragungsfunktion umwandeln: (bei Ausgangsrückführung)

$$\left. \begin{array}{l} u = -k^T x \\ y = Cx \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -k^T = \frac{u}{x} \\ \frac{x}{y} = C^{-1} \end{array} \right\} \frac{u}{y} = \frac{u}{x} \cdot \frac{x}{y} = -k^T \cdot C^{-1}$$

Partialbruchzerlegung:

1. jeder Nullstelle des Nenners wird Partialbruch zugeordnet

- reelle Nullstellen

$$r\text{-fache NST: } \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$$

- nicht-reelle NST

$$(x^2 + px + q)^r \quad \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + px + q)^r}$$

2. Brüche auf gleichen Nenner bringen

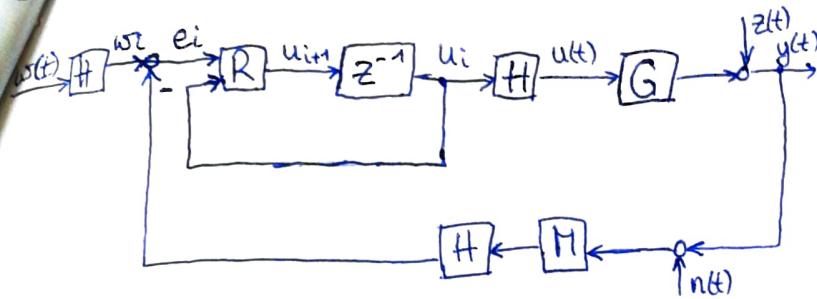
3. Brüche addieren

4. Zähler ausmultiplizieren

5. Zähler nach Potenzen von x zusammenfassen

6. Koeffizientenvergleich mit Original-Nenner

Zyklische Prozesse : Iterativ Lernende Regelung



R: Regler G: Strecke M: Messglied

H: Speicher i: Nummer eines Zyklus k: Index innerhalb eines Zyklus
PID-ILR (zeitkontinuierlich)

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) + T_p e_i(t) + T_D \int_0^t e_i(\tau) d\tau$$

↳ I-Anteil nicht nötig, da durch Durchgriff von u_i auf u_{i+1} eine Integration über die Zyklen stattfindet

PID-ILR (zeitdiskret)

$$u_{i+1}(k) = u_i(k) + T_p e_i(k) + T_D \underline{e_i(k+1)}$$

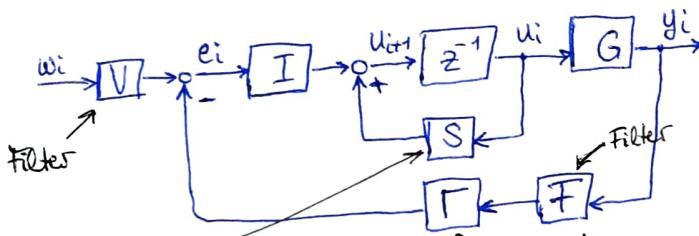
↳ statt Differentiation, Versch. um einen Abtastschritt
 ↳ akausal, aber Verläufe gespeichert, also dk

Lifted-System-Darstellung: Werte eines Zyklus im Speicher als Vektor

$$y = Gu \text{ mit } y = (y(0), y(1), \dots, y(N))^T$$

$$u = (u(0), u(1), \dots, u(N))^T$$

1 Zyklus mit $N+1$ Schritten



$$\Rightarrow u_{i+1} = S u_i + V w_i - \Gamma F y_i$$

Dreiecksstruktur von G aufgrund Kausalitätsprinzip

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_N & \cdots & \cdots & g_N \end{pmatrix} \quad g_k = \begin{cases} d & \text{für } k=0 \\ C^T A^{k-1} b & \text{für } k>0 \end{cases}$$

Vergessensfaktor S (Einf. auf Stabi & stat. Gen.)

$$S = \begin{pmatrix} I_{N+1} - \Gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γ : relatives Grad; Zeitindex τ
 ab dem u_i auf y_i wirkt
 $\hat{\equiv}$ Totzeit falls vorhanden

Analogie zur Übertragungsfkt.

$$y_i = G u_i$$

$$u_{i+1} = S u_i + V w_i - \Gamma F y_i$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} y(z) = G u(z) \Rightarrow u(z) = G^{-1} y(z) \rightarrow \text{in (2) einsetzen}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} z \cdot u(z) = S u(z) + V w(z) - \Gamma F y(z) \quad \hookrightarrow \text{nach Termen mit } y(z) \text{ und } w(z) \text{ sortieren}$$

$$\Rightarrow y(z) = G(zI - S + \Gamma FG)^{-1} V w(z)$$

char. Polynom

↳ falls keine Kompensation durch Nullstellen erfolgt, ergeben sich die Eigenwerte aus:

$$\det(zpI - S + \Gamma FG) = 0 \rightarrow \text{stabil, wenn } |z| < 1$$

↳ falls V oder G singulär können Nst. auftreten

Steuerbarkeit: $\text{Rang}(I \ S \ S^2 \ \dots \ S^N) = N+1$ immer erfüllt

Beobachtbarkeit: $\text{Rang}(G \ GS \ GS^2 \ \dots \ GS^N)^T = N+1$

Ordnung der ILR: wie viele zurückliegende Zyklen werden betrachtet (2 Zyklen \rightarrow 2. Ord. usw.)

Frage ob sich höhere Ord. lohnt: angegebene Pole einsetzen & gucken was sich für die σ s höherer Ordnung ergibt

$$u_{i+1}(k) = u_i(k) + \gamma_0 e_i(k+1) + \gamma_p e_i(k)$$

die Matrix des charakteristischen Polynoms ist immer eine untere Dreiecksmatrix
 $\Rightarrow \text{EW} = \text{Produkt der Diagonaleinträge}$

in parametrischer Form:

$$u_{i+1} = S u_i + \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_0 & \gamma_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \gamma_0 \\ 0 & & & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix} e_i$$

$\Rightarrow \mathcal{D}$ -ILR: nur γ_0 in der Matrix auf Nebendiagonale
 P -ILR: analog $\Rightarrow \gamma_p$ auf Hauptdiagonale

für ein System mit $r=1$ ($\rightarrow g_0=0$) ergibt sich für PD-ILR:

$$|zI - S + FG| = z(z-1+\gamma_0 g_1)^N$$

\Rightarrow ein Pol bei $z=0$

$$\Rightarrow N\text{-facher Pol für } z-1+\gamma_0 g_1=0 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{1-z_{pi}}{g_1}$$

\Rightarrow Stabilität hängt vom g_0 ab. 1. von Null verschiedenen Markov-Parameter g_k ab

~~ILR im Zeitbereich~~

für gerade nach
stabil, $z_{pi}=-1$

$$\gamma_0 = \frac{1-z_{pi}}{g_1}$$

Entwurf durch Entfaltung mit Polvorgabe \rightarrow Erweiterung der Lernmatrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \gamma_{N-1} & & & & \gamma_0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } u(k) = \sum_{j=-1}^k \gamma_j y^*(k-j); k=0,1,\dots,N \quad \left. \begin{array}{l} \text{ein-} \\ \text{setzen} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{mit Bedingung der Ent-} \\ \text{kopplung der Komponenten } y \\ \text{voneinander:} \end{array}$$

$$\rightarrow \gamma_i = -\frac{1}{g_1} \sum_{j=-1}^{i-1} \gamma_j g_{i+j-j}$$

Erweiterung auf beliebigen Grad r :

$$\gamma_{-r} = \frac{1-z_{pi}}{g_r}$$

$$\gamma_i = -\frac{1}{g_r} \sum_{j=-r}^{i-1} \gamma_j g_{i+r-j}$$

g_r : erster von Null verschiedenen Markov-Parameter

$$\Rightarrow \text{Lerngesetz: } u_{i+1}(k) = u_i(k) + \sum_{j=-r}^m \gamma_j e_i(k-j)$$

Normoptimale ILR

$u_{i+1} = u_i + \eta \Delta u_{i+1} \rightarrow$ Berechnung Stellgränderung Δu_{i+1} durch Lösen d. quadr. Optimierungsproblems

$[0,1] \rightarrow$ Konvergenzverhalten

$$\mathbb{H}_{i+1} = \|e_{i+1}\|_Q^2 = \|w - y_i - G \Delta u_{i+1}\|_Q^2$$

\rightarrow explizite Berücksichtigung von Beschränkungen als Nebenbedingungen

na 3

~~Nichtlineare Systeme~~ Nichtlineare Systeme → Superpositionsprinzip nicht mehr gültig, besitzt Ruhelagen $\dot{x} = 0$

Nichtlineare Systeme der Form:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

Allgemeine Darstellung:

$$y^{(n)} = g(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u_1, \dots, u_m)$$

lassen sich überführen in

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{pmatrix}$$

x

$y = x_1$

Stabilität einer Ruhelage (2 Möglichkeiten)

1. Linearisierung

2. Lyapunov

Linearisierung um Ruhelage:

$$\dot{x} = f(x_0, u_0) + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} (x - x_0)}_A + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} (u - u_0)}_B + O(h^2)$$

A, B sind Jacobimatrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) \stackrel{!}{=} 0$$

$\forall \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ asymptotisch stabil

$\exists \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow$ instabil

$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0 \Rightarrow$ keine Aussage (alles möglich)

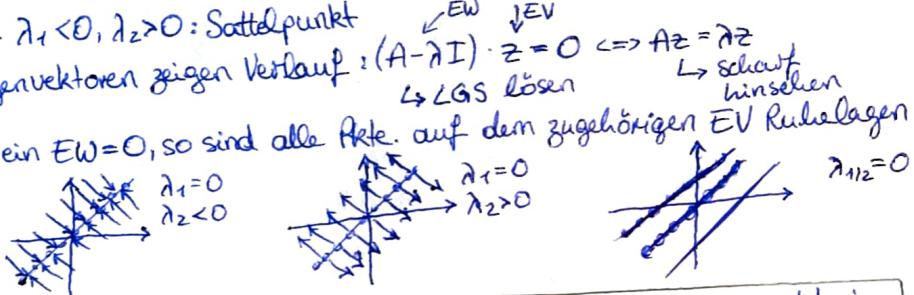
neue Eigenschaften:

- Superpositionsprinzip nicht mehr gültig
- mehrere isolierte Ruhelagen
- Existenz von Grenzyklen $\hat{=}$ periodische Lösung (\rightarrow Arbeitsbewegung)
- chaotisches Verhalten

Autonome Systeme: Systeme, die nicht explizit von der Zeit abhängen \rightarrow Trajektorien hängen nur vom Anfangszustand ab

Phasenporträt: $\dim \hat{=}$ Ordnung des Systems \Rightarrow Zustände gegeneinander auftragen

- Phasenlinien schneiden sich nicht
- Zeit ist nur Laufparameter für die Phasenlinien
- Steigung in einem Punkt (x_1, x_2) ist gegeben durch $x'_2 = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = m$
- Eigenwerte zeigen Stabilität an: $\det(\lambda I - A) = 0$
 - $\lambda < 0$: stabil \rightarrow Pfeile auf dem Eigenvektor zeigen zur Ruhelage
 - $\lambda > 0$: instabil \nrightarrow Pfeile auf EV zeigen von Ruhelage weg
 - $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$: Sattelpunkt
 - Eigenvektoren zeigen Verlauf: $(A - \lambda I) \cdot z = 0 \Leftrightarrow Az = \lambda z$
 - Ist ein EW = 0, so sind alle Pkt. auf dem zugehörigen EV Ruhelagen



- bei Ruhelagen und Grenzyklen immer mehrere Trajektorien einzeichnen, die anzeigen ob stabil oder instabil

Stabilität über Lyapunov

eine Ruhelage ist stabil, wenn eine Lyapunov-Funktion existiert, mit

1. $V(x) > V(x_0)$; $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$
2. $\dot{V}(x) < 0$; $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ → falls $\dot{V}(x) \leq 0$ nur stabil statt asymptotisch stabil
3. $V(x) \rightarrow \infty$ (radial unbeschränkt) \rightarrow global asymptotisch stabil

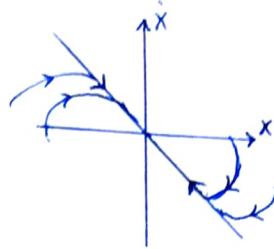
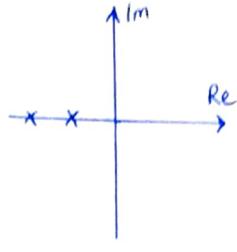
typischer Lyapunov-Kandidat:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

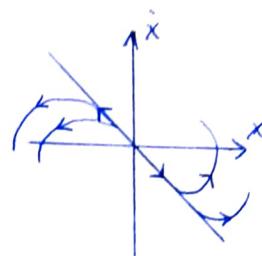
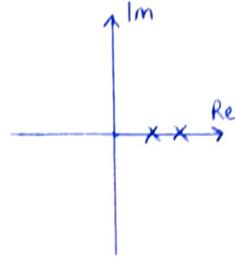
$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

Phasenporträts mit Eigenwerten ($\lambda = \text{EW}$)

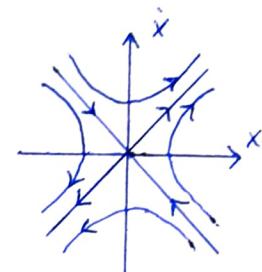
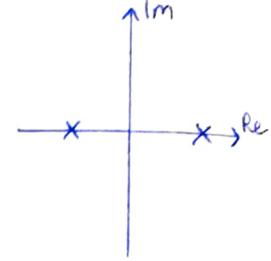
stabil: Knoten



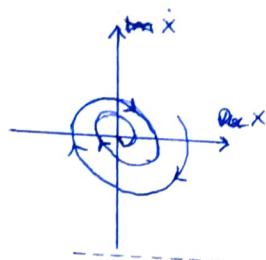
instabiler Knoten



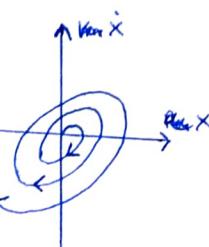
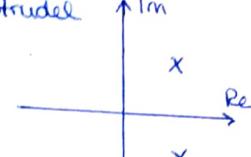
Sattelpunkt



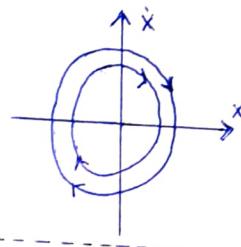
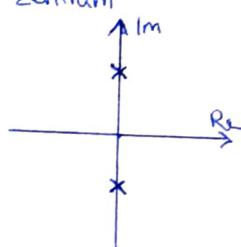
stabil: Strudel



instabiler Strudel



Zentrum



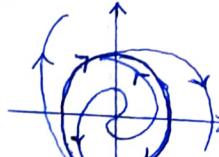
Grenzzyklen

stabil:



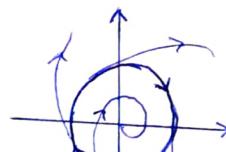
alle Trajektorien im Einzugsgebiet laufen auf Zyklus zu

semi-stabil:



von einer Seite in
Grenzzyklus, auf anderer
Seite aus Zyklus weg

instabil:

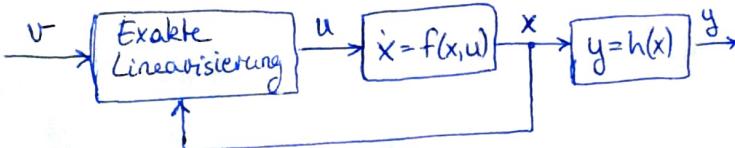


Grenzzyklus wird bei
kleinsten Änderungen verlassen

nein 10

Exakte Linearisierung

- ↳ Ausgangsgleichung y so oft ableiten bis Eingang u erscheint
- ↳ letzte Ableitung mit v gleichsetzen und nach $u(x, v)$ umformen



Verhalten von v auf y ist linear
→ Wahl von u erzwingt lineare Systemdynamik
Exakte Linearisierung ist keine Approximation

Reglerentwurf mit Exakter Linearisierung

1. Entwurf der Exakten Linearisierung
2. Entwurf eines linearen Reglers
 $v = -K \cdot z$ für ex. linearisiertes System
3. Rückrechnen auf Reglergesetz $u = -\tilde{R}x$
↳ v in $u(x, v)$ einsetzen; x in z einsetzen

Brunovski-Normalform

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A z + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B v \quad \text{mit } \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \end{pmatrix}^T$$

r : Ordnung d. Ableitung von y bei der u zuerst auftaucht; n : Systemordnung

Eingangs-Zustands-Linearisierung (EZL): $r=n$

- ↳ Keine interne Dynamik
- ↳ Reglerentwurf über Exakte Linearisierung möglich

Eingangs-Ausgangs-Linearisierung (EAL): $r < n$

- ↳ es gibt eine interne Dynamik mit $\dim(n-r) \rightarrow u$ taucht schon bei früherer Ableitung auf
- ↳ interne Dynamik muss berücksichtigt werden

↳ Byrnes-Isidori-Normalform: $\dot{z} = Az + Bu \rightarrow$ Brunovski-Normalform
 $\dot{\eta} = F(z, \eta, v) \rightarrow$ Interne Dynamik: restliche Dynamik also Gleichungen \dot{z} , die übrig sind
 $y = Cz \rightarrow$ Ausgangsgleichung

Stabilität

EZL → System stabil, wenn EZL stabil

EAL → System stabil, wenn EAL stabil & Nulldynamik $\dot{\eta} = f(0, \eta, v(0))$ (lokal) stabil

Flachheit \Leftrightarrow es existiert eine EZL, wenn:

1. $u = f(y, \dot{y}, \dots) \Rightarrow$ Steuerbarkeit
2. $x = g(y, \dot{y}, \dots) \Rightarrow$ es entstehen so viele Gleichungen wie Zustände → nur Pole
3. $y = h(x, u) \Rightarrow$ Ausgang hängt von x und u ab

Nulldynamik

Anzahl Zustände der Nulldynamik = 1; wenn einer Pf. Zustand instabil ist z.B. $\dot{\eta} = \eta^2$ dann ist die Nulldynamik insgesamt instabil

Exakte Linearisierung

DDrd Verhalten v auf y linear \rightarrow Wahl von u erzwingt lineare Systemdynamik
 \Rightarrow keine Approximation

Backstepping (Flachheit Voraussetzung)

- allgemeinere Reglerentwürfe bei Unsicherheiten / unbekannten Parametern
- so lange nicht betrachtete Zustände als fiktive Eingänge erfassen bis der echte Eingang u vorkommt

1. wähle $z_1 = y$ und $i=1$
- 2. Differentialgleichung für \dot{z}_i aufstellen
3. Größen, die nicht z sind, als fiktiven Eingang \tilde{u} auffassen
4. Reglerentwurf für \tilde{u} (mittels Lyapunov)
 - $V(z_i) = \frac{1}{2} \sum z_i^2$
 - $\dot{V}(z_i) = \sum z_i \dot{z}_i < 0$

it+ → wähle \tilde{u} so, dass $\dot{V}(z_i) < 0$; hierbei können Terme, die definitiv < 0 sind, können
 → negatives Vorzeichen
 → gerade Potenz

→ alle Terme mit ungeraden Potenzen müssen durch \tilde{u} kompensiert werden

→ es darf aber auch kein Zustand z komplett eliminiert werden → alle z_i müssen am Ende in u enthalten sein
5. Fehlerterm z_{i+1} im fiktiven Eingang \tilde{u} aufstellen und weiter bei $i \geq 2$) mit $i=i+1$
 - $\tilde{u} = \tilde{u}_{\text{wunsch}} + z_{i+1}$
 - umstellen nach $z_{i+1} \rightarrow \dot{z}_{i+1}$ aufstellen usw.

Am Ende alle Größen z_i wieder durch x_i ersetzen!

Sliding Mode Control → Zustandsvektor → Beobachtbarkeit Voraussetzung!

- ↪ Regelungsverfahren für nichtlineare Systeme
- ↪ kann explizit Modellunsicherheiten berücksichtigen → Robustheit

eingangsaffine Darstellung benötigt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{entspricht} \\ \text{RNF} \end{array} \right\}$$

→ flaches System

Beschreibung der Modellunsicherheiten:

$$f(x) = \bar{f}(x) + \Delta f(x) \quad \text{mit } |\Delta f(x)| \leq \alpha(x)$$

$$\Delta f = f(x) - \bar{f}(x) \quad \rightarrow \text{obere Schranke für Unsicherheiten}$$

allgemein
 $s = |s| \cdot \text{sgn}(s)$

$$\text{sgn}(s) = \frac{s}{|s|} = \frac{s}{\sqrt{s^2}}$$

Vorgehen zum Reglerentwurf:

1. Vorgabe einer linearen Fehlerdynamik

↪ \tilde{x} ist Folgefehler der Sollwerttrajektorie $x_d(t)$

$$\tilde{x} = x - x_d = (\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \dots \ \tilde{x}_n)^T \rightarrow \text{einregeln eines konstanten Zustand: } x_d = 0$$

↪ Dynamik des Folgefehlers wird mit stabiler linearer DGL der Ordnung $(n-1)$ vorgegeben:

$$S = \tilde{x}_n + \dots + k_2 \tilde{x}_2 + k_1 \tilde{x}_1$$

meist für Kette von PT_1 -Elementen:

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(n-1)} \cdot \tilde{x}_1$$

n : Systemordnung

2. Robuste Stabilisierung der Dynamik

aufhalb der Sliding Surface nichtlineare Dynamik → Lyapunov-Ansatz

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2$$

$$\dot{V} = S \cdot \dot{S}$$

$$= S(\tilde{x}_n + \dots + k_2 \tilde{x}_3 + k_1 \tilde{x}_2)$$

$$= S(f(x) + g(x)u - \dot{x}_{d,n} + k_{n-1} \tilde{x}_n + \dots + k_1 \tilde{x}_2) \stackrel{!}{<} 0$$

s einsetzen

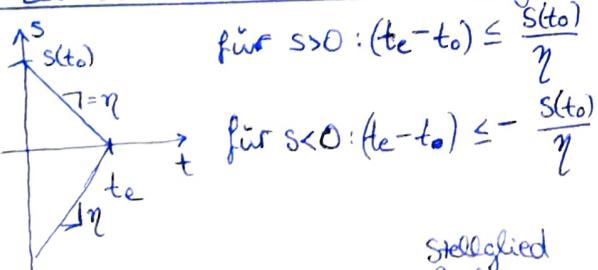
$$\text{Für } \dot{V} < 0 \text{ wähle } u = -\frac{1}{g(x)} \left(\bar{f}(x) + \eta \text{sgn}(s) - \dot{x}_{d,n} + k_{n-1} \tilde{x}_n + \dots + k_1 \tilde{x}_2 \right)$$

mit Abschätzung

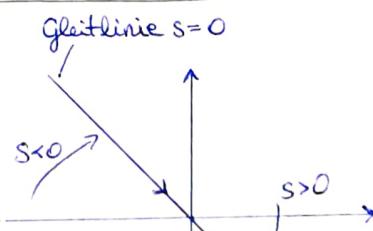
$|\Delta f(x)| \leq \alpha(x)$ lässt sich $s=0$ robust stabilisieren:

$$u = -\frac{1}{g(x)} \left(\bar{f}(x) + (\eta + \alpha(x)) \text{sgn}(s) - \dot{x}_{d,n} + k_{n-1} \tilde{x}_n + \dots + k_1 \tilde{x}_2 \right)$$

Zeit zum erreichen der Sliding Surface



Stellglied mit ideal schaltendem Regler ergibt sich ein Regler mit endlicher Einstellzeit



sobald Gleit- Hyperebene erreicht ist, verhält sich System immer gleich

Um Chatter zu vermeiden, wählt man statt $\text{sgn}(s)$ die sat-Funktion:
 mit sgn-Fkt. kein bleibender Regelfehler
 es ergibt sich dann ein ~~Rege~~ Regelfehler (mit sat-Fkt.):
 $|x_1| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1}} \Rightarrow \text{Regelfehler: } \frac{\Delta f \cdot \phi}{(\lambda^{n-1}) k}$

Ist die Fehlerdynamik ~~sie~~ schwingungsfähig?

z.B. $S = x_3 + 4x_2 + 5x_1$ S ist charakteristische Gleichung des Gleitzustades

mit $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow S = \ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 + 5x_1 \quad \rightarrow S(s) = \det(sI - A) = s^2 + 4s + 5$

Eigenwerte berechnen \Rightarrow Nullstellen vom charakteristischen Polynom

$$s^2 + 4s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i \Rightarrow \text{komplexe Eigenwerte also schwingungsfähig}$$

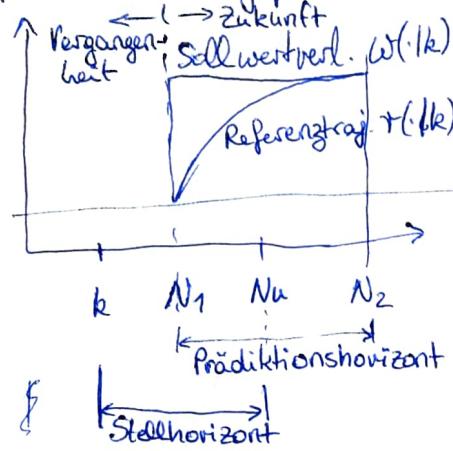
wenn Q/R angegeben:

- $Q = x R$ umformen \rightarrow muss R groß oder klein sein um gleiche Werte wie Q zu erreichen
- $Q/R = 10 \Rightarrow$ Zustandsabw. 10 mal teurer als Stellgrößenänderung \Rightarrow starke Stellgrößenänderung erlaubt
- Pole im z-Bereich
- großer Betrag \rightarrow langsame Einstellzeit

- gucken, ob angegebene P-N-Diagramme instabile Pole/NST enthalten & zuerst danach suchen

- Anzahl NST im Ursprung = ~~N₂~~ N₂

Optimalsteuerungsproblem wird über Zeildiskretisierung in Optimierung überführt



N₁: unterer Prädiktionshorizont \rightarrow Abfangen von Totzeit
 $N_1 \geq d$

N₂: oberer Prädiktionshorizont \rightarrow sollte wesentliche Systemdynamik erfassen

N_u: Stellhorizont \rightarrow Freiheitsgrade der Optimierung
 \hookrightarrow Erhöhung führt zu schnellerer Dynamik des RK;
meist $N_u \leq 3$ ausreichend

\hookrightarrow sinnvolle Wahl für N_u:

$N_u \leq N_2 - d + 1$

Zeitpunkt der Stellgrößenänderung:

$$k' = k - N_2 + d$$

↑
Stellgrößen-
änderungs-
zeitpkt.

↑
Sollwertänderungs-
zeitpkt.

- wenn zeitkontinuierlicher Verlauf gegeben, erst mal diskretisierten Verlauf einzeichnen
- auf Skalierungen in x oder u achten \rightarrow gelten in Q & R ein
 \hookrightarrow z.B. Faktor 10^{-2} in $(y - r)$: $\sum_{10^{-2}} (y - r)^T Q^* (y - r) + \sum_{10^{-2}} \Delta u^T R \Delta u \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{10^4}{1}$
- MPR kann nur eingeschränkt für instabile Systeme verwendet werden
- für ein sinnvolles N_2 zusammen mit $N_u = 1$ kommt praktisch wieder der offener RK heraus

Regelung mit schaltenden Elementen, Beschreibungsfunktion

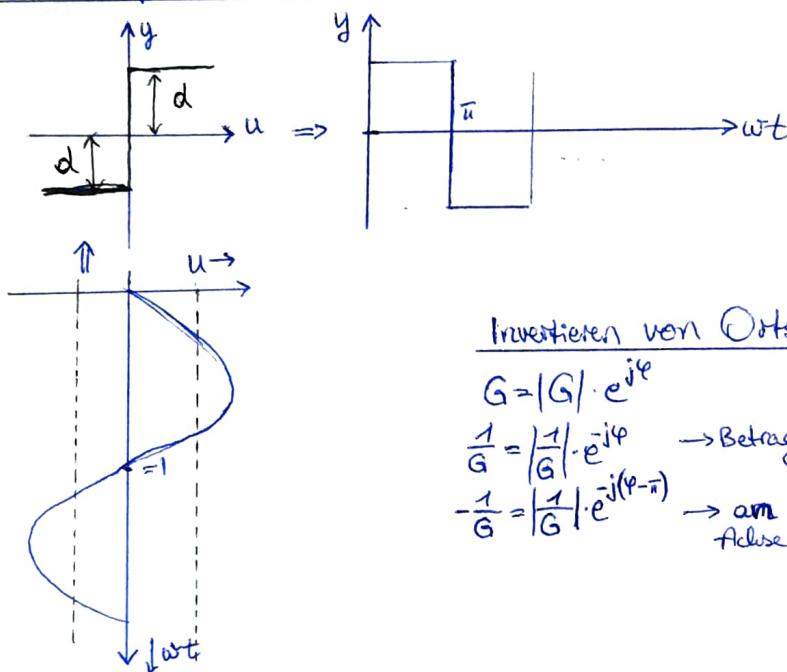
Voraussetzungen um nichtlineare Regler durch Beschrfkt. zu modellieren:

• Strecke linear, ausgeprägt verzögert

• Regler nichtlinear, speicherfrei, nullpunktssymmetrische Kennlinie

angennähert Fourier Reihe mit Vernachlässigung
durch Terme höherer Ordnung
wegen und weglassen
des ersten Terms
wegen

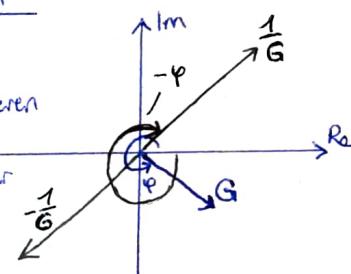
Beschreibungsfunktion $B = \frac{\text{Zeigt der Grundschwingung der Ausgangsgröße}}{\text{Zeigt der sinusförmigen Eingangsgröße}}$

Beispiel Zweipunktschalter

hier gilt: y ist allgemein Ausgangs-
signal
 u ist allgemein Eingangs-
signal

Invertieren von Ortskurven

$$\begin{aligned} G &= |G| \cdot e^{j\varphi} \\ \frac{1}{G} &= \frac{1}{|G|} \cdot e^{-j\varphi} \quad \rightarrow \text{Betrag invertieren} \\ -\frac{1}{G} &= \frac{1}{|G|} \cdot e^{-j(\varphi-\pi)} \quad \rightarrow \text{am imaginären Achse spiegeln} \end{aligned}$$



Wenn oben genannte Voraussetzungen gelten, ist zwei-Ortskurven-Verfahren anwendbar:

↳ abgeleitet vom Nyquist-Kriterium

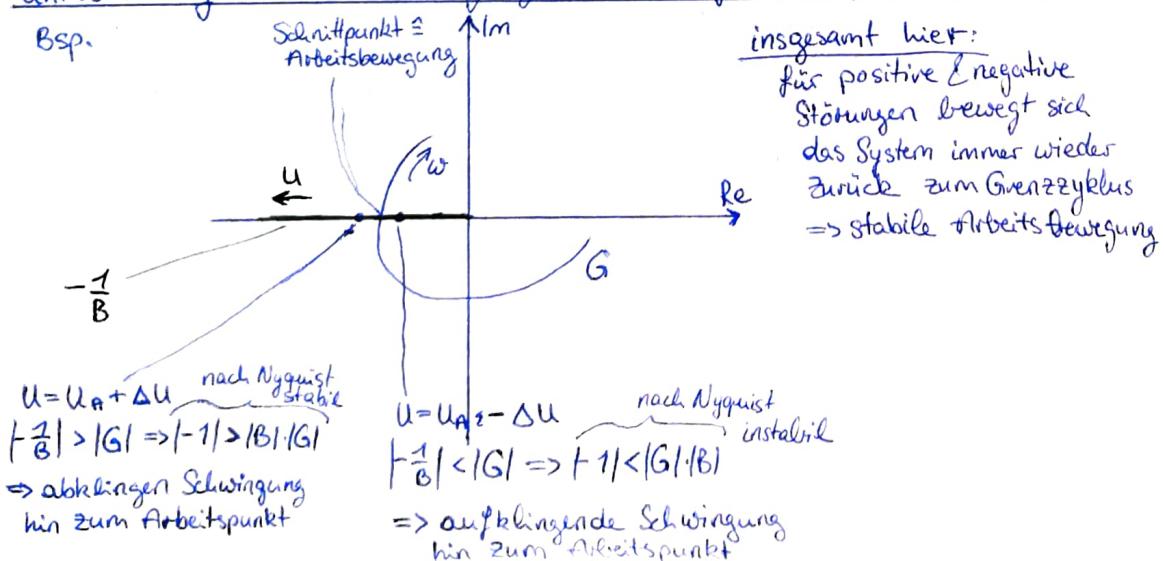
↳ ~~Kritik~~ $G(jw) \cdot B(u_A) = -1$ ist Bedingung für Stabilitätsrand

↳ Stabilitätsrand wird genau getroffen für Schnittpunkte von $-\frac{1}{B}$ und G oder ~~und B~~

↳ Schnittpunkte stellen Arbeitsbewegungen dar

Untersuchung von Arbeitsbewegungen (→ Grenzyklen) auf Stabilität

Bsp.

Sonderfälle:

Obwohl es einen
Schnittpunkt der beiden
Ortskurven gibt, kann
es keine Arbeitsbewegung
geben für:

$$- U = 0$$

$$- \omega = 0$$

Siehe Rückseite

Beschreibfunktionen kann man als Parallelschaltung
einfach addieren, wenn sie keine Phasenverschiebung bewirken.